فهرست

پیشگفتار

مفهوم زوجیت در اعتلای فرهنگ ریاضی دانش‌آموزان بسیار مهم است. این مفهوم ساده است و اغلب مشکل‌ساز نیست. مسئله‌های مربوط به زوجیت از بسیار ساده تا دشوار گسترده‌اند. به کمک این مسئله‌ها می‌توانید بر مبنای مطالبی ساده، ایده‌های ریاضی متنوعی را به دانش‌آموزان معرفی کنید. در ابتدا، بحث «زوجیت» مانند معرفی حالت عمومی‌تر بحث «بخش‌پذیری و باقی‌مانده‌ها» است که ارتباط نزدیک‌تری با برنامهٔ درسی مدرسه دارد. البته علی‌رغم سادگی تعدادی از مسئله‌ها، حل آن‌ها نیازمند نتیجه‌گیری‌های منطقی است، که این امکان را مهیا می‌کند تا فرهنگ ریاضی دانش‌آموزان را اعتلا دهید. از طرف دیگر، در مسئله‌های کمی جدی‌تر، ایده‌هایی وجود دارد که فاصلهٔ بیشتری با برنامهٔ اصلی مدرسه دارند، ولی سروکلهٔ آن‌ها در المپیادها پیدا می‌شود؛ ازجمله، ناوردایی، تناوب، رنگ‌آمیزی، استقرای ریاضی و مطالبی از این دست. اغلب از زوجیت به‌عنوان ابزاری حین حل مسئله‌های مربوط به فرایندها، بازی‌ها، گراف‌ها و غیره، استفاده می‌شود.

مطالب اصلی به چهار درس تقسیم شده‌اند. اطلاعاتی که برای معلم است با فونتی متفاوت و اندازه‌ای کوچک‌تر تایپ شده‌اند و در کنار آن‌ها خطی عمودی گذاشته شده است. می‌توان مسئله‌هایی را که با ستاره

متمایز شده‌اند تکلیف داد یا حذف کرد (البته اگر وقت کافی نباشد). در بخش «مسئله‌های بیشتر» مسئله‌هایی آمده است که می‌توان از آن‌ها به‌عنوان تکلیف، کار مستقل دانش‌آموزان، مدرسه‌های المپیاد و غیره، استفاده کرد.

برای فهم این مطالب و حل اکثر مسئله‌ها نیازی به دانشی فراتر از معلومات دورهٔ ابتدایی ندارید: عددهای طبیعی، عددهای اول، قاعدهٔ بخش‌پذیری بر ۲ و جبر مقدماتی.

نویسنده در کلاس‌های خود ترجیح می‌دهد بدون جزوه کار کند. البته، بنابر سفارش گروه ویراستاری، این مطالب را آورده‌ایم (پیوست را نگاه کنید). دو جور آن‌ها را آورده‌ایم. پیشنهاد می‌شود از مورد دوم استفاده کنید، جایی‌که در آن فقط مسئله‌هایی با صورت‌های طولانی گنجانده شده است.

البته همهٔ مسئله‌ها از نویسنده نیستند. بسیاری از آن‌ها مدت‌هاست که شناخته شده‌اند و تعدادی از آن‌ها نیز در سال‌های اخیر مطرح شده‌اند. طراح تعدادی از مسئله‌ها را اکثراً می‌شناسند، ولی چون راهی برای تعیین طراح همهٔ آن‌ها وجود ندارد، نام طراحان را ذکر نکرده‌ایم.

مسئلهٔ مقدماتی

احمد با پسرش و محمود با پسرش به ماهیگیری رفته‌اند. احمد و پسرش به تعداد یکسان و محمود و پسرش نیز به تعداد یکسان ماهی‌گرفته‌اند. آن‌ها روی هم ۲۷ ماهی گرفته‌اند. احمد چندتا ماهی گرفته است؟

> در ابتدا به نظر می‌رسد اطلاعات مسئله کم باشد: یک معادله و دو مجهول. پس از آن ممکن است به نظر برسد شرط‌های مسئله متناقض‌اند. در حقیقت، پدرها به تعداد پسرها ماهی صید کرده‌اند. پس تعداد کل ماهی‌ها باید زوج باشد، و این با فرد بودن ۲۷ تناقض دارد.

