پرسش‌های چهارگزینه‌ای
دهم

ریاضی و آمار ۱

■ خسرو محمدزاده ■ محمدرضا امیری

برای مشاهده محتوای تکمیلی این کتاب QR-Code را اسکن کنید

مهروماه
هومان
مرکز تخصصی علوم انسانی

فهرست

	درسنامه	پرسش	پاسخ
فصل اول: معادله درجه دوم			
درس اول معادله و مسائل توصیفی	۶	۱۲	۱۴۲
درس دوم حل معادلهٔ درجه ۲ و کاربردها	۱۶	۲۸	۱۴۷
درس سوم معادله‌های شامل عبارت‌های گویا	۳۷	۴۲	۱۶۰
فصل دوم: تابع			
درس اول مفهوم تابع	۴۶	۵۳	۱۶۵
درس دوم ضابطهٔ جبری تابع	۵۸	۶۱	۱۷۰
درس سوم نمودار تابع خطی	۶۵	۷۰	۱۷۴
درس چهارم نمودار تابع درجهٔ ۲	۷۴	۸۱	۱۷۹
فصل سوم: کار با داده‌های آماری			
درس اول گردآوری داده‌ها	۹۰	۹۶	۱۸۸
درس دوم معیارهای گرایش به مرکز	۱۰۰	۱۰۵	۱۹۱
درس سوم معیارهای پراکندگی	۱۰۷	۱۱۳	۱۹۳
فصل چهارم: نمایش داده‌ها			
درس اول نمودارهای یک متغیره	۱۱۸	۱۲۴	۱۹۸
درس دوم نمودارهای چند متغیره	۱۲۸	۱۳۱	۲۰۱

آزمون‌ها	آزمون	پاسخ
آزمون ۱ نیمسال اول	۱۳۶	۲۰۴
آزمون پایان سال (شمارهٔ ۱)	۱۳۷	۲۰۶
آزمون پایان سال (شمارهٔ ۲)	۱۳۹	۲۰۷

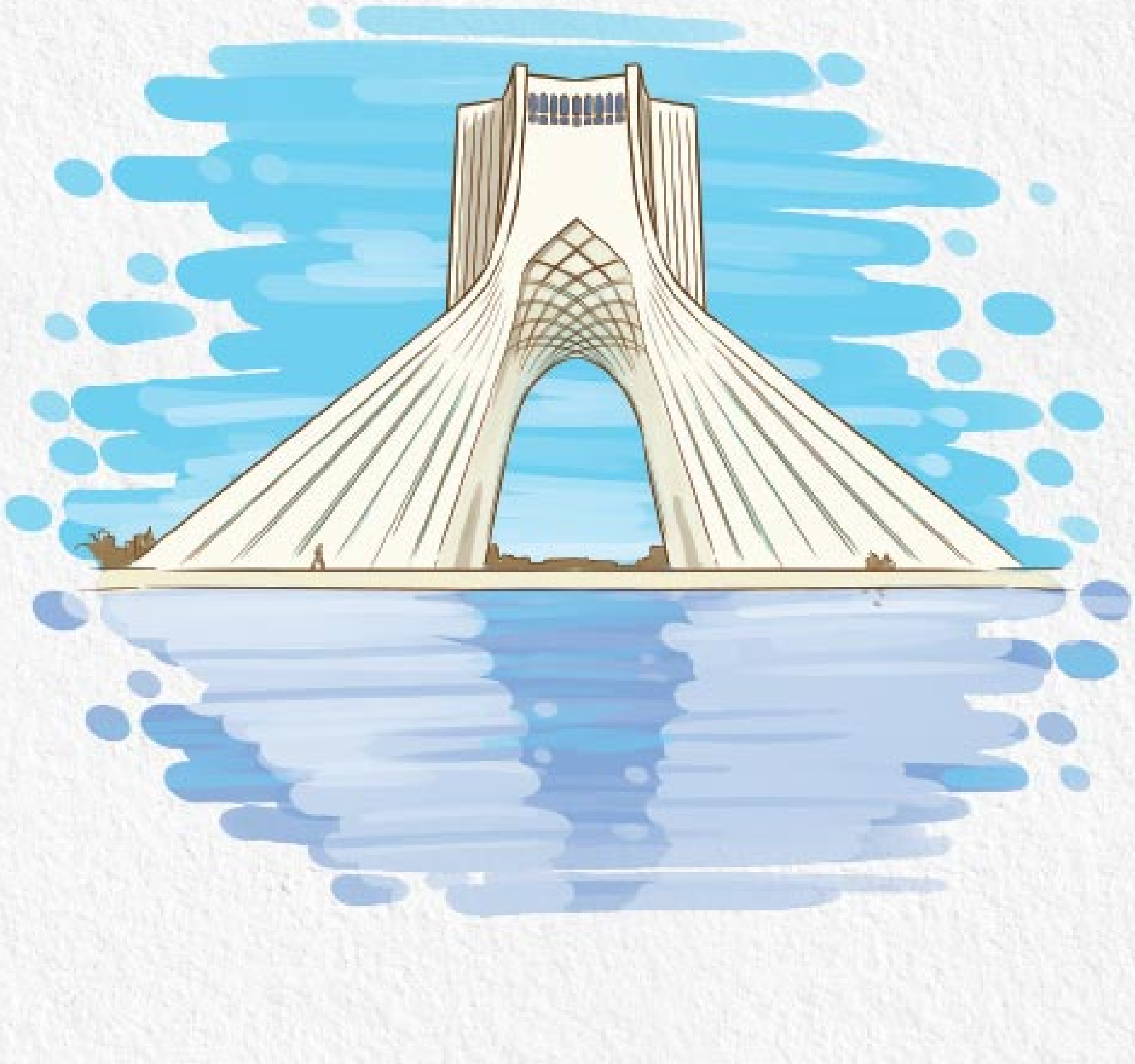
پاسخ‌نامه
- پاسخ‌نامه تشریحی ۱۴۲
- پاسخ‌نامه کلیدی ۲۱۰
- فلش کارت ۲۱۳

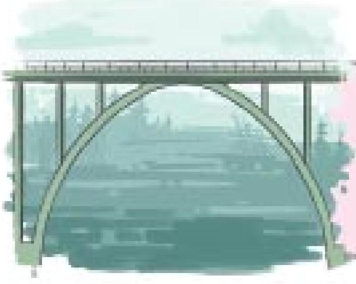
فصل اول

معادلهٔ درجه دوم

به سـرآغاز فصل‌های ریاضی انسـانی خوش اومدین! فصلی که پایه و اساس بسیاری از مباحث دیگه است! فصلی که هم می‌تونه تبدیل بشه به پاشنه آشیل و هم می‌تونه نیروی محرّکهٔ بسیار خوبی در ادامهٔ راه باشه، پس توصیه می‌کنیم تا به این فصل از کتاب مسلّط نشدید سراغ هیچ فصل دیگه‌ای نرید و برای تسلط به این فصل تا جایی که می‌تونید تست حل کنید!

البته بعد از خوندن درسنامه و حل تمرین‌ها و تست‌هاش!





درس ۲ حل معادلهٔ درجه دوم و کاربردها

شناخت معادلهٔ درجه دوم

هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0$ یک معادلهٔ درجه دوم نامیده می‌شود.

۱ a ضریب جملهٔ درجه دوم (x^2) و همواره مخالف صفر است $(a\neq 0)$. b ضریب جملهٔ درجه اول (x) و c عدد ثابت است.

۲ به عبارت b^2-4ac دلتا یا مبیّن معادلهٔ درجه دوم می‌گوییم و آن را با علامت Δ نشان می‌دهیم: $\Delta=b^2-4ac$

۱-۲) تعداد ریشه‌ها (جواب‌های) معادلهٔ درجه دوم به علامت Δ بستگی دارد، پس خواهیم داشت:

۱) $\Delta>0 \rightarrow$ معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

۲) $\Delta=0 \rightarrow$ معادله دو ریشهٔ حقیقی برابر (ریشهٔ مضاعف) دارد.

۳) $\Delta<0 \rightarrow$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

روش‌های حل معادلهٔ درجه دوم

حل معادلهٔ درجه دوم به کمک حدس زدن ریشه‌ها

در فعالیت کتاب درسی روشی تحت عنوان روش حدس زدن برای حل معادلهٔ درجه دوم معرفی شده است؛ روش حدس زدن در واقع شبیه‌سازی مسئله به زبان ریاضی با استفاده از پارامترهایی مانند x به‌جای اعداد و به‌دست آوردن خواستهٔ مسئله (پیدا کردن x) است.

مثال: عددی را بیابید که مربع آن ۲ برابر خود آن عدد باشد. (مشابه فعالیت کتاب درسی)

پاسخ عدد موردنظر را x در نظر بگیرید. در این صورت مربع عدد برابر x^2 و ۲ برابر عدد $2x$ است که باید این دو را با هم مساوی قرار دهیم پس خواهیم داشت: $x^2=2x$

حالا می‌توانیم جواب‌های این معادله (یعنی عدد یا اعدادی که در رابطهٔ فوق صدق می‌کنند) را حدس بزنیم:

$x=2:(2)^2=2(2)\rightarrow 4=4$ ✓ $\qquad$ $x=1:(1)^2=2(1)\rightarrow 1=2$ ✗ $\qquad$ $x=0:(0)^2=2(0)\rightarrow 0=0$ ✓

پس جواب‌های معادله عبارت‌اند از: $x=2\,,\,x=0$

تذکر: حدس زدن ریشه‌ها همواره امکان‌پذیر نیست، پس در ادامه روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم را خواهیم گفت.

حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه

در این روش سعی بر آن است تا همهٔ عبارت‌های شامل x و اعداد تبدیل به حاصل‌ضرب عبارت‌هایی شوند که برابر صفر است.

به عنوان مثال معادلهٔ بالا را با روش تجزیه نیز می‌توان حل کرد:

$$x^2=2x \xrightarrow[\text{و علامت آن را از + به − تغییر می‌دهیم}]{\text{2x را به سمت چپ معادله می‌بریم}} x^2-2x=0 \xrightarrow{\text{از x فاکتور می‌گیریم}} x(x-2)=0$$

حاصل‌ضرب دو عبارت در یکدیگر برابر صفر است، پس حتماً باید یکی از آن‌ها صفر باشد، یعنی یا $x=0$ و یا $x-2=0$ لذا داریم:

$$x(x-2)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ \text{علامت پس از جابه‌جایی از + به − تغییر کرد}\\ x-2=0\rightarrow x=+2\end{cases}$$

پس جواب‌های معادله عبارت‌اند از: $x=0\,,\,x=2$

فلش‌بک: ۱ **خاصیت فاکتور صفر**

اگر $a\times b=0$ باشد نتیجه می‌گیریم: $a=0$ یا $b=0$

۲ **اتحادهای پرکاربرد**

الف اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای

۱) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(\text{اولی}+\text{دومی})^2=(\text{اولی})^2+(\text{۲ برابر اولی در دومی})+(\text{دومی})^2$

ب) اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای

۲) $(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$

(اولی + دومی)^۲ = (اولی)^۲ − (۲ برابر اولی در دومی) + (دومی)^۲

ج) اتحاد مزدوج

۳) $(a-b)(a+b) = a^۲ - b^۲$

(اولی − دومی)(اولی + دومی) = (اولی)^۲ − (دومی)^۲

د) اتحاد جمله‌مشترک

۴) $(x+a)(x+b) = x^۲ + (a+b)x + ab$

باشگاه مهارت: معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^۵ - ۱۵x^۳ = ۰$　　ب) $x^۲ + ۱۴x + ۴۹ = ۰$　　ج) $x^۲ - ۶x + ۹ = ۰$　　د) $x^۲(x-۲) = ۹(x-۲)$

پاسخ

الف) $x^۵ - ۱۵x^۳ = ۰ \xrightarrow{\text{از } x^۳ \text{ فاکتور می‌گیریم}} x^۳(x^۲ - ۱۵) = ۰$

$$\text{خاصیت فاکتور صفر} \Rightarrow \begin{cases} x^۳ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم می‌گیریم}} x = ۰ \\ x^۲ - ۱۵ = ۰ \to x^۲ = ۱۵ \xrightarrow{\text{ریشهٔ دوم می‌گیریم}} x = \pm\sqrt{۱۵} \end{cases}$$

ب) $x^۲ + ۱۴x + ۴۹ = ۰ \xrightarrow[\text{مربع دوجمله‌ای}]{\text{تجزیه به کمک اتحاد}} (x+۷)^۲ = ۰ \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از دو طرف تساوی ریشهٔ دوم}} x + ۷ = ۰ \to x = -۷$

ج) $x^۲ - ۶x + ۹ = ۰ \xrightarrow[\text{مربع تفاضل دوجمله‌ای}]{\text{تجزیه به کمک اتحاد}} (x-۳)^۲ = ۰ \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از دوطرف تساوی ریشهٔ دوم}} x - ۳ = ۰ \to x = ۳$

د) $x^۲(x-۲) = ۹(x-۲) \xrightarrow[\text{به سمت چپ می‌بریم}]{\text{عبارت سمت راست را}} x^۲(x-۲) - ۹(x-۲) = ۰$

$$\xrightarrow{\text{از } (x-۲) \text{ فاکتور می‌گیریم}} (x-۲)\underbrace{(x^۲-۹)}_{\text{تجزیه با اتحاد مزدوج}} = ۰ \to (x-۲)(x+۳)(x-۳) = ۰$$

هر سه جواب به‌دست آمده برای معادله قابل قبول است و از آنجایی که معادلهٔ درجه دوم حداکثر دو ریشه داره، پس حواستون باشه که این معادله درجه دوم نیست.

$$\begin{cases} x - ۲ = ۰ \to x = ۲ \\ x + ۳ = ۰ \to x = -۳ \\ x - ۳ = ۰ \to x = ۳ \end{cases}$$

ویتامینه: زمان برای ما خیلی مهمه، پس همیشه هم لازم نیست حتماً از فاکتورگیری استفاده کنید و یه عبارت‌هایی همون ابتدا حذف می‌شن مثل قسمت (د) که می‌شه از همون اول $x-۲$ رو از دو طرف تساوی خط زد فقط حواستون خیلی جمع باشه که $x=۲$ رو جزء ریشه‌ها حساب کنید:

$$x^۲(\underbrace{\cancel{x-۲}}_{\text{ریشه } x=۲}) = ۹(\cancel{x-۲}) \to x^۲ = ۹ \to x = \pm ۳$$

ریشه‌های معادله عبارت‌اند از: $x = -۳ , x = ۳ , x = ۲$

تست: اختلاف جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - x - ۶ = ۰$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) -۲　　۳) ۳　　۴) -۵

پاسخ عبارت را با استفاده از اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$x^۲ - x - ۶ = ۰ \to (x+۲)(x-۳) = ۰$$

ضرب دو پرانتز برابر صفر شده است، پس:

$$\text{خاصیت فاکتور صفر} \to \begin{cases} x + ۲ = ۰ \to x_۱ = -۲ \\ x - ۳ = ۰ \to x_۲ = ۳ \end{cases}$$

اختلاف ریشه‌ها می‌تواند یکی از دو عدد زیر باشد.

$$x_۱ - x_۲ = -۲ - ۳ = -۵ \quad \text{یا} \quad x_۲ - x_۱ = ۳ - (-۲) = ۳ + ۲ = ۵$$

که در بین گزینه‌ها فقط عدد -۵ مشاهده می‌شود. در نتیجه گزینهٔ «۴» صحیح است.

توجه: اگه ضریب $x^۲$ یک نبود بهتر است تمام جملات را به ضریب $x^۲$ تقسیم کنیم.

تیپ ۲: توصیفی هندسی

تست: در شکل زیر مساحت قسمت رنگی ۲۶ واحد مربع است. محیط مستطیل چند واحد است؟

۱) ۲۳
۲) ۲۵
۳) ۲۷
۴) ۲۹

پاسخ مساحت مستطیل و مثلث رو حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{مستطیل}} = \text{طول} \times \text{عرض} = x(x+۴/۵) = x^۲ + \frac{۹}{۲}x$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲} = \frac{x.x}{۲} = \frac{x^۲}{۲}$$

اختلاف مساحت مستطیل و مثلث همون مساحت قسمت رنگیه:

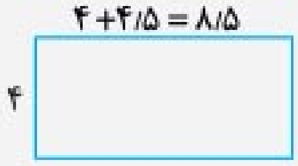
$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{مستطیل}} - S_{\text{مثلث}}$$

$$\rightarrow ۲۶ = x^۲ + \frac{۹}{۲}x - \frac{x^۲}{۲} \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{تمام جملات را در ۲}} ۲\times(x^۲ + \frac{۹}{۲}x - \frac{x^۲}{۲} = ۲۶) \rightarrow ۲x^۲ + ۹x - x^۲ = ۵۲$$

$$\rightarrow x^۲ + ۹x - ۵۲ = ۰ \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x+۱۳)(x-۴) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -۱۳ \ \times \\ x = ۴ \ \checkmark \end{cases}$$ اندازهٔ ضلع نمی‌تونه منفی باشه پس فقط $x = ۴$ قبوله

حالا دیگه با داشتن x اضلاع مستطیل به صورت روبه‌رو هستن:



$$\rightarrow \text{محیط مستطیل} = ۲(\text{طول} + \text{عرض}) = ۲(۸/۵+۴) = ۲(۱۲/۵) = ۲۵$$

در نتیجه گزینهٔ «۲» صحیح است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

حل معادلهٔ درجه دوم به روش حدس زدن ریشه‌ها

۵۵. مجموع مربع عددی طبیعی با خود آن عدد ۳۰ شده است. نصف آن عدد کدام است؟

۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

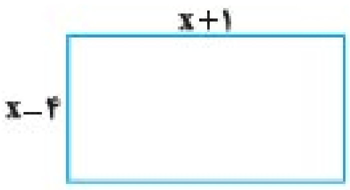
۵۶. کدام عدد طبیعی است که مربع آن با سه برابر آن مساوی باشد؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

۵۷. نیما از پسرعمویش، سه سال بزرگ‌تر است. اگر حاصل‌ضرب سن این دو ۴۰ باشد، مجموع سن نیما و پسرعمویش کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۴
۴) ۱۵

۵۸. اگر مساحت مستطیل شکل داده‌شده ۲۴ واحد سطح باشد، محیط آن کدام است؟



۱) ۱۶
۲) ۱۸
۳) ۲۰
۴) ۲۲

۵۹. در یک سالن اجتماعات، صندلی‌ها در ردیف‌های افقی (کنار هم) و عمودی (پشت سر هم) به شکل مستطیلی چیده شده‌اند. اگر تعداد صندلی‌ها در هر ردیف افقی ۴ تا بیشتر از تعداد صندلی‌ها در هر ردیف عمودی باشد و در کل ۴۸۰ صندلی در سالن وجود داشته باشد، در هر ردیف افقی چند صندلی قرار دارد؟

۱) ۲۰
۲) ۲۴
۳) ۲۵
۴) ۲۹

حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه

۶۰. کدام عبارت دربارهٔ معادلهٔ $x^۲ + ۶x = ۰$ درست است؟

۱) دارای یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی است.
۲) دارای یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ صفر است.
۳) دارای یک ریشهٔ منفی و یک ریشهٔ صفر است.
۴) فقط دارای یک ریشهٔ صفر است.

۶۱. ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۴x - ۱۲ = ۰$ کدام است؟

۱) $۳, -۴$
۲) $-۳, -۴$
۳) $۲, -۶$
۴) $-۲, ۶$

۶۲. کدام معادلهٔ درجه دوم زیر را به روش تجزیه نمی‌توان حل کرد؟

۱) $x^2-3x-4=0$ ۲) $(x+2)(x+3)=x+3$ ۳) $x^2+2x+2=0$ ۴) $x^2+4x+4=0$

۶۳. معادلات $x(x+8)=2x-9$ و $(k-1)x+5=0$ دارای ریشهٔ یکسان هستند. مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $-\frac{8}{3}$ ۴) $-\frac{3}{8}$

۶۴. اختلاف مثبت ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $4x^2-(x+1)^2=0$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۶۵. ریشهٔ معادلهٔ $x^2=x-\frac{1}{4}$ در کدام محدوده قرار دارد؟

۱) بین ۱− و ۰ ۲) بین ۰ و ۱ ۳) بین ۱ و ۲ ۴) بین ۲ و ۳

۶۶. ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $x^2-16x+48=0$ چند برابر ریشهٔ کوچک‌تر آن است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱۲

۶۷. برای حل معادلهٔ $9x^2+3x-2=0$، آن را به‌صورت $(ax+b)(ax-1)$ تجزیه کرده‌ایم، حاصل $a\times b$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۶۸. ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $(x+2)(x-1)=4$ کدام است؟

۱) $-2, 1$ ۲) $-3, 2$ ۳) $3, 2$ ۴) $-6, 1$

۶۹. به منظور تعیین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $3x^2-x-24=0$، آن را به‌صورت $(3x+m)(x+n)=0$ تجزیه نموده‌ایم. حاصل $(m-n)$ کدام است؟

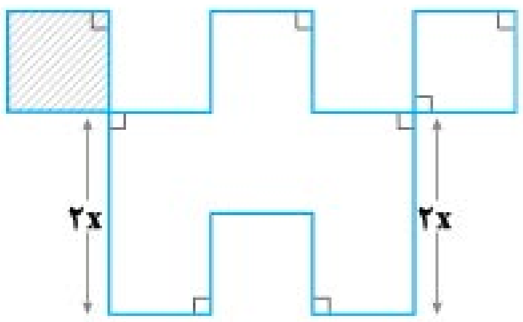
۱) ۱۷ ۲) ۱۳ ۳) ۱۱ ۴) ۵

۷۰. دربارهٔ معادلهٔ $x(x+1)+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}=0$ کدام عبارت درست است؟

۱) دو ریشهٔ مثبت دارد. ۲) یک ریشهٔ مضاعف منفی دارد.

۳) دو ریشهٔ قرینه دارد. ۴) یک ریشهٔ مضاعف مثبت دارد.