(روش استدلال ممکن است این‌طور باشد: احمد و پسرش روی هم زوج‌تا ماهی صید کرده‌اند. این مطلب در مورد محمود و پسرش هم درست است. پس مجموع این عددها زوج می‌شود. اگر دانش‌آموزان خودشان به این تناقضات نرسند، آن‌وقت باید کمی آن‌ها را به فعالیت وادارید.)

ولی این تناقض نیست! تصور کردن چهار نفره بودن سفر ماهیگیری، باعث تناقض می‌شود. ولی ممکن است این سفر سه نفره باشد (مثلاً، احمد پدر یا پسر محمود باشد). اکنون با این شرط می‌توان گفت همهٔ افراد به تعدادی مساوی ماهی صید کرده‌اند، یعنی ۹ قطعه.

توصیه می‌کنیم دانش‌آموزان را قبل از شروع درس اول با این روند آشنا کنید (ولی نه همراه با راه‌حل).

درس اول

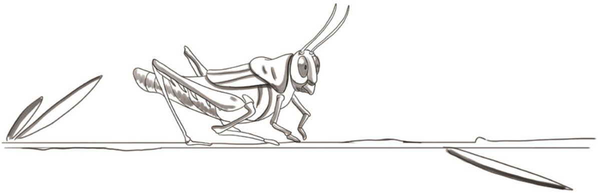
زوجیتِ جمع و ضرب

> خیلی خوب است که کار را با حل و بحث مسئله‌ای مقدماتی آغاز کنیم. می‌توانید ابتدا گفت‌وگو را با تعریف و ویژگی‌های زوجیت شروع کنید و حالت‌های زوجیت را یادآوری کنید.

قرارداد می‌کنیم تمام عددهایی که در مورد آن‌ها حرف می‌زنیم، صحیح‌اند، تا این مطلب را هر بار تکرار نکنیم.

در شروع از این نکته استفاده می‌کنیم که حاصل $n + n$ زوج می‌شود (پدرها و پسرهایشان به تعدادی یکسان ماهی گرفته‌اند، پس در مجموع روی هم تعدادی زوج ماهی صید کرده‌اند). در اینجا مسئله‌ای دیگر از همین نوع را می‌بینید.

مسئلهٔ ۱. ملخی روی خطی راست می‌جهد و سپس در امتداد همان خط به‌جای اولش باز می‌گردد. همهٔ جهش‌ها طولی یکسان دارند. ثابت کنید تعداد جهش‌هایش زوج است.



راه‌حل. تعداد جهش‌های راستش با تعداد جهش‌های چپش برابر است (چون به نقطهٔ اولش بازگشته است).

> در ادامه استدلال‌هایی دقیق می‌آوریم. این مطالب را فقط برای دانش‌آموزانی مطرح کنید که همیشه به دنبال اثبات هستند. اگر مطمئن هستید که دانش‌آموزان مطالب تدریس شده را به‌خوبی درک کرده‌اند، می‌توانید از بسیاری استدلال‌ها (البته با صلاحدید معلم) چشم‌پوشی کنید.

چگونه استدلال کنیم که حاصل $n+n$، که برابر $۲n$ است، زوج است؟ تعریف عدد زوج این است که بر ۲ بخش‌پذیر است. پس جملهٔ عمومی عددهای زوج به صورت $۲n$ است، که در اینجا n عددی صحیح است.

> ما از عددهای صحیح سخن می‌گوییم، نه فقط عددهای طبیعی (یعنی عددهای صحیح مثبت). به‌ویژه، فهم زوج بودن عدد ۰ نیز مهم است.

جملهٔ عمومی عددهای فرد چیست؟ $۲n+۱$. در عمل، اگر عدد ۱ را از عددی فرد کم کنید، عددی زوج به‌دست می‌آید، یعنی، عدد فرد برابر است با مجموع عدد زوج $۲n$ با یک.

> اغلب، عددهای فرد را به‌صورت $۲n-۱$ می‌نویسند.

از تعریف عدد زوج بی‌درنگ نتیجه می‌شود که حاصل‌ضرب عددی زوج در عددی (صحیح) دلخواه، زوج می‌شود.

> **اثبات.** $m\cdot ۲n=۲(mn)$. □

اثبات اینکه حاصل‌ضرب دو عدد فرد، عددی فرد می‌شود، کمی دشوارتر است.

> **اثبات.** $(۲m+۱)(۲n+۱)=۲(۲mn+m+n)+۱$. □

دو عدد زوجیت متفاوتی دارند، هرگاه یکی زوج و دیگری فرد باشد. وگرنه، این دو عدد زوجیت یکسانی دارند.

زوجیت مجموع را چگونه تعیین کنیم؟

- مجموع دو عدد با زوجیت متفاوت، فرد است.

- مجموع دو عدد با زوجیت مشابه، زوج است.

> **اثبات.** $۲m + ۲(n + ۱) = ۲(m + n) + ۱$؛ $۲m + ۲n = ۲(m + n)$، $(۲m + ۱) + (۲n + ۱) = ۲(m + n + ۱)$. □

مسئلهٔ ۲. عکس گزارهٔ قبلی را بیان و سپس آن را ثابت کنید.

راه‌حل. اگر مجموع دو عدد فرد باشد، آن‌وقت عددها باید زوجیت متفاوتی داشته باشند. همچنین، اگر مجموع دو عدد زوج باشد، زوجیت آن‌ها باید یکسان باشد. اثبات مشابه است.

مسئلهٔ ۳. اگر عددها صحیح باشند، ثابت کنید $mn(m + n)$ زوج است.

راه‌حل. اگر عددهای m و n زوجیت مشابهی داشته باشند، آن‌وقت مجموع آن‌ها، $m + n$، زوج می‌شود. اگر زوجیت آن‌ها متفاوت باشد، آن‌وقت حاصل‌ضرب آن‌ها، mn، زوج است. در هر حالتی حاصل‌ضرب عددهای mn و $m + n$ عددی زوج است.

مسئلهٔ ۴. در مورد زوجیت تفاضل دو عدد چه اظهار نظری می‌توان کرد؟

پاسخ. شبیه جمع است.

> در اینجا شرح اینکه اثباتی جداگانه برای این مطلب لازم نیست، مهم است: $m - n = m + (-n)$، یعنی، جمع و تفریق از یک جنس هستند. همچنین، دانش‌آموزان باید به این نکته دقت داشته باشند که تعویض علامت یک عدد، زوجیت آن را تغییر نمی‌دهد.

توجه کنید که زوجیت مجموع دو عدد با زوجیت تفریق دو عدد یکسان است.

وقتی مسئلهٔ مقدماتی را بررسی می‌کردیم، از مفهوم بخش‌پذیری بر ۲ استفاده کردیم:

- عددی زوج است اگر و فقط اگر رقم یکان آن زوج باشد.

با استفاده از آن می‌فهمیم ۲۷ فرد است.

> **اثبات.** هر عدد طبیعی مانند n را می‌توان به‌صورت $n = ۱۰a + b$ نوشت، که b رقم یکان آن است. عبارت اول، $۱۰a = ۲ \times ۵a$، زوج است. پس زوجیت مجموع $۱۰a + b$ به زوجیت b بستگی دارد. اثبات این مطلب برای عددهای منفی با عوض کردن علامت و تبدیل عددهای طبیعی انجام می‌شود. $\square$

مسئلهٔ ۵. مجموع سه عدد فرد شده است. چندتا از آن‌ها فرد بوده‌اند؟

پاسخ. یکی یا سه‌تا.

راه‌حل. با زدن چند مثال، نشان‌دادن اینکه این دو حالت ممکن هستند چندان هم دشوار نیست. دو حالت باقی‌مانده (دوتا زوج باشند یا هیچ‌کدام زوج نباشند)، راحت به تناقض می‌رسد.

> اکنون می‌توانیم به سراغ حالت‌های کلی‌تر برویم.

- زوجیت مجموع با زوجیت تعداد جمله‌های فرد مطابقت می‌کند.

> خوب است دانش‌آموزان به این نکته (البته نه با واژه‌هایی مشابه) پی‌ببرند. بهتر است اثبات آن تکلیف باشد (البته در صورتی‌که حتماً یکی از آن‌ها در کلاس بررسی و تحلیل شود) یا از آن رد شوید. در درس چهارم آن را بررسی می‌کنیم.

مسئلهٔ ۶. بدون محاسبهٔ مجموع ۱۹۹۹ + ... + ۲ + ۱ زوجیت آن را تعیین کنید.

راه‌حل. ۱۰۰۰ جملهٔ فرد در این مجموع وجود دارد، پس زوج است.