۷۱. در شکل داده‌شده طول تمام پاره‌خط‌ها به‌جز دو پاره‌خط مشخص‌شده در شکل، برابر x است. اگر اندازهٔ مساحت شکل برابر با اندازهٔ محیط آن باشد، محیط مربع هاشورخورده کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۴
۴) ۱۵

حل معادلهٔ درجه دوم به روش ریشه‌گیری

۷۲. ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $(x-3)^2=4$ کدام است؟

۱) $-1, 1$ ۲) $-2, 2$ ۳) $-1, 5$ ۴) $5, 1$

۷۳. ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $x^2=6-x^2$ در کدام محدوده قرار دارد؟

۱) $-3<x<-2$ ۲) $-2<x<-1$ ۳) $-1<x<0$ ۴) $0<x<1$

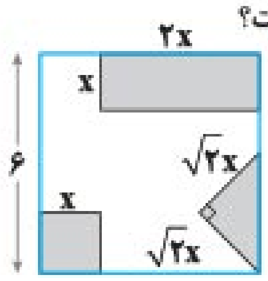
۷۴. ریشهٔ معادلهٔ $3x^2+11=x^2-7$ کدام است؟

۱) فقط ۳+ ۲) فقط ۳− ۳) ± 3 ۴) ریشه ندارد

۷۵. محیط مربعی که قطر آن $2\sqrt{5}$ است، کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) ۴۰ ۲) ۲۰ ۳) $4\sqrt{10}$ ۴) $4\sqrt{5}$

۷۶. از مربعی به ضلع $6cm$ مطابق شکل، قطعات رنگی بریده شده است. اگر مساحت باقی‌مانده $24cm^2$ باشد، x کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) $\sqrt{2}$
۴) $\sqrt{3}$

حل معادلهٔ درجه دوم به روش مربع کامل کردن

۷۷. در حل معادلهٔ درجه دوم $2x^2 + 3x - 5 = 0$ به روش مربع کامل کردن، مربع کدام عدد را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{9}{16}$

۷۸. در حل معادلهٔ درجه دوم $x^2 + 6x - 7 = 0$ به روش تشکیل مربع کامل، از کدام عدد گویا ریشه‌گیری می‌کنیم؟

۱) ۱   ۲) ۴   ۳) ۹   ۴) ۱۶

۷۹. در حل معادلهٔ درجه دوم $3x(3x+1) = 2$ به روش تشکیل مربع کامل پس از آنکه ضریب x^2 را برابر یک کردیم، کدام عدد را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم؟

۱) $\frac{1}{36}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{9}$

۸۰. در حل معادلهٔ درجه دوم $\frac{17}{4} = 5x - x^2 + (x + \frac{3}{2})^2$ به روش مربع کامل، از مربع کدام دوجمله‌ای ریشه می‌گیریم؟

۱) $x - \frac{1}{2}$ ۲) $x + \frac{1}{2}$ ۳) $x - \frac{1}{4}$ ۴) $x + \frac{1}{4}$

۸۱. در حل معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با استفاده از روش مربع کامل، در مرحلهٔ ریشه‌گیری از دو طرف تساوی، از کدام عبارت ریشه می‌گیریم؟

۱) $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ ۲) $\frac{b^2 - 4ac}{2a}$ ۳) $\frac{b^2 + 4ac}{4a}$ ۴) $\frac{b^2 + 4ac}{2a^2}$

۸۲. برای حل معادله‌ای درجه دوم به روش مربع کامل، به عبارت $(x-4)^2 = 3$ رسیده‌ایم. یکی از جواب‌های معادله کدام است؟

۱) $4 - \sqrt{3}$ ۲) $2 - \sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3} - 4$ ۴) $\sqrt{3} - 2$

۸۳. در حل معادلهٔ درجه دوم $x(1+x) + \frac{1}{4} = 0$ به روش مربع کامل، به‌ترتیب کدام مربع کامل به دو طرف تساوی اضافه شده و از کدام عدد گویا ریشه‌گیری خواهد شد؟

۱) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}, 0$ ۴) $\frac{1}{4}, 0$

۸۴. برای حل معادلهٔ درجه دوم $x^2 + 6x + c = 0$ به روش مربع کامل، در مراحل پایانی از عدد ۴ ریشه گرفته‌ایم. c کدام است؟

۱) ۹   ۲) ۸   ۳) ۵   ۴) ۲

حل معادلهٔ درجه دوم به روش کلی

۸۵. مبیّن معادلهٔ درجه دوم $\frac{1}{4}x^2 + x - 1 = 0$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۴

۸۶. مبیّن معادلهٔ درجه دوم $x(\sqrt{3} - x) = \frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۳

۸۷. مبیّن معادلهٔ $3x^2 + 5x - 2 = 0$ و یک ریشهٔ آن به‌ترتیب کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) $-\frac{2}{3}, 1$ ۲) $-2, 1$ ۳) $2, 49$ ۴) $\frac{1}{3}, 49$

۸۸. مبیّن معادلهٔ درجه دوم $ax^2 - 6x + 2c = 0$ برابر با ۶۴ شده است، کدام رابطه صحیح است؟

۱) $ac = -\frac{7}{2}$ ۲) $ac = \frac{7}{2}$ ۳) $ac = \frac{2}{7}$ ۴) $ac = -\frac{2}{7}$

۸۹. یک ریشهٔ معادلهٔ $4x^2 + mx - 2m = 1$ برابر با (-1) است. مبیّن معادله و ریشهٔ دیگر، به‌ترتیب کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}, 7$ ۲) $-\frac{3}{4}, 49$ ۳) $\frac{4}{3}, 1$ ۴) $\frac{3}{4}, 49$

۹۰. ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - 8\sqrt{3}x + 6 = 0$ کدام‌اند؟

۱) $2\sqrt{3} \pm 6$ ۲) $4\sqrt{3} \pm 3$ ۳) $2\sqrt{3} \pm 3$ ۴) $4\sqrt{3} \pm 6$

۹۱. جواب بزرگ‌تر معادلهٔ $x^2 - 4x + 1 = 0$ در کدام محدوده قرار دارد؟

۱) $4 < x < 4/5$ ۲) $3/5 < x < 4$ ۳) $3 < x < 3/5$ ۴) $2/5 < x < 3$

۹۲. جواب کوچک‌تر معادلهٔ درجه دوم $۲x(x-۳)+x^۲=۷$ در کدام محدوده است؟

۱) $۰/۵<x<۱$ ۲) $۱<x<۱/۵$ ۳) $۱/۵<x<۲$ ۴) $۲<x<۲/۵$

۹۳. به‌ازای چند مقدار m، مبیّن معادلهٔ درجه دوم $(m-۱)x^۲-۶x+m+۱=۰$ برابر با ۳۶ است؟

۱) دو مقدار ۲) یک مقدار ۳) همهٔ مقادیر ۴) هیچ مقدار

حل معادلهٔ درجه دوم به روش تغییر متغیر

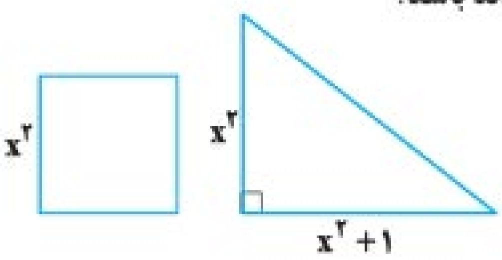
۹۴. نسبت ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $۳(x+۱)^۲+۱۰(x+۱)-۸=۰$ به ریشهٔ کوچک‌تر آن کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) ۱۵

۹۵. در معادلهٔ درجه دوم $(x-۱)^۲+۲\sqrt{۳}(x-۱)=۶$ بزرگ‌ترین جواب x کدام است؟

۱) $۴-\sqrt{۳}$ ۲) $۳-\sqrt{۲}$ ۳) $۲-\sqrt{۳}$ ۴) $۴+\sqrt{۲}$

۹۶. در شکل داده‌شده، مساحت مربع سه واحد سطح از مساحت مثلث بزرگ‌تر است. x کدام می‌تواند باشد؟



۱) $\sqrt{۶}$
۲) $\sqrt{۵}$
۳) $-\sqrt{۲}$
۴) $-\sqrt{۳}$

۹۷. معادلهٔ $(x^۲+۴x)^۲+(x^۲+۴x)=۱۲$ چند ریشهٔ متمایز دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۹۸. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(x-۲)^۴-۷x^۲+۲۸x-۱۶=۰$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

بحث در تعداد و نوع ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

۹۹. کدام عبارت دربارهٔ معادلهٔ درجه دوم $(x-۱)^۲=k+۱$ درست است؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) به‌ازای هر مقدار $k<۰$، ریشهٔ حقیقی ندارد.
۲) به‌ازای $k=-۱$، دارای ریشهٔ مضاعف $x=۰$ است.
۳) به‌ازای همهٔ مقادیر $k\geq -۱$، همواره دارای ریشهٔ حقیقی است.
۴) به‌ازای $k=۰$ دارای دو ریشهٔ قرینه است.

۱۰۰. معادلهٔ $(x-۱)^۲+(x+۱)^۲=k$ در کدام محدودهٔ k ریشهٔ حقیقی ندارد؟

۱) $k>۰$ ۲) $k<۲$ ۳) $k>-۲$ ۴) $k<۰$

۱۰۱. ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x(x+۱)=-\frac{۱}{۴}$ چگونه‌اند؟

۱) دو ریشهٔ مثبت
۲) یک ریشهٔ صفر و یک ریشهٔ منفی
۳) دو ریشهٔ قرینه
۴) دو ریشهٔ مساوی (یک ریشهٔ مضاعف)

۱۰۲. به‌ازای کدام مقادیر m معادلهٔ درجه دوم $۹x^۲+mx+۱=۰$ ریشهٔ مضاعف دارد؟

۱) ± ۳ ۲) ± ۶ ۳) ± ۹ ۴) ± ۱۸

۱۰۳. ریشه‌های معادلهٔ $x(۲x+۱)+۶=۰$ چگونه‌اند؟

۱) دو ریشهٔ مختلف‌العلامت ۲) دو ریشهٔ هم علامت ۳) یک ریشهٔ مضاعف ۴) ریشه ندارد

۱۰۴. به‌ازای کدام محدودهٔ مقادیر m، معادلهٔ درجه دوم $-x^۲+۶x+m=۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد؟

۱) $m<-۹$ ۲) $m<۰$ ۳) $m>-۹$ ۴) $m<۹$

۱۰۵. ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $mx^۲-۳x-۴=۰$ کدام است؟ (خارج ۹۶)

۱) $-\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۰۶. معادلهٔ درجه دوم $(m+۱)x^۲+mx=x-\frac{m}{۴}$ در کدام محدودهٔ تغییرات m، همواره دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است؟

۱) $m<\frac{۱}{۳}$ ۲) $m>۰$ ۳) $m>-۱$ ۴) $m<-۲$

۱۰۷. به‌ازای کدام مقدار c معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲-۴x+c=۱$ دارای ریشهٔ مضاعف است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۸. به‌ازای یک مقدار m، معادلهٔ درجه دوم $mx(x-3)+5=0$ دارای ریشهٔ مضاعف است. معکوس آن ریشه کدام است؟ $(m \neq 0)$

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۱۰۹. کدام عبارت دربارهٔ ریشه‌های معادله درجه دوم $(k+1)x^2-2kx+k=1$ نادرست است؟

۱) به‌ازای همهٔ مقادیر k، دو ریشهٔ حقیقی دارد.
۲) به‌ازای $k=0$ دارای دو ریشهٔ قرینه است.
۳) همواره دارای ریشهٔ $x=1$ است.
۴) به‌ازای $k=1$ دارای یک ریشهٔ صفر است.

۱۱۰. معادلهٔ درجه دوم $ax^2+3x+2-c=0$ دارای ریشهٔ مضاعف -6 است. حاصل $a \times c$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{7}$ ۲) $-\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $-\frac{7}{4}$

۱۱۱. معادلهٔ درجه دوم $(m-1)x^2-4x+1=0$ دارای دو ریشهٔ متمایز است. مقدار m کدام عدد می‌تواند باشد؟ (خارج ۹۷)

۱) 5 ۲) $3+\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{2}+2$ ۴) $4+\sqrt{2}$

۱۱۲. ریشهٔ مضاعف معادلهٔ درجه دوم $9x^2-3mx+m=0$ با شرط $m \neq 0$، کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{9}$

۱۱۳. کدام‌یک از معادله‌های زیر به‌ازای هر مقدار k همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

۱) $x^2-x+k=0$ ۲) $x^2+kx+1=0$ ۳) $x^2-kx-1=0$ ۴) $kx^2-x+1=0$

۱۱۴. کدام‌یک از معادله‌های زیر به‌ازای هر مقدار a همواره دارای جواب حقیقی است؟

۱) $x^2+x+a=0$ ۲) $x^2+ax+1=0$ ۳) $x^2+ax-2=0$ ۴) $ax^2-2x+1=0$

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

۱۱۵. در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ یک ریشه برابر با صفر است، کدام تساوی همواره برقرار است؟

۱) $c=0$ ۲) $b=0$ ۳) $a=1$ ۴) $a=b$

۱۱۶. به‌ازای چند مقدار m فقط یکی از جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $mx^2+(2m+6)x+m^2=9$ برابر با صفر است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) هیچ مقدار

۱۱۷. به‌ازای کدام مقدار k معادلهٔ درجه دوم $kx^2+(k-4)x+3-k=0$ دارای دو ریشهٔ قرینه است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۸. معادلهٔ درجه دوم $(a+2)x^2+(4-a^2)x-3=0$ دارای دو ریشهٔ قرینه است. a کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

۱۱۹. به‌ازای چند مقدار m معادلهٔ درجه دوم $mx^2+x^2+(m^2-1)x+m=0$ دارای دو ریشهٔ قرینه است؟

۱) همهٔ مقادیر m ۲) دو مقدار ۳) یک مقدار ۴) هیچ مقدار

۱۲۰. به‌ازای مقادیر مشخصی از a، b و c معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ دو ریشهٔ حقیقی معکوس دارد. کدام برابری همواره برقرار است؟

۱) $a=b$ ۲) $a=c$ ۳) $b=\frac{1}{c}$ ۴) $a=-\frac{1}{c}$

۱۲۱. به‌ازای کدام مقدار m جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $(m+1)x^2-6x+3-m=0$ معکوس یکدیگر هستند؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار m

۱۲۲. یکی از جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، $(a \neq 0)$ برابر با $x=1$ است، کدام رابطه همواره برقرار است؟

۱) $a+b+c=0$ ۲) $a+b-c=0$ ۳) $a-b+c=0$ ۴) $a-b-c=0$

۱۲۳. به‌ازای کدام مقدار k یکی از جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $(2k+3)x^2-5kx+\frac{1}{2}=k$ برابر با $x=1$ است؟

۱) $\frac{8}{7}$ ۲) $\frac{7}{8}$ ۳) $-\frac{7}{8}$ ۴) $-\frac{8}{7}$

۱۲۴. به‌ازای یک مقدار m، $x=1$ جواب معادلهٔ $mx^2+(1+m)x-\frac{3}{2}=0$ است. جواب دیگر معادله کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) -6 ۴) 6

۱۴۳. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+۳x-۱=۰$ باشند، حاصل عبارت $\frac{۱}{\beta}+\frac{۱}{\alpha}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۱۴۴. اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $\frac{۱}{۲}x^۲+۵x-\frac{۳}{۴}=۰$ باشند، حاصل عبارت $x_۱^۲+x_۲^۲$ کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۳ ۳) ۹۷ ۴) ۱۱۰

۱۴۵. اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲-۸x+۵=۰$ را با α و β نمایش دهیم، حاصل $\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۴۶. معادلهٔ درجه دوم $۳x^۲+۷(m-۱)x+۲-m=۰$ دو جواب معکوس دارد. مجموع آن دو جواب کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۳}$ ۳) $\frac{۱۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱۶}{۳}$

۱۴۷. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $mx^۲-۶mx+۵m=۲۴$ باشند، به‌ازای کدام مقدار m رابطهٔ $\alpha^۲+\alpha\beta=۴۲$ برقرار است؟ $(m\neq ۰)$

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۴۸. اگر بین ریشه‌های غیرصفر معادلهٔ درجه دوم $x^۲-۳mx+۲m+۱=۰$ رابطهٔ $\frac{۱}{\alpha}+\beta=۰$ برقرار باشد، مجموع ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۴۹. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^۲+bx+c=۰$ باشند و داشته باشیم $\alpha.\beta>۰$ و $\alpha+\beta<۰$ کدام گزینه همواره برقرار است؟

۱) $c>۰,b>۰$ ۲) $c<۰,b>۰$ ۳) $c>۰,b<۰$ ۴) $c<۰,b<۰$

۱۵۰. اختلاف ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $(x+۳)(۱-x)+۲x^۲-۶=۰$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۵۱. قدرمطلق اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $-۲x^۲+۱۲x-۹=۰$ کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۵۲. ضرایب معادلهٔ $۲kx^۲-۴x-۴k-۵=۰$ صحیح هستند. اگر به‌ازای مقدار k ، حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله دارای بیشترین مقدار باشد، مقدار Δ کدام است؟ (دی ۱۴۰۱)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۲۸

تشکیل معادلهٔ درجه دوم به کمک ریشه‌ها

۱۵۳. ریشه‌های کدام معادلهٔ درجه دوم $x=۲$ و $x=-۳$ است؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) $x^۲-۵x-۶=۰$ ۲) $x^۲-x+۶=۰$ ۳) $x^۲-x-۶=۰$ ۴) $x^۲+x-۶=۰$

۱۵۴. معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲+ax+b=۰$ دارای مجموعه جواب $\left\{-\frac{۱}{۲},۳\right\}$ است. حاصل $a\times b$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) -۱۵ ۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) $-\frac{۱۵}{۴}$

۱۵۵. کدام معادلهٔ درجه دوم دارای ریشه‌های $۵+۳\sqrt{۲}$ و $۵-۳\sqrt{۲}$ است؟

۱) $x^۲+۱۰x+۷=۰$ ۲) $x^۲-۱۰x-۷=۰$ ۳) $x^۲-۱۰x+۷=۰$ ۴) $x^۲+۱۰x-۷=۰$

۱۵۶. جواب‌های کدام معادلهٔ درجه دوم به‌صورت $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است؟

۱) $x^۲-x+\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}=۰$ ۲) $x^۲-x+\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲}=۰$ ۳) $x^۲+x+\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۱$ ۴) $x^۲-x-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۱$

۱۵۷. ریشه‌های کدام معادلهٔ درجه دوم، از قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۴x-۱۲=۰$ یک واحد بزرگ‌تر است؟

۱) $x^۲+۵x-۶=۰$ ۲) $۲x^۲+۵x-۱۲=۰$ ۳) $x^۲-۷x+۱۲=۰$ ۴) $x^۲-۶x-۷=۰$

۱۵۸. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^۲+۸x-۳=۰$ باشند، ریشه‌های کدام معادلهٔ درجه دوم $-\alpha\beta$ و $\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)$ هستند؟

۱) $x^۲+x-۱۲=۰$ ۲) $x^۲-x-۱۲=۰$ ۳) $x^۲+۷x+۱۲=۰$ ۴) $x^۲-۷x+۱۲=۰$

۱۵۹. ریشه‌های کدام معادلهٔ درجه دوم $\pm ۲\sqrt{۳}$ است؟

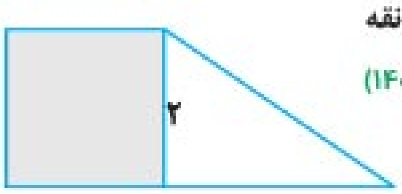
۱) $x^۲+x-۱۲=۰$ ۲) $x^۲-x+۱۲=۰$ ۳) $x^۲+۱۲=۰$ ۴) $x^۲-۱۲=۰$

۱۶۰. اگر بین ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم، رابطه‌های $x_۱\times x_۲=-۶$ و $x_۱-۲=x_۲$ برقرار باشد، قدرمطلق اختلاف ریشه‌های معادله کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۷}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۳}$

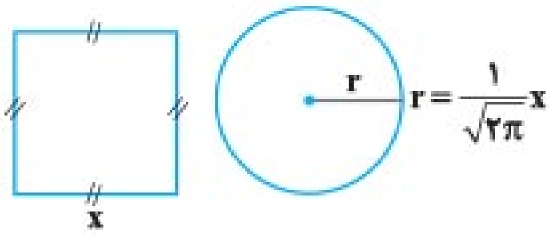
مسائل کاربردی از معادلهٔ درجه دوم

۱۶۱. در شکل داده‌شده، مساحت مربع از $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث به اندازهٔ ۳ واحد مربع بیشتر است. مساحت ذوزنقه کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۱)



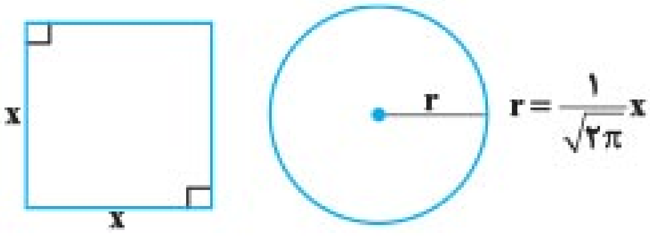
۱) ۵ ۲) ۵/۵
۳) ۶/۵ ۴) ۷

۱۶۲. اگر مجموع مساحت‌های دو شکل داده‌شده برابر ۶ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟ (تمرین کتاب درسی)



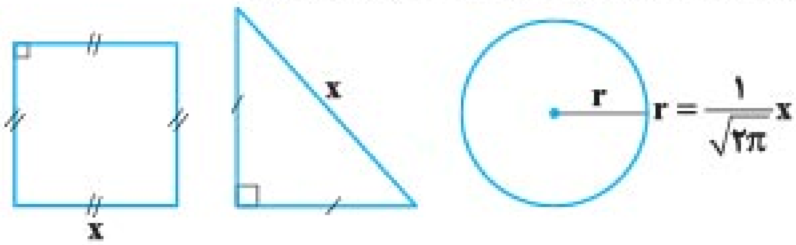
۱) ۱/۷۵
۲) ۲
۳) ۲/۱
۴) ۲/۲۵

۱۶۳. مجموع مساحت‌های دو شکل زیر برابر ۶ است. محیط مربع کدام است؟



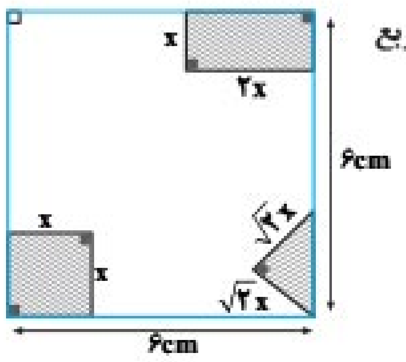
۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۱۸

۱۶۴. اگر مجموع مساحت‌های سه شکل داده‌شده برابر ۷ باشد، نسبت اندازهٔ مساحت مربع به اندازهٔ محیط آن کدام است؟



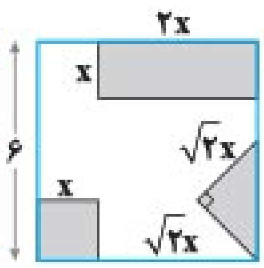
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۱۶۵. از مربعی به ضلع ۶ سانتی‌متر سه شکل مقابل بریده شده است. مساحت باقی‌مانده ۲۴ سانتی‌متر مربع است. طول مستطیل کدام است؟



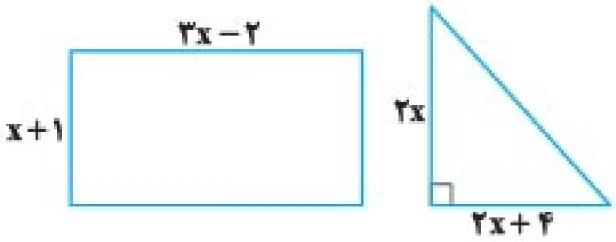
۱) $۴\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $۴\sqrt{۲}$

۱۶۶. از مربعی به ضلع ۶cm سه شکل رنگ‌شده بریده شده است. مساحت باقی‌مانده $۲۴cm^۲$ است. مساحت مستطیل کوچک کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

۱۶۷. در شکل داده‌شده مساحت مستطیل به اندازهٔ ۸ واحد سطح از مساحت مثلث بزرگ‌تر است. محیط مستطیل کدام است؟

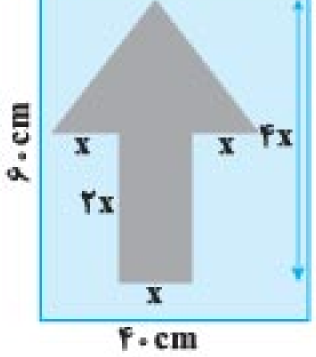


۱) ۳۲
۲) ۳۴
۳) ۳۶
۴) ۳۸

۱۶۸. نصف حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی زوج متوالی از سه برابر مجموع آن‌ها ۶ واحد بزرگ‌تر است. اختلاف نصف عدد بزرگ‌تر و ثلث عدد کوچک‌تر کدام است؟