مسئلهٔ ۷. ۶۱۳ عدد صحیح روی تخته نوشته شده است. ثابت کنید می‌توان یک عدد را پاک کرد تا مجموع عددهای باقی‌مانده زوج باشد. آیا این مطلب برای ۶۱۲ عدد هم درست است؟

راه‌حل. اگر مجموع همهٔ عددهای نوشته شده زوج باشد، آن‌وقت تعداد عددهای فرد در میان آن‌ها زوج است. پس باید عددی زوج را پاک کرد. اگر مجموع همهٔ عددهای نوشته شده فرد باشد، آن‌وقت تعداد عددهای فرد در میان آن‌ها فرد است. یعنی، از ۰ بزرگ‌تر است (۰ عددی زوج است). می‌توانید عددی فرد را پاک کنید.

برای ۶۱۲ عدد، این مطلب لزوماً درست نیست. اگر همهٔ عددها فرد باشند، هیچ‌یک از آن‌ها را نمی‌توان پاک کرد.

مسئلهٔ ۸. عددهای ۱ تا ۱۹۹۸ در یک سطر نوشته شده‌اند. باید میان آن‌ها علامت‌های «+» و «−» گذاشت تا مقدار عبارت حاصل صفر شود. آیا این کار ممکن است؟

پاسخ. خیر.

راه‌حل. زوجیت هر عدد به علامت جلوی آن بستگی ندارد. پس ۹۹۹ جملهٔ فرد داریم که علامت جلوی آن‌ها مهم نیست. بنابراین در هر صورتی مجموع فرد می‌شود.

مسئلهٔ ۹*. آیا می‌توان عددهای ۱، ...، ۲۱ را طوری به چند گروه تقسیم کرد که در هر یک از آن‌ها بزرگ‌ترین عدد برابر با مجموع بقیه باشد؟

پاسخ. نمی‌توان.

راه‌حل. در این‌جور تقسیم، مجموع عددها در هر گروه زوج است. توجه کنید که مجموع همهٔ عددها فرد می‌شود.

> **تکلیف.** معلم می‌تواند برای ارزیابی تسلط دانش‌آموزان بر مطالب، یکی از دو گزینهٔ «ساده» یا «پیکارجو» (یا هر جور دسته‌بندی دلخواه) را برای تکالیف برگزیند. این عددها مربوط به بخش «مسئله‌های بیشتر» هستند.
>
> توصیه می‌شود راه‌حل‌های مسئله‌هایی را که برای تکلیف داده می‌شود بررسی کنید. البته نباید این کار را در ابتدای تدریس درس

جدید انجام دهید، چرا که زمانی برای مطرح کردن درس جدید باقی نمی‌ماند. مثلاً، هر دو جلسه یک‌بار می‌توانید زمانی کوتاه را فقط برای تجزیه‌وتحلیل تکالیف اختصاص دهید.

گزینهٔ ساده: ۱) الف-ب، ۲، ۳، ۱۰-۵.

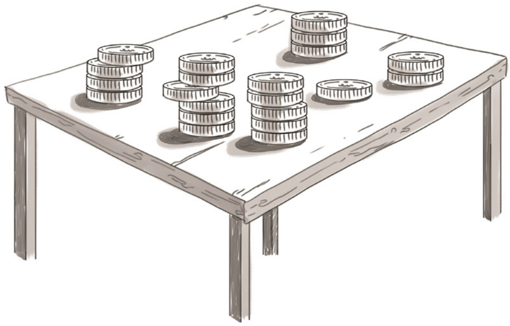
گزینهٔ پیکارجو: ۱) الف-ب، ۶-۴، ۱۶-۱۱.

درس دوم

جمع‌کردن با عددی زوج

> مسئله‌های بعدی ایدهٔ زیر را دنبال می‌کنند: اگر در هر مرحله‌ای از یک فرایند عددی زوج به مقداری (حتی منفی) اضافه شده باشد، زوجیت این مقدار تغییری نمی‌کند. شرح چگونگی استفاده از این ایده به معلم واگذار می‌شود.

مسئلهٔ ۱. سکه‌هایی در شش ستون روی میز چیده شده‌اند. ستون اول یک سکه، ستون دوم دو سکه، ستون سوم سه سکه، ... و ستون ششم شش سکه دارد. روی هر دو ستونی اجازه دارید یک سکه قرار دهید. آیا امکان دارد با تکرار این عمل ستون‌ها تراز شوند؟



پاسخ. خیر.

راه‌حل. تعداد کل سکه‌ها (۲۱) فرد است. دو سکه همزمان اضافه می‌شوند، پس تعداد سکه‌ها همیشه باید فرد باشد. در حالی‌که با وجود شش ستون مشابه، تعداد سکه‌ها باید زوج باشد.

مسئلهٔ ۲. اگر در مسئلهٔ قبل در ستون آخر به‌جای شش سکه هفت سکه بود، آیا پاسخ تغییر می‌کرد؟

پاسخ. بله، تغییر می‌کند.

راه‌حل. این بار می‌توان ستون‌ها را تراز کرد. مثلاً، یک سکه به ستون اول و یکی به ستون پنجم اضافه کنید، سپس به ستون‌های سوم و پنجم. در هر یک از ستون‌های اول و دوم دو سکه وجود دارد، در ستون‌های سوم و چهارم، چهارتا، و در ستون‌های پنجم و ششم، هفت‌تا. اکنون می‌توانید (با انجام ۸ عمل) سه سکه به هر یک از ستون‌های سوم و چهارم، و پنج سکه به ستون‌های اول و دوم اضافه کنید.

> **راه‌حل نادرست.** البته که تغییر می‌کند. تعداد کل سکه‌ها (۲۲) زوج است، و هیچ‌چیز مانع تراز شدن ستون‌ها نمی‌شود.

> اگر چنین راه‌حل‌هایی هنگام تدریس مطرح شد، لازم است بر نادرستی آن‌ها تأکید شود. در فرض‌های مسئلهٔ ۲، فرد بودن سکه‌ها مانعی برای تراز شدن آن‌ها بود. نبودن این مانع فقط باعث امیدواری می‌شود، اما بدان معنی نیست که می‌توانیم ستون‌ها را تراز کنیم، چون ممکن است موانع دیگری هم سر راه ما باشد که از آن‌ها آگاه نیستیم (نگاه کنید به مسئله‌های بعدی، ۵ و ۶). برای مطمئن شدن از اینکه می‌توان ستون‌ها را تراز کرد، ساده‌ترین راه نشان‌دادن چگونگی انجام این کار است.

مسئلهٔ ۳. عددهای ۱، ۲، ... و ۷۱۴ به ترتیب نوشته شده‌اند. مجاز هستید جای عددهایی را که بین آن‌ها یک عدد وجود دارد، عوض کنید (مثلاً، می‌توانید جای ۳ و ۵ را عوض کنید). آیا با استفاده از این جابه‌جایی‌ها می‌توان همهٔ عددها را به آرایش برعکس رساند؟

پاسخ. نمی‌توان.

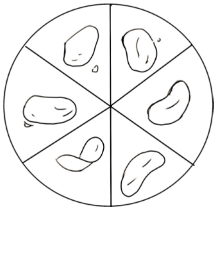
راه‌حل. عددهای زوج همیشه در مکان‌های زوج باقی می‌مانند و عددهای فرد در مکان‌های فرد. پس ممکن نیست عدد ۷۱۴ به مکان اول منتقل شود.

مسئلهٔ ۴. عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰۱ روی تخته‌سیاه نوشته شده‌اند. مجاز هستید دو عدد دلخواه را پاک کنید و به‌جای آن‌ها تفاضل‌شان را بنویسید. پس از انجام مکرر این کار فقط یک عدد روی تخته باقی می‌ماند. آیا ممکن است این عدد ۰ باشد؟

پاسخ. خیر.

راه‌حل. مجموع کل عددهای روی تخته را بررسی می‌کنیم. در ابتدا، فرد است (۵۱ عدد فرد). در کار ما به‌جای عددهای m و n عدد $m - n$ ظاهر می‌شود، یعنی، مجموع کل به مقدار عدد زوج ۲n تغییر می‌کند. یعنی، مجموع کل همیشه فرد می‌شود و نمی‌تواند به صفر تبدیل شود.

مسئلهٔ ۵. دایره‌ای را به شش قطاع تقسیم کرده‌ایم. در هر یک از آن‌ها یک چیپس قرار داده‌ایم. می‌توانیم همزمان دوتا از چیپس‌ها را انتخاب کنیم و هر یک از آن‌ها را یک قطاع در جهت‌های مخالف هم حرکت دهیم. آیا با تکرار این کار می‌توانیم همهٔ چیپس‌ها را در یک قطاع جمع کنیم؟



پاسخ. نمی‌توانیم.