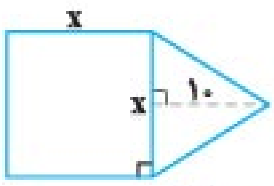
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۶۹. برای ساخت تابلوی مقابل، از برچسب‌های آبی و سفید استفاده می‌شود. هزینهٔ $1cm^2$ برچسب سفید ۳۰ تومان و هزینهٔ $1cm^2$ برچسب آبی ۱۰ تومان است. مجموع هزینهٔ برچسب‌های سفید و آبی ۳۴۰۰۰ تومان شده است. اندازهٔ x کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)



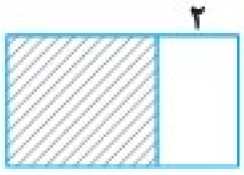
۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲

۱۷۰. در شکل مقابل، مساحت مثلث متساوی‌الساقین، از $\frac{۲}{۳}$ مساحت مربع به اندازهٔ $\frac{۸}{۳}$ واحد مربع، کمتر است. مساحت مثلث کدام است؟ (سراسری ۹۹)



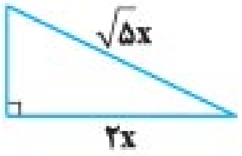
۱) ۳۰ ۲) ۳۵ ۳) ۴۰ ۴) ۴۵

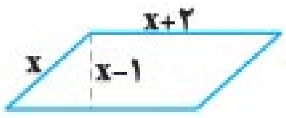
۱۷۱. در شکل زیر، مساحت مربع از $\frac{۳}{۴}$ مساحت مستطیل بزرگ‌تر، ۱۸ واحد مربع بیشتر است. محیط مستطیل بزرگ‌تر کدام است؟ (خارج ۹۹)



۱) ۴۴ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۵۴

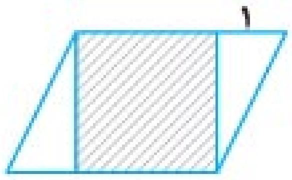
۱۷۲. در شکل زیر اندازهٔ مساحت مثلث قائم‌الزاویه به‌علاوهٔ ۷، با مقدار عددی محیط متوازی‌الاضلاع برابر است. مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟





۱) ۶ ۲) ۸
۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۷۳. در شکل زیر، مساحت مربع هاشورخورده از $\frac{۳}{۴}$ مساحت یکی از مثلث‌ها به اندازهٔ $\frac{۲۷}{۳۲}$ واحد مربع بیشتر است. اندازهٔ قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع، کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)



۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۱۷}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۷۴. پیش‌بینی تولید نوعی کالا در یک کارخانه طی ۴ فصل سال مطابق جدول زیر است. براساس این پیش‌بینی در مجموع ۳۲۱۰۰۰ کالا تولید خواهد شد. در این صورت تعداد کالای تولیدی در فصل تابستان کدام است؟

فصل	بهار	تابستان	پاییز	زمستان
تعداد کالا (هزار)	x	x+۱	۲x	$x^۲$

۱) ۱۶۰۰۰ ۲) ۱۷۰۰۰ ۳) ۲۰۰۰۰ ۴) ۲۱۰۰۰

۱۷۵. دو برابر مربع عددی طبیعی از ۶ برابر آن عدد، ۲۰ واحد بزرگ‌تر است. نصف آن عدد کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

۱۷۶. علی و برادرش ۳ سال اختلاف سن دارند. اگر حاصل‌ضرب سن دو برادر از ده برابر مجموع سن آن‌ها ۳۰ واحد کوچک‌تر باشد، مجموع ارقام سن برادر کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۷۷. ۴ برابر مربع عددی از ۱۲ برابر آن عدد ۹ واحد کوچک‌تر است. معکوس آن عدد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۷۸. می‌خواهیم دور تا دور باغچه‌ای به شکل مستطیل که طول آن، دو برابر عرض آن است را حصار بکشیم، به‌طوری‌که بازدیدکنندگان به یک متری باغچه نزدیک نشوند. اگر مساحت زمین محصورشده، $\frac{۱}{۱۸}\pi + ۱$ برابر بیشتر از مساحت باغچه باشد، طول باغچه چند متر است؟ (دی ۱۴۰۱)

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

۵۴. **گزینهٔ ۴** برای اینکه $3k$ و $6k$ صحیح باشند، k باید از مجموعهٔ $\{\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{3}{3},...\}$ انتخاب بشه.

برای اینکه $-\frac{5}{k}$ صحیح باشه و بیشترین مقدار رو داشته باشه، باید k منفی باشه تا $-\frac{5}{k}$ مثبت بشه، در ضمن اندازهٔ k (بدون در نظر گرفتن علامتش)، کمترین مقدار رو داشته باشه، چون می‌دونیم یک کسر مثبت با صورت ثابت، هرچی دارای مخرج کوچک‌تری باشه، مقدارش بزرگ‌تر می‌شه.

$k=-\frac{1}{3}$ همهٔ این شرایط رو داره، از مجموعهٔ اولیهٔ انتخاب شده، منفی هست و اگر علامت منفی مقادیر رو در نظر نگیریم، $\frac{1}{3}$ از همه کوچک‌تره. حالا به‌ازای $k=\frac{-1}{3}$ ضرایب معادله رو مشخص می‌کنیم.

$$3(-\frac{1}{3})x^2-\frac{5}{-\frac{1}{3}}+6(-\frac{1}{3})-8=0 \Rightarrow -x^2+15x-10=0$$

مجموع ضرایب معادله رو محاسبه می‌کنیم. $-1+15-10=4$

پاسخ فصل ۱ درس ۲

۵۵. **گزینهٔ ۲** به چندتا موضوع توجه کن:

اول اینکه عدد موردنظر طبیعیه، یعنی منفی، کسری، اعشاری، رادیکالی و گنگ نیست. خلاصه اینکه رُند و خوشگله.

دوم اینکه چون حاصل ۳۰ شده، عدد بزرگی نیست.

پس خیلی سریع عددهای طبیعی روی توی ذهنت بررسی می‌کنی. مثلاً:

$n=4 \Rightarrow 4^2+4=20$

خب این عدد توی معادله جواب نداد و مشخصه باید عدد بزرگ‌تری رو بررسی کنی.

$n=6 \Rightarrow 6^2+6=42$

ای بابا اینم نشد که. البته من دارم بازی می‌کنم. مطمئنم تو در همون اولین حدس، تونستی عدد درست رو پیدا کنی.

$n=5 \Rightarrow 5^2+5=30$

آفرین، حالا باید ۵ رو نصف کنیم که می‌شه ۲/۵.

۵۶. **گزینهٔ ۳** به راحتی می‌تونیم حدس بزنیم. تازه از گزینه‌ها هم می‌تونیم کمک بگیریم.

واضحه که مربع عدد ۳ با سه برابر ۳ مساوی هست. $3\times3=3^2$

۵۷. **گزینهٔ ۲** $x+3$: سن نیما x : سن پسرعموی نیما

معادله رو تشکیل می‌دیم. $x(x+3)=40$

در این تست نمی‌تونیم از گزینه‌ها برای حدس زدن مقدار x استفاده کنیم. خداوکیلی تابلوئه که $x=5$ جواب طبیعی این معادله‌ست.

تذکر: این معادله یک جواب دیگه هم داره که منفیه، ولی موضوع اینه که ما مطمئنیم جواب قابل قبوله تست مثبته چون سن که نمی‌تونه عددی منفی باشه.

حالا می‌تونیم مجموع سن نیما و پسرعموش رو حساب کنیم.

۸: سن نیما ۵: سن پسر عمو $\Rightarrow 5+8=13$

۵۸. **گزینهٔ ۴** مساحت مستطیل از ضرب طول و عرض به‌دست میاد.

$(x-4)(x+1)=24$

با فرض اینکه x عدد طبیعیه شروع به حدس زدن می‌کنیم. درضمن از xهای بزرگ‌تر از ۴ شروع می‌کنیم. برای اینکه $(x-4)$ نمی‌تونه صفر یا منفی باشه. با چند بار آزمون و خطا متوجه می‌شیم $x=7$ بوده و ابعاد مستطیل ۳ و ۸ هست. حالا می‌تونیم محیط مستطیل رو حساب کنیم.

$x=7 \Rightarrow$ 

$2(\text{طول}+\text{عرض}) =$ محیط مستطیل $=2(8+3)=22$

۵۹. **گزینهٔ ۲** اگه تعداد صندلی‌ها در هر ردیف افقی رو n در نظر بگیریم، تعداد صندلی‌ها در یک ستون $(n-4)$ هست. تعداد کل صندلی‌ها از حاصل‌ضرب این دو مقدار به‌دست میاد.

$n(n-4)=480$

با کمی دقت به راحتی می‌شه تشخیص داد که $n=24$ هست، تازه از گزینه‌ها هم می‌شد کمک بگیریم. پس در هر ردیف ۲۴ صندلی وجود داره.

۶۰. **گزینهٔ ۳** در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگه $c=0$ باشه، برای حل معادله بهتره از روش فاکتورگیری استفاده کنیم.

$$x^2+6x=0 \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از } x \text{ فاکتور}} x(x+6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+6=0 \Rightarrow x=-6 \end{cases}$$

معادله یک ریشهٔ صفر و یک ریشهٔ منفی داره.

۶۱. **گزینهٔ ۳** **روش اول:** معادله رو از طریق اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم و ریشه‌های معادله رو تعیین می‌کنیم.

$$x^2+4x-12=0 \Rightarrow (x+6)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+6=0 \Rightarrow x=-6 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

روش دوم: به روش جای‌گذاری گزینه‌ها عمل می‌کنیم.

برای شروع $x=-4$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم.

$x=-4 \Rightarrow (-4)^2+4(-4)-12=0 \Rightarrow -12=0$

تساوی $-12=0$ برقرار نیست، پس $x=-4$ ریشهٔ این معادله نیست. بنابراین گزینه‌های «۱» و «۲» حذف می‌شن.

از گزینهٔ «۳»، $x=2$ رو انتخاب می‌کنیم و در معادله جای‌گذاری می‌کنیم.

$x=2 \Rightarrow 2^2+4(2)-12=0 \Rightarrow 0=0$

تساوی $0=0$ برقراره، یعنی $x=2$ ریشهٔ معادله است. پس گزینهٔ «۴» که $x=2$ رو نداره حذف می‌شه.

۶۲. **گزینهٔ ۳** **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ ۱: به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌شه.

$x^2-3x-4=0 \Rightarrow (x-4)(x+1)=0$

گزینهٔ ۲: از طریق فاکتورگیری تجزیه می‌شه.

$(x+2)(x+3)-(x+3)=0$

از $(x+3)$ فاکتور می‌گیریم.

$(x+3)(x+2-1)=0 \Rightarrow (x+3)(x+1)=0$

گزینهٔ ۳: دلتای معادله منفیه و اصلاً ریشه نداره. پس قطعاً قابل تجزیه هم نیست.

$x^2+2x+2=0$

$\Delta=2^2-4(1\times2)=4-8=-4$

گزینهٔ ۴: به‌کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای یا اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌شه.

$x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0$

۶۳. **گزینهٔ ۱** باید معادلهٔ اول رو که ضرایب مشخص داره حل کنیم تا x به‌دست بیاد.

$$x(x+8)=2x-9 \Rightarrow x^2+8x-2x+9=0 \Rightarrow x^2+6x+9=0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع}} (x+3)^2=0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

حالا $x=-3$ رو در معادلهٔ دوم جای‌گذاری می‌کنیم.

$$(k-1)(-3)+5=0 \Rightarrow -3k+3+5=0 \Rightarrow -3k=-8 \Rightarrow k=\frac{8}{3}$$

۶۴. **گزینهٔ ۳** معادله رو به کمک اتحاد مزدوج حل می‌کنیم.

$$(2x)^2-(x+1)^2=0 \Rightarrow (2x-(x+1))(2x+x+1)=0$$

$$\Rightarrow (x-1)(3x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0\Rightarrow x=1 \\ 3x+1=0 \Rightarrow 3x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

برای تعیین اختلاف مثبت ریشه‌ها، باید ریشهٔ بزرگ‌تر رو منهای ریشهٔ کوچک‌تر کنیم.

$$1-(-\frac{1}{3})=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

۶۵. **گزینهٔ ۲** طرفین معادله رو در ۴ ضرب می‌کنیم و مرتب می‌کنیم.

$$x^2=x-\frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} 4x^2=4x-1 \Rightarrow 4x^2-4x+1=0$$

حالا معادله رو به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای حل می‌کنیم.

$$4x^2-4x+1=0 \Rightarrow (2x-1)^2=0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ یعنی ۰/۵ بین ۰ و ۱ قرار داره.

۶۶. **گزینهٔ ۳** معادله رو به روش جمله مشترک تجزیه می‌کنیم.

$$(x-12)(x-4)=0\Rightarrow \begin{cases}x-12=0\Rightarrow x=12\\ x-4=0\Rightarrow x=4\end{cases}$$

ریشهٔ بزرگ‌تر سه برابر ریشهٔ کوچک‌تر هست. $\frac{12}{4}=3$

۶۷. **گزینهٔ ۳** معادله رو به روش اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم.
اول جملهٔ مشترک رو در $9x^2$ و $3x$ نمایان می‌کنیم.

$$(3x)^2+1(3x)-2=0$$

حالا که جملهٔ مشترک $(3x)$ مشخص شد، معادله رو تجزیه می‌کنیم.

$$(3x+2)(3x-1)=0$$

معادلهٔ تجزیه‌شده رو با عبارت تجزیه‌شده در تست مقایسه می‌کنیم و متوجه می‌شیم که $a=3$ و $b=2$ هست. بنابراین: $a\times b=3\times 2=6$

۶۸. **گزینهٔ ۲** مبادا فکر کنی می‌تونی بگی $x-1=0$ یا $x+2=0$.
نخیر، این غلطه!
چون سمت راست معادله، عدد غیرصفر ۴ وجود داره و در این حالت نمی‌تونی هر کدوم از عبارت‌ها رو مساوی صفر (یا حتی ۴) قرار بدی.
اول پرانتزها رو از طریق ضرب کردن یا اتحاد جمله مشترک بَسط می‌دیم.

$$(x+2)(x-1)=4\Rightarrow x^2+x-2=4\Rightarrow x^2+x-6=0$$

حالا معادلهٔ مرتب‌شده رو دوباره با کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم.

$$(x+3)(x-2)=0\Rightarrow \begin{cases}x+3=0\Rightarrow x=-3\\ x-2=0\Rightarrow x=2\end{cases}$$

در ضمن از طریق جای‌گذاری گزینه‌ها هم می‌تونستی این تست رو حل کنی.

۶۹. **گزینهٔ ۳** برای حل معادلهٔ مورد نظر به روش تجزیه به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: طرفین معادله رو در ضریب x^2 یعنی ۳ ضرب می‌کنیم.

$$3x^2-x-24=0 \xrightarrow{\times 3} 9x^2-3x-72=0$$

گام دوم: برای استفاده از اتحاد جمله مشترک، جملهٔ مشترک رو نمایان می‌کنیم و عبارت رو تجزیه می‌کنیم.

$$(3x)^2-1(3x)-72=0\Rightarrow (3x+8)(3x-9)=0$$

گام سوم: در پرانتز دوم، از ۳ فاکتور می‌گیریم و طرفین معادله رو به ۳ ساده می‌کنیم. $(3x+8)3(x-3)=0\xrightarrow{\div 3}(3x+8)(x-3)=0$

حالا این عبارت رو با عبارت داده‌شده در تست مقایسه می‌کنیم، مشخص می‌شه که $m=8$ و $n=-3$ هست. پس: $m-n=8-(-3)=11$

۷۰. **گزینهٔ ۲** برای اینکه مخرج‌ها از بین برن (به ۱ تبدیل بشن)، طرفین معادله رو در ۶ ضرب می‌کنیم.

$$6x(x+1)+6(\frac{x^2}{2})+6(\frac{1}{6})=6(0)\Rightarrow 6x^2+6x+3x^2+1=0$$

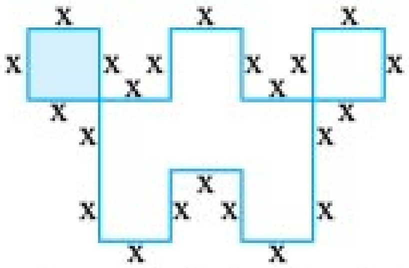
$$\Rightarrow 9x^2+6x+1=0$$

معادله رو به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای تجزیه کرده و حل می‌کنیم.

$$(3x+1)^2=0\Rightarrow 3x+1=0\Rightarrow 3x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

معادله یک ریشهٔ مضاعف منفی داره.

۷۱. **گزینهٔ ۴**



برای تعیین محیط باید تمام ضلع‌هایی که دور تا دور شکل رو تشکیل میدن (برحسب x) با هم جمع کنیم. $22x$ = محیط شکل

با کمی دقت متوجه می‌شیم که کل شکل از ۸ مربع به اندازهٔ مربع هاشورخورده تشکیل شده.

$8x^2$ = (مساحت مربع هاشورخورده)۸ = مساحت شکل

حالا معادله رو تشکیل می‌دیم و حل می‌کنیم.

محیط شکل = مساحت شکل

$$8x^2=22x\Rightarrow 8x^2-22x=0\xrightarrow{\div 2}4x^2-11x=0\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}}$$

$$x(4x-11)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ 4x-11=0\Rightarrow 4x=11\Rightarrow x=3/75\end{cases}$$

اندازهٔ ضلع نمی‌تونه صفر باشه، پس $x=3/75$ جواب قابل قبول این مسئله است. حالا می‌تونیم محیط مربع هاشورخورده رو به‌دست بیاریم.

$4x=4\times 3/75=15$ = محیط مربع هاشورخورده

۷۲. **گزینهٔ ۴** از روش ریشه‌گیری استفاده می‌کنیم.

$$(x-3)^2=4\Rightarrow\begin{cases}x-3=2\Rightarrow x=5\\ x-3=-2\Rightarrow x=1\end{cases}$$

۷۳. **گزینهٔ ۲** معلوم، مجهول می‌کنیم:

$$x^2+x^2=6\Rightarrow 2x^2=6\Rightarrow x^2=3$$

از روش ریشه‌گیری استفاده می‌کنیم.

$x^2=3\Rightarrow x=+\sqrt{3}$ یا $x=-\sqrt{3}$

جواب کوچک‌تر معادله $x=-\sqrt{3}$ هست. می‌دونیم که $-\sqrt{3}\simeq -1/7$ بین ۲− و ۱− قرار داره.

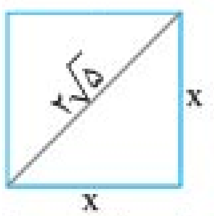
۷۴. **گزینهٔ ۴** چون معادله، جملهٔ درجه اول نداره، معلوم مجهول می‌کنیم.

$$3x^2-x^2=-7-11\Rightarrow 2x^2=-18\xrightarrow{\div 2}x^2=-9$$

امکان نداره $x^2=-9$ برقرار باشه، پس معادله ریشه نداره.

$$\underbrace{x^2}_{\text{همواره نامنفی}}\neq\overbrace{-9}^{\text{همواره منفی}}$$

۷۵. **گزینهٔ ۳** ضلع مربع رو x در نظر می‌گیریم، طبق رابطهٔ فیثاغورث داریم:



$$x^2+x^2=(2\sqrt{5})^2\Rightarrow 2x^2=20\Rightarrow x^2=10$$

$$\Rightarrow x=\pm\sqrt{10}$$

اندازهٔ ضلع مقداری مثبته، پس $x=\sqrt{10}$ قابل قبوله. حالا محیط مربع رو حساب می‌کنیم. $4\sqrt{10}$ = ضلع×۴ = محیط مربع

۷۶. **گزینهٔ ۴** مساحت هر کدام از قسمت‌های بریده‌شده رو برحسب x تعیین می‌کنیم.

$x(2x)=2x^2$ = مساحت مستطیل , x^2 = مساحت مربع کوچک

مساحت مثلث قائم‌الزاویه $=\frac{\sqrt{2}x\times\sqrt{2}x}{2}=\frac{2x^2}{2}=x^2$

مساحت قطعات بریده‌شده رو از مساحت مربع بزرگ کم می‌کنیم، مساوی ۲۴ قرار می‌دیم. مساحت مربع بزرگ $=6^2=36$

$36-x^2-2x^2-x^2=24 \Rightarrow -4x^2=-12 \Rightarrow 4x^2=12$

$\xrightarrow{\div 4} x^2=3 \Rightarrow x=+\sqrt{3}$ یا $x=-\sqrt{3}$

اندازهٔ ضلع نمی‌تونه منفی باشه، پس $x=\sqrt{3}$ قابل قبوله.

۷۷. **گزینهٔ ۲** مرحله به مرحله می‌ریم تا برسیم به مرحلهٔ موردنظر.

مرحلهٔ اول: جملهٔ ثابت رو به سمت راست معادله منتقل می‌کنیم.

$2x^2+3x=5$

مرحلهٔ دوم: دو طرف معادله رو به ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم.

$2x^2+3x=5 \xrightarrow{\div 2} x^2+\frac{3}{2}x=\frac{5}{2}$

مرحلهٔ سوم: ضریب x رو بر ۲ تقسیم می‌کنیم. $\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$

مرحلهٔ چهارم: مربع عدد $\frac{3}{4}$ رو به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم.

خب خدا رو شکر از اینجا به بعد رو لازم نیست انجام بدیم چون به خواستهٔ سؤال رسیدیم.

۷۸. **گزینهٔ ۴** مرحله به مرحله بریم تا به مرحلهٔ موردنظر برسیم.

مرحلهٔ اول: جملهٔ ثابت رو به سمت راست تساوی منتقل می‌کنیم.

$x^2+6x=7$

مرحلهٔ دوم: چون ضریب x^2 عدد ۱ هست، زود می‌ریم سراغ مرحلهٔ سوم.

مرحلهٔ سوم: ضریب x رو نصف می‌کنیم. $\frac{6}{2}=3$

مرحلهٔ چهارم: مربع عدد به‌دست اومده رو به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم.

$x^2+6x+3^2=7+3^2 \Rightarrow (x+3)^2=16$

مرحلهٔ پنجم: از دو طرف تساوی ریشه می‌گیریم.

خُب مشخص شد که باید ریشهٔ عدد ۱۶ رو محاسبه کنیم، پس دیگه ادامه نمی‌دیم.

۷۹. **گزینهٔ ۱** در روش مربع کامل همواره ضریب x^2 را برابر ۱ می‌کنیم. مرحله به مرحله بریم تا به مرحلهٔ موردنظر برسیم.

$3x(3x+1)=2 \Rightarrow 9x^2+3x=2 \xrightarrow{\div 9} x^2+\frac{1}{3}x=\frac{2}{9}$

ضریب x رو نصف می‌کنیم و مربع عدد به‌دست اومده رو به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم. $(\frac{1}{6})^2=\frac{1}{36}$

مشخص شد که باید $\frac{1}{36}$ رو به طرفین تساوی اضافه کنیم.

۸۰. **گزینهٔ ۱** معادله رو به فرم $ax^2+bx=-c$ مرتب می‌کنیم.

$\underbrace{(x+\frac{3}{2})^2}_{\text{اتحاد مربع}}+x^2-5x=\frac{17}{4} \Rightarrow x^2+(2\times x\times\frac{3}{2})+\frac{9}{4}+x^2-5x=\frac{17}{4}$

$\Rightarrow x^2+3x+x^2-5x=\frac{17}{4}-\frac{9}{4} \Rightarrow 2x^2-2x=2 \xrightarrow{\div 2} x^2-x=1$

ضریب x رو به دو تقسیم می‌کنیم و مربعش رو به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم.

$x^2-x+(-\frac{1}{2})^2=1+(-\frac{1}{2})^2 \Rightarrow x^2-x+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

عبارت سمت چپ قابل تبدیل به مربع دوجمله‌ای $(x-\frac{1}{2})^2$ هست. حالا که به خواستهٔ سؤال رسیدیم، ادامه نمی‌دیم.

۸۱. **گزینهٔ ۱** مقدار ثابت معادله رو به سمت راست انتقال می‌دیم.

$ax^2+bx=-c$

دو طرف معادله رو به ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم. $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

مربع نصف ضریب x رو به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم.

$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$

عبارت سمت چپ رو به مربع کامل تبدیل می‌کنیم و عبارت سمت راست رو هم مخرج مشترک می‌گیریم.

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$

$\Rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

با شرط $b^2-4ac>0$ از طرفین تساوی ریشه می‌گیریم.

دیگه مرحلهٔ پایانی رو اجرا نمی‌کنیم چون به خواستهٔ تست رسیدیم.

۸۲. **گزینهٔ ۱** در این مرحله باید از دو طرف تساوی ریشه‌گیری کنیم.

$(x-4)^2=3 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x-4=\pm\sqrt{3}$

جواب‌های معادله رو به‌دست میاریم.

$x-4=\sqrt{3} \Rightarrow x=4+\sqrt{3}$

$x-4=-\sqrt{3} \Rightarrow x=4-\sqrt{3}$

معادله دوتا جواب داره که $x=4-\sqrt{3}$ در گزینه‌ها هست.

۸۳. **گزینهٔ ۴** x رو در پرانتز ضرب می‌کنیم و عدد ثابت رو به سمت راست منتقل می‌کنیم.

$x^2+x=-\frac{1}{4}$

مربع نصف ضریب x رو به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم.

$(\frac{\text{ضریب } x}{2})^2=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

$x^2+x+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

سمت چپ تساوی رو به اتحاد مربع تبدیل می‌کنیم. $(x+\frac{1}{2})^2=0$

از دو طرف تساوی ریشه می‌گیریم. $(x+\frac{1}{2})=0$

فقط یک مرحله باقی مونده که لازم نیست ادامه بدیم. چون مشخص شد که عدد $\frac{1}{4}$ را به دو طرف معادله اضافه کردیم و در نهایت از عدد صفر ریشه گرفتیم.

۸۴. **گزینهٔ ۳** مرحله به مرحله بریم جلو تا برسیم به مرحلهٔ ریشه‌گیری:

عدد ثابت رو به سمت راست منتقل می‌کنیم. $x^2+6x=-c$

مربع نصف ضریب x رو به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم.

$x^2+6x+(\frac{6}{2})^2=-c+(\frac{6}{2})^2 \Rightarrow x^2+6x+9=-c+9$

عبارت سمت چپ رو به مربع دو جمله‌ای تبدیل می‌کنیم.

$(x+3)^2=-c+9$

حالا رسیدیم به مرحله‌ای که باید از دو طرف ریشه بگیریم. از طرفی در سؤال گفته شده که از عدد ۴ ریشه می‌گیریم. یعنی $-c+9$ همون چهاره.

$-c+9=4 \Rightarrow c=5$

۸۵. **گزینهٔ ۳** $a=\frac{1}{4}\ ,\ b=1\ ,\ c=-1$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-(4\times\frac{1}{4}\times(-1))=1+1=2$

۸۶. **گزینهٔ ۱** معادله رو به‌صورت $ax^2+bx+c=0$ مرتب می‌کنیم.

$$\sqrt{3}x-x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow -x^2+\sqrt{3}x-\frac{1}{2}=0$$

همین الان می‌تونیم Δ رو حساب کنیم یا کل معادله رو در (-1) ضرب کنیم، بعد Δ رو حساب کنیم. فرقی نداره!

$$x^2-\sqrt{3}x+\frac{1}{2}=0 \qquad (a=1, b=-\sqrt{3}, c=\frac{1}{2})$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-\sqrt{3})^2-(4\times1\times\frac{1}{2})=3-2=1$$

۸۷. **گزینهٔ ۴** $a=3, b=5, c=-2$

$$\Delta=b^2-4ac=5^2-(4\times3\times(-2))=25+24=49$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2(3)}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{-5+7}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\\ x=\frac{-5-7}{6}=\frac{-12}{6}=-2\end{cases}$$

در گزینهٔ «۴»، مبیّن و یکی از ریشه‌ها به‌درستی نوشته شده.

۸۸. **گزینهٔ ۱** ضریب $x^2=a$ ، ضریب $x=-6$ ، مقدار ثابت $=2c$

$$\Delta=(-6)^2-4(a\times2c)=36-8ac\xrightarrow{\Delta=64}36-8ac=64$$

$$\Rightarrow -8ac=28\Rightarrow ac=-\frac{28}{8}\Rightarrow ac=-\frac{7}{2}$$

۸۹. **گزینهٔ ۴** $x=-1$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار m رو به‌دست بیاریم.

$$4(-1)^2+m(-1)-2m=1\Rightarrow 4-m-2m=1\Rightarrow -3m=-3\Rightarrow m=1$$

حالا $m=1$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم تا ضرایب معادله مشخص بشه.

$$4x^2+1x-2=1\Rightarrow 4x^2+x-3=0 \quad (a=4, b=1, c=-3)$$

حالا معادله رو به روش تعیین Δ حل می‌کنیم.

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-(4\times4\times(-3))=1+48=49$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2(4)}=\frac{-1\pm7}{8}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{-1-7}{8}=\frac{-8}{8}=-1\\ x=\frac{-1+7}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\end{cases}$$

مبیّن معادله برابر با $\Delta=49$ و ریشهٔ دوم معادله برابر $x=\frac{3}{4}$ هست.

۹۰. **گزینهٔ ۳** چون همهٔ ضریب‌ها به ۲ بخش‌پذیر هستن، همه رو به ۲ ساده می‌کنیم:

$$2x^2-8\sqrt{3}x+6=0\xrightarrow{\div2}x^2-4\sqrt{3}x+3=0$$

معادله رو به روش کلی حل می‌کنیم: $a=1, b=-4\sqrt{3}, c=3$

$$\Delta=(-4\sqrt{3})^2-(4\times1\times3)=(16\times3)-12=48-12=36$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\sqrt{3}\pm6}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{2}\pm\frac{6}{2}=2\sqrt{3}\pm3$$

۹۱. **گزینهٔ ۲** با تعیین Δ معادله رو به روش کلی حل می‌کنیم:

$$x^2-4x+1=0 \quad (a=1, b=-4, c=1)$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-(4\times1\times1)=16-4=12$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2(1)}=\frac{4\pm\sqrt{4\times3}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{4}{2}\pm\frac{2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$$

ریشهٔ بزرگ‌تر معادله، $x=2+\sqrt{3}$ هست.

$$\sqrt{3}\simeq1/7\Rightarrow 2+\sqrt{3}\simeq3/7$$

۳/۷ در محدودهٔ گزینهٔ «۲» قرار داره.

۹۲. **گزینهٔ ۳** معادله رو به فرم استاندارد $ax^2+bx+c=0$ مرتب می‌کنیم.

$$2x(3-x)+x^2=7\Rightarrow 6x-2x^2+x^2-7=0$$

$$\Rightarrow -x^2+6x-7=0\xrightarrow{\times(-1)}x^2-6x+7=0$$

به نظر می‌رسه که به روش اتحاد جمله مشترک، تجزیه می‌شه ولی جور در نمیاد. پس دست به دامن دلتا می‌شیم.

$$\Delta=(-6)^2-4(1\times7)=36-28=8$$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{8}}{2(1)}=\frac{6\pm\sqrt{4\times2}}{2}=\frac{6\pm2\sqrt{2}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور از ۲}}\frac{2(3\pm\sqrt{2})}{2}=3\pm\sqrt{2}$$

مشخصه که جواب کوچک‌تر $3-\sqrt{2}$ هست که باید تقریبی حساب کنیم (می‌دونی که $\sqrt{2}\simeq1/4$).

$$x=3-\sqrt{2}\simeq3-1/4\simeq1/6$$

۱/۶ بین ۱/۵ و ۲ هست.

۹۳. **گزینهٔ ۲** $a=(m-1), b=-6, c=m+1$

$$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\underbrace{(m-1)(m+1)}_{\text{مزدوج}}=36-4(m^2-1)$$

$$=36-4m^2+4=-4m^2+40\xrightarrow{\Delta=36}-4m^2+40=36$$

$$\Rightarrow -4m^2=-4\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=\pm1$$

به‌ازای $m=1$ ضریب x^2 (یعنی $m-1$) صفر می‌شه، در این صورت معادله اصلاً درجه دوم نخواهد بود. پس فقط یک مقدار $m=-1$ قابل قبول هست.

۹۴. **گزینهٔ ۳** با فرض $x+1=t$ معادله رو بازنویسی می‌کنیم.

$$3t^2+10t-8=0$$

این معادله رو به روش کلی حل می‌کنیم. $a=3, b=10, c=-8$

$$\Delta=10^2-(4\times3\times(-8))=100+96=196$$

$$t=\frac{-10\pm\sqrt{196}}{2(3)}=\frac{-10\pm14}{6}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\\ t=\frac{-24}{6}=-4\end{cases}$$

حالا که متغیر کمکی محاسبه شده، بریم مقادیر x رو به‌دست بیاریم.

$$x+1=t\Rightarrow\begin{cases}x+1=\frac{2}{3}\Rightarrow x=-\frac{1}{3}\\ x+1=-4\Rightarrow x=-5\end{cases}$$

نسبت ریشهٔ بزرگ‌تر به ریشهٔ کوچک‌تر معادله رو تعیین می‌کنیم.

$$\frac{-\frac{1}{3}}{-5}=\frac{1}{15}$$

۹۵. **گزینهٔ ۱** از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم. با فرض $x-1=t$ معادله رو حل می‌کنیم. $t^2+2\sqrt{3}t-6=0 \ (a=1, b=2\sqrt{3}, c=-6)$

$$\Delta=(2\sqrt{3})^2-4(1\times(-6))=12+24=36$$

$$t=\frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{36}}{2\times1}=\frac{-2\sqrt{3}\pm6}{2}$$

در صورت کسر از ۲ فاکتور می‌گیریم و با مخرج ساده می‌کنیم.

$$t=\frac{2(-\sqrt{3}\pm3)}{2}\Rightarrow t=-\sqrt{3}\pm3$$

به‌جای t همون $x-1$ اولیه رو می‌ذاریم و x رو به‌دست میاریم.

$$x-1=-\sqrt{3}\pm3\Rightarrow\begin{cases}x-1=-\sqrt{3}+3\Rightarrow x=-\sqrt{3}+4\\ x-1=-\sqrt{3}-3\Rightarrow x=-\sqrt{3}-2\end{cases}$$

$x=-\sqrt{3}+4$ جواب بزرگ‌تر معادله است.

۹۶. **گزینهٔ ۴** با فرض $t = x^۲$ مساحت‌ها رو برحسب t می‌نویسیم.

$$\text{مساحت مربع} = (\text{ضلع})^۲ = t^۲$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۲} = \frac{t(t+۱)}{۲} = \frac{t^۲+t}{۲}$$

مساحت مربع سه واحد از مساحت مثلث بزرگ‌تر است.

$$t^۲ = \frac{t^۲+t}{۲}+۳$$

طرفین معادله رو در ۲ ضرب می‌کنیم و بعد از مرتب کردن حل می‌کنیم.

$$۲t^۲ = t^۲+t+۶ \Rightarrow t^۲-t-۶=۰$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (t-۳)(t+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۳ \\ t=-۲ \end{cases}$$

حالا می‌تونیم x رو به‌دست بیاریم.

$$x^۲ = t \Rightarrow \begin{cases} x^۲=۳ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۳} \\ x^۲=-۲ \;\text{جواب ندارد} \end{cases}$$

توجه داری که هر دو جواب $x=\pm\sqrt{۳}$ قابل قبوله، چون $x^۲$ اندازهٔ ضلع هست و حتی اگر x منفی باشه باز هم $x^۲$ مثبت می‌شه.

راستی یه چیزی آخرش بگم! این تست رو اگه از طریق جای‌گذاری گزینه‌ها بری خیلی راحت‌تر و سریع‌تر به جواب می‌رسی. برو امتحان کن.

۹۷. **گزینهٔ ۳** با فرض $x^۲+۴x=t$ معادله رو مرتب کرده و به کمک اتحاد جمله مشترک حل می‌کنیم.

$$t^۲+t-۱۲=۰ \Rightarrow (t+۴)(t-۳)=۰ \Rightarrow t=-۴ \;\text{یا}\; t=۳$$

معادلات رو برحسب x می‌نویسیم و حل می‌کنیم.

$$t=-۴ \Rightarrow x^۲+۴x=-۴ \Rightarrow x^۲+۴x+۴=۰$$

$$\xrightarrow[\text{دو جمله‌ای}]{\text{اتحاد مربع}} (x+۲)^۲=۰ \Rightarrow x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \;\text{ریشهٔ مضاعف}$$

$$t=۳ \Rightarrow x^۲+۴x=۳ \Rightarrow x^۲+۴x-۳=۰ \quad (a=۱, b=۴, c=-۳)$$

$$\Delta = ۴^۲-(۴\times۱\times(-۳)) = ۱۶+۱۲=۲۸$$

چون $\Delta>۰$ شده پس حتماً معادله دو ریشهٔ متمایز داره، یک ریشه هم که از معادلهٔ قبلی به‌دست اومده بود. پس معادله در مجموع سه ریشه داره.

۹۸. **گزینهٔ ۱** احتمالاً باید از داخل سه‌جمله‌ای بعد از پرانتز، عبارت $(x-۲)^۲$ رو پیدا کنیم. بریم ببینیم چیکار می‌شه کرد!

$$-۷x^۲+۲۸x-۱۶ = -۷(x^۲-۴x)-۱۶$$

$x^۲-۴x$ برای اینکه تبدیل به اتحاد مربع بشه ۴+ کم داره.

$$x^۲-۴x+۴=(x-۲)^۲$$

پس ۴+ توی پرانتز اضافه می‌کنیم ولی قانوناً برای اینکه خنثی بشه، باید ۴- هم داشته باشیم. چون ۴+ داخل پرانتزه و ضریب ۷- داره، ۴- بیرون پرانتز رو هم با ضریب ۷- می‌نویسیم که کاملاً خنثی بشه.

$$-۷(x^۲-۴x+۴)-۷(-۴)-۱۶ = -۷(x-۲)^۲+۱۲$$

حالا کل معادله رو دوباره می‌نویسیم.

$$(x-۲)^۴-۷x^۲+۲۸x-۱۶=۰ \Rightarrow (x-۲)^۴-۷(x-۲)^۲+۱۲=۰$$

با فرض $t=(x-۲)^۲$ معادله رو به روش تجزیه با اتحاد جمله مشترک حل می‌کنیم.

$$t^۲-۷t+۱۲=۰ \Rightarrow (t-۴)(t-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=۴ \\ t=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-۲)^۲=۴ \\ (x-۲)^۲=۳ \end{cases} \Rightarrow x-۲=\pm۲ \Rightarrow x_۱=۰, x_۲=۴$$

$$\Rightarrow x-۲=\pm\sqrt{۳} \Rightarrow x_۳=۲+\sqrt{۳}, x_۴=۲-\sqrt{۳}$$

حالا می‌تونیم مجموع ریشه‌ها رو محاسبه کنیم.

$$۰+۴+۲+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}=۸$$

۹۹. **گزینهٔ ۳** **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ ۱: نادرست، با توجه به اینکه $(x-۱)^۲$ همواره نامنفی هست، در صورتی تساوی برقرار نیست و معادله ریشهٔ حقیقی نداره که $(k+۱)$ منفی باشه. عبارت $(k+۱)$ هم در شرایطی منفیه که $k<-۱$ باشه. مثلاً به‌ازای $k=-\frac{۳}{۴}$ که در محدودهٔ $k<۰$ هست معادله ریشهٔ حقیقی داره.

گزینهٔ ۲: نادرست، خُب $k=-۱$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم ببینیم چی می‌شه!

$$(x-۱)^۲=-۱+۱ \Rightarrow (x-۱)^۲=۰ \Rightarrow x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$$

معادله ریشهٔ مضاعف $x=۱$ داره.

گزینهٔ ۳: درست، با توجه به نامنفی بودن $(x-۱)^۲$، اگر $k+۱$ هم نامنفی باشه معادله حتماً ریشهٔ حقیقی داره. $k+۱\geq۰ \Rightarrow k\geq-۱$

گزینهٔ ۴: نادرست، $k=۰$ رو در معادله می‌ذاریم، x رو به‌دست میاریم.

$$(x-۱)^۲=۰+۱ \Rightarrow (x-۱)^۲=۱ \Rightarrow x-۱=\pm۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۱ \Rightarrow x=۲ \\ x-۱=-۱ \Rightarrow x=۰ \end{cases}$$

معادله دوتا ریشه داره، ولی قرینه نیستن.

۱۰۰. **گزینهٔ ۲** سمت چپ معادله رو به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای بسط می‌دیم و معادله رو به فرم $ax^۲+bx+c=۰$ مرتب می‌کنیم.

$$x^۲-۲x+۱+x^۲+۲x+۱=k \Rightarrow ۲x^۲+۲-k=۰$$

مبیّن معادله رو برحسب k تعیین می‌کنیم: $a=۲, b=۰, c=۲-k$

$$\Delta=۰^۲-۴\times۲(۲-k)=-۱۶+۸k$$

اگه $\Delta<۰$ باشه، معادله ریشهٔ حقیقی نداره.

$$-۱۶+۸k<۰ \Rightarrow ۸k<۱۶ \Rightarrow k<۲$$

۱۰۱. **گزینهٔ ۴** معادله رو به‌صورت $ax^۲+bx+c=۰$ مرتب می‌کنیم:

$$x^۲+x+\frac{۱}{۴}=۰$$

روش اول: تعیین Δ

$$\Delta=۱^۲-(۴\times۱\times\frac{۱}{۴})=۱-۱=۰$$

چون $\Delta=۰$ شد، معادله دو ریشهٔ مساوی (یک ریشهٔ مضاعف) داره.

روش دوم: عبارت سمت چپ، اتحاد مربع دوجمله‌ایه. در این شرایط معادله ریشهٔ مضاعف (دو ریشهٔ مساوی) داره.

$$x^۲+x+\frac{۱}{۴}=۰ \Rightarrow (x+\frac{۱}{۲})^۲=۰$$

۱۰۲. **گزینهٔ ۲** اگه $\Delta=۰$ باشه، معادله ریشهٔ مضاعف داره.

$$a=۹, b=m, c=۱$$

$$\Delta=m^۲-(۴\times۹\times۱)=m^۲-۳۶ \xrightarrow{\Delta=۰} m^۲-۳۶=۰$$

$$\Rightarrow m^۲=۳۶ \Rightarrow m=\pm۶$$

تذکر: اگر به اندازهٔ کافی در مورد اتحادها تسلط داشته باشیم با مشاهدهٔ عبارت $۹x^۲+mx+۱$ متوجه می‌شویم که به‌ازای $m=\pm۶$ تبدیل به مربع کامل دوجمله‌ای می‌شود و در آن صورت، ریشهٔ مضاعف خواهد داشت.

۱۰۳. **گزینهٔ ۴** معادله رو مرتب می‌کنیم.

$$۲x^۲+x+۶=۰ \qquad (a=۲, b=۱, c=۶)$$

مبیّن معادله رو محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta=۱^۲-(۴\times۲\times۶)=۱-۴۸=-۴۷$$

بنابراین معادله ریشه نداره.

۱۰۴. **گزینهٔ ۱** مبیّن معادله رو برحسب m تعیین می‌کنیم.

$a=-۱, b=۶, c=m$

$\Delta=۶^۲-(۴\times(-۱)\times m)=۳۶+۴m$

اگه $\Delta<۰$ باشه، معادله جواب نداره.

$۳۶+۴m<۰ \Rightarrow ۴m<-۳۶ \Rightarrow m<-۹$

۱۰۵. **گزینهٔ ۱** معادلهٔ درجه دوم به شرطی ریشهٔ مضاعف داره که $\Delta=۰$ باشه.

$mx^۲-۳x-۴=۰ \quad (a=m, b=-۳, c=-۴)$

$\Delta=(-۳)^۲-۴(m\times(-۴))=۹+۱۶m$

$\xrightarrow{\Delta=۰} ۹+۱۶m=۰ \Rightarrow ۱۶m=-۹ \Rightarrow m=-\frac{۹}{۱۶}$

$m=-\frac{۹}{۱۶}$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم و ریشهٔ مضاعف رو به‌دست میاریم.

$-\frac{۹}{۱۶}x^۲-۳x-۴=۰$

ریشهٔ مضاعف: $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۳}{۲(-\frac{۹}{۱۶})}=\frac{۳}{-\frac{۹}{۸}}=-\frac{۲۴}{۹}=-\frac{۸}{۳}$

۱۰۶. **گزینهٔ ۴** اول معادله رو به فرم $ax^۲+bx+c=۰$ مرتب می‌کنیم.

$(m+۱)x^۲+\underbrace{mx-x}_{\text{فاکتورگیری}}+\frac{m}{۴}=۰ \Rightarrow (m+۱)x^۲+(m-۱)x+\frac{m}{۴}=۰$

برای اینکه معادله، درجه دوم باشه، شرط بدیهی اینه که ضریب $x^۲$ (یعنی $m+۱$) مخالف صفر باشه، یعنی: $m+۱\neq۰ \Rightarrow m\neq-۱$

فعلاً اینو داشته باش. حالا باید شرط داشتن دو ریشه رو برقرار کنیم (یعنی $\Delta>۰$).

$\Delta=\underbrace{(m-۱)^۲}_{\text{اتحاد مربع}}-\cancel{۴}(m+۱)(\frac{m}{\cancel{۴}})=m^۲-۲m+۱-m^۲-m$

$\Rightarrow \Delta=-۳m+۱ \xrightarrow{\Delta>۰} -۳m+۱>۰ \Rightarrow -۳m>-۱ \xrightarrow{\div(-۱)} m<\frac{۱}{۳}$

تذکر: چون طرفین رو به عدد منفی تقسیم کردیم، جهت نامعادله عوض شد.

تا الان دوتا شرط برای m به‌دست آوردیم، یعنی اگه می‌خواهیم معادله درجه دوم باشه و دو ریشهٔ متمایز داشته باشه، باید $m<\frac{۱}{۳}$ باشه، در ضمن شرط $m\neq-۱$ هم برقرار باشه. تنها محدوده‌ای که در گزینه‌ها هر دو شرط رو داره، گزینهٔ «۴» هست. عددهای کوچک‌تر از -۲ برای m هم شرط $m<\frac{۱}{۳}$ و هم شرط $m\neq-۱$ رو دارن.

۱۰۷. **گزینهٔ ۳** معادله رو به‌صورت استاندارد مرتب می‌کنیم:

$۲x^۲-۴x+c-۱=۰$ ، ضریب $x^۲$: ۲ ، ضریب x: -۴ ، ثابت: $c-۱$

روش اول: مبیّن معادله رو برحسب c تعیین می‌کنیم.

$\Delta=(-۴)^۲-۴\times۲(c-۱)=۱۶-۸c+۸=-۸c+۲۴$

اگه $\Delta=۰$ باشه، معادله ریشهٔ مضاعف داره.

$-۸c+۲۴=۰ \Rightarrow -۸c=-۲۴ \Rightarrow c=۳$

روش دوم: چون ضریب $x^۲$ و ضریب x معلوم هستن، می‌تونیم ریشهٔ مضاعف رو به‌دست بیاریم.

$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۴)}{۲(۲)}=\frac{۴}{۴}=۱$

حالا $x=۱$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم و c رو محاسبه می‌کنیم.

$۲(۱)^۲-۴(۱)+c-۱=۰ \Rightarrow ۲-۴+c-۱=۰ \Rightarrow c=۳$

۱۰۸. **گزینهٔ ۱** معادله رو به‌صورت $ax^۲+bx+c=۰$ مرتب می‌کنیم.

$mx^۲-۳mx+۵=۰ \quad (a=m, b=-۳m, c=۵)$

چون a و b هر دو مضربی از m هستن، می‌تونیم ریشهٔ مضاعف رو از رابطهٔ $\frac{-b}{۲a}$ به‌دست بیاریم.

$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۳m)}{۲m}=\frac{۳}{۲}$

معکوس ریشهٔ مضاعف، می‌شه $\frac{۲}{۳}$.

۱۰۹. **گزینهٔ ۱** معادله رو مرتب می‌کنیم.

$(k+۱)x^۲-۲kx+k-۱=۰ \quad (a=k+۱, b=-۲k, c=k-۱)$

مبیّن معادله رو برحسب k تعیین می‌کنیم.

$\Delta=(-۲k)^۲-۴(k+۱)(k-۱)=۴k^۲-۴(k^۲-۱)$

$=۴k^۲-۴k^۲+۴=۴$

مقدار Δ به عدد k بستگی نداره و به‌ازای هر مقدار k دلتا مساوی ۴ هست. پس معادله حتماً دو ریشهٔ حقیقی داره. اما گزینهٔ «۱» نادرسته! چرا؟

درسته که Δ به k بستگی نداره، اما هویت معادله به k بستگی داره. اگه $k=-۱$ باشه، معادله اصلاً درجه دوم نیست. پس گزینهٔ «۱» که گفته «همهٔ مقادیر k» نادرسته.

گزینهٔ نادرست رو پیدا کردیم ولی اگه موافقی بقیهٔ گزینه‌ها رو هم بررسی کنیم.

گزینهٔ ۲: درست است. $k=۰ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm۱$

گزینهٔ ۳: درست است، به‌ازای $x=۱$، تساوی همواره برقرار است.

$x=۱ \Rightarrow (k+۱)(۱)^۲-۲k(۱)+k=۱ \Rightarrow k+۱-۲k+k=۱ \Rightarrow ۰=۰$

گزینهٔ ۴: درست است.

$k=۱ \Rightarrow ۲x^۲-۲x=۰ \Rightarrow ۲x(x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \end{cases}$

۱۱۰. **گزینهٔ ۴** ریشهٔ مضاعف از رابطهٔ $-\frac{b}{۲a}$ به‌دست میاد.

$-\frac{۳}{۲a}=-۶ \Rightarrow -۱۲a=-۳ \Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$

$a=\frac{۱}{۴}$ و $x=-۶$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم تا c رو به‌دست بیاریم.

$\frac{۱}{۴}(-۶)^۲+۳(-۶)+۲-c=۰ \Rightarrow ۹-۱۸+۲-c=۰ \Rightarrow c=-۷$

حالا می‌تونیم $a\times c$ رو تعیین کنیم.

$a\times c=\frac{۱}{۴}\times-۷=-\frac{۷}{۴}$

۱۱۱. **گزینهٔ ۳** معادلهٔ درجه دوم در صورتی دوتا ریشهٔ متمایز داره که $\Delta>۰$ باشه.

$(m-۱)x^۲-۴x+۱=۰ \quad (a=m-۱, b=-۴, c=۱)$

$\Delta=(-۴)^۲-۴(m-۱)(۱)=۱۶-۴m+۴=-۴m+۲۰$

$\xrightarrow{\Delta>۰} -۴m+۲۰>۰ \Rightarrow -۴m>-۲۰ \xrightarrow{\div(-۴)} m<۵$

می‌دونید که اگه طرفین نامعادله رو در یک مقدار منفی ضرب یا به یک مقدار منفی ساده کنیم، جهت نامعادله عوض می‌شه.

حالا باید ببینیم کدام گزینه، کوچک‌تر از ۵ هست $(\sqrt{۲}\simeq۱/۴)$.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: ۵ که مشخصه کوچک‌تر از ۵ نیست.

گزینهٔ ۲: $۳+\sqrt{۵}$ بزرگ‌تر از ۵ هست. $۳+\sqrt{۵}\simeq۳+۲/۲\simeq۵/۲$

گزینهٔ ۳: $۲+\sqrt{۲}$ کوچک‌تر از ۵ هست. $\sqrt{۲}+۲\simeq۱/۴+۲\simeq۳/۴$

گزینهٔ ۴: $۴+\sqrt{۲}$ بزرگ‌تر از ۵ هست. $۴+\sqrt{۲}\simeq۴+۱/۴\simeq۵/۴$

۱۱۲. **گزینهٔ ۲** برای تعیین ریشه باید مقدار m مشخص بشه. شرط اینکه معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشه، اینه که $\Delta=0$ باشه.

$a=9\,,\,b=-3m\,,\,c=m$

$\Delta=(-3m)^2-4(9\times m)=9m^2-36m$

$\xrightarrow[\text{شرط ریشهٔ مضاعف}]{\Delta=0} 9m^2-36m=0 \xrightarrow{\div 9} m^2-4m=0$

$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} m(m-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=4 \end{cases}$

در خود سؤال گفته که $m=0$ قابل قبول نیست. پس $m=4$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم و ریشهٔ مضاعف رو از رابطهٔ $-\frac{b}{2a}$ به‌دست میاریم.

$9x^2-3mx+m=0 \xrightarrow{m=4} 9x^2-12x+4=0$

ریشهٔ مضاعف: $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{2\times 9}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$

۱۱۳. **گزینهٔ ۳** اگه $\Delta\geq 0$ باشه، معادله دارای جواب است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: $\Delta=(-1)^2-4(1\times k)=1-4k$

چون k هر مقداری می‌تونه باشه، پس عبارت $1-4k$ ممکنه منفی هم بشه که در این صورت ریشه نداره، مثلاً اگر $k=1$ باشه، $\Delta=1-4(1)=-3$ می‌شه و معادله جواب نداره.

گزینهٔ ۲: $\Delta=k^2-4(1\times 1)=k^2-4$

اینجا هم مثل گزینهٔ قبلی، ممکنه k عددی باشه که باعث بشه k^2-4 منفی بشه. مثلاً اگر $k=1$ باشه، $\Delta=1^2-4=-3$ می‌شه و معادله جواب نداره.

گزینهٔ ۳: $\Delta=(-k)^2-4(1\times -1)=k^2+4$

در این وضعیت k هر عددی باشه عبارت k^2+4 امکان نداره منفی بشه. چرا؟ چون k^2 که حتماً نامنفیه، ۴ تا هم بهش اضافه بشه قطعاً مثبت می‌شه، پس $\Delta=k^2+4>0$ هست و معادله حتماً جواب داره.

گزینهٔ ۴: $\Delta=(-1)^2-4(k\times 1)=1-4k$

باز هم مثل گزینهٔ «۱» و «۲» ممکنه k عددی باشه که Δ منفی بشه. مثلاً اگر $k=1$ باشه $\Delta=1-4(1)=-3$ می‌شه و معادله جواب نداره.

۱۱۴. **گزینهٔ ۳** در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر $\Delta\geq 0$ باشه، معادله حتماً جواب داره. پس بهترین راه اینه که Δ رو برای هر معادله‌ای تعیین کنیم.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: $x^2+x+a=0 \Rightarrow \Delta=(1)^2-4(1\times a)=1-4a$

به‌ازای بعضی مقادیر a، دلتا منفی می‌شه. مثلاً اگه $a=1$ باشه، Δ منفی می‌شه. $\Delta=1-4a \xrightarrow{a=1} \Delta=1-4=-3$

پس نمی‌تونیم ادعا کنیم دلتای این معادله همواره مثبته.

گزینهٔ ۲: $x^2+ax+1=0 \Rightarrow \Delta=a^2-4(1\times 1)=a^2-4$

اینجا هم دقیقاً مشکل گزینهٔ قبلی رو داره. مثلاً اگه $a=1$ باشه $\Delta=-3$ می‌شه، یعنی Δ منفی می‌شه پس به‌ازای هر مقدار a دلتا مثبت نمی‌شه.

گزینهٔ ۳: $x^2+ax-2=0 \Rightarrow \Delta=a^2-4(1\times -2)=a^2+8$

عبارت a^2+8 همواره مثبته. چرا؟ چون a^2 که هیچ‌وقت منفی نمی‌شه. ۸ تا هم بهش اضافه بشه، قطعاً مثبت خواهد شد. پس دلتای این معادله همواره مثبته و معادله حتماً ریشه داره.

یک نکته بگم، کل راه‌حل رو بشوره ببره: در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر a و c مختلف‌العلامت بودن، قطعاً معادله دو ریشهٔ متمایز داره.

۱۱۵. **گزینهٔ ۱** $x=0$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم.

$a(0)^2+b(0)+c=0 \Rightarrow 0+0+c=0 \Rightarrow c=0$

> **نکته:** در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر $c=0$ باشد، یک ریشهٔ معادله صفر است و ریشهٔ دیگر از رابطهٔ $-\frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید.

۱۱۶. **گزینهٔ ۳**

> **نکته:** معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ فقط در صورتی یک جواب صفر دارد که $c=0$ باشد.

معادله رو مرتب می‌کنیم. $mx^2+\underbrace{(2m+6)}_{b}x+\underbrace{m^2-9}_{c}=0$

$c=0$ رو برقرار می‌کنیم.

$m^2-9=0 \Rightarrow m^2=9 \Rightarrow m=\pm 3$

به‌ازای هر دو مقدار $m=\pm 3$ مقدار c صفر می‌شه ولی موضوع اینه که به‌ازای $m=-3$ عبارت $2m+6$ (یعنی b) هم صفر می‌شه. اگه هم c و هم b صفر بشن، معادله ریشهٔ مضاعف صفر داره، ولی ما می‌خواهیم فقط یکی از ریشه‌ها صفر بشه. پس فقط $m=3$ قابل قبول هست که c رو صفر می‌کنه ولی b رو صفر نمی‌کنه. مبادا گزینهٔ «۱» رو انتخاب کنی. چون مقدار m رو از ما نخواستن و تعدادش رو خواستن.

۱۱۷. **گزینهٔ ۴**

> **نکته:** در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ به شرط آنکه $\Delta>0$ و $b=0$ باشد، معادله دو ریشهٔ قرینه دارد.

اول شرط $b=0$ رو برقرار می‌کنیم. $k-4=0 \Rightarrow k=4$

حالا باید مطمئن بشیم که به‌ازای $k=4$ معادله اصلاً دو ریشه داره یا نداره؟

$k=4 \Rightarrow 4x^2-1=0 \Rightarrow 4x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

به‌ازای $k=4$ معادله دو ریشهٔ قرینهٔ $+\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ داره.

۱۱۸. **گزینهٔ ۳**

> **نکته:** در معادلهٔ درجه دوم اگر معادله دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد و ضریب x (b) صفر باشد، آن دو ریشه قرینه هستند.

شرط دو ریشهٔ قرینه رو بررسی می‌کنیم، یعنی ضریب x رو مساوی صفر قرار می‌دیم.

$4-a^2=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$

هم $+2$ و هم -2 در گزینه‌ها هست. نمی‌شه که دوتا گزینه رو انتخاب کنیم. احتمالاً یکی از این دوتا مشکل داره. خوب که دقت می‌کنیم متوجه می‌شیم اگه $a=-2$ باشه، ضریب x^2 هم صفر می‌شه $(-2+2=0)$. ضریب x^2 که نباید صفر بشه، پس $a=-2$ قابل قبول نیست و فقط $a=2$ باعث می‌شه معادله دو ریشهٔ قرینه داشته باشه.

۱۱۹. **گزینهٔ ۴** معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ به شرط داشتن دو جواب $(\Delta>۰)$، اگر $b=۰$ باشه دو ریشهٔ قرینه خواهد داشت.

اول معادله رو مرتب می‌کنیم. برای این کار از $x^۲$ فاکتور می‌گیریم.

$$\underbrace{(m+۱)}_{a}x^۲+\underbrace{(m^۲-۱)}_{b}x+\underbrace{m}_{c}=۰$$

شرط دو ریشهٔ قرینه رو برقرار می‌کنیم.

$$b=۰\Rightarrow m^۲-۱=۰\Rightarrow m^۲=۱\Rightarrow m=\pm۱$$

هر کدوم رو جداگانه بررسی می‌کنیم، ببینیم معادله اصلاً ریشه داره یا نه؟

$$m=۱\Rightarrow ۲x^۲+۱=۰\Rightarrow \Delta=۰^۲-۴(۲\times۱)=-۸$$

در این حالت معادله اصلاً ریشه نداره که بخواد دوتا ریشه‌اش قرینه بشن.

$$m=-۱\Rightarrow(-۱+۱)x^۲+((-۱)^۲-۱)x+(-۱)=۰\Rightarrow ۰x^۲+۰x-۱=۰$$
$$\Rightarrow -۱=۰$$

به‌ازای $m=-۱$ ضریب $x^۲$ و ضریب x هر دوتاشون صفر میشن و نه تنها معادله نداریم بلکه به تساوی غلط $-۱=۰$ می‌رسیم.

خلاصه که $m=۱$ و $m=-۱$ هیچ‌کدوم قابل قبول نیستن.

۱۲۰. **گزینهٔ ۲**

نکته: در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $a=c$ و $\Delta>۰$ باشد، جواب‌های معادله معکوس یکدیگرند.

خُب توی سؤال تأکید شده که معادله دو ریشه رو داره، پس شرط $\Delta>۰$ رو لازم نیست بررسی کنیم. در این حالت اگر $a=c$ باشه، جواب‌های معادله معکوس همدیگه هستن.

۱۲۱. **گزینهٔ ۱** معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ با شرط $\Delta>۰$ و $a=c$ دارای دو ریشهٔ معکوس است.

اول شرط $a=c$ رو برقرار می‌کنیم. $m+۱=۳-m\Rightarrow ۲m=۲\Rightarrow m=۱$

حالا $m=۱$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم و Δ رو محاسبه می‌کنیم. ببینیم معادله اصلاً دوتا جواب داره یا نه؟

$$(۱+۱)x^۲-۶x+۳-۱=۰\Rightarrow ۲x^۲-۶x+۲=۰\xrightarrow{\div۲}x^۲-۳x+۱=۰$$
$$\Rightarrow\Delta=(-۳)^۲-۴(۱\times۱)=۹-۴=۵$$

Δ مثبت شد، پس معادله دو ریشه داره و چون $a=c$ هست، دوتا جواب معکوس هم هستن، پس $m=۱$ قابل قبوله.

۱۲۲. **گزینهٔ ۱** $x=۱$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم.

$$a(۱)^۲+b(۱)+c=۰\Rightarrow a+b+c=۰$$

نکته: در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $a+b+c=۰$ باشد، یکی از ریشه‌های معادله $x=۱$ و ریشهٔ دیگر $x=\frac{c}{a}$ است.

۱۲۳. **گزینهٔ ۲** $x=۱$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم.

$$(۲k+۳)(۱)^۲-۵k(۱)+\frac{۱}{۲}=k\Rightarrow ۲k+۳-۵k+\frac{۱}{۲}=k$$
$$۲k-۵k-k=-۳-\frac{۱}{۲}\Rightarrow -۴k=-\frac{۷}{۲}\Rightarrow k=\frac{۷}{۸}$$

۱۲۴. **گزینهٔ ۳** $x=۱$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم.

$$m+۱+m-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow ۲m-\frac{۱}{۲}=۰\Rightarrow ۲m=\frac{۱}{۲}\Rightarrow m=\frac{۱}{۴}$$

ریشهٔ دیگه از رابطهٔ $\frac{c}{a}$ به‌دست میاد.

$$x=\frac{c}{a}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{m}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۴}}=-\frac{۱۲}{۲}=-۶$$

۱۲۵. **گزینهٔ ۲** معادلهٔ درجه اول رو حل می‌کنیم.

$$\frac{x+۳}{۲}=\frac{۲-x}{۳}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۳x+۹=۴-۲x\Rightarrow ۵x=-۵$$
$$\Rightarrow x=-۱$$

یک نکته داشتیم که اگه در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، رابطهٔ $a+c=b$ برقرار باشه، یکی از ریشه‌ها $x=-۱$ و یکی دیگه $x=-\frac{c}{a}$ هست.

۱۲۶. **گزینهٔ ۴**

نکته: اگر $x=-۱$ یکی از جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، رابطهٔ $a+c=b$ برقرار است و ریشهٔ دیگر از رابطهٔ $-\frac{c}{a}$ به‌دست می‌آید.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ۱: رابطهٔ $a+c=b$ برقرار نیست. $۲+۱\neq-۳$

گزینهٔ۲: رابطهٔ $a+c=b$ برقراره ولی ریشهٔ دیگه ۲ نیست.

$$۳+(-۱)=۲\Rightarrow x=-۱\ ,\ x=-\frac{c}{a}=-\frac{-۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

گزینهٔ۳: رابطهٔ $a+c=b$ برقرار نیست. $۱+(-۲)\neq۱$

گزینهٔ۴: رابطهٔ $a+c=b$ برقرار است و جواب دیگر نیز ۲ به‌دست میاد.

$$۱+(-۲)=-۱\Rightarrow x=-۱\ ,\ x=-\frac{c}{a}=-\frac{-۲}{۱}=۲$$

۱۲۷. **گزینهٔ ۴** روش اصلی این تست اینه که Δ رو برای هر معادله تشکیل بدیم و ببینیم Δ به‌ازای مقادیر مختلف k چه شرایطی داره ولی با کمی دقت در هر گزینه می‌تونیم یک نکته شناسایی کنیم.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ۱: مجموع ضرایب معادله صفر می‌شه، یعنی به‌ازای $k\neq-۱$ معادله حداقل یک ریشهٔ $x=۱$ داره.

$$\underbrace{(k+۱)}_{a}x^۲\underbrace{-۲k}_{b}x+\underbrace{k-۱}_{c}=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}x=۱$$

گزینهٔ۲: مجموع ضرایب a و c مساوی b می‌شه. یعنی به‌ازای $k\neq۵$ معادله حداقل یک ریشهٔ $x=-۱$ داره.

$$\underbrace{(k-۵)}_{a}x^۲\underbrace{-۲}_{b}x+\underbrace{۳-k}_{c}=۰\xrightarrow{a+c=b}x=-۱$$

گزینهٔ۳: ضریب $x^۲$ همواره مثبت و $c=-۳$ همواره منفیه، در این شرایط حتماً $\Delta>۰$ می‌شه و معادله حتماً ریشه داره.

$$\underbrace{(k^۲+۱)}_{a}x^۲+\underbrace{k}_{b}x\underbrace{-۳}_{c}=۰\xrightarrow{a>۰,c<۰}\Delta>۰$$

گزینهٔ۴: هیچ رابطهٔ مشخصی بین ضرایب وجود نداره، پس Δ تشکیل می‌دیم.

$$a=k^۲\ ,\ b=۲k-۱\ ,\ c=۱\Rightarrow\Delta=\underbrace{(۲k-۱)^۲}_{\text{اتحاد مربع}}-۴(k^۲\times۱)$$
$$=۴k^۲-۴k+۱-۴k^۲=-۴k+۱$$

به‌ازای برخی مقادیر k، مقدار Δ منفی می‌شه و معادله جواب نداره.

۱۲۸. **گزینهٔ ۱** معادله رو مرتب می‌کنیم و ضرب ریشه‌ها رو از رابطهٔ $\frac{c}{a}$ به‌دست میاریم.

$$\underbrace{(۲x-۱)^۲}_{\text{اتحاد مربع}}+\underbrace{(x+۲)^۲}_{\text{اتحاد مربع}}=۷\Rightarrow ۴x^۲-۴x+۱+x^۲+۴x+۴=۷$$
$$\Rightarrow ۵x^۲-۲=۰\Rightarrow x_۱\times x_۲=\frac{c}{a}=-\frac{۲}{۵}$$

۱۲۹. **گزینهٔ ۴** معادله رو مرتب می‌کنیم و جمع ریشه‌ها رو از رابطهٔ $-\frac{b}{a}$ به‌دست میاریم.

$$3x-x^2+4x-1=0 \Rightarrow -x^2+7x-1=0$$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{7}{-1}=7$$

۱۳۰. **گزینهٔ ۲** مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها رو به‌دست میاریم.

$$2x^2+5x+1=0$$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{5}{2} \qquad x_1\times x_2=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$$

برای اینکه مشخص کنیم $-\frac{5}{2}$ چقدر از $\frac{1}{2}$ کوچک‌تره، $\frac{1}{2}$ رو منهای $-\frac{5}{2}$ می‌کنیم

$$\frac{1}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{6}{2}=3$$

یعنی $-\frac{5}{2}$ به اندازهٔ ۳ واحد از $\frac{1}{2}$ کوچک‌تره.

۱۳۱. **گزینهٔ ۱** مجموع ریشه‌ها و ضرب ریشه‌ها رو به‌دست میاریم.

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-12}{3}=4 \ , \ x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{4}{3}$$

مقادیر به‌دست اومده رو در عبارت موردنظر جای‌گذاری می‌کنیم.

$$(x_1+x_2)^2-15x_1x_2=4^2-15\left(\frac{4}{3}\right)=16-20=-4$$

۱۳۲. **گزینهٔ ۳** مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها رو برحسب m تعیین می‌کنیم.

مجموع ریشه‌ها: $S=-\frac{b}{a}=-\frac{m-1}{2}=\frac{-m+1}{2}$

ضرب ریشه‌ها: $P=\frac{c}{a}=\frac{3m}{2}$

رابطهٔ ذکرشده بین مجموع و ضرب ریشه‌ها رو تشکیل می‌دیم و معادلهٔ به دست اومده رو حل می‌کنیم.

$$S=P+1 \Rightarrow \frac{-m+1}{2}=\frac{3m}{2}+1$$

$$\xrightarrow{\times 2} -m+1=3m+2 \Rightarrow -4m=1 \Rightarrow m=-\frac{1}{4}$$

۱۳۳. **گزینهٔ ۱** معادله رو مرتب می‌کنیم.

$$-\frac{x^2}{3}+4x-\frac{2}{3}x^2+2=0 \Rightarrow -\frac{3}{3}x^2+4x+2=0 \Rightarrow -x^2+4x+2=0$$

مجموع و ضرب ریشه‌ها رو به‌دست میاریم.

مجموع ریشه‌ها: $S=-\frac{b}{a}=-\frac{4}{-1}=4$

ضرب ریشه‌ها: $P=\frac{c}{a}=\frac{2}{-1}=-2$

نسبت مربع ضرب ریشه‌ها به مجموع ریشه‌ها رو تعیین می‌کنیم:

$$\frac{P^2}{S}=\frac{(-2)^2}{4}=\frac{4}{4}=1$$

۱۳۴. **گزینهٔ ۴** **روش اول: تشریحی**

$x=-2$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم و m رو به‌دست میاریم.

$$3(-2)^2+7(-2)-m=1 \Rightarrow 12-14-m=1 \Rightarrow m=-3$$

حالا $m=-3$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم و معادله رو حل می‌کنیم.

$$3x^2+7x-(-3)=1 \Rightarrow 3x^2+7x+2=0$$

$$\Delta=7^2-4(3\times 2)=49-24=25$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{25}}{2\times 3}=\frac{-7\pm 5}{6} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-7+5}{6}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3} \\ x=\frac{-7-5}{6}=\frac{-12}{6}=-2 \end{cases}$$

روش دوم: سرعتی

چون ضریب x^2 و ضریب x مشخص هست، از رابطهٔ مجموع ریشه‌ها استفاده می‌کنیم.

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \Rightarrow -2+x_2=-\frac{7}{3} \Rightarrow x_2=-\frac{7}{3}+2=-\frac{1}{3}$$

در هر دو روش مشخص شد که جواب دیگر معادله $-\frac{1}{3}$ هست.

۱۳۵. **گزینهٔ ۲** **روش اول: تشریحی**

$x=-4$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم و a رو به‌دست میاریم.

$$2(-4)^2-a(-4)+28=0 \Rightarrow 32+4a+28=0 \Rightarrow 4a=-60 \Rightarrow a=-15$$

$a=-15$ رو در معادله قرار می‌دیم و معادله رو حل می‌کنیم.

$$2x^2-(-15)x+28=0 \Rightarrow 2x^2+15x+28=0$$

$$\Delta=15^2-4(2\times 28)=225-224=1$$

$$x=\frac{-15\pm\sqrt{1}}{2(2)}=\frac{-15\pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-15+1}{4}=\frac{-14}{4}=-\frac{7}{2} \\ x=\frac{-15-1}{4}=\frac{-16}{4}=-4 \end{cases}$$

روش دوم: سرعتی

چون ضریب x و عدد ثابت معادله مشخص هستن از رابطهٔ ضرب ریشه‌ها استفاده می‌کنیم.

$$2x^2-ax+28=0$$

$$x_1\times x_2=\frac{28}{2}=14 \Rightarrow -4\times x_1=14 \Rightarrow x=-\frac{14}{4}=\frac{-7}{2}$$

در هر دو روش مشخص شد جواب دیگر معادله $-\frac{7}{2}$ هست.

۱۳۶. **گزینهٔ ۲** $6x^2+(k+1)x+k=0 \quad (a=6, b=k+1, c=k)$

مجموع ریشه‌ها از رابطهٔ $-\frac{b}{a}$ به‌دست میاد.

$$-\frac{k+1}{6}=\frac{1}{6} \xrightarrow{\times 6} -k-1=1 \Rightarrow k=-2$$

به‌ازای $k=-2$ معادله رو با ضرایب مشخص می‌نویسیم و حل می‌کنیم.

$$6x^2-x-2=0$$

$$\Delta=(-1)^2-4(6\times -2)=1+48=49$$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{49}}{2\times 6}=\frac{1\pm 7}{12} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1+7}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3} \\ x_2=\frac{1-7}{12}=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

ریشهٔ مثبت معادله، $x=\frac{2}{3}$ هست.

۱۳۷. **گزینهٔ ۳** $2x^2+(m+1)x-12=0 \quad (a=2, b=m+1, c=-12)$

مجموع ریشه‌ها از رابطهٔ $-\frac{b}{a}$ به‌دست میاد.

$$-\frac{m+1}{2}=\frac{5}{2} \xrightarrow{\times 2} -m-1=5 \Rightarrow m=-6$$

به‌ازای $m=-6$ معادله رو با ضرایب مشخص می‌نویسیم و معادله رو حل می‌کنیم.

$$2x^2-5x-12=0$$

$$\Delta=(-5)^2-4(2)\times(-12)=25+96=121$$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{121}}{2\times 2}=\frac{5\pm 11}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{16}{4}=4 \\ x_2=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

ریشهٔ مثبت معادله، $x=4$ هست.

۱۳۸. **گزینهٔ ۱** $2x^2+kx+1-k=0 \quad (a=2, b=k, c=1-k)$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها از رابطهٔ $\frac{c}{a}$ به‌دست میاد.

$$\frac{1-k}{2}=5 \Rightarrow 1-k=10 \Rightarrow k=-9$$

به‌ازای $k=-9$ معادله رو با ضرایب مشخص می‌نویسیم و معادله رو حل می‌کنیم.

$$2x^2-9x+10=0$$

$$\Delta=(-9)^2-4(2\times 10)=81-80=1$$

$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{9\pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2/5 \\ x_2=\frac{8}{4}=2 \end{cases}$$

ریشهٔ بزرگ‌تر معادله، $x=2/5$ هست.

۱۳۹. گزینهٔ ۲ **روش اول:** $x=-4$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم.

$$2(-4)^2-a(-4)+28=0\Rightarrow 32+4a+28=0$$
$$\Rightarrow 4a=-60\Rightarrow a=-15$$

به‌ازای $a=-15$ معادله رو با ضرایب مشخص می‌نویسیم و حل می‌کنیم.

$$2x^2+15x+28=0$$
$$\Delta=15^2-4(2\times 28)=225-224=1$$
$$x=\frac{-15\pm\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{-15\pm 1}{4}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{14}{4}=-\frac{7}{2}=-3/5\\ x=-\frac{16}{4}=-4\end{cases}$$

یک جواب معادله $x=-4$ بود، جواب دیگه هم $x=-3/5$ به‌دست اومد.

روش دوم: چون ضریب x^2 و جملهٔ ثابت معادله به‌ترتیب ۲ و ۲۸ و هر دو مشخص هستن از رابطهٔ مربوط به ضرب ریشه‌ها استفاده می‌کنیم.

$$\text{ضرب ریشه‌ها}=\frac{\text{جملهٔ ثابت}}{\text{ضریب } x^2}\Rightarrow x_1x_2=\frac{28}{2}=14$$
$$\xrightarrow{x_1=-4}-4x_2=14\Rightarrow x_2=\frac{14}{-4}=-\frac{7}{2}=-3/5$$

۱۴۰. گزینهٔ ۴ $2x^2+3mx+2m+6=0\quad(a=2,b=3m,c=2m+6)$

اگه معادله دارای دو ریشهٔ معکوس باشه، ضرب ریشه‌ها مساوی ۱ می‌شه (ضرب دو عدد معکوس 1 می‌شه دیگه!) ضرب ریشه‌ها هم که از رابطهٔ $\frac{c}{a}$ به‌دست میاد.

$$\frac{c}{a}=1\Rightarrow c=a\Rightarrow 2m+6=2\Rightarrow 2m=-4\Rightarrow m=-2$$

به‌ازای $m=-2$ معادله رو با ضرایب مشخص می‌نویسیم.

$$2x^2-6x+2=0$$

جمع ریشه‌ها از رابطهٔ $-\frac{b}{a}$ به‌دست میاد.

$$-\frac{b}{a}=-\frac{-6}{2}=3$$

۱۴۱. گزینهٔ ۱ $3x^2+7x-2m+2=0\quad(a=3,b=7,c=-2m+2)$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها از رابطهٔ $\frac{c}{a}$ به‌دست میاد.

$$\frac{-2m+2}{3}=-2\Rightarrow -2m+2=-6\Rightarrow -2m=-8\Rightarrow m=4$$

$m=4$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم. معادله رو با ضرایب مشخص حل می‌کنیم.

$$3x^2+7x-6=0$$
$$\Delta=7^2-4(3)\times(-6)=49+72=121$$
$$x=\frac{-7\pm\sqrt{121}}{2\times 3}=\frac{-7\pm 11}{6}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\\ x=\frac{-18}{6}=-3\end{cases}$$

$x=\frac{2}{3}$ ریشهٔ بزرگ‌تر معادله هست.

۱۴۲. گزینهٔ ۲ $-3x^2-kx+1=0\quad(a=-3,b=-k,c=1)$

مجموع ریشه‌ها از رابطهٔ $-\frac{b}{a}$ به‌دست میاد.

$$-\frac{-k}{-3}=\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{k}{3}=\frac{1}{2}\Rightarrow -2k=3\Rightarrow k=-\frac{3}{2}$$

$k=-\frac{3}{2}$ رو در معادلهٔ دوم جای‌گذاری می‌کنیم.

$$x^2+2(-\frac{3}{2})x-2=0\Rightarrow x^2-3x-2=0$$
$$\Delta=(-3)^2-4(1)\times(-2)=9+8=17$$

دلتا مثبته، پس معادله دو ریشهٔ حقیقی رو داره. در ضمن یک نکته داریم که اگه a و c یکیشون مثبت و دیگری منفی باشه، معادله دو ریشه داره که یکی از ریشه‌ها مثبته و یکی دیگه منفیه.

اینجا همین شرایط برقراره. $a=1$ مثبته و $c=-2$ منفیه. پس معادله دو ریشه با علامت‌های مختلف داره.

۱۴۳. گزینهٔ ۱ در عبارت موردنظر، مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}$$

صورت کسر، مجموع ریشه‌ها و مخرج کسر ضرب ریشه‌ها هست.

$$\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}=-\frac{3}{2}$$

۱۴۴. گزینهٔ ۲ طرفین معادله رو در ۴ ضرب می‌کنیم تا ضرایب معادله صحیح بشن.

$$4(\frac{1}{2}x^2)+4(5x)-4(\frac{3}{4})=4(0)\Rightarrow 2x^2+20x-3=0$$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها رو به‌ترتیب با S و P نمایش می‌دیم و از روابط زیر کمک می‌گیریم.

$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{20}{2}=-10\ ,\ P=x_1\times x_2=\frac{c}{a}=-\frac{3}{2}$$
$$x_1^2+x_2^2=S^2-2P=(-10)^2-2(-\frac{3}{2})=100+3=103$$

۱۴۵. گزینهٔ ۳ یه‌کم روی عبارت مورد نظر کار می‌کنیم، شاید از توش روابط آشنایی پیدا کنیم، می‌تونیم از $\alpha\beta$ فاکتور بگیریم.

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2\xrightarrow{\text{فاکتورگیری از }\alpha\beta}\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

عالی شد، $\alpha\beta$ حاصل ضرب و $\alpha+\beta$ حاصل جمع ریشه‌هاست.

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{5}{2}\ ,\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-8}{2}=4$$
$$\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{5}{2}\times 4=10$$

۱۴۶. گزینهٔ ۳ اگه ریشه‌های معادله رو به‌صورت x_1 و x_2 نمایش بدیم، حاصل‌ضربشون عدد ۱ می‌شه. چون معکوس همدیگه هستن، ضرب دو عدد معکوس هم ۱ می‌شه. $x_1\times x_2=1\Rightarrow\frac{c}{a}=1\Rightarrow a=c$

این نکته رو قبلاً هم گفته بودیم که اگه $a=c$ باشه، معادله دو ریشهٔ معکوس داره. $3=2-m\Rightarrow m=-1$

$m=-1$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم.

$$3x^2+7(-1-1)x+2-(-1)=0\Rightarrow 3x^2-14x+3=0$$

حالا مجموع ریشه‌ها رو تعیین می‌کنیم.

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-14}{3}=\frac{14}{3}$$

۱۴۷. گزینهٔ ۴ از α فاکتور می‌گیریم.

$$\alpha^2+\alpha\beta=42\Rightarrow\alpha(\alpha+\beta)=42$$

برای تعیین $\alpha+\beta$ (یعنی مجموع ریشه‌ها)، یک رابطه داشتیم:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-6m}{m}=\frac{6m}{m}=6$$
$$\alpha(\alpha+\beta)=42\xrightarrow{\alpha+\beta=6}6\alpha=42\Rightarrow\alpha=7$$

$\alpha=7$ یکی از ریشه‌های معادله است، پس می‌تونیم به‌جای x جای‌گذاری کنیم. $m(7^2)-6m(7)+5m=24\Rightarrow 49m-42m+5m=24$

$$12m=24\Rightarrow m=2$$

۱۴۸. گزینهٔ ۲

$$\frac{1}{\alpha}+\beta=0\Rightarrow\frac{1}{\alpha}=-\beta\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}-\alpha\beta=1\Rightarrow\alpha\beta=-1$$

حالا که ضرب ریشه‌ها مشخص شد می‌تونیم m رو به‌دست بیاریم.

$$\alpha\beta=-1\Rightarrow\frac{c}{a}=-1\Rightarrow\frac{2m+1}{1}=-1\Rightarrow 2m=-2\Rightarrow m=-1$$

$m=-1$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم و مجموع ریشه‌ها رو تعیین می‌کنیم.

$$x^2-3(-1)x+2(-1)+1=0\Rightarrow x^2+3x-1=0$$
$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{1}=-3$$

۱۴۹. **گزینهٔ ۱**

$\alpha.\beta>0 \Rightarrow \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{c}{1}>0 \Rightarrow c>0$

$\alpha+\beta<0 \Rightarrow -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow -\frac{b}{1}<0 \Rightarrow -b<0 \Rightarrow b>0$

۱۵۰. **گزینهٔ ۲** معادله رو مرتب می‌کنیم:

$(x+3)(1-x)+2x^2-6=0 \Rightarrow x-x^2+3-3x+2x^2-6=0$

$\Rightarrow x^2-2x-3=0 \xrightarrow{a+c=b} x=-1 , x=-\frac{c}{a}=3$

۱− و ۳ به اندازهٔ ۴ واحد اختلاف دارن. اختلاف ریشه‌ها $=3-(-1)=4$

تذکر: اختلاف ریشه‌ها رو از رابطهٔ $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ هم می‌تونستیم به‌دست بیاریم.

۱۵۱. **گزینهٔ ۲** طرفین معادله رو در (۱−) ضرب می‌کنیم که ضریب x^2 مثبت بشه، این‌طوری راحت‌تر می‌تونیم معادله رو به روش تجزیه یا Δ حل کنیم.

$2x^2-12x+9=0 \quad (a=2, b=-12, c=9)$

$\Delta=(-12)^2-4(2\times9)=144-72=72$

برای محاسبهٔ قدرمطلق اختلاف ریشه‌ها، رابطه داریم:

$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{72}}{|2|}=\frac{\sqrt{36\times2}}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

۱۵۲. **گزینهٔ ۱** حاصل‌ضرب ریشه‌ها از رابطهٔ $\frac{c}{a}$ به‌دست میاد.

$\frac{c}{a}=\frac{-4k-5}{2k}=\frac{-4k}{2k}-\frac{5}{2k}=-2-\frac{5}{2k}$

برای اینکه عبارت موردنظر بیشترین مقدار رو داشته باشه، باید شرایط زیر برقرار بشه.

شرط اول: k منفی باشه که عبارت $-\frac{5}{2k}$ مثبت بشه.

شرط دوم: k مضرب $\frac{1}{2}$ باشه تا ضرایب معادله از جمله $2k$ عدد صحیح بشن.

شرط سوم: قدرمطلق k، کوچک‌ترین مقدار رو داشته باشه تا مخرج کوچیک و کسر بزرگ بشه.

با توجه به همهٔ این شرایط متوجه می‌شیم به‌ازای $k=-\frac{1}{2}$ عبارت موردنظر، بیشترین مقدار رو خواهد داشت.

$k=-\frac{1}{2}$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم و Δ رو به‌دست میاریم.

$2(-\frac{1}{2})x^2-4x-4(-\frac{1}{2})-5=0$

$\Rightarrow -x^2-4x-3=0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2+4x+3=0$

$\Delta=4^2-4(1\times3)=16-12=4$

۱۵۳. **گزینهٔ ۴** مجموع و ضرب ریشه‌ها رو مشخص می‌کنیم.

$S=x_1+x_2=-3+2=-1 \quad , \quad P=x_1\times x_2=-3\times2=-6$

مقادیر S و P رو در رابطهٔ مربوطه جای‌گذاری می‌کنیم.

$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-(-1)x+(-6)=0 \Rightarrow x^2+x-6=0$

۱۵۴. **گزینهٔ ۱** مجموع و ضرب جواب‌ها رو به‌دست میاریم.

$S=-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2} \; , \; P=-\frac{1}{2}\times3=-\frac{3}{2}$

مقادیر S و P رو در $x^2-Sx+P=0$ جای‌گذاری می‌کنیم.

$x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0 \xrightarrow{\times2} 2x^2-5x-3=0$

با مقایسهٔ معادله‌ای که به‌دست آوردیم با معادله‌ای که داده شده، پارامترهای مجهول رو مشخص می‌کنیم.

$a=-5, b=-3 \Rightarrow a\times b=15$

۱۵۵. **گزینهٔ ۳** مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها رو به‌دست میاریم.

$S=5+3\sqrt{2}+5-3\sqrt{2}=10$

$P=\underbrace{(5+3\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})}_{\text{اتحاد مزدوج}}=5^2-(3\sqrt{2})^2=25-(9\times2)=7$

مقادیر S و P رو در الگوی $x^2-Sx+P=0$ جای‌گذاری می‌کنیم.

$x^2-10x+7=0$

تذکر: معادلهٔ به‌دست آمده منحصربه فرد نیست و هر مضربی از معادلهٔ بالا نیز می‌تواند جواب باشد که البته در گزینه‌ها نیست.

۱۵۶. **گزینهٔ ۱** مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها رو به‌دست میاریم.

$S=\frac{\sqrt{2}}{2}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

$P=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}^2}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$
$=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

مقادیر S و P رو در الگوی $x^2-Sx+P=0$ جای‌گذاری می‌کنیم.

$x^2-x+\frac{\sqrt{2}-1}{2}=0$

۱۵۷. **گزینهٔ ۴** به روش تجزیه با اتحاد جمله مشترک، ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده رو به‌دست میاریم.

$x^2+4x-12=0 \Rightarrow (x+6)(x-2)=0 \Rightarrow x=-6 , x=2$

حالا به قرینهٔ هرکدام از ریشه‌ها، یک واحد اضافه می‌کنیم.

$x_1=-(-6)+1=7 \quad , \quad x_2=-2+1=-1$

باید معادله‌ای تشکیل بدیم که ریشه‌هاش ۷ و ۱− باشن.

$S=x_1+x_2=7+(-1)=6 \quad , \quad P=x_1\times x_2=7\times(-1)=-7$

$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-6x-7=0$

۱۵۸. **گزینهٔ ۱** به کمک ضرایب معادلهٔ درجه دوم داده‌شده، عبارت‌های موردنظر رو محاسبه می‌کنیم.

ضرب ریشه‌ها: $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-3 \Rightarrow -\alpha\beta=3$

جمع ریشه‌ها: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-8 \Rightarrow \frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(-8)=-4$

حالا باید معادلهٔ درجه دومی تشکیل بدیم که ریشه‌هاش ۳ و ۴− باشن.

$\left.\begin{array}{l}S=-4+3=-1\\P=-4\times3=-12\end{array}\right\} \xrightarrow{x^2-Sx+P=0} x^2+x-12=0$

۱۵۹. **گزینهٔ ۴** مجموع و ضرب ریشه‌ها رو مشخص می‌کنیم.

$S=2\sqrt{3}+(-2\sqrt{3})=0$

$P=2\sqrt{3}\times(-2\sqrt{3})=-4\times3=-12$

مقادیر S و P رو در الگوی $x^2-Sx+P=0$ قرار می‌دیم. $x^2-12=0$

۱۶۰. **گزینهٔ ۱** حاصل‌ضرب و مجموع ریشه‌ها یعنی S و P رو داریم، پس می‌تونیم معادله رو طبق الگوی $x^2-Sx+P=0$ تشکیل بدیم.

$x_2=2-x_1 \Rightarrow x_2+x_1=2 \Rightarrow S=2$

$x_1\times x_2=-6 \Rightarrow P=-6$

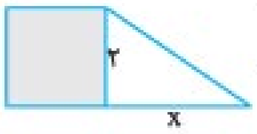
$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-2x-6=0$

حالا می‌تونیم قدرمطلق اختلاف ریشه‌ها رو از رابطهٔ $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ به‌دست بیاریم.

$\Delta=(-2)^2-4(1\times-6)=4+24=28$

$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{28}}{1}=\sqrt{4\times7}=2\sqrt{7}$

۱۶۱. گزینهٔ ۴ ضلع مربع که ارتفاع مثلث هم هست برابر با ۲ هستن. قاعدهٔ مثلث رو x در نظر می‌گیریم. مساحت مربع و مثلث رو تعیین می‌کنیم.



مساحت مربع = ضلع به توان دو = $۲^۲ = ۴$

مساحت مثلث = $\frac{۱}{۲}$ (قاعده × ارتفاع) = $\frac{۱}{۲} \times ۲ \times x = x$

مسئله رو به معادله تبدیل می‌کنیم و حل می‌کنیم.

$$۴ = \frac{۱}{۳}x + ۳ \Rightarrow \frac{۱}{۳}x = ۱ \Rightarrow x = ۳$$

برای تعیین مساحت ذوزنقه، بهترین کار اینه که مساحت مربع و مساحت مثلث رو با هم جمع کنیم.

مساحت ذوزنقه = مساحت مربع + مساحت مثلث = $۴ + ۳ = ۷$

۱۶۲. گزینهٔ ۲ مساحت مربع = $(\text{ضلع})^۲ = x^۲$

$$\text{مساحت دایره} = \pi(\text{شعاع})^۲ = \pi r^۲ = \pi\left(\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}x\right)^۲ = \pi\frac{۱}{۲\pi}x^۲ = \frac{x^۲}{۲}$$

$$x^۲ + \frac{x^۲}{۲} = ۶ \xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ + x^۲ = ۱۲ \Rightarrow ۳x^۲ = ۱۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

طول ضلع نمی‌تونه منفی باشه، پس $x = ۲$ قابل قبوله.

۱۶۳. گزینهٔ ۲ مساحت مربع و دایره رو برحسب x می‌نویسیم.

مساحت مربع = $x^۲$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^۲ = \pi\left(\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}x\right)^۲ = \pi\frac{۱}{۲\pi}x^۲ = \frac{۱}{۲}x^۲$$

مجموع مساحت دو شکل رو مساوی ۶ قرار می‌دیم و معادله رو حل می‌کنیم.

$$x^۲ + \frac{۱}{۲}x^۲ = ۶ \xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ + x^۲ = ۱۲$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ = ۱۲ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = +۲,\ x = -۲$$

چون طول ضلع مربع رو با x نمایش دادیم $x = ۲$ قابل قبوله. حالا محیط مربع رو حساب می‌کنیم.

محیط مربع = $۴x = ۴ \times ۲ = ۸$

۱۶۴. گزینهٔ ۱ مساحت هر سه شکل رو برحسب x مشخص می‌کنیم.

مساحت مربع = $(\text{ضلع})^۲ = x^۲$

> **نکته:** مساحت دایره = $\pi(\text{شعاع})^۲ = \pi r^۲$
>
> مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین = $\frac{(\text{وتر})^۲}{۴} = \frac{x^۲}{۴}$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^۲ = \pi\left(\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}x\right)^۲ = \pi\frac{۱}{۲\pi}x^۲ = \frac{x^۲}{۲}$$

حالا معادله رو می‌نویسیم و حل می‌کنیم.

$$x^۲ + \frac{x^۲}{۴} + \frac{x^۲}{۲} = ۷ \xrightarrow{\times ۴} ۴x^۲ + x^۲ + ۲x^۲ = ۲۸$$

$$۷x^۲ = ۲۸ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

چون x اندازهٔ ضلع هست، مقدار $x = -۲$ قابل قبول نیست.

نسبت مساحت مربع به محیط آن:

$$\frac{\text{اندازهٔ مساحت}}{\text{اندازهٔ محیط}} = \frac{x^۲}{۴x} = \frac{۲^۲}{۴ \times ۲} = \frac{۱}{۲}$$

۱۶۵. گزینهٔ ۳ مساحت هر قسمت از شکل رو به طور جداگانه می‌نویسیم.

مساحت مربع بزرگ = $۶^۲ = ۳۶$

مساحت مربع کوچک (هاشورخورده) = $x^۲$

مساحت مستطیل (هاشورخورده) = $۲x \times x = ۲x^۲$

$$\text{مساحت مثلث قائم‌الزاویه (هاشورخورده)} = \frac{\sqrt{۲}x \times \sqrt{۲}x}{۲} = \frac{۲x^۲}{۲} = x^۲$$

از مربع اصلی سه قسمت هاشورخورده رو بریدیم، ۲۴ سانتی‌متر مربع باقی‌مونده، معادلهٔ مربوط به اون رو می‌نویسیم:

$$۳۶ - x^۲ - ۲x^۲ - x^۲ = ۲۴ \Rightarrow -۴x^۲ = -۱۲ \Rightarrow x^۲ = ۳ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳}$$

با توجه به اینکه x اندازهٔ ضلعه، پس نمی‌تونه منفی باشه. $x = \sqrt{۳}$ جواب قابل قبوله اما حواست باشه که از ما خواسته طول مستطیل رو حساب کنیم. طول مستطیل = $۲x = ۲\sqrt{۳}$

۱۶۶. گزینهٔ ۳ اول مساحت همهٔ قسمت‌ها رو حساب می‌کنیم.

مساحت مستطیل بزرگ = $۶^۲ = ۳۶$

مساحت مستطیل کوچک = $۲x \times x = ۲x^۲$

مساحت مربع = $x^۲$

$$\text{مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲}$$

$$= \frac{\sqrt{۲}x \times \sqrt{۲}x}{۲} = \frac{۲x^۲}{۲} = x^۲$$

حالا از مستطیل بزرگ سه قطعه رو کم می‌کنیم و اون رو مساوی با قسمت باقی‌مانده قرار می‌دیم.

$$۳۶ - ۲x^۲ - x^۲ - x^۲ = ۲۴ \Rightarrow -۴x^۲ = -۱۲ \Rightarrow x^۲ = ۳ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳}$$

طول ضلع نمی‌تونه منفی باشه، پس $x = +\sqrt{۳}$ قابل قبوله.

مساحت مستطیل کوچک = $۲x^۲ = ۲ \times \sqrt{۳}^۲ = ۲ \times ۳ = ۶$

۱۶۷. گزینهٔ ۴

$$\text{مساحت مستطیل} = (۳x-۲)(x+۱) = ۳x^۲ + ۳x - ۲x - ۲ = ۳x^۲ + x - ۲$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲} \times ۲x(۲x+۴) = x(۲x+۴) = ۲x^۲ + ۴x$$

حالا معادله رو می‌نویسیم و اون رو حل می‌کنیم.

مساحت مستطیل = مساحت مثلث + ۸

$$۳x^۲ + x - ۲ = ۲x^۲ + ۴x + ۸ \Rightarrow x^۲ - ۳x - ۱۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۲)(x-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \\ x = ۵ \end{cases}$$

طول ضلع نمی‌تونه منفی باشه، پس $x = ۵$ قابل قبوله.

محیط مستطیل رو حساب کنیم.

طول $= ۳(۵) - ۲ = ۱۳$ ، عرض $= ۵ + ۱ = ۶$

محیط مستطیل = ۲(طول + عرض) $= ۲(۱۳ + ۶) = ۲(۱۹) = ۳۸$

۱۶۸. گزینهٔ ۲ اختلاف هر دو عدد زوج متوالی ۲ واحده، پس عدد کوچک‌تر رو x و عدد بزرگ‌تر رو $x+۲$ در نظر می‌گیریم و معادله رو می‌نویسیم.

$$\frac{x(x+۲)}{۲} = ۳(x + x + ۲) + ۶ \Rightarrow \frac{x^۲ + ۲x}{۲} = ۳(۲x+۲) + ۶$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲ + ۲x}{۲} = ۶x + ۱۲ \xrightarrow{\times ۲} x^۲ + ۲x = ۱۲x + ۲۴$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۱۰x - ۲۴ = ۰ \Rightarrow (x-۱۲)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۲ \\ x = -۲ \end{cases}$$

$x = -۲$ عدد طبیعی نیست، پس $x = ۱۲$ قابل قبوله.

یادته که عدد کوچک‌تر رو x در نظر گرفته بودیم و عدد بزرگ‌تر $x+۲$ بود. پس دوتا عدد ۱۲ و ۱۴ هستن. حالا اختلاف نصف ۱۴ با ثلث ۱۲ رو حساب می‌کنیم.

$$\frac{۱۴}{۲} - \frac{۱۲}{۳} = ۷ - ۴ = ۳$$

۱۶۹. گزینهٔ ۲ مساحت مستطیل بزرگ = $۶۰ \times ۴۰ = ۲۴۰۰$

مساحت مستطیل کوچک = $۲x \times x = ۲x^۲$

مساحت مثلث = $\frac{۱}{۲}$(قاعده × ارتفاع) $= \frac{۱}{۲}(۲x \times ۳x) = ۳x^۲$

مساحت مثلث + مساحت مستطیل سفید = مساحت قسمت سفید

$= 2x^2 + 3x^2 = 5x^2$

مساحت قسمت سفید − مساحت مستطیل بزرگ = مساحت قسمت آبی

$= 2400 - 5x^2$

هزینهٔ برچسب قسمت سفید $= 30 \times 5x^2 = 150x^2$

هزینهٔ برچسب قسمت آبی $= 10(2400 - 5x^2) = 24000 - 50x^2$

در سؤال گفته شده که مجموع هزینهٔ برچسب سفید و آبی ۳۴۰۰۰ تومان شده، پس داریم:

$150x^2 + 24000 - 50x^2 = 34000 \Rightarrow 100x^2 = 10000$

$\Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10$

طول ضلع نمی‌تونه منفی باشه، پس $x = 10$ قابل قبوله.

۱۷۰. گزینهٔ ۳ مساحت مربع و مثلث رو برحسب x می‌نویسیم.

مساحت مربع = ضلع به توان ۲ $= x^2$

مساحت مثلث $= \frac{1}{2}$ (قاعده × ارتفاع) $= \frac{1}{2}(10 \times x) = 5x$

مسئلهٔ توصیفی رو به معادلهٔ ریاضی تبدیل کرده و حل می‌کنیم.

$5x = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3} \xrightarrow{\times 3} 15x = 2x^2 - 8$

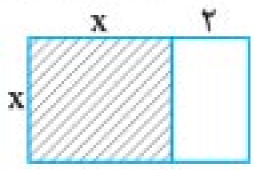
$\Rightarrow 2x^2 - 15x - 8 = 0 \quad (a = 2, b = -15, c = -8)$

$\Delta = (-15)^2 - 4(2 \times -8) = 225 + 64 = 289$

$x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{289}}{2 \times 2} = \frac{15 \pm 17}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{32}{4} = 8 \\ x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

اندازهٔ ضلع نمی‌تونه منفی باشه، پس $x = 8$ قابل قبوله، حالا مساحت مثلث رو دقیق به‌دست میاریم.

مساحت مثلث $= 5x = 5 \times 8 = 40$



۱۷۱. گزینهٔ ۳ عرض مستطیل رو که ضلع مربع هم می‌شه، x در نظر می‌گیریم. مساحت مربع و مساحت مستطیل بزرگ رو برحسب x می‌نویسیم.

مساحت مربع $= x^2$

مساحت مستطیل بزرگ $= (x+2)x = x^2 + 2x$

مسئله رو به معادله تبدیل کرده و معادله رو حل می‌کنیم.

$x^2 = \frac{3}{4}(x^2 + 2x) + 18 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 = 3(x^2 + 2x) + 72$

$\Rightarrow 4x^2 = 3x^2 + 6x + 72$

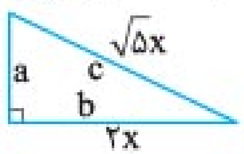
$\Rightarrow x^2 - 6x - 72 = 0 \Rightarrow (x-12)(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -6 \end{cases}$

ضلع نمی‌تونه منفی باشه، پس $x = 12$ رو قبول می‌کنیم. حالا می‌تونیم محیط مستطیل بزرگ رو حساب کنیم.

عرض مستطیل بزرگ $= x = 12$

طول مستطیل بزرگ $= x + 2 = 12 + 2 = 14$

محیط مستطیل بزرگ $= 2(14 + 12) = 2(26) = 52$



۱۷۲. گزینهٔ ۳ برای تعیین مساحت مثلث قائم‌الزاویه، به کمک رابطهٔ فیثاغورث اندازهٔ ضلع قائم رو برحسب x تعیین می‌کنیم.

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + (2x)^2 = (\sqrt{5}x)^2$

$\Rightarrow a^2 + 4x^2 = 5x^2 \Rightarrow a^2 = x^2 \Rightarrow a = x$

توجه داشته باش که اندازهٔ ضلع رو چه با a نمایش بدیم چه با x نمایش بدیم قطعاً مثبته. مساحت مثلث و محیط متوازی‌الاضلاع رو برحسب x می‌نویسیم.

مساحت مثلث $= \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{x \times 2x}{2} = x^2$

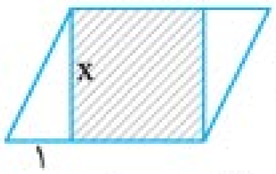
محیط متوازی‌الاضلاع $= 2(x + x + 2) = 2(2x + 2) = 4x + 4$

با توجه به اطلاعات مسئله، معادله رو تشکیل می‌دیم و حل می‌کنیم.

$x^2 + 7 = 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

$x = 1$ قابل قبول نیست، چون در این صورت ارتفاع متوازی‌الاضلاع که $x - 1$ هست، صفر می‌شه. به‌ازای $x = 3$ مساحت متوازی‌الاضلاع رو حساب می‌کنیم.

مساحت متوازی‌الاضلاع $= (x+2)(x-1) = (3+2)(3-1) = 5 \times 2 = 10$



۱۷۳. گزینهٔ ۳ ضلع مربع که ارتفاع مثلث هم محسوب می‌شه، x در نظر می‌گیریم. مساحت مربع و مثلث رو برحسب x می‌نویسیم.

مساحت مربع $= x^2$

مساحت مثلث $= \frac{1}{2}(x \times 1) = \frac{x}{2}$

معادله رو تشکیل می‌دیم و حل می‌کنیم.

$x^2 = \frac{3}{4} \times \frac{x}{2} + \frac{27}{32} \Rightarrow x^2 = \frac{3x}{8} + \frac{27}{32}$

$\xrightarrow{\times 32} 32x^2 = 12x + 27 \Rightarrow 32x^2 - 12x - 27 = 0$

$\Delta = (-12)^2 - 4(32) \times (-27) = 144 + 3456 = 3600$

$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{3600}}{2 \times 32} = \frac{12 \pm 60}{64} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{72}{64} = \frac{9}{8} \\ x = \frac{-48}{64} \end{cases}$

ضلع نمی‌تونه منفی باشه، پس $x = \frac{9}{8}$ قابل قبوله.

قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع $= 1 + x = 1 + \frac{9}{8} = \frac{17}{8}$

۱۷۴. گزینهٔ ۲ مجموع تولیدات سالیانه رو برحسب هزار می‌نویسیم. معادله رو تشکیل می‌دیم و اون رو حل می‌کنیم.

$x + x + 1 + 2x + x^2 = 321 \Rightarrow x^2 + 4x - 320 = 0$

$(x+20)(x-16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x = -20 \end{cases}$

تعداد کالا نمی‌تونه منفی باشه، پس $x = 16$ قبوله، در این صورت تعداد کالای تولیدی تابستان ۱۷ هزار هست.

۱۷۵. گزینهٔ ۱ عدد موردنظر رو x فرض می‌کنیم و معادله رو می‌نویسیم.

$2x^2 = 6x + 20 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 20 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 3x - 10 = 0$

$\Rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$

$x = -2$ عدد طبیعی نیست، پس $x = 5$ قابل قبوله. نصف ۵ هم ۲/۵ می‌شه.

۱۷۶. گزینهٔ ۳ سن دو برادر رو x و $x + 3$ در نظر می‌گیریم. معادله رو می‌نویسیم و حل می‌کنیم.

$x(x+3) = 10(\underbrace{x + x}_{2x} + 3) - 30 \Rightarrow x^2 + 3x = 20x$

$x^2 - 17x = 0 \Rightarrow x(x-17) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 17 \end{cases}$

سن $x = 0$ قابل قبول نیست. پس برادر کوچک‌تر ۱۷ سال و برادر بزرگ‌تر ۲۰ سال داره. مجموع ارقام ۱۷ هم ۸ می‌شه.

طول نقطه‌ها رو در یکی از ضابطه‌ها (مثلاً تابع خطی) قرار می‌دیم تا عرض نقطه‌ها رو به دست بیاریم.

$$y=3-x\begin{cases}\xrightarrow{x=-3} y=3-(-3)=6 & A(-3,6)\\ \xrightarrow{x=1} y=3-1=2 & B(1,2)\end{cases}$$

مجموع عرض نقاط برخورد، ۸ = ۲+۶ می‌شه.

۶۳۷. **گزینهٔ ۲** با مختصات نقاط (۲,۰) و (۰,۲)شیب خط رو به دست میاریم.

$$m=\frac{0-2}{2-0}=\frac{-2}{2}=-1$$

از روی نمودار مشخصه که عرض از مبدأ خط برابر ۲ هست. پس ضابطهٔ تابع f رو می‌نویسیم.

$$f(x)=mx+h\xrightarrow[h=2]{m=-1}f(x)=-x+2$$

معادله رو تشکیل می‌دیم.

$$f^2(x)=3-f(x)\Rightarrow(-x+2)^2=3-(-x+2)$$
$$\Rightarrow x^2-4x+4=3+x-2\Rightarrow x^2-5x+3=0$$

مجموع ریشه‌های معادله رو به دست میاریم.

$$-\frac{b}{a}=-\frac{-5}{2}=\frac{5}{2}$$

۶۳۸. **گزینهٔ ۴** طول رأس سهمی از رابطهٔ $-\frac{b}{2a}$ به دست میاد.
محور تقارن سهمی با طول رأس سهمی یکی هست.

$$-\frac{b}{2a}=3\Rightarrow\frac{-b}{2(-1)}=3\Rightarrow b=6$$

بیشترین مقدار تابع، همون y رأسه، پس مختصات رأس سهمی به‌صورت (۳,۵) نوشته می‌شه که می‌تونیم در ضابطهٔ سهمی جای‌گذاری کنیم.

$$5=-3^2+6(3)+c\Rightarrow 5=-9+18+c\Rightarrow c=-4$$

۶۳۹. **گزینهٔ ۲** تابع هزینه − تابع درآمد = تابع سود

$$P(x)=-\frac{x^2}{3}+70x-100-20x\Rightarrow y=-\frac{x^2}{3}+50x-100$$

$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{50}{2(-\frac{1}{3})}=75$$

$$y_{max}=-\frac{(75)^2}{3}+50(75)-100$$
$$=-1875+3750-100=1775$$

۶۴۰. **گزینهٔ ۳** از روش تستی استفاده می‌کنیم.
اگر مجموع دو متغیر مقدار ثابتی باشه، در صورتی حاصل‌ضرب اون‌ها بیشترین مقدار رو ایجاد می‌کند که هرکدوم از متغیرها مساوی با نصف عدد ثابت مربوطه باشن.

$$3x+2a=60\Rightarrow\begin{cases}3x=\frac{60}{2}\Rightarrow 3x=30\Rightarrow x=10\\ 2a=\frac{60}{2}\Rightarrow 2a=30\Rightarrow a=15\end{cases}$$

$$(a\times x)_{max}=15\times10=150$$

۶۴۱. **گزینهٔ ۳** به کل ماهی‌های درون حوضچه **جامعه** گفته می‌شود. به هریک از ماهی‌های درون حوضچه **واحد آماری** گفته می‌شود. به وزن ۵ ماهی **داده‌های نمونه** گفته می‌شود.

۶۴۲. **گزینهٔ ۲** روش‌های گردآوری داده‌ها ۴تا هستن:
مشاهده، مصاحبه، پرسش‌نامه و دادگان‌ها

۶۴۳. **گزینهٔ ۳** میانگین داده‌ها رو حساب می‌کنیم و مساوی ۱۱ قرار می‌دیم تا x به دست بیاد:

$$\bar{x}=\frac{12+15+7+x+23+15+15+3+1}{9}=\frac{91+x}{9}$$
$$\Rightarrow\frac{91+x}{9}=11\Rightarrow 91+x=99\Rightarrow x=8$$

با در نظر گرفتن $x=8$ داده‌ها رو مرتب می‌کنیم تا میانه رو تعیین کنیم.

$$1,3,7,8,\underset{\text{میانه}}{\underset{\downarrow}{12}},\underbrace{15,15,15}_{\text{مد}},23$$

مشخصه که میانه برابر با ۱۲ و مُد برابر با ۱۵ هست، پس میانه و مُد ۳ واحد اختلاف دارن.

۶۴۴. **گزینهٔ ۱** میانگین داده‌ها رو حساب می‌کنیم.

$$\bar{x}=\frac{4+2(10)+11+12+13}{6}=\frac{60}{6}=10$$

حالا واریانس رو حساب می‌کنیم.

$$\sigma^2=\frac{(4-10)^2+2(10-10)^2+(11-10)^2+(12-10)^2+(13-10)^2}{6}$$
$$=\frac{36+0+1+4+9}{6}=\frac{50}{6}=\frac{25}{3}$$

حالا انحراف معیار رو حساب می‌کنیم.

$$\sigma=\sqrt{\frac{25}{3}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}\simeq\frac{5}{1/7}\simeq 3$$

۶۴۵. **گزینهٔ ۴** محدودهٔ موردنظر رو برحسب میانگین و انحراف معیار می‌نویسیم.

$$(45,55)=(\bar{x}-\sigma,\bar{x}+\sigma)$$

در این محدوده تقریباً ۶۸ درصد داده‌ها قرار دارن. حالا باید ۶۸ درصد ۲۰۰۰ نفر رو حساب کنیم.

$$\frac{68}{100}\times2000=1360$$

۶۴۶. **گزینهٔ ۱** تعداد کل داده‌ها از مجموع فراوانی‌ها به دست میاد.

$$n=7+16+10+27=60$$

$$\text{زاویهٔ مرکزی}=\frac{\text{فراوانی دادهٔ موردنظر}}{\text{فراوانی کل}}\times360$$

$$\alpha=\frac{16}{60}\times360=96$$

۶۴۷. **گزینهٔ ۳**

$$\text{تعداد متغیرها}=\frac{360}{\text{زاویهٔ بین دو شعاع مجاور}}=\frac{360}{72}=5$$

آزمون پایان سال (۲)

۶۴۸. **گزینهٔ ۳** اطلاعات سؤال رو به زبان ریاضی می‌نویسیم:
تفاضل نصف عدد طبیعی x از ۵ برابر آن: $5x-\frac{x}{2}$
مساحت مستطیل:

$$(2x-1)(x+\frac{1}{2})=2x^2\cancel{+x}\cancel{-x}-\frac{1}{2}=2x^2-\frac{1}{2}$$

مسئله رو به معادله تبدیل می‌کنیم.

$$5x-\frac{x}{2}=2x^2-\frac{1}{2}-4$$
$$\xrightarrow{\times2}10x-x=4x^2-1-8\Rightarrow 4x^2-9x-9=0$$
$$\Delta=(-9)^2-(4\times4\times-9)=81+144=225$$
$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{225}}{2\times4}=\frac{9\pm15}{8}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{24}{8}=3\\ x=\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}\end{cases}$$

$x=3$ چون طبیعیه، قابل قبوله. حالا محیط مستطیل رو حساب کنیم.

طول مستطیل $=2(3)-1=5$ ، عرض مستطیل $=3+\frac{1}{2}=3/5$

محیط مستطیل $=2($طول + عرض$)=2(5+3/5)=2\times 8/5=17$

۶۴۹. **گزینهٔ ۱** مجموع ریشه‌ها را با فرمول $S=-\frac{b}{a}$ یکسان قرار می‌دهیم:

$$-\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{m}{m+1}=-\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{m}{m+1}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2m=m+1\Rightarrow m=1$$

$m=1$ رو در معادله جای‌گذاری می‌کنیم. $2x^2+x-10=0$

قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها از رابطهٔ $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ به دست میاد.

$$\Delta=1^2-(4\times 2\times -10)=1+80=81$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{81}}{|2|}=\frac{9}{2}=4/5=4\frac{1}{2}$$

۶۵۰. **گزینهٔ ۴** $\alpha=3$ در صورتی قابل قبول نیست که مخرج کسر رو صفر کنه.

$$x+m=0\xrightarrow{x=3}3+m=0\Rightarrow m=-3$$

به‌ازای $m=-3$ معادله رو می‌نویسیم و حل می‌کنیم:

$$\frac{2x+3}{x-3}+x=\frac{9}{x-3}\xrightarrow{\times(x-3)}2x+3+x(x-3)=9$$

$$\Rightarrow 2x+3+x^2-3x=9\Rightarrow x^2-x-6=0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله‌مشترک}}(x-3)(x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=3\Rightarrow\alpha=3\\ x=-2\Rightarrow\beta=-2\end{cases}$$

$\alpha=3$ ریشهٔ غیرقابل قبول معادله است (چون مخرج رو صفر می‌کنه.)

پس $\beta=-2$ قبوله. $\frac{\beta}{m}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$

۶۵۱. **گزینهٔ ۱** سرعت اولیه رو x در نظر می‌گیریم.

$$\text{سرعت}=\frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}\Rightarrow\text{زمان}=\frac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}}$$

مدت زمان اولین حرکت: $t_1=\frac{20}{x}$

مدت زمان دومین حرکت: $t_2=\frac{20}{x-10}$

اختلاف زمان حرکت (برحسب ساعت):

$$t_2=t_1+\frac{4}{60}\Rightarrow t_2=t_1+\frac{1}{15}\Rightarrow t_2-t_1=\frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow\frac{20}{x-10}-\frac{20}{x}=\frac{1}{15}\Rightarrow\frac{\cancel{20x}-\cancel{20x}+200}{x(x-10)}=\frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow\frac{200}{x(x-10)}=\frac{1}{15}\Rightarrow x(x-10)=3000$$

$$\Rightarrow x^2-10x-3000=0\Rightarrow(x-60)(x+50)=0\Rightarrow\begin{cases}x=60\\ x=-50\end{cases}$$

سرعت قابل قبول $x=60$ هست. حالا ببینیم با این سرعت، ۳۰ کیلومتر رو در چه مدت زمانی طی می‌کنه.

$$\text{زمان}=\frac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}}\Rightarrow t=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$$

$t=\frac{1}{2}$ ساعت معادل ۳۰ دقیقه است.

۶۵۲. **گزینهٔ ۴** ضابطهٔ تابع f رو تشکیل می‌دیم.

$$f(x)=\frac{x^2+5}{3}-2$$

$f(-7)$ رو حساب می‌کنیم.

$$f(-7)=\frac{(-7)^2+5}{3}-2=\frac{54}{3}-2=18-2=16$$

حالا $g(f(-7))$ رو به دست میاریم.

$$g(f(-7))=g(16)=\sqrt{16}-\frac{(16)^2}{4}=4-64=-60$$

۶۵۳. **گزینهٔ ۳** برای اینکه دو تا زوج مرتب مساوی باشن، باید مؤلفه‌های اولشون با هم و مؤلفه‌های دومشون هم با هم مساوی باشن.

$$a^2-a=2\Rightarrow a^2-a-2=0\Rightarrow(a-2)(a+1)=0\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ a=-1\end{cases}$$

$$a^2+4a=-3\Rightarrow a^2+4a+3=0\Rightarrow(a+3)(a+1)=0\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\ a=-1\end{cases}$$

$a=-1$ که جواب مشترک دو تا معادله است، قابل قبوله.

$$f(a)=f(-1)=\sqrt{3-(-1)^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$$

۶۵۴. **گزینهٔ ۴** زوج مرتب‌هایی که مؤلفه‌های اول مساوی دارن باید مؤلفه‌های دومشون هم مساوی باشه.

$$(1,x^2+y^2)=(1,2xy)\Rightarrow x^2+y^2=2xy\Rightarrow x^2+y^2-2xy=0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع}}(x-y)^2=0\Rightarrow x-y=0\Rightarrow x=y$$

از $x=y$ متوجه می‌شیم که زوج مرتب‌های زیر هم مؤلفه‌های اول مساوی دارن.

$$(x,m^2-1)=(y,8)\Rightarrow m^2-1=8\Rightarrow m^2=9\Rightarrow\begin{cases}m=+3\\ m=-3\end{cases}$$

به‌ازای $m=3$ زوج مرتب‌های $(3,5)$ و $(m,7)$ شرط تابع بودن رو نقیض می‌کنن. یعنی مؤلفه‌های اول مساوی دارن ولی مؤلفه‌های دومشون مساوی نیست، پس $m=-3$ قابل قبوله.

۶۵۵. **گزینهٔ ۲** با توجه به نمودار، مقدار تابع رو در هر کدام از نقاط موردنظر تعیین می‌کنیم.

$$f(-2)=0\ ,\ f(3)=2\ ,\ f(1)=0\ ,\ f(-3)=-2$$

حاصل عبارت رو به دست میاریم. $A=\frac{0+2}{0+(-2)}=\frac{2}{-2}=-1$

۶۵۶. **گزینهٔ ۲** مختصات نقطه‌ای به طول -3 روی نیمساز ناحیهٔ دوم: $(-3,3)$ (ضابطهٔ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم $y=-x$ است.)

مختصات نقطه‌ای به طول ۴ روی محور xها: $(4,0)$

با دو نقطهٔ $(-3,3)$ و $(4,0)$ ضابطهٔ تابع رو تشکیل می‌دیم.

$$m=\frac{3-0}{-3-4}=-\frac{3}{7}$$

$$y=mx+h\xrightarrow[m=-\frac{3}{7}]{(4,0)}0=-\frac{3}{7}\times 4+h\Rightarrow h=\frac{12}{7}$$

$$f(x)=-\frac{3}{7}x+\frac{12}{7}\Rightarrow f(-10)=(-\frac{3}{7}\times -10)+\frac{12}{7}=\frac{30}{7}+\frac{12}{7}$$

$$=\frac{42}{7}=6$$

۶۵۷. **گزینهٔ ۲** با مختصات نقاط $(-1,0)$ و $(0,1)$ شیب خط نمودار f رو به دست میاریم.

$$m_f=\frac{0-1}{-1-0}=\frac{-1}{-1}=1$$

از روی نمودار مشخصه که عرض از مبدأ خط f برابر با ۱ هست.

$$f(x)=x+1$$

طول نقطهٔ برخورد نمودار دو تابع رو تعیین می‌کنیم.

$$f(x)=x+1\xrightarrow{y=\frac{5}{3}}x+1=\frac{5}{3}\Rightarrow x=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$$

با مختصات نقاط $(\frac{2}{3},\frac{5}{3})$ و $(0,2)$ شیب نمودار g رو به دست میاریم.

$$m_g=\frac{\frac{5}{3}-2}{\frac{2}{3}-0}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=-\frac{1}{2}$$

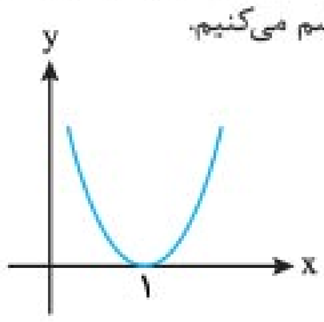
از روی نمودار مشخصه که عرض از مبدأ نمودار g برابر با ۲ هست.

$$g(x)=-\frac{1}{2}x+2$$

حالا $g(6)$ رو حساب می‌کنیم.

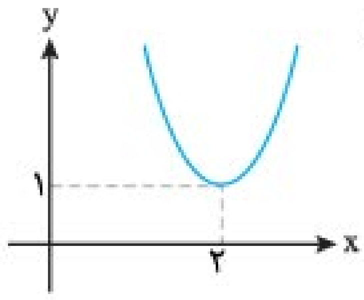
$$g(6)=(-\frac{1}{2}\times 6)+2=-3+2=-1$$

۶۵۸. **گزینهٔ ۳** نمودار سهمی تابع f رو رسم می‌کنیم.

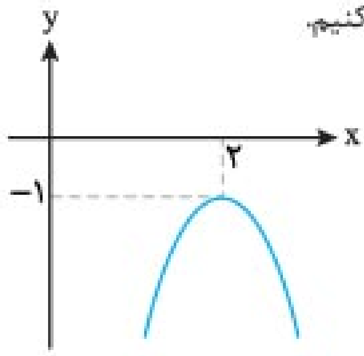


$$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

نمودار رو یک واحد به راست و یک واحد به بالا انتقال می‌دیم.



نمودار و نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



۶۵۹. **گزینهٔ ۴** با توجه به نمودار، طول رأس سهمی $x=2$ هست.

$$-\frac{a}{2(-1)}=2\Rightarrow a=4$$

سهمی از نقطهٔ $(0,1)$ عبور می‌کند، یعنی $b=1$ هست:

$$f(x)=-x^2+4x+b\xrightarrow{(0,1)}1=-0^2+4(0)+b\Rightarrow b=1$$

$a=4$ و $b=1$ روی در معادله جای‌گذاری می‌کنیم و مجموع ریشه‌ها رو به دست میاریم.

$$4x^2+x+c=0\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{1}{4}$$

۶۶۰. **گزینهٔ ۱**

$$\text{تابع‌هزینه}=\text{هزینهٔ ثابت}+\text{هزینهٔ جاری}\,(x)\Rightarrow C(x)=400+28x$$

تابع سود رو تشکیل می‌دیم.

$$P(x)=R(x)-C(x)=-x^2+70x-28x-400$$

$$\Rightarrow P(x)=-x^2+42x-400$$

طول نقطهٔ Max رأس نمودار سود رو به دست میاریم.

$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{42}{2(-1)}=21$$

تولیدی در حال حاضر روزانه ۲۵ کالا تولید می‌کند، برای اینکه بیشترین سود رو به دست بیاره باید تولید خودش رو به ۲۱ کالا برسونه یعنی ۴ کالا کمتر تولید کند.

۶۶۱. **گزینهٔ ۳** a رو برحسب x به دست میاریم.

$$2x-a=60\Rightarrow a=2x-60$$

در تابع جای‌گذاری می‌کنیم.

$$y=ax+50=(2x-60)x+50=2x^2-60x+50$$

طول رأس سهمی رو به دست میاریم.

$$x_S=-\frac{-60}{2(2)}=\frac{60}{4}=15$$

طول رأس رو در تابع جای‌گذاری می‌کنیم.

$$y_{min}=2(15)^2-60(15)+50=-400$$

۶۶۲. **گزینهٔ ۴** x میانه است. برای اینکه میانه با مد مساوی باشه x می‌تونه ۷ یا ۱۱ باشه. در هر دو حالت میانگین داده‌ها رو حساب می‌کنیم.

حالت اول: $x=7$ در نظر می‌گیریم.

$$\bar{x}=\frac{3+4+5+7+7+11+12+15+24}{9}=\frac{88}{9}$$

حالت دوم: $x=11$ در نظر می‌گیریم.

$$\bar{x}=\frac{3+4+5+7+11+11+12+15+24}{9}=\frac{92}{9}$$

مجموع میانگین رو در دو حالت حساب می‌کنیم:

$$\frac{88}{9}+\frac{92}{9}=\frac{180}{9}=20$$

۶۶۳. **گزینهٔ ۳**

بازهٔ داده‌شده روی بسته‌بندی محصولات به‌صورت $(\bar{x}-2\sigma$ و $\bar{x}+2\sigma)$ است، پس داریم:

$$\bar{x}=250$$

$$2\sigma=20\Rightarrow\sigma=10$$

فاصلهٔ موردنظر رو برحسب $\bar{x}$ و σ می‌نویسیم.

$$(240,270)=(\underbrace{\bar{x}-\sigma}_{\%34},\ \underbrace{\bar{x}+2\sigma}_{\%48})$$

$$\%34+\%48=\%82$$

۶۶۴. **گزینهٔ ۲** داده‌ها رو می‌نویسیم و چارک‌ها رو مشخص می‌کنیم.

$$1,2,\underset{Q_1}{3},4,4,\underset{Q_2}{5},6,6,\underset{Q_3}{7},8,10$$

انحراف معیار داده‌های بین چارک اول و چارک سوم رو به دست میاریم.

$$\bar{x}=\frac{4+4+5+6+6}{5}=\frac{25}{5}=5$$

$$\sigma^2=\frac{2(4-5)^2+(5-5)^2+2(6-5)^2}{5}=\frac{2(1)+0+2(1)}{5}=\frac{4}{5}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{8}{10}}=\sqrt{0/8}\simeq\sqrt{0/81}\simeq 0/9$$

۶۶۵. **گزینهٔ ۱** هر سه عبارت دربارهٔ نمودارهای مربوطه درست هستند.

۶۶۶. **گزینهٔ ۲** در نمودار حبابی مقادیر متغیر سوم متناسب با توان دوم شعاع دایره‌هاست.

$$\frac{x_B}{x_A}=(\frac{r_B}{r_A})^2\Rightarrow x_B=(\frac{r_B}{r_A})^2\times x_A$$

$$=(\frac{\frac{3}{2}}{1})^2\times 0/5=(\frac{3}{2})^2\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{8}=1/125$$

۶۶۷. **گزینهٔ ۱** سه متغیر اندازه‌گیری شده، پس نمودار سه تا شعاع داره.

$$\text{زاویه}=\frac{360}{\text{تعداد متغیر}}=\frac{360}{3}=120$$

نسبت متغیر «الف» برای واحد B به بزرگ‌ترین مقدار همین متغیر برحسب درصد رو به دست میاریم.

$$\text{اندازه‌روی‌شعاع}=\frac{50}{75}\times 360=240$$

فصل ۱

معادله و مسائل توصیفی

تعریف معادله: معادله، تساوی جبری شامل یک مجهول (متغیر) بوده که به‌ازای تعداد مشخصی از اعداد برقرار است که این اعداد را جواب یا ریشه‌های معادله می‌نامیم.
درجهٔ معادله: پس از ساده‌سازی عبارت‌های جبری، بزرگ‌ترین توان مجهول را درجهٔ معادله می‌نامیم.
تفاوت اتحاد و معادله: اگر دو عبارت جبری به‌ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشند، برابری جبری حاصل از آن‌ها را اتحاد می‌نامیم اما در معادله، این دو عبارت جبری فقط به‌ازای مقادیر خاصی برابرند.
تبدیل یک عبارت فارسی به معادله: به این منظور از ابتدای جمله شروع کرده و هر آن‌چه می‌خواهیم به زبان ریاضی می‌نویسیم. برای این کار مجهول موردنظر را x فرض کرده و کلمهٔ «برابر» را نشان‌دهندهٔ تساوی در نظر می‌گیریم.

حل معادلهٔ درجه ۲ و کاربردها

◀ یادآوری اتحادها

۱ اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

^{2}(دومی) + دو برابر اولی در دومی + ^{2}(اولی)

راهبردهای حل معادلهٔ درجه اول:

۱ ابتدا اگر در معادله عملیاتی شامل ضرب، تقسیم یا توان داشتیم، آن را انجام می‌دهیم.

۲ اگر معادله شامل کسر باشد، طرفین معادله را در مخرج مشترک کسرها ضرب می‌کنیم.

۳ جملات شامل مجهول (xدار) را در یک طرف و جملات معلوم (اعداد) را در طرف دیگر تساوی قرار می‌دهیم.

تذکر: در انتقال هر جمله به طرف دیگر تساوی، علامت جمله قرینه می‌شود.

۴ بعد از انجام کلیهٔ مراحل، طرفین معادله را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم.

◀ معادلهٔ درجهٔ دوم

معادلاتی که پس از ساده‌سازی، بالاترین درجهٔ مجهول‌شان (متغیرشان) برابر دو باشد، معادلهٔ درجه دوم نامیده می‌شوند که فرم کلی آن‌ها به‌صورت $ax^2+bx+c=0$ می‌باشد که در آن a، b و c اعداد حقیقی و a مخالف صفر است.
کالبدشکافی: در هر معادلهٔ درجهٔ دوم به‌صورت $ax^2+bx+c=0$، ax^2 جملهٔ درجهٔ دوم، bx جملهٔ درجهٔ اول و c عدد ثابت نامیده می‌شود.

۲) اگر بین ضرایب رابطهٔ $a+c=b$ برقرار باشد، آنگاه یکی از ریشه‌های معادله $x_1=-1$ و ریشهٔ دیگر $x_2=-\frac{c}{a}$ است.

◀ رابطهٔ بین ضرایب و ریشه‌ها در معادلهٔ درجهٔ دوم

اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر $\Delta>0$ باشد، آنگاه معادله دارای دو ریشهٔ متمایز α و β است. حال برای جمع، ضرب و تفاضل ریشه، رابطه‌ای با ضرایب به‌دست می‌آوریم:

۱ جمع ریشه‌ها $=\alpha+\beta=S=\frac{-b}{a}$

۲ ضرب ریشه‌ها $=\alpha.\beta=P=\frac{c}{a}$

۳ قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها $=|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

نکته: اگر S مجموع و P حاصل‌ضرب ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشند، آنگاه آن معادله به‌صورت $x^2-Sx+P=0$ است.

معادله‌های شامل عبارت گویا

معادلات با فرم کلی $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{E}{F}$ را معادلات شامل عبارت‌های گویا می‌نامیم که راه‌حل کلی و هدف حل آن‌ها رسیدن به معادله‌ای مانند $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ است که بتوان با شرط $Q(x)\neq 0$ و $P(x)=0$ آن را حل کرده و جواب‌های معادله را تعیین کنیم.

فصل ۲

مفهوم تابع

زوج مرتب: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که با هم رابطه دارند، دوتایی (a,b) را (که ترتیب قرار گرفتن a و b در آن اهمیت دارد) زوج مرتب می‌نامیم که a را مؤلفه یا مختص اول و b را مؤلفه یا مختص دوم می‌نامیم.
تساوی زوج مرتب‌ها: دو زوج مرتب را برابر می‌گویند هرگاه مؤلفه‌های نظیر به نظیرشان با هم برابر باشند، یعنی اگر $(a,b)=(c,d)$ آنگاه $a=c, b=d$ و برعکس.
تعریف رابطه: اگر A و B دو مجموعه باشند، یک رابطه از A به B، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتبی است که مؤلفه‌های اول آن‌ها، عضو A و مؤلفه‌های دوم آن‌ها عضو B است.

$R=\{(a,2),(a,4),(b,3),(c,2)\}$

مفهوم تابع: یک رابطه از مجموعهٔ A تابع نامیده می‌شود هرگاه متناظر با هر عضو A (متغیرهای مستقل) دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ B (متغیرهای آن) را بتوان نظیر (یا مربوط) کرد.

◀ انواع نمایش‌های تابع

۱ **نمایش زوج مرتبی:** تابع f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B را به‌صورت زوج مرتب‌هایی می‌توان نمایش داد که مؤلفه‌های اول آن از مجموعهٔ A و مؤلفه‌های دوم آن اعضایی از مجموعهٔ B انتخاب شود. مثلاً:

$f=\{(a,1),(b,3)\}$

ضابطهٔ جبری تابع

◀ ضابطهٔ تابع

متغیر مستقل و وابسته: x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می‌نامیم زیرا تغییرات y به تغییرات x وابسته است.
ضابطهٔ تابع: به فرمولی که رابطهٔ بین x و y را نشان می‌دهد، ضابطهٔ تابع می‌گوییم و به‌صورت $y=f(x)$ نمایش می‌دهیم.
محاسبهٔ مقدار تابع: برای به‌دست آوردن مقدار تابع در یک نقطه، کافی است در ضابطهٔ تابع به‌جای x مقدار موردنظر را قرار دهیم.
ماشین تابع: هر تابع را می‌توان به‌صورت یک ماشین ورودی و خروجی در نظر گرفت به طوری که به‌ازای ورودی x و جای‌گذاری آن در ضابطهٔ تابع، مقدار خروجی y را به دست می‌آوریم.
دامنه و برد تابع: در نمایش تابع به‌صورت زوج مرتبی یا جدولی، مجموعهٔ شامل همهٔ مؤلفه‌های اول را دامنهٔ تابع و مجموعهٔ شامل همهٔ مؤلفه‌های دوم را برد تابع می‌نامیم. دامنهٔ f را با D_f و برد آن را با R_f نشان می‌دهیم.

نکته: در نمایش تابع f به‌صورت $\begin{cases} f:A\to B \\ y=f(x) \end{cases}$ مجموعهٔ A را دامنهٔ تابع و B را برد تابع f در نظر می‌گیریم.

حال با داشتن شیب خط و مختصات یکی از نقاط به دلخواه، ضابطهٔ تابع خطی را به‌دست می‌آوریم:

$m_{AB}, A(x_1,y_1)\to y-y_1=m(x-x_1)$

$m_{AB}, B(x_2,y_2)\to y-y_2=m(x-x_2)$

۲ اگر $A(x_1,x_2)$ نقطه‌ای روی تابع f باشد، داریم:

$f(x_1)=y_1$

و برای نقطهٔ $B(x_2,y_2)$ نیز داریم:

$f(x_2)=y_2$

حال با استفاده از فرمول $f(x)=mx+h$ و جای‌گذاری مقدار نقاط در ضابطهٔ فوق دو معادلهٔ درجه اول به‌دست می‌آید که با حل آن‌ها در یک دستگاه، مقادیر m و h را به‌دست می‌آوریم.

نمودار تابع خطی

برای رسم نمودار تابع خطی کافی است مختصات دو نقطه از تابع را به دست آوریم و از آن‌ها خطی عبور دهیم، زیرا از دو نقطه فقط یک خط عبور می‌کند.
عرض از مبدأ نمودار تابع خطی: نقطه‌ای است که خط، محور y ها را در آن نقطه قطع می‌کند و برای پیدا کردن آن کافی است در معادلهٔ تابع خطی به‌جای x، مقدار صفر را قرار دهیم.

نمودار تابع درجهٔ ۲

مفاهیم اولیهٔ تابع درجهٔ ۲

ضابطهٔ تابع درجهٔ دوم در حالت کلی به‌صورت $y=ax^2+bx+c$ است که در آن $a\neq 0$ می‌باشد. نمودار آن که سهمی نامیده می‌شود، بسته به علامت a (ضریب x^2) به یکی از دو صورت زیر است:

۱) دهانهٔ رو به بالا $\to a>0$

محور تقارن $=x=\frac{-b}{2a}$

دارای کمترین مقدار سهمی: $V=\min$

رأس سهمی $S=(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}$ یا $f(\frac{-b}{2a}))$

۲) دهانهٔ رو به پایین $\to a<0$

رأس سهمی $S=(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}$ یا $f(\frac{-b}{2a}))$

دارای بیشترین مقدار سهمی: $V=\max$

محور تقارن $=x=\frac{-b}{2a}$

◀ محدودیت‌های سرشماری

۱ـ هزینهٔ زیادی دارد. ۲ـ بسیار زمان‌بر است. ۳ـ در گردآوری داده‌ها امکان رخ دادن خطای بیشتری وجود دارد. ۴ـ کم و زیاد شدن تعداد اعضا در طول مدت سرشماری (مانند: مرگ و میر یا زاد و ولد و یا مهاجرت) ۵ـ در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه ۶ـ عدم امکان استفاده از سرشماری در بررسی‌های مخرب مانند باز شدن یا نشدن کیسهٔ هوای اتومبیل‌ها در کارخانه‌های ماشین‌سازی
وجود این محدودیت‌ها در سرشماری باعث می‌شود تا به‌جای انتخاب کل یک جامعه، بخشی از جامعهٔ آماری انتخاب و مورد مطالعه و بررسی قرار گیرد، با این کار گرچه میزان دقت و صحت آزمایش‌ها کمتر می‌شود اما از طرفی مشکلاتی که در سرشماری با آن‌ها درگیر می‌شویم، از بین می‌رود پس با مفاهیم جدیدی روبه‌رو خواهیم شد:

نمونه و متغیر تصادفی

◀ نمونه‌گیری

اگر به‌جای انتخاب کل جامعه، بخشی از آن را انتخاب کنیم؛ به این کار نمونه‌گیری می‌گوییم. تعریف علمی‌تر نمونه‌گیری بعد از تعریف نمونه قابل بیان است.

توجه توجه!! در جمله‌ای مانند «بلدرچین‌های سولهٔ نگهداری A» چیزی به عنوان متغیر تصادفی وجود ندارد چرا که موضوع مورد مطالعه معلوم نیست ولی در جمله‌ای مانند «وزن بلدرچین‌های سولهٔ A» موضوع مورد مطالعه، وزن است پس متغیر تصادفی وجود دارد و برابر با وزن خواهد بود.

◀ داده‌های آماری

بعد از اینکه جامعهٔ آماری یا نمونهٔ تصادفی را از نظر یک متغیر تصادفی بررسی کردیم، به اطلاعاتی خواهیم رسید که می‌توانند عددی یا غیرعددی باشند. به این اعداد به دست آمده، داده‌های آماری گفته می‌شود. در این بین افرادی هستند که وظیفهٔ انجام این کار را به عهده دارند:
آمارگیر: به فردی که جمع‌آوری داده‌ها را انجام می‌دهد آمارگیر می‌گویند.
آمارگیری: به جمع‌آوری داده‌ها توسط آمارگیر به یکی از روش‌های زیر آمارگیری گفته می‌شود:

◀ روش‌های گردآوری داده‌ها

چهار روش مرسوم برای جمع‌آوری داده‌ها وجود دارد که عبارت‌اند از: ۱ـ مشاهده ۲ـ پرسش‌نامه ۳ـ مصاحبه ۴ـ دادگان‌ها

۱ **مشاهده**

گردآوری داده‌ها بدون نیاز به فرد پاسخگو، مشاهده نام دارد. توجه کنید اگر به دقت زیادی نیاز داشته باشیم، این روش مناسب نیست.