راه‌حل. قطاع‌ها را با عددهای ۱ تا ۶ شماره‌گذاری می‌کنیم (اگر دانش‌آموزان این کار به فکرشان نرسید، می‌توانید به آن‌ها بگویید). شمارهٔ هر چیپس را شمارهٔ قطاعی که در آن قرار گرفته فرض می‌کنیم. پس هر وقت چیپسی را به قطاع مجاورش منتقل می‌کنید عددش تغییر می‌کند. همزمان، زوجیتش عوض می‌شود. البته هر دو چیپس هر جوری که تغییر جا دهند، زوجیت مجموع عددهای چیپس‌ها تغییری نمی‌کند. در ابتدا، مجموع (۲۱) فرد بود، پس همیشه فرد می‌ماند. ولی اگر همهٔ چیپس‌ها در یک قطاع جمع شده باشند، مجموع‌شان عددی زوج می‌شود (شش عدد یکسان داریم).

مسئلهٔ ۶. اگر در مسئلهٔ قبل به‌جای شش قطاع، دوازده قطاع داشته باشیم، آیا پاسخ تغییر می‌کند؟

پاسخ. خیر.

راه‌حل. به نظر می‌رسد ایدهٔ مسئلهٔ ۵ کارگشا نباشد: وقتی قطاع‌ها را با عددهای از ۱ تا ۱۲ شماره‌گذاری می‌کنیم، مجموع ابتدایی عدد چیپس‌ها زوج می‌شود. تغییر مجموع را با وسواس بیشتری بررسی می‌کنیم: در اکثر حالت‌ها، مجموع تغییری نمی‌کند (عدد یک چیپس یک واحد کاهش و عدد دیگری یک واحد افزایش می‌یابد، یا چیپس‌های قطاع‌های اول و دوازدهم تغییر جا داده‌اند). دو استثنا وجود دارد:

۱. یک چیپس از قطاع دوازدهم به قطاع اول برده شود (عدد آن ۱۱ واحد کاهش می‌یابد)، و عدد چیپس دیگر ۱ واحد کم می‌شود؛

۲. یک چیپس از قطاع اول به قطاع دوازدهم برده شود (عدد آن ۱۱ واحد افزایش می‌یابد)، و عدد چیپس دیگر ۱ واحد زیاد می‌شود.

در هر یک از این حالت‌ها، مجموع عدد چیپس‌ها ۱۲ واحد تغییر می‌کند، یعنی، عدد به‌دست آمده مضربی از ۴ است. ولی مجموع اصلی، $۶ \times ۱۳ = ۱۲ + ... + ۲ + ۱$، بر ۴ بخش‌پذیر نیست. پس هرگز نمی‌تواند مضربی از ۴ باشد. ولی اگر همهٔ چیپس‌ها در یک قطاع جمع شده بودند، مجموع آن‌ها (۱۲ عدد یکسان) بر ۴ بخش‌پذیر بود.

> در راه‌حل مسئلهٔ ۵ از اینکه چیپس‌ها در جهت مخالف هم حرکت می‌کنند استفاده نکردیم. در آنجا اهمیت چندانی نداشت (بهتر است تا قبل از حل و بحث مسئلهٔ ۶ به این شرط توجه نکنید). ولی در مسئلهٔ ۶ این موضوع اهمیت پیدا می‌کند. اگر این شرط را حذف کنید (مجاز باشید چیپس‌ها را در یک جهت حرکت دهید)، آن‌وقت چیپس‌ها را می‌توان در یک‌جا جمع کرد.

علامت حاصل‌ضرب

مسئلهٔ ۷. حاصل‌ضرب ۲۲ عدد صحیح برابر با ۱ است. ثابت کنید مجموع این عددها صفر نیست.

راه‌حل. روشن است که این عددها برابر با ۱+ یا ۱− هستند. فقط وقتی مجموع ممکن است صفر شود که تعداد یک‌ها و تعداد منفی یک‌ها برابر با ۱۱ باشد. در این‌صورت حاصل‌ضرب آن‌ها ۱− می‌شود.

> آوردن این مسئله به این دلیل بود که فرصتی برای طرح این نکته پیدا کنیم که

- علامت حاصل‌ضرب رفتاری مشابه زوجیت هنگام جمع‌کردن دارد: حاصل‌ضرب دو عدد هم‌علامت، مثبت و حاصل‌ضرب دو عدد غیرهم‌علامت، منفی است.

> ولی نکتهٔ مربوط به زوجیت مجموع چند جمله در اینجا چگونه باید باشد؟ توصیه می‌شود رابطهٔ زیر را به دانش‌آموزان گوشزد کنید: