مدرسان شریف

فصل اول

« تابع »

درسنامه: انواع تابع و مفاهیم مرتبط با آن

مفهوم تابع

وقتی کمیتی وابسته به کمیتی دیگر باشد، مفهوم تابع به‌وجود می‌آید. مثلاً اگر فرمول مساحت دایره‌ای به شعاع r را در نظر بگیریم ($S=\pi r^2$)، مساحت دایره، یعنی S به شعاع دایره، یعنی r بستگی دارد. در این جا کمیت مساحت به کمیت شعاع وابسته است و می‌گوییم **S تابعی از r** است. دقت کنید در این رابطه، r متغیر مستقل و S متغیر وابسته است. خاصیت هر تابعی این است که برای هر مقدار از **متغیر مستقل** فقط یک مقدار برای **متغیر وابسته** ایجاد می‌شود. واضح است به ازای یک شعاع مشخص برای دایره، قطعاً یک و فقط یک مساحت به‌دست خواهد آمد.

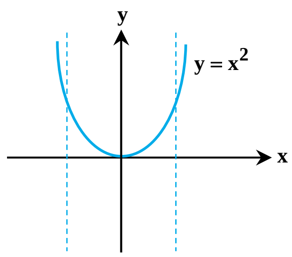
تعریف دامنه و برد تابع: به مجموعه مقادیری که متغیر مستقل می‌گیرد، دامنه‌ی تابع و به مجموعه مقادیری که متغیر وابسته می‌گیرد، برد تابع می‌گویند.

شرط تابع بودن: به شرطی می‌توان گفت ضابطه‌ی $y=f(x)$ تابع است که به ازای هر مقدار x، **فقط یک مقدار برای y** ایجاد شود. مثلاً ضابطه‌ی $y=x^2$ یک تابع است، چون هر مقداری که به x بدهیم، فقط و فقط یک مقدار برای y پدید می‌آید (دقت کنید اگر به ازای دو مقدار مختلف از x، یک مقدار یکسان برای y ایجاد شود، باز هم خواهیم گفت ضابطه داده شده، تابع است. همان‌طور که در ضابطه‌ی $y=x^2$ به ازای $x=1$ و $x=-1$ یک مقدار یکسان، یعنی $y=1$ ایجاد می‌شود). اما ضابطه‌ی $x=y^2-2$، تابعی برحسب x نیست. چون اگر به x مثلاً مقدار $x=2$ را بدهیم، آن‌گاه برای y دو مقدار متفاوت $y=\pm 2$ ایجاد می‌شود.

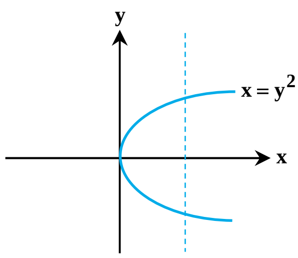
محک خط قائم برای تشخیص تابع بودن:

منحنی $y=f(x)$ فقط وقتی تابعی از x است که اگر خط قائمی در دستگاه مختصات رسم کنیم، این خط قائم، نمودار تابع را **بیش از یک بار قطع نکند**.

برای مثال به دو نمودار مقابل توجه کنید:



(الف)



(ب)

همان‌طور که در شکل (الف) ملاحظه می‌کنید، هر خط قائمی که بر نمودار $y=x^2$ رسم کنیم، فقط در یک نقطه، نمودار تابع را قطع می‌کند و بنابراین می‌توان گفت ضابطه‌ی $y=x^2$ تابعی برحسب x است. اما همان‌طور که در شکل (ب) می‌بینید، خط قائمی که بر نمودار $x=y^2$ رسم کرده‌ایم، نمودار تابع را در دو نقطه (یعنی بیش از یک نقطه) قطع کرده است. پس می‌توانیم بگوییم ضابطه‌ی $x=y^2$ تابعی برحسب x نیست.

مثال ۱: به ازای کدام مقدار m رابطه‌ی $f=\{(3,2),(1,2),(m,1),(3,m^2+m)\}$ یک تابع می‌باشد؟

۱) ۲- و ۱ ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۳» چون زوج‌های $(3,2)$ و $(3,m^2+m)$ در ضابطه‌ی این تابع قرار دارند، پس باید مؤلفه‌های دوم آنها نیز با هم برابر باشد (به دلیل تساوی مؤلفه‌ی اول آنها)؛ پس داریم:

$$m^2+m=2\rightarrow m^2+m-2=0\rightarrow (m-1)(m+2)=0\rightarrow m=1\ ,\ m=-2$$

اگر $m=1$ باشد، آن‌گاه زوج‌های $(1,1)$ و $(1,2)$ ایجاد می‌شود که نمی‌توانند در ضابطه‌ی یک تابع باشند، پس $m=-2$ قابل قبول است.

تذکر ۱: رابطه‌هایی که در آنها متغیر وابسته (در ضابطه‌هایی به شکل $y=f(x)$ منظور y است)، داخل قدرمطلق، براکت، دارای توان زوج و یا کمان یک نسبت مثلثاتی باشد، **معمولاً** تابع نیستند. متغیر وابسته را با y نشان می‌دهیم، مگر آن‌که در صورت سؤال، شرط دیگری داده شده باشد.

دامنه توابع وارون

با حدود تغییرات x در توابع وارون مثلثاتی و هیپربولیکی در درسنامه (۴) آشنا شدیم. اکنون چند مثال را با هم مرور می‌کنیم.

مثال ۹۲: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\text{Arcsin}(x+1)+\text{Arctg}\sqrt{x^2+2x}$ کدام است؟

۱) $[-2,-1]$ ۲) $\{-2,0\}$ ۳) $[-2,0]$ ۴) $\{0,-1,-2\}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases}-1\le x+1\le 1 \Rightarrow [-2,0]\\ x^2+2x\ge 0 \Rightarrow x(x+2)\ge 0 \Rightarrow (-\infty,-2]\cup[0,+\infty)\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}}\{-2,0\}$$

مثال ۹۳: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\text{tgh}^{-1}(1+\sqrt{x})$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{0\}$ ۳) $\{x: x>0\}$ ۴) $\{x: x\ge 0\}$

پاسخ: گزینه «۱» عبارت مقابل آرک تانژانت هیپربولیک، باید بین -1 و $+1$ باشد، بنابراین داریم: $-1<1+\sqrt{x}<1 \Rightarrow \sqrt{x}<0 \Rightarrow$ غیرممکن

مثال ۹۴: حوزه‌ی تعریف $f(x)=\sqrt{\text{Arcsin}(\log_2 x)}$ کدام است؟

۱) $1\le x\le 2$ ۲) $x\le 1$ ۳) $x\ge 2$ ۴) $\frac{1}{2}\le x\le 2$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\text{Arcsin}(\log_2 x)\ge 0 \Rightarrow \log_2 x\ge 0 \Rightarrow x\ge 1$$

از طرفی عبارت مقابل Arcsin باید بین -1 و $+1$ باشد، بنابراین داریم:

$$-1\le \log_2 x\le 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\le x\le 2$$

از اشتراک گرفتن جواب‌های به‌دست آمده، نتیجه می‌شود گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۹۵: دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{\pi-3\,\text{Arccos}\,x}$ کدام است؟

۱) $[-1,\frac{1}{2}]$ ۲) $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ ۳) $[0,\frac{1}{2}]$ ۴) $[\frac{1}{2},1]$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به تعریف دامنه‌ی تابع $\text{Arccos}\,x$ ابتدا داریم که $-1\le x\le 1$. از طرفی عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد. پس داریم:

$$\pi-3\,\text{Arccos}\,x\ge 0 \Rightarrow \text{Arccos}\,x\le\frac{\pi}{3}=\text{Arccos}\frac{1}{2}$$

حالا به نکته‌ی مهم این سؤال می‌رسیم؛ با توجه به اینکه تابع $\text{Arccos}\,x$ نزولی است وقتی می‌خواهیم آن را از دو طرف نامساوی حذف کنیم، جهت نامساوی تغییر می‌کند، یعنی داریم:

$$\text{Arccos}\,x\le\text{Arccos}\frac{1}{2}\Rightarrow x\ge\frac{1}{2}\xrightarrow{-1\le x\le 1}\frac{1}{2}\le x\le 1$$

برد تابع

مفهوم برد یک تابع عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی مقادیری که y می‌تواند داشته باشد، معمولاً برد تابع f را با نماد R_f نمایش می‌دهند. برای تعیین برد یک تابع روش‌های مختلفی وجود دارد که به شرح زیر است:

۱ـ به‌دست آوردن x برحسب y: این روش را نمی‌توان در تمام توابع به عنوان بهترین روش محسوب کرد و در بسیاری موارد نیز امکان‌پذیر نیست. به این روش، روش استفاده از تابع معکوس هم می‌گویند. اما چون همه‌ی توابع معکوس‌پذیر نیستند، لذا بهتر است ما از این اصطلاح استفاده نکنیم.

مثال ۹۶: برد تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{2}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) $0\le y\le 3$ ۲) $0<y\le 2$ ۳) $0<y\le\frac{3}{2}$ ۴) $0<y\le\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» از ضابطه‌ی تابع، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{2}{x^2+1}\Rightarrow yx^2+y=2\Rightarrow x^2=\frac{2-y}{y}\xrightarrow{x^2\ge 0}\frac{2-y}{y}\ge 0\Rightarrow 0<y\le 2$$

مثال ۹۷: برد یا حوزه‌ی مقادیر (Range) تابع $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) [۱- و ۱) ۴) $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

پاسخ : گزینه «۳» برای محاسبه‌ی برد، ابتدا x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}\Rightarrow yx^2+y=x^2-1\Rightarrow x^2-yx^2=y+1\Rightarrow x^2(1-y)=y+1\Rightarrow x^2=\frac{y+1}{1-y}\xrightarrow{x^2\ge 0}\frac{y+1}{1-y}\ge 0$$

حال باید عبارت $\frac{y+1}{1-y}$ را تعیین علامت کنیم، ریشه‌های صورت و مخرج کسر به ترتیب -1 و $+1$ می‌باشند. برای $y>1$ مقدار کسر منفی است. برای $y<-1$ باز هم مقدار کسر منفی است، اما در فاصله‌ی بین دو ریشه یعنی $-1\le y<1$ مقدار کسر مثبت است. دقت کنید که $y=1$ قابل قبول نیست، چون ریشه‌ی مخرج است.

با توجه به توضیحات فوق، برد تابع بازه‌ی $[-1,1)$ می‌باشد.

مثال ۹۸: برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x\sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $[-2,2]$ ۴) $(-2,2)$

پاسخ : گزینه «۲»

روش اول: برد این تابع را با نوشتن x برحسب y می‌توانیم تعیین کنیم:

$$y=2x\sqrt{1-x^2}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}y^2=4x^2(1-x^2)\Rightarrow 4x^4-4x^2+y^2=0\xrightarrow{x^2=A}4A^2-4A+y^2=0$$

حالا یک معادله‌ی درجه دوم برحسب A داریم. برای آن‌که معادله دارای جواب باشد، باید $\Delta\ge 0$ باشد.

$$\Delta\ge 0\Rightarrow 4-4y^2\ge 0\Rightarrow 4y^2\le 4\Rightarrow y^2\le 1\Rightarrow -1\le y\le 1$$

روش دوم: با توجه به وجود $1-x^2$ زیر رادیکال می‌توانیم از یک راه حل ابتکاری استفاده کنیم؛ قرار می‌دهیم $x=\sin t$، در این صورت داریم:

$$f(t)=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2\sin t\sqrt{\cos^2 t}=2\sin t\,|\cos t|=\pm\sin 2t$$

و می‌دانیم تغییرات تابع سینوس، بین ۱- و ۱ می‌باشد. پس برد f هم به صورت $[-1,1]$ است.

مثال ۹۹: برد تابع $y=\sqrt{2-\sqrt{x-\sqrt{2}}}$ کدام است؟

۱) $[\sqrt{2},+\infty)$ ۲) $[0,\sqrt{2-\sqrt{2}}]$ ۳) $[0,\sqrt{2}]$ ۴) $[0,+\infty)$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا دامنه‌ی تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y=\sqrt{2-\sqrt{x-\sqrt{2}}}$$
$$(1)\quad x-\sqrt{2}\ge 0\Rightarrow x\ge\sqrt{2}$$
$$(2)\quad 2-\sqrt{x-\sqrt{2}}\ge 0\Rightarrow 2\ge\sqrt{x-\sqrt{2}}\Rightarrow 4\ge x-\sqrt{2}\Rightarrow x\le 4+\sqrt{2}$$
$$D_f=(1)\cap(2)=\sqrt{2}\le x\le 4+\sqrt{2}\Rightarrow[\sqrt{2}\,,\,4+\sqrt{2}]$$

اکنون با توجه به دامنه، به محاسبه‌ی برد تابع می‌پردازیم:

$$\sqrt{2}\le x\le 4+\sqrt{2}\Rightarrow 0\le x-\sqrt{2}\le 4\Rightarrow 0\le\sqrt{x-\sqrt{2}}\le 2$$
$$2-2\le 2-\sqrt{x-\sqrt{2}}\le 0+2\Rightarrow 0\le\sqrt{2-\sqrt{x-\sqrt{2}}}\le\sqrt{2}\Rightarrow R_f=[0,\sqrt{2}]$$

۲ـ استفاده از مربع کامل: در این روش که معمولاً در توابع با توان زوج به کار می‌رود، با توجه به این‌که برد تابع $y=ax^2+bx+c$ اگر $a>0$ برابر $[-\frac{\Delta}{4a},+\infty)$ و اگر $a<0$ برابر $(-\infty,\frac{-\Delta}{4a}]$ باشد، می‌توان تست‌های به این شکل را جواب داد.

مثال ۱۰۰: برد تابع $g(x)=x^2+4x+5$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(0,\infty)$ ۳) $[1,\infty)$ ۴) هیچ‌کدام

پاسخ : گزینه «۳» در این مثال $\begin{cases}\Delta=-4\\ a=1\end{cases}$ و با توجه به فرمول برد تابع $[-\frac{-4}{4},\infty)$ یا $[1,\infty)$ می‌باشد.

مثال ۱۰۱: برد تابع $y=\sin^{-1}\sqrt{x-x^2}$ کدام است؟

۱) $[0,\frac{\pi}{3}]$ ۲) $[0,\frac{\pi}{6}]$ ۳) $[0,\frac{\pi}{4}]$ ۴) $[0,\frac{\pi}{2}]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا برد تابع $\sqrt{x-x^2}$ را حساب می‌کنیم، برای این منظور عبارت زیر رادیکال را به صورت مربع کامل و یک عدد ثابت می‌نویسیم:

$$x-x^2=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2$$

مقدار $(x-\frac{1}{2})^2$ بزرگتر یا مساوی صفر است و این یعنی $\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2$، قطعاً کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{4}$ است. پس $x-x^2\le\frac{1}{4}$ و لذا $\sqrt{x-x^2}\le\frac{1}{2}$ می‌باشد و از آنجایی که عبارت رادیکالی است، پس بزرگتر از صفر هم باید باشد، لذا $0\le\sqrt{x-x^2}\le\frac{1}{2}$. از طرفی چون $\sin^{-1}$ تابعی اکیداً صعودی است، پس با اعمال آن روی نامساوی، جهت‌ها ثابت باقی می‌ماند:

$$\sin^{-1}(0)\le\sin^{-1}(\sqrt{x-x^2})\le\sin^{-1}(\frac{1}{2})\Rightarrow 0\le y\le\frac{\pi}{6}$$

۳ــ استفاده از فرمول‌ها و روابط موجود:

۱) $x+\frac{1}{x}\ge 2\ ;\ (x>0)$

۲) $x+\frac{1}{x}\le -2\qquad (x<0)$

۳) $f(x)=|x-a|+|x-b|\Rightarrow R_f=[|b-a|,+\infty)$

۴) $f(x)=|x-a|-|x-b|\Rightarrow R_f=\left[-|b-a|,|b-a|\right]$

۵) $\left\{\begin{array}{l} f(x)=\frac{|x|}{|x|+1} \\ f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}\end{array}\right.\Rightarrow R_f=[0,1)$

۶) $f(x)=\frac{2ax}{x^2+1}\to R_f=[-a,a]$

۷) $f(x)=a\sin x+b\cos x\to -\sqrt{a^2+b^2}\le f(x)\le\sqrt{a^2+b^2}$

۸) $f(x)=\sin^{2n}x+\cos^{2n}x\Rightarrow\frac{1}{2^{n-1}}\le f(x)\le 1$

۹) $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow R_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}$

مثال ۱۰۲: برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ کدام است؟

۱) $[2,+\infty)$ ۲) $(0,2]$ ۳) $(0,+\infty)$ ۴) $(0,1)\cup(1,2]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$f(x)=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

چون $\sqrt{x^2+1}\ge 1$ می‌باشد، لذا طبق نامساوی ارائه شده در فرمول‌های گفته شده داریم: $R_f:[2,+\infty)$

مثال ۱۰۳: برد تابع $y=\sin^4x+\cos^4x$ را به‌دست آورید.

☑ پاسخ :

روش اول: با توجه به فرمول‌های گفته شده داریم:

$$\frac{1}{2^{2-1}}\le y\le 1\Rightarrow\frac{1}{2}\le y\le 1\Rightarrow R_f=[\frac{1}{2},1]$$

روش دوم: اگر فرمول یادتان نباشد:

$$\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=-1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\Rightarrow R_f=[\frac{1}{2},1]$$

مثال ۱۰۴: برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ کدام فاصله است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[0,2)$ ۴) $\mathbb{R}-(0,1)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$f(x)=\frac{x^2+1+2x}{x^2+1}=1+\frac{2x}{x^2+1}$$

از طرفی با توجه به فرمول گفته شده داریم: $-1\le\frac{2x}{x^2+1}\le 1$، بنابراین $0\le f(x)\le 2$.

مثال ۱۰۵: برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sin^۴ x-\cos^۴ x$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) $[-۱,۰]$ ۲) $[۰,۱]$ ۳) $[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$ ۴) $[-۱,۱]$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا ضابطه تابع را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\sin^۴ x-\cos^۴ x=(\sin^۲ x-\cos^۲ x)(\sin^۲ x+\cos^۲ x)=\sin^۲ x-\cos^۲ x=-\cos ۲x$$

پس تابع $f(x)=-\cos ۲x$ می‌باشد و بنابراین برد آن بازه‌ی $[-۱,۱]$ است.

■ این سؤال روش تستی و سریع دارد که در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی (۱) و (۲) بدون دخالت دست! (روش رد گزینه‌ها)» آن را حل کرده‌ایم.

مثال ۱۰۶: برد تابع $y=\frac{۲}{e^x+۱}$ در کدام بازه است؟

۱) $(۲,+\infty)$ ۲) $(۰,۲]$ ۳) $(۲,+\infty)$ ۴) $(۰,۲)$

پاسخ : گزینه «۴» وقتی x به $-\infty$ میل کند، مقدار e^x **تقریباً** برابر صفر خواهد شد و در نتیجه مقدار کسر **تقریباً** برابر ۲ می‌شود. هر چقدر x بزرگ شود، مقدار e^x نیز افزایش یافته و وقتی x به $+\infty$ نزدیک شود، آن‌گاه مقدار کسر **تقریباً** برابر صفر خواهد شد، لذا $۰<y<۲$ می‌باشد.

مثال ۱۰۷: دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۲x-۱}{۲-x}}$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳)

۱) $R_f=[۰,+\infty)$ و $D_f=[\frac{۱}{۲},۲)$ ۲) $R_f=[۰,+\infty)$ و $D_f=(۲,+\infty)$

۳) $R_f=\mathbb{R}^+\cup\{۰\}$ و $D_f=[\frac{۱}{۲},۲]$ ۴) $R_f=\mathbb{R}^+\cup\{۰\}$ و $D_f=[۲,+\infty)$

پاسخ: گزینه «۱» جدول تعیین علامت را برای کسر $y=\frac{۲x-۱}{۲-x}$ تشکیل می‌دهیم.

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		۲		$+\infty$
$۲-x$		$+$		$+$	۰	$-$	
$۲x-۱$		$-$	۰	$+$		$+$	
$y=\frac{۲x-۱}{۲-x}$		$-$		$+$		$-$	

فقط در بازه‌ی $(\frac{۱}{۲},۲)$ داریم $y>۰$. در $x=۲$ مخرج صفر می‌شود پس $x=۲$ در دامنه نیست اما در $x=\frac{۱}{۲}$ داریم $y=۰$. به این ترتیب دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۲x-۱}{۲-x}}$ برابر است با $D_f=[\frac{۱}{۲},۲)$ و جواب گزینه (۱) است. اکنون به محاسبه‌ی برد تابع می‌پردازیم.

به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ داریم $y=۰$ و وقتی‌که $x\to ۲^-$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۲^-} y=\lim_{x\to ۲^-}\sqrt{\frac{۲x-۱}{۲-x}}=\sqrt{\frac{۳}{۰^+}}=+\infty$$

بنابراین $۰\le y<+\infty$ است. برد این تابع $R_f=[۰,+\infty)$ است.

مثال ۱۰۸: برد تابع $f(x)=۲\cosh(۲\cosh x)$ کدام است؟

۱) $[۲,+\infty)$ ۲) $[۱,+\infty)$ ۳) $[\frac{e^۲}{۲}+\frac{۱}{۲e^۲},+\infty)$ ۴) $[e^۲+\frac{۱}{e^۲},+\infty)$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم که تابع $\cosh x$ در اعداد مثبت صعودی است و مقدار آن از ۱+ تا $+\infty$ تغییر می‌کند. با دو بار استفاده از این نکته خواهیم داشت:

$$۱\le\cosh x<\infty \Rightarrow ۲\le ۲\cosh x<\infty \Rightarrow \cosh ۲\le\cosh(۲\cosh x)<\infty \Rightarrow ۲\cosh ۲\le ۲\cosh(۲\cosh x)<\infty$$

بنابراین $۲\cosh ۲\le f(x)<\infty$. با توجه به ضابطه‌ی $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{۲}$ داریم $۲\cosh ۲=e^۲+\frac{۱}{e^۲}$. پس $e^۲+\frac{۱}{e^۲}\le f(x)<\infty$.

مثال ۱۰۹: اگر $f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{x}$ و $h(x)=\frac{۱}{۱+f(x)}$، دامنه‌ی تابع $h^{-۱}$ کدام بازه است؟ (MBA ـ سراسری ۸۸)

۱) $(۰,۱)$ ۲) $[۰,۱)$ ۳) $(۰,۱]$ ۴) $[۰,۱]$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به ضابطه‌ی تابع $f^{-۱}$ می‌توان نتیجه گرفت که دامنه‌ی $f^{-۱}$ برابر $[۰,+\infty)$ است، پس برد تابع f نیز $[۰,+\infty)$ می‌باشد. یعنی داریم:

$$۰\le f(x)<\infty \Rightarrow ۱\le ۱+f(x)<\infty \Rightarrow ۰<\frac{۱}{۱+f(x)}\le ۱$$

یعنی برد تابع $h(x)$ بازه‌ی $(۰,۱]$ است، پس دامنه‌ی تابع $h^{-۱}$ نیز $(۰,۱]$ خواهد بود.

مثال ۱۱۰: برد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \operatorname{Arccos}(\frac{1}{\sin x})$ کدام است؟

۱) $[0, \pi]$ ۲) $(0, \pi)$ ۳) $\{0, \pi\}$ ۴) $\{0, \pi, 2\pi\}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا دامنه‌ی $f(x)$ را پیدا می‌کنیم. تابع $\operatorname{Arccos} u$ به شرطی تعریف شده است که $-1 \le u \le 1$ باشد. بنابراین داریم: $-1 \le \frac{1}{\sin x} \le 1$.

برای آن‌که بتوانیم طرفین نامساوی را معکوس کنیم، لازم است بخش‌های مثبت و منفی تفکیک شوند:

$$\begin{cases} 0 \le \frac{1}{\sin x} \le 1 \Rightarrow \infty > \sin x \ge 1 \\ -1 \le \frac{1}{\sin x} < 0 \Rightarrow -\infty < \sin x \le -1 \end{cases}$$

اما می‌دانیم که $-1 \le \sin x \le 1$ پس این نامساوی‌ها غیرممکن هستند مگر آن‌که $\sin x = 1$ یا $\sin x = -1$ باشد، پس این تابع فقط در نقاطی تعریف شده است که $\sin x = \pm 1$ باشد (یعنی در زاویه‌های $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$). حالا می‌توانیم برد $f(x)$ را مشخص کنیم:

$$\begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow y = \operatorname{Arccos}(\frac{1}{1}) = 0 \\ \sin x = -1 \Rightarrow y = \operatorname{Arccos}(\frac{1}{-1}) = \pi \end{cases} \Rightarrow R_f = \{0, \pi\}$$

تعیین برد توابع شامل جزء صحیح ($y = \lfloor f(x) \rfloor$)

با توجه به این‌که حاصل جزء صحیح، اعداد صحیح خواهد بود، پس برای تعیین برد توابع به شکل $y = \lfloor f(x) \rfloor$ ابتدا برد تابع $f(x)$ را تعیین کرده و سپس در بازه‌ای که برای $f(x)$ به‌دست آمده، مقادیر ممکن برای $\lfloor f(x) \rfloor$ را پیدا می‌کنیم.

مثال ۱۱۱: برد تابع $y = \left\lfloor \sqrt{1 - x^2} \right\rfloor$ کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است)

۱) $\{0, 1\}$ ۲) $\{0\}$ ۳) $[-1, 1]$ ۴) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{rcases} f(x) = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow f^2(x) = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 - f^2(x) \xrightarrow{x^2 \ge 0} 1 - f^2(x) \ge 0 \Rightarrow -1 \le f(x) \le 1 \\ f(x) \ge 0 \ (\text{شرط واضح}) \end{rcases} \Rightarrow 0 \le f(x) \le 1 \Rightarrow y \in \{0, 1\}$$

مثال ۱۱۲: برد تابع $y = \lfloor \operatorname{tg}x + \cot gx \rfloor$ کدام است؟($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است)

۱) $\mathbb{Z} - \{0\}$ ۲) $\mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$ ۳) $\mathbb{Z} - \{0, 1\}$ ۴) $\mathbb{Z} - \{-1, 0\}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که: $\operatorname{tg}x + \cot gx = \operatorname{tg}x + \frac{1}{\operatorname{tg}x}$

بنابراین با توجه به فرمول‌های گفته شده، می‌دانیم عبارت درون جزء صحیح در تابع فوق بین ۲- و ۲ قرار ندارد و در نتیجه برد تابع شامل اعداد صحیح ۱-، ۰ و ۱ نخواهد بود.

مثال ۱۱۳: برد تابع $y = \left\lfloor \sin^2 x + 2\sin x - 1 \right\rfloor$ شامل چند عضو است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۴»

$$y = \left\lfloor \sin^2 x + 2\sin x - 1 \right\rfloor = \left\lfloor \sin^2 x + 2\sin x + 1 - 2 \right\rfloor = \left\lfloor (\sin x + 1)^2 - 2 \right\rfloor = \left\lfloor (\sin x + 1)^2 \right\rfloor - 2$$

می‌دانیم $-1 \le \sin x \le 1$ می‌باشد، لذا $0 \le \sin x + 1 \le 2$ است و هنگامی که به توان ۲ نیز برسد، بین صفر و ۴ است، یعنی $0 \le (\sin x + 1)^2 \le 4$؛ لذا داریم:

$$\begin{aligned} &0 \le (\sin x + 1)^2 < 1 \Rightarrow y = 0 - 2 = -2 \\ &1 \le (\sin x + 1)^2 < 2 \Rightarrow y = 1 - 2 = -1 \\ &2 \le (\sin x + 1)^2 < 3 \Rightarrow y = 2 - 2 = 0 \\ &3 \le (\sin x + 1)^2 < 4 \Rightarrow y = 3 - 2 = 1 \\ &(\sin x + 1)^2 = 4 \Rightarrow y = 4 - 2 = 2 \end{aligned} \Rightarrow R_y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

نکته ۱۷: دانستن رابطه‌ی $y = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ در حل برخی سؤالات کاربرد دارد که البته نتیجه‌ی آن یعنی این‌که $y \in \{-1, 0\}$ است، بیشتر مورد استفاده‌ی ما قرار می‌گیرد.

فصل دوم

« حد و پیوستگی »

درسنامه: تعاریف حد، محاسبه‌ی مستقیم حد، حدود چپ و راست

در فصل گذشته، با توابع مختلف و مقدار آن‌ها در یک نقطه تعریف شده آشنا شدیم. ولی در این فصل رفتار این توابع در همسایگی یک نقطه (که لزوماً تابع در آن نقطه تعریف شده نیست) را بررسی می‌کنیم. در حالت کلی وقتی x به سمت a میل می‌کند، حد تابع $f(x)$ برابر با L شود، نمادگذاری زیر را داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

دقت کنید، در پیدا کردن حد $f(x)$ وقتی که x به سمت a میل می‌کند، هرگز حالتی را که $x=a$ است، در نظر نمی‌گیریم. در حقیقت حتی لازم نیست $f(x)$ در $x=a$ تعریف شده باشد، فقط مهم این است که در همسایگی محذوف a (یعنی در همسایگی a به جز خود a) تعریف شده باشد.

تعریف حدود چپ و راست

همان‌طور که در مفهوم حد گفتیم، در محاسبه‌ی حد یک تابع در نقطه‌ای مانند a، متغیر x می‌تواند از سمت چپ و یا از سمت راست به a نزدیک شود. وقتی می‌نویسیم $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ ، منظورمان آن است که حد $f(x)$ وقتی x از سمت چپ به a میل می‌کند، برابر با L است و وقتی می‌نویسیم $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ یعنی حد $f(x)$ وقتی x از سمت راست به a میل می‌کند، برابر با L است. نمادگذاری $x\to a^-$ یعنی فقط xهایی را در نظر می‌گیریم که از a کوچکترند و نمادگذاری $x\to a^+$ یعنی فقط xهایی را در نظر می‌گیریم که از a بزرگترند. با توجه به توضیحات گفته شده می‌توان نتیجه زیر را گرفت:

شرط لازم و کافی برای آن‌که $\lim_{x\to a} f(x)=L$ باشد، آن است که $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ (یعنی شرط لازم و کافی برای وجود حد این است که حد چپ و حد راست، هر دو وجود داشته و با هم برابر باشند.) گاهی اوقات حد راست و حد چپ را به‌صورت $f(a^+)$ و $f(a^-)$ می‌نویسیم.

ویژگی جایگذاری مستقیم در ضابطه‌ی تابع

اگر تابع $f(x)$ از نوع چندجمله‌ای، کسر گویا، مثلثاتی، هیپربولیک، رادیکالی، لگاریتمی و نظایر این‌ها باشد و $f(a)$ تعریف شده باشد، آن‌وقت داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

یعنی برای پیدا کردن حد تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ از دامنه‌ی f، می‌توانیم در ضابطه‌ی f به جای x، مقدار a را قرار دهیم. به دو موضوع دقت کنید که اولاً a در دامنه $f(x)$ باشد و ثانیاً در همه توابع نمی‌توان مقدار تابع را با حد آن یکسان دانست؛ مثلاً توابعی مانند جزء صحیح یا توابع چندضابطه‌ای از جمله توابعی هستند که لزوماً مقدار تابع با حد تابع در یک نقطه‌ی مشخص، یکسان نیست. در توابع رادیکالی و لگاریتمی نیز با توجه به دامنه‌ی تابع ممکن است مقدار حد فقط از یک طرف موجود باشد.

قواعد و قضایای حد

در این قسمت، ابتدا به تعدادی از قواعد و اعمال جبری بر روی حدود اشاره می‌کنیم و سپس به یکی از قضایای مهم حد می‌پردازیم. دقت کنید که همه‌ی این قضایا به شرطی برقرار هستند که $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ هر دو موجود باشند:

۱ـ حد مجموع (تفاضل)، برابر با مجموع (تفاضل) حدهاست:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x)=L_1\pm L_2$$

۲ـ ضریب ثابت C می‌تواند از حد خارج شود:

$$\lim_{x\to a}(Cf(x))=C\lim_{x\to a} f(x)=CL_1$$

۳ــ حد حاصل‌ضرب، برابر با حاصل‌ضرب حدهاست:
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=L_1L_2$$

۴ــ حد نسبت، برابر با نسبتِ حدهاست (به شرطی که حد مخرج صفر نباشد):
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}\quad,\quad (\lim_{x\to a} g(x)\neq 0 \text{ باشرط})$$

۵ــ $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n$ که n یک عددی طبیعی است.

۶ــ اگر حد $f(x)$ در $x=a$ موجود باشد، حد $|f(x)|$ نیز در این نقطه وجود دارد و خواهیم داشت: $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|\lim\limits_{x\to a} f(x)|$، اما عکس این مطلب صحیح نیست. مثلاً در تابع علامت $f(x)=\operatorname{sgn} x$ حد $|f(x)|$ در $x=0$ برابر با یک است، اما حد $f(x)$ وجود ندارد.

۷ــ $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ که n یک عدد طبیعی است و اگر زوج باشد، باید مقدار $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ نامنفی باشد.

۸ــ اگر به ازای هر x نزدیک a، نامساوی $f(x)\leq g(x)$ برقرار باشد، آن‌گاه داریم:
$$\lim_{x\to a} f(x)\leq\lim_{x\to a} g(x)$$

مثال ۱: اگر $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=1396$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ را به‌دست آورید.

☑ **پاسخ:** ابتدا از قاعده ۴ (حد نسبت) و سپس از قاعده ۳ (حد حاصل‌ضرب) استفاده می‌کنیم:
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=1396\Rightarrow\frac{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}{(\lim\limits_{x\to 0} x)(\lim\limits_{x\to 0} x)}=1396\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=1396\times\lim_{x\to 0} x=1396\times 0=0$$

مثال ۲: اگر $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=2$ و $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=1$، آن‌گاه مقدار $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4^2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا با کمک حدهای معلوم داده شده، حد هر کدام از توابع $f(x)$ و $g(x)$ را به دست می‌آوریم:
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=2\\ \lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=1\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع کردن دو عبارت}}\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)+f(x)-g(x)]=2+1$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to a} 2f(x)=3\Rightarrow 2\lim_{x\to a} f(x)=3\Rightarrow\lim_{x\to a} f(x)=\frac{3}{2}$$

دوباره به دستگاه فوق دقت کنید؛ این بار طرفین را از یکدیگر کم می‌کنیم:
$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)-f(x)+g(x)]=2-1\Rightarrow\lim_{x\to a} 2g(x)=1\Rightarrow\lim_{x\to a} g(x)=\frac{1}{2}$$

حالا می‌توانیم حد حاصل‌ضرب دو تابع را حساب کنیم:
$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

توضیح: در پاسخ به این مسأله نباید از همان ابتدا از تساوی‌های $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$ استفاده کنیم. قاعده‌ی «حد مجموع» به شرطی برقرار است که مطمئن باشیم حد هر کدام از توابع $f(x)$ و $g(x)$ موجود است. پس استفاده از این تساوی‌ها از همان ابتدا، دارای ایراد علمی است. به همین علت ما به جای جدا کردن حدهای $f(x)$ و $g(x)$، طرفین معادلات را با هم جمع کردیم یا از هم کم کردیم.

تعریف صفر حدی (0^+ و 0^-)، $+\infty$، $-\infty$ و صفر مطلق

علامت 0^+ نشان‌دهنده‌ی نزدیک شدن به صفر از سمت راست آن است. به مفهوم حرکت که در ذات این علامت نهفته است، توجه کنید. اگر بگویید 0^+ همان $0/01$ است ما می‌گوییم نه! زیرا از این مقدار به صفر نزدیک‌تر است. اگر بگویید 0^+ یعنی $0/001$ باز همان جواب قبلی را می‌دهیم. خلاصه آن که 0^+ را نمی‌توان با یک عدد ثابت مقایسه کرد؛ اما در عمل و برای سادگی بیشتر، گاهی اوقات ما 0^+ را یک عدد مثبت بسیار کوچک تصور می‌کنیم. البته این کار را با آگاهی از مفهوم واقعی 0^+ انجام می‌دهیم. به طور مشابه، وقتی از علامت 0^- استفاده می‌کنیم، منظورمان کمیتی است که از سمت چپ صفر در حال نزدیک شدن به آن است. در این مورد هم با وجود آگاهی از این که 0^- یک عدد نیست و کمیتی در حال تغییر است، فقط برای سادگی بیشتر آن را یک عدد منفی نزدیک به صفر مثلاً $-0/010$ تصور می‌کنیم. در مورد $+\infty$ و $-\infty$ می‌توانید این‌طور تصور کنید؛ وقتی یک عدد مثبت بر یک عدد مثبت بسیار کوچک تقسیم می‌شود، واضح است که حاصل کسر بسیار بزرگ (مثبت) می‌شود. مثلاً $\frac{1}{10^{-100000}}$ برابر با 1×10^{100000} می‌شود که یک عدد مثبت بزرگ است. به همین ترتیب تصور کنید وقتی یک عدد مثبت بر یک عدد منفی، (بسیار نزدیک به صفر) تقسیم می‌شود، واضح است که حاصل کسر یک عدد منفی می‌شود که این حاصل منفی را با $-\infty$ نمایش

می‌دهیم. مثلاً $\frac{۱}{-۱۰^{-۱۰۰۰۰۰}}$ برابر با -۱×۱۰^{۱۰۰۰۰۰} است که آن را با $-\infty$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که این‌گونه تصور نشود این اعداد برابر $+\infty$ یا $-\infty$ هستند! چون ما برای درک بهتر، این اعداد را انتخاب کردیم تا کمی ملموس‌تر با این مفاهیم آشنا شوید! وگرنه $+\infty$ یا $-\infty$ اعداد مشخصی نیستند. حالا که با این چهار مفهوم آشنا شدید، به مفهوم «صفر حدی» و «صفر مطلق» می‌پردازیم.

ما در فصل حد بیشتر با **صفر حدی** سروکار داریم. اما گاهی اوقات با سؤالاتی روبه‌رو می‌شویم که در آن‌ها صفر، حدی نیست و **صفر مطلق** (صفر واقعی) است. مثلاً تقسیم یک عدد بر «صفر حدی» برابر با ∞ می‌شود و تقسیم آن عدد بر «صفر مطلق» تعریف نشده است. اما صفر مطلق معمولاً چه زمانی پدید می‌آید!؟

به مثال مقابل توجه کنید:
$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x}{\lfloor x-۱\rfloor}=\frac{۱}{\lfloor ۱^+-۱\rfloor}=\frac{۱}{\lfloor \text{عددی بسیار کوچک و البته مثبت}\rfloor}=\frac{۱}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده}$$

در واقع، وقتی در محاسبات نهایی به جزء صحیح عددی کمی بزرگ‌تر از صفر می‌رسیم، قطعاً خروجی برابر با صفر مطلق (واقعی) می‌شود. اما به مثال زیر توجه کنید:
$$\lim_{x\to ۱}\frac{x}{x-۱}\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to ۱^+}\frac{x}{x-۱}=\frac{۱}{۱^+-۱}=\frac{۱}{۱^+-۱}=\frac{۱}{\text{عدد مثبت و بسیار کوچک}}\\ \lim_{x\to ۱^-}\frac{x}{x-۱}=\frac{۱}{۱^--۱}=\frac{۱}{\text{عدد منفی و بسیار نزدیک به صفر}}\end{cases}$$

در این‌جا صفر ما، حدی است و حاصل برابر با $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود. در واقع در حالت حدی، صفر موجود در مخرج یا ۰^- است یا ۰^+ که اگر ۰^- باشد، آن‌گاه $\frac{۱}{۰^-}=-\infty$ و اگر ۰^+ باشد، آن‌گاه $\frac{۱}{۰^+}=+\infty$ می‌شود. برای نمونه چند حالت مهم که ممکن است در سؤالات با آن‌ها روبه‌رو شویم، در زیر آورده شده است:

$$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}}=\pm\infty\quad,\quad \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=\text{صفر مطلق}\quad,\quad \frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده}\quad,\quad \frac{\text{عدد}}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده}$$

در واقع همان‌طور که می‌بینید؛ هرجا صفر مطلق در مخرج داریم، حاصل تعریف نشده است و مهم نیست در صورت کسر چه عددی باشد (حتی اگر ∞ هم باشد باز هم حاصل تعریف نشده است). در شرایط $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}}=\pm\infty$، علامت بی‌نهایت، بستگی به علامت صورت کسر و همچنین علامت صفر حدی مخرج کسر دارد:

$$\frac{\text{عدد منفی}}{۰^-}=+\infty\quad,\quad\frac{\text{عدد منفی}}{۰^+}=-\infty\qquad\frac{\text{عدد مثبت}}{۰^-}=-\infty\quad,\quad\frac{\text{عدد مثبت}}{۰^+}=+\infty$$

توجه۱: گاهی اوقات ۰^+ را با $+\varepsilon$ (اِپسیلُن) و ۰^- را با $-\varepsilon$ نشان می‌دهیم. در اینجا «اِپسیلُن» به معنای یک عدد مثبت بسیار کوچک و در حال نزدیک شدن به صفر است.

توجه۲: برای درک بهتر مفاهیم حد باید دو نقطه‌ی فرضی $+\infty$ و $-\infty$ را به مجموعه $\mathbb{R}$ اضافه کنیم. این نقاط خواص زیر را دارند:

۱) $+\infty$ و $-\infty$ قرینه یکدیگر نیستند، یعنی $(+\infty)+(-\infty)$ لزوماً صفر نمی‌شود.

۲) به ازای هر $a\in\mathbb{R}$ داریم:
$$\begin{cases}a+(+\infty)=+\infty\quad,\quad a-(+\infty)=-\infty\quad,\quad \frac{a}{-\infty}=۰\\ a+(-\infty)=-\infty\quad,\quad a-(-\infty)=+\infty\quad,\quad \frac{a}{+\infty}=۰\\ +\infty+\infty=+\infty\ ,\ (+\infty)(-\infty)=(-\infty)(+\infty)=-\infty\ ,\ (+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty\end{cases}$$

۳) اگر $a>۰$ باشد، آن‌گاه: $a\times(-\infty)=-\infty\quad,\quad a\times(+\infty)=+\infty$

۴) اگر $a<۰$ باشد، آن‌گاه: $a\times(-\infty)=+\infty\quad,\quad a\times(+\infty)=(-\infty)$

۵) اگر $a>۱$ باشد، آن‌گاه $a^{+\infty}=+\infty$ و $a^{-\infty}=۰$ و اگر $۰<a<۱$، آن‌گاه $a^{+\infty}=۰$ و $a^{-\infty}=+\infty$

مثال ۳: کدام گزینه درست <u>نیست</u>؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

۱) $\lim_{x\to ۰}\frac{x}{x}=۱$ ۲) $\lim_{x\to ۱}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}=۱$ ۳) $\lim_{x\to -۱}\sqrt{|x|}=۱$ ۴) $\lim_{x\to(-۱)}\sqrt{x^۲}=۱$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» حد داده شده در گزینه (۱) خیلی بدیهی و مشخص است. x های صورت و مخرج با هم ساده می‌شوند و اصلاً لازم نیست حد گرفته شود. در واقع حاصل این حد بدون توجه به این‌که x به چه سمتی میل می‌کند، همواره برابر یک است. از طرفی حاصل حدود داده شده در گزینه‌های (۳) و (۴) نیز با ویژگی جایگذاری مستقیم عدد برابر با یک می‌شود. اما برای تابع داده شده در گزینه (۲) با توجه به وجود جزء صحیح باید حدود چپ و راست را حساب کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{\lfloor ۱^-\rfloor}{x}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۰}{x}=\frac{۰}{-۱}=۰\quad,\quad \lim_{x\to ۱^+}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}=۱=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\lfloor ۱^+\rfloor}{x}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۱}=۱$$

چون حاصل حد چپ و راست با هم برابر نیست، لذا تابع حد ندارد.

مثال ۴: حد چپ و حد راست تابع $f(x)=\frac{|x-\lfloor x\rfloor|}{x}$ در نقطه‌ی صفر به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است)

۱) ۱ و ۰ ۲) ۱- و ۰ ۳) $-\infty$ و ۱ ۴) $+\infty$ و ۱

پاسخ : گزینه «۳» هرگاه در تابعی جزء صحیح وجود داشته باشد و بخواهیم حد تابع را در نقطه‌ای محاسبه کنیم، بهتر است قبل از گرفتن حد، با دانستن این‌که x به سمت چه عددی و از چه طرفی (چپ یا راست) میل می‌کند، تکلیف جزء صحیح را مشخص کنیم و سپس اقدام به گرفتن حد کنیم:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x-\lfloor x\rfloor|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x-\lfloor 0^-\rfloor|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x-(-1)|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x+1|}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x-\lfloor x\rfloor|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x-\lfloor 0^+\rfloor|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x-0|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

مثال ۵: مقدار $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{|x|}{\lfloor x\rfloor}\operatorname{sgn}(x+1)$ کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) ۱-

پاسخ : گزینه «۴»

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{|x|}{\lfloor x\rfloor}\operatorname{sgn}(x+1)=\frac{|-1|}{-1}\times\operatorname{sgn}(0^+)=\frac{1}{-1}\times 1=-1\times 1=-1$$

توضیح: مقدار $\operatorname{sgn}(x+1)$ وقتی $x\to(-1)^+$ برابر با $\operatorname{sgn}((-1)^+ +1)=\operatorname{sgn}(0^+)$ می‌شود که با توجه به تعریف تابع علامت می‌دانیم که به ازای $x>0$ مقدار تابع برابر عدد ثابت ۱ می‌باشد. یادآوری می‌کنیم تابع علامت به‌صورت $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & ;\ x>0\\ 0 & ;\ x=0\\ -1 & ;\ x<0\end{cases}$ تعریف می‌شود.

مثال ۶: مقدار $\lim_{x\to 1^-}\frac{\lfloor x^4\rfloor-x^4}{\lfloor x\rfloor-x}$ کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» در محاسبه‌ی حدهایی که شامل جزء صحیح هستند، ابتدا با توجه به آنکه از سمت چپ یا راست به نقطه‌ی مورد نظر نزدیک می‌شویم، مقدار جزء صحیح را مشخص می‌کنیم و آن‌گاه محاسبه‌ی حد را به صورت عادی ادامه می‌دهیم. در این مثال $x\to 1^-$ پس x نزدیک به یک، اما کوچکتر از آن است. مثلاً می‌توانید در ذهن خود $x=0/9$ را فرض کنید. به این ترتیب داریم $\lfloor x\rfloor=0$ و $\lfloor x^4\rfloor=0$ در نتیجه محاسبه‌ی حد به شکل زیر ادامه می‌یابد:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{0-x^4}{0-x}=\lim_{x\to 1^-}x^3=1$$

مثال ۷: در نقطه $x=0$ برای تابع $y=f(x)$ حد چپ برابر A و حد راست برابر B است، حاصل $\lim_{x\to 0}f(x^2-x^4)$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۸)

۱) A ۲) B ۳) A+B ۴) حد ندارد

پاسخ: گزینه «۲» طبق فرض مسأله $\lim_{x\to 0^+}f(x)=B$ و $\lim_{x\to 0^-}f(x)=A$. حال توجه کنید که وقتی $x\to 0$، مقدار x^2 بزرگتر از x^4 است (برای مثال در $x=\pm\frac{1}{10}$ داریم $x^2=\frac{1}{100}$ و $x^4=\frac{1}{10000}$، پس $x^2>x^4$). بنابراین $x^2-x^4>0$ است، پس وقتی $x\to 0$ خواهیم داشت $x^2-x^4\to 0^+$ با فرض $t=x^2-x^4$ داریم:

$$\lim_{x\to 0}f(x^2-x^4)=\lim_{t\to 0^+}f(t)=B$$

درسنامه۳: حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$

در حالت کلی اگر حدی به شکل $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ داشته باشیم که وقتی $x\to a$، آن‌گاه $f(x)\to\infty$ و $g(x)\to\infty$. در این صورت با حالت $\frac{\infty}{\infty}$ روبه‌رو هستیم. ما نمی‌توانیم مقدار دقیق کسر را تعیین کنیم. اگر تابع $f(x)$ حرف خودش را به کرسی بنشاند، حاصل کسر ∞ است و اگر جنگ را مخرج کسر (تابع $g(x)$) ببرد، حاصل کسر صفر است. اما ممکن است این دو با هم توافق کنند که در این حالت پاسخ عددی متناهی خواهد شد (که حالت سوم یعنی صلح و توافق بیشتر از سایر موارد اتفاق می‌افتد). در این حالت از روش‌های زیر برای رفع ابهام استفاده می‌شود:

۱) استفاده از قاعده هوپیتال همانند حالت $\frac{0}{0}$ در سؤالاتی که به حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ می‌رسیم نیز می‌توانیم از قاعده هوپیتال کمک بگیریم. در واقع گاهی اوقات در حالت‌های $\frac{\infty}{\infty}$ ما قادر به تشخیص این‌که درجه صورت و یا مخرج بزرگتر است، نیستیم (یا مثلاً رشد توابع را از یاد برده‌ایم!). در این حالت‌ها می‌توانیم از قانون هوپیتال استفاده کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{Lnx}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

$$2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0\Rightarrow(n\in\mathbb{N})$$ بعد از n بار استفاده از قاعده هوپیتال:

مثال ۶۳: حاصل $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+Lnx}{x^2\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) ∞ ۳) 1 ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» حالت $\frac{\infty}{\infty}$ است، لذا داریم:

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+Lnx}{x^{\frac{5}{2}}}\xrightarrow{HOP}A=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{1+0}{+\infty}=0$$

مثال ۶۴: مقدار حد $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln(1+e^x)}{x}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) e ۲) 0 ۳) -1 ۴) 1

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این‌که حد مورد نظر به‌صورت $\frac{\infty}{\infty}$ می‌باشد، برای رفع ابهام کافی است از قضیه‌ی هوپیتال استفاده کنیم که خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln(1+e^x)}{x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

مثال ۶۵: اگر تابع g وارون تابع $y=x^x$ باشد، آنگاه مقدار حد $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{g(y)Ln(Lny)}{Lny}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

۱) 0 ۲) 1 ۳) ∞ ۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۲» توجه داشته باشید که نیازی به محاسبه تابع معکوس نیست، زیرا: $g(y)=g(f(x))$

از طرفی طبق فرض تابع g معکوس تابع f است. پس عبارت فوق برابر است با: $g(f(x))=f^{-1}(f(x))=x$

از طرفی y فقط به ازای xهای مثبت تعریف شده و فقط در $+\infty$ به سمت ∞ میل می‌کند. پس حد داده شده را مطابق زیر دوباره‌نویسی می‌کنیم:

$$L=\lim_{y\to\infty}\frac{g(y)Ln(Lny)}{Lny}=\lim_{x\to\infty}\frac{xLn(Lnx^x)}{Lnx^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{xLn(xLnx)}{xLnx}=\lim_{x\to\infty}\frac{Lnx+Ln(Lnx)}{Lnx}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{\frac{1}{x}}{Lnx}}{\frac{1}{x}}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{Lnx}=1$$

تذکر ۳: البته قاعده هوپیتال همواره قابل استفاده نیست. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ را حساب کنیم. اگر بخواهیم از قاعده هوپیتال استفاده کنیم، داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$$

دوباره به حالت $\frac{\infty}{\infty}$ رسیدیم، پس دوباره از قاعده هوپیتال کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

همان‌طور که می‌بینید، دوباره به حد ابتدایی می‌رسیم. در واقع در یک دور باطل هستیم که قاعده هوپیتال کارساز نیست! بنابراین روشی دیگر را باید برای این حد دنبال کنیم. (که می‌دانیم با استفاده از هم‌ارزی رادیکال، حاصل حد برابر با ۱ به‌دست می‌آید).

به عنوان یک مثال دیگر به حد $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+2\sin x-1}{3x+\cos x+1}$ توجه کنید. با حالت $\frac{\infty}{\infty}$ روبه‌رو هستیم. با به‌کارگیری قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+2\sin x-1}{3x+\cos x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6+2\cos x}{3-\sin x}\right)$$

واضح است مقادیر $\cos(\infty)$ و $\sin(\infty)$ اعداد مشخصی نیست، فقط می‌دانیم این عبارات بین ۱ و ۱- می‌باشد. پس حد سمت راست به فرم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ نیست و این یعنی استفاده از قاعده هوپیتال مجاز نیست. برای محاسبه‌ی این حد از همان ابتدا، در صورت و مخرج از قانون رشد استفاده می‌کنیم. تابع $2\sin x-1$ کران‌دار است. در حالی که $6x$ به سمت بی‌نهایت می‌رود، بنابراین در صورت کسر داریم: $6x+2\sin x-1\sim 6x$، به همین دلیل در مخرج کسر $3x+\cos x+1\sim 3x$ و خواهیم داشت: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{3x}=2$.

مثال ۶۶: **حاصل حد $\lim\limits_{x\to1}\frac{\mathrm{Ln}(\arccos x)^2}{\mathrm{Ln}(x-1)^2}$ را بیابید.**

پاسخ: هم در صورت و هم در مخرج $\mathrm{Ln}(0^+)=-\infty$ ایجاد می‌شود، پس صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را داریم. استفاده از هوپیتال محاسبه حد را مشکل می‌کند. از آن‌جا که تابع معکوس مثلثاتی در حد وجود دارد، بهتر است از تغییر متغیر $t=\arccos x$ استفاده کنیم. چون $\cos t=x$، لذا وقتی $x\to1$، آن‌گاه $t\to0$، پس حد به صورت زیر است.

$$\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{Ln}(t^2)}{\mathrm{Ln}(\cos t-1)^2}$$

حالا می‌توانیم از هم‌ارزی $\cos t\simeq 1-\frac{t^2}{2}$ استفاده کنیم:

$$\Rightarrow\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{Ln}(t^2)}{\mathrm{Ln}(1-\frac{t^2}{2}-1)^2}=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{Ln}t^2}{\mathrm{Ln}(\frac{t^4}{4})}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{t\to0}\frac{\frac{2t}{t^2}}{\frac{t^3}{\frac{1}{4}t^4}}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}t^5}{t^5}=\frac{1}{2}$$

---

۲) هم‌ارزی در بی‌نهایت برای بررسی این حالت ابتدا ذکر نکات زیر ضروری به نظر می‌رسد:

وقتی $x\to\pm\infty$ حد یک چندجمله‌ای برابر (هم ارز) با حد جمله با **بزرگترین درجه** است. اگر $a_0\neq0$ باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)\sim\lim_{x\to\pm\infty}a_0x^n$$

الف) اگر صورت و مخرج یک کسر چندجمله‌ای باشد، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{bx^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_n}\sim\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n}{bx^m}=\begin{cases}+\infty \text{ یا } -\infty & ;\ n>m \text{ اگر}\\ \frac{a}{b} & ;\ n=m \text{ اگر}\\ 0 & ;\ n<m \text{ اگر}\end{cases}$$

ب) هم‌ارزی رادیکال‌ها (اگر n فرد باشد، قدر مطلق لازم نیست.)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}\sim\lim_{x\to\infty}\left(\left|x+\frac{b}{an}\right|\times\sqrt[n]{a}\right)$$

ج) وقتی $u\to\infty$، آن‌گاه هم‌ارزی $u\sim\lfloor u\rfloor$ برقرار است. (یعنی می‌توانیم علامت جزء صحیح را برداریم)

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+12x^2+x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{2(x+\frac{12}{24})}{(\sqrt{x})(\sqrt{x})}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x}=2\quad,\quad 2)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[4]{16x^4+4x^2-25}}{\sqrt[3]{x^3+x^2+25}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|2x|}{x+\frac{1}{3}}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x}=-2\end{cases}$$

مثال ۶۷: حد $\lim\limits_{x\to\infty}((x^5+7x^4+2)^c-x)$، به ازای مقدار معینی از c، متناهی و ناصفر است. مقدار این حد برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{5}{7}$ ۲) $\frac{5}{7}$ ۳) $\frac{7}{5}$ ۴) $-\frac{7}{5}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا باید مقدار c را تشخیص بدهیم. وقتی $x\to\infty$، طبق قانون بزرگترین درجه داریم $x^5+7x^4+2\sim x^5$، پس $(x^5-7x^4+2)^c\sim x^{5c}$، بنابراین تفاضلی به شکل $\lim\limits_{x\to\infty}(x^{5c}-x)$ داریم. اگر $5c>1$ باشد، آن‌گاه داریم $x^{5c}-x\sim x^{5c}$ و اگر $5c<1$ باشد، آن‌گاه هم‌ارزی $x^{5c}-x\sim -x$ را داریم و مقدار حد در هر دو حالت، $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود. تنها حالتی که ممکن است مقدار حد بی‌نهایت نشود، آن است که $5c=1$ باشد. از این‌جا متوجه می‌شویم که $c=\frac{1}{5}$ است. حالا از هم‌ارزی رادیکال‌ها برای تحلیل دقیق‌تر حد استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[5]{x^5+7x^4+2}\sim\lim_{x\to\infty}(x+\frac{7}{5})\Rightarrow\lim_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^{\frac{1}{5}}-x]\sim\lim_{x\to\infty}[(x+\frac{7}{5})-x]=\frac{7}{5}$$

مثال ۶۸: حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه «۱» این حد فرم $\frac{\infty}{\infty}$ نیست؛ اما چون از هم‌ارزی رادیکال‌ها در ∞ استفاده می‌کنیم، در این قسمت آورده‌ایم. ابتدا از فرمول تبدیل حاصل‌جمع به حاصل‌ضرب استفاده می‌کنیم:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\Rightarrow A=\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$$

در بی‌نهایت از عدد ۱ در مقابل x صرف‌نظر می‌کنیم (می‌توانیم با همان فرمول هم‌ارزی رادیکال‌ها هم به این نتیجه برسیم):

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to+\infty}A=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}(2\cos\sqrt{x})(\sin 0)=2\cos\sqrt{+\infty}\times(0)=2\times(\text{تابع کران‌دار})\times 0=0$$

مثال ۶۹: مقدار $\lim\limits_{x\to 0}x\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor$ برابر کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴»

$$\lim_{x\to 0}x\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor=\lim_{x\to 0}x\frac{2}{x}=2$$

توجه شود، وقتی $x\to 0$، آن‌گاه مقدار داخل براکت به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و می‌توانیم از هم‌ارزی $\lim\limits_{u\to\infty}u=\lim\limits_{u\to\infty}\lfloor u\rfloor$ استفاده کنیم.

مثال ۷۰: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\lfloor\cot gx\rfloor$ کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) صفر ۴) حد موجود نیست.

پاسخ: گزینه «۴» بهتر است فرض کنیم $\cot gx=u$، در این حالت وقتی $x\to 0^+$، آن‌گاه $u\to+\infty$ و هرگاه $x\to 0^-$ آن‌گاه $u\to-\infty$ و لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\lfloor\cot gx\rfloor=\lim\limits_{u\to+\infty}\lfloor u\rfloor\sim\lim\limits_{u\to+\infty}u=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\lfloor\cot gx\rfloor=\lim\limits_{u\to-\infty}\lfloor u\rfloor\sim\lim\limits_{u\to-\infty}u=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$ حد چپ و راست با هم برابر نیست، پس حد ندارد

۳) قوانین رشد فرض کنیم دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه‌ای مانند a، حدی برابر ∞ داشته باشند و $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ شود، آن‌گاه می‌گوییم رشد تابع $g(x)$ در نقطه $x=a$ از تابع $f(x)$ بیشتر است. البته معمولاً بحث رشد در حالت‌هایی که x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، مطرح می‌شود.

به طور کلی در مورد رشد توابع در $+\infty$ همواره داریم:

$$\log_c x<x^\alpha<a^x<b^x<x!<x^x\quad(\text{که } b>a>1 \text{ و } \alpha>0 \text{ است})$$

مثال ۷۱: مقدار $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}\right)$ کدام است؟ (نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۴)

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه‌ی حد در بی‌نهایت، فقط با جملاتی سروکار داریم که دارای بیشترین رشد باشند و از آنجا که $x\to 1^+$، بنابراین جملات x^n در صورت و مخرج باقی می‌مانند و -1 و $+1$ حذف می‌شوند، در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{x^n}=1$$

مثال ۷۲: مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۲» چون $x\to\infty$ می‌رود، لذا رشد تابع e^x از رشد تابع x بیشتر است. همچنین رشد $e^{\frac{x}{2}}$ هم از رشد x بیشتر است، لذا داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{2}}}=0$$

مثال ۷۳: حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)e^{\sin 2x}}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) ∞ ۳) 1 ۴) حد وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)e^{\sin 2x}}\overset{\text{رشد}}{=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2xe^{\sin 2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\sin 2x}}=\frac{1}{e^{\sin\infty}}=$ وجود ندارد

توضیح: توجه کنید که $\sin 2x$ تابعی کراندار است و بنابراین رشد کمتری نسبت به $2x$ دارد.

روش دوم: حدهایی که در آنها فرم $\sin(\infty)$ یا $\cos(\infty)$ به وجود می‌آید، می‌توانند بسیار متنوع و گمراه‌کننده باشند. برای این که دچار خطا نشوید، راهکار زیر را استفاده کنید.

به جای $\sin(\infty)$ و $\cos(\infty)$ هرجا که این دو عبارت ظاهر شده‌اند، اعداد ثابتی مانند A و B قرار دهید. این اعداد ثابت همگی در بازه‌ی $[-1,1]$ قرار دارند، اما از مقدار دقیق آنها اطلاعی نداریم. اکنون حد را محاسبه کنید. اگر جواب به‌دست آمده به یکی یا چند تا از این ثابت‌ها بستگی داشته باشد، حد وجود ندارد.

در این مثال به جای $\sin\infty$ مقدار A را قرار می‌دهیم که $-1\le A\le 1$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+2x+A}{(2x+A)e^A}=\frac{2}{2e^A}=\frac{1}{e^A}$$

جواب حد به A بستگی دارد پس حد وجود ندارد.

مثال ۷۴: حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\sin 2x+1}{(2x+\sin 2x)(\sin x+3)^2}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) حد موجود نیست.

پاسخ: گزینه «۴» به جای $\sin 2x$ و $\sin x$ اعداد A و B را قرار می‌دهیم که هر دوی آن‌ها در بازه‌ی $[-1,1]$ قرار دارند:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin 2x+1}{(2x+\sin 2x)(\sin x+3)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+A+1}{(2x+A)(B+3)^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+A+1}{2(B+3)^2x+A(B+3)^2}\overset{\text{بزرگترین درجه}}{=\!=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2(B+3)^2x}=\frac{1}{(B+3)^2}$$

بنابراین حد وجود ندارد، زیرا جواب به B وابسته است.

مثال ۷۵: حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor x\rfloor+\lfloor x^{2}\rfloor+\cdots+\lfloor x^{n}\rfloor}{x^{n}}$ چقدر است؟ $(x>1)$ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است)

۱) $\frac{x}{x+1}$ ۲) $\frac{x}{x-1}$ ۳) $\frac{2x}{x+1}$ ۴) $\frac{x}{2(x-1)}$

پاسخ: گزینه «۲» طبق خواص جزء صحیح:

$$x-1<\lfloor x\rfloor\le x\ ,\quad x^{2}-1<\lfloor x^{2}\rfloor\le x^{2},\ \ldots\ ,\ x^{n}-1<\lfloor x^{n}\rfloor\le x^{n}$$

با جمع کردن طرفین نامساوی‌های فوق نتیجه می‌شود:

$$x+x^{2}+\cdots+x^{n}-n<\lfloor x\rfloor+\lfloor x^{2}\rfloor+\cdots+\lfloor x^{n}\rfloor\le x+x^{2}+\cdots+x^{n}$$

عبارت $(x+x^{2}+\cdots+x^{n})$ یک تصاعد هندسی با جمله اول x و قدر نسبت x است، پس مجموع آن برابر $\frac{x(1-x^{n})}{1-x}$ می‌باشد، بنابراین رابطه به‌دست آمده در بالا را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت:

$$\frac{x(1-x^{n})}{1-x}-n<\lfloor x\rfloor+\lfloor x^{2}\rfloor+\cdots+\lfloor x^{n}\rfloor\le\frac{x(1-x^{n})}{1-x}$$

حال با تقسیم رابطه فوق بر x^{n} نتیجه می‌شود:

$$\frac{x(1-x^{n})}{(1-x)x^{n}}-\frac{n}{x^{n}}<\frac{\lfloor x\rfloor+\lfloor x^{2}\rfloor+\cdots+\lfloor x^{n}\rfloor}{x^{n}}\le\frac{x(1-x^{n})}{(1-x)x^{n}}$$

با توجه به این که وقتی $n\to\infty$، داریم $\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{n}}{x^{n}}=-1$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x^{n}}=0$، پس دو طرف چپ و راست نامساوی فوق هر دو به سمت $\frac{x}{x-1}$ میل می‌کنند و بنابراین طبق قضیه ساندویچ (فشردگی) حد مورد نظر برابر $\frac{x}{x-1}$ می‌باشد.

مثال ۷۶: فرض کنید n عددی طبیعی باشد، حاصل $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^{2}+1)(x^{3}+1)\cdots(x^{n}+1)}{(nx+1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) 0 ۳) n^{n+1} ۴) $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$

پاسخ: گزینه «۴» حد مورد نظر به‌صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ می‌باشد. طبق قانون رشد در هر پرانتز جمله با رشد بیشتر را نگه می‌داریم.

$$\text{حد}=\lim_{x\to\infty}\frac{x.x^{2}.x^{3}\ldots x^{n}}{(nx)^{\frac{n(n+1)}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1+2+3+\cdots+n}}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}.x^{\frac{n(n+1)}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}.x^{\frac{n(n+1)}{2}}}=\frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}=n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$$

نکته ۱۱: قواعد زیر نیز با فرض $|c|>|b|>|a|$، در حل مسائل کاربرد دارد:

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}(a^{x}+b^{x}+c^{x})\simeq\lim_{x\to+\infty}c^{x}\qquad \text{و}\qquad 2)\ \lim_{x\to-\infty}(a^{x}+b^{x}+c^{x})\simeq\lim_{x\to-\infty}a^{x}$$

در واقع، هرگاه مجموعی از توابع نمایی داشته باشیم و توان آن‌ها به سمت $+\infty$ میل کند، جمله‌ی با پایه‌ی بزرگتر مقدار حد را تعیین می‌کند. اگر توان آن‌ها به سمت $-\infty$ میل کند، جمله‌ی با پایه‌ی کوچکتر تعیین‌کننده است. البته در تشخیص پایه‌ی جملات باید دقت کنید. مثلاً 3^{2x+1} را ابتدا به این صورت می‌نویسیم $3^{2x+1}=3^{1}\times3^{2x}=3\times9^{x}$، حالا معلوم می‌شود که تابعی نمایی با پایه‌ی ۹ داریم.

مثال ۷۷: حاصل $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{2^{3x}+3^{2x}+4^{x+1}}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱»

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{2^{3x}+3^{2x}+4^{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{8^{x}+9^{x}+4\times4^{x}}\sim\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{9^{x}}=9$$

مثال ۷۸: حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^{n}+3^{n}}$ برابر است با:

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۳ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از همارزیِ پایه‌ی بزرگتر داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^{n}+3^{n}}\sim\lim_{n\to+\infty}\frac{3\times3^{n}}{3^{n}}=3$$

درسنامه۵: حالت مبهم $\infty - \infty$

اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ آن‌گاه معلوم نیست مقدار $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))$ (اگر وجود داشته باشد) چقدر است. در واقع میان f و g یک مبارزه وجود دارد. اگر f ببرد، پاسخ حد ∞ و اگر g ببرد، پاسخ $-\infty$ است. اما ممکن است حالت سومی هم پیش بیاید و آن این است که این توابع بر سر یک عدد متناهی به توافق برسند (که اتفاقاً این حالت سوم بیش از دو حالت اول در سؤالات به‌وجود می‌آید).

برای رفع ابهام این‌گونه حدود، چنانچه دو عبارت به‌صورت کسر باشند، مخرج مشترک گرفته و حاصل را ساده کرده و معمولاً عبارت ساده شده به‌صورت $\frac{0}{0}$ و در بعضی موارد به شکل $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل خواهد شد و اگر دو عبارت یا یکی از آنها اصم باشد، معمولاً از روش هم‌ارزی رادیکال‌ها استفاده خواهیم کرد و در بعضی مسائل با ضرب عبارت در مزدوج خودش عامل مبهم‌کننده را حذف می‌کنیم.

مثال ۹۸: اگر $A = \lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0$ باشد، آن‌گاه $3a + 2b$ برابر است با:

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۵-

پاسخ: گزینه «۲»

$$A = \lim_{x\to -\infty}\left(\left|x - \frac{1}{2}\right| - ax - b\right) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{2} - x - ax - b\right) = \lim_{x\to -\infty}\left[\left(\frac{1}{2} - b\right) - (a+1)x\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow 3a + 2b = 3(-1) + 2\left(\frac{1}{2}\right) = -2$$

مثال ۹۹: مقدار $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x}\right)$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۴)

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم تا حد به صورت یک کسر نوشته شود. چون $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ پس:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

با استفاده از هم‌ارزی $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ وقتی $x \to 0$ داریم:

$$\text{مقدار حد} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

مثال ۱۰۰: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲» برای حل این حد ابتدا باید مخرج مشترک بگیریم و سپس از هم‌ارزی و یا قاعده‌ی هوپیتال استفاده کنیم.

توجه: اگر به جای $\sin^2 x$، از عبارت هم‌ارز آن یعنی x^2 استفاده کنیم، چون جمع جبری با عبارت بعدی صفر خواهد شد لذا هم‌ارزی صحیح نمی‌باشد.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \sin x^2}{x^2 \sin^2 x} \underset{\text{صورت را با اتحاد مزدوج تفکیک می‌کنیم}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x} \underset{\text{با استفاده از هم‌ارزی}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3 \times 2x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{6x^4} = \frac{1}{3}$$

نکته: با توجه به مهم بودن حد فوق بهتر است حد مقابل را به خاطر بسپارید:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^n x} - \frac{1}{x^n}\right) = \begin{cases} 0 & ; n = 1 \\ \frac{1}{3} & ; n = 2 \\ +\infty & ; n > 2 \end{cases} \qquad (n \in N)$$

درسنامه ۷: حالت مبهم 0^0

فرض کنید می‌خواهیم حاصل $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ را حساب کنیم. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ آن‌گاه حالت مبهم 0^0 پیش می‌آید. در این حالت از عبارت مبهم $f(x)^{g(x)}$، Ln می‌گیریم و داریم:

$$A=\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \Rightarrow \operatorname{Ln}A=\lim_{x\to a}\operatorname{Ln}f(x)^{g(x)} \Rightarrow \operatorname{Ln}A=\lim_{x\to a} g(x)\operatorname{Ln}f(x) \Rightarrow A=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\operatorname{Ln}f(x)}$$

حالا کافی است حاصل $L=\lim\limits_{x\to a} g(x)\operatorname{Ln}f(x)$ را حساب کنیم که حالت مبهم $0\times\infty$ است که روش رفع ابهام آن را می‌دانیم.

مثال ۱۱۲: مقدار $C=\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $+\infty$ ۳) ۱ ۴) حد موجود نیست.

پاسخ: گزینه «۳»

$$C=e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\operatorname{Ln}x} \Rightarrow L=\lim_{x\to 0^+} x\operatorname{Ln}x=0 \Rightarrow C=e^0=1$$

توضیح: روش به‌دست آوردن مقدار L، به عنوان مثال در قسمت رفع ابهام $0\times\infty$ آورده شده است.

مثال ۱۱۳: مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\sin x}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) 0 ۲) ۱ ۳) e ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۲» چون حد از نوع 0^0 مبهم است، لذا با استفاده از مطالب بالا و هم‌ارزی $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\sin x}=\lim_{x\to 0^+} x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{Ln}x}=e^0=1$$

مثال ۱۱۴: مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (x-\frac{\pi}{2})^{-\cos x}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $-\infty$ ۲) 0 ۳) ۱ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۳» حد مورد نظر به‌صورت مبهم 0^0 می‌باشد، بنابراین از فرمول $u^v=e^{v\operatorname{Ln}u}$ استفاده می‌کنیم.

$$C=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (x-\frac{\pi}{2})^{-\cos x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} e^{-\cos x\operatorname{Ln}(x-\frac{\pi}{2})}$$

با استفاده از تغییر متغیر $t=x-\frac{\pi}{2}$، حد فوق به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{حد}=\lim_{t\to 0^+} e^{-\cos(t+\frac{\pi}{2})\operatorname{Ln}t}=\lim_{t\to 0^+} e^{\sin t\operatorname{Ln}t}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{t\to 0^+} e^{t\operatorname{Ln}t}=e^0=1$$

توضیح: در بالا از رابطه $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{\alpha}(\operatorname{Ln}t)^{\beta}=0$ استفاده کرده‌ایم $(\alpha,\beta>0)$.

مثال ۱۱۵: حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\operatorname{Ln}x}}$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۰)

۱) صفر ۲) یک ۳) e ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۳» حالت مبهم 0^0 می‌باشد. ابتدا عبارت مقابل حد را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$u=(\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\operatorname{Ln}x}}\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}}\operatorname{Ln}u=\frac{1}{\operatorname{Ln}x}\operatorname{Ln}(\operatorname{tg}x)\to u=e^{(\operatorname{Ln}(\operatorname{tg}x))\frac{1}{\operatorname{Ln}x}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\operatorname{Ln}x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{Ln}(\operatorname{tg}x)\frac{1}{\operatorname{Ln}x}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}\overset{HOP}{=\!=}e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1+\operatorname{tg}^2x}{\operatorname{tg}x}}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+\operatorname{tg}^2x}{\operatorname{tg}x}\times x}\xrightarrow{\operatorname{tg}x\sim x}\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\operatorname{Ln}x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+x^2}{x}\times x}=e$$

درسنامه۷: حالت مبهم ∞°

فرض کنید می‌خواهیم حاصل $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ را حساب کنیم. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\circ$ آن‌گاه حالت مبهم ∞° پیش می‌آید. همانند حالت $\circ^\circ$ در این حالت حاصل حد به‌صورت $e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)Lnf(x)}$ است که باید حد داده شده در توان e حساب شود.

مثال ۱۱۶: $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-۱)^{\frac{۱}{x}}$ **برابر است با:** (معدن ـ سراسری ۹۲)

۱) $\circ$ ۲) e ۳) $\frac{۱}{e}$ ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا نوع ابهام حد را تشخیص می‌دهیم:

$$I=\lim_{x\to+\infty}(e^x-۱)^{\frac{۱}{x}}=\infty^\circ$$

حال با استفاده از خواص توابع لگاریتمی داریم:

$$I=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}\ln(e^x-۱)}=e^{\frac{\infty}{\infty}}$$

حال کافیست حالت مبهم فوق را با استفاده از قاعده هوپیتال برطرف کنیم:

$$I=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x-۱)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln(e^x-۱))'}{(x)'}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{e^x-۱}}{۱}}=e^۱$$

مثال ۱۱۷: مطلوبست محاسبه $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}(tgx)^{\cos x}$. (مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱- ۲) $\circ$ ۳) ۱ ۴) e

پاسخ: گزینه «۳» حالت مبهم ∞° است و برای رفع ابهام از تغییر متغیر $t=\frac{\pi}{۲}-x$ و یا $x=\frac{\pi}{۲}-t$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}(tgx)^{\cos x}=\lim_{t\to\circ^+}(\cot gt)^{\sin t}=\lim_{t\to\circ^+}(\frac{۱}{tgt})^{\sin t}\sim\lim_{t\to\circ^+}(\frac{۱}{t})^t=\lim_{t\to\circ^+}\frac{۱}{t^t}=۱$$

توجه: $\lim\limits_{t\to\circ^+}t^t=۱$.

مثال ۱۱۸: مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}(۳^x+۳^{۲x})^{\frac{۱}{x}}$ **کدام است؟** (ریاضی و آمار ـ سراسری ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه «۳» این سؤالی بسیار ساده از کاربرد هم‌ارزی توابع نمایی در بی‌نهایت است:

$$L=\lim_{x\to\infty}(۳^x+۳^{۲x})^{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to\infty}(۳^x+۹^x)^{\frac{۱}{x}}$$

حالا توجه داشته باشید که وقتی $x\to\infty$ ، رشد ۹^x بسیار سریع‌تر از ۳^x است. در نتیجه داریم:

$$L=\lim_{x\to\infty}(۹^x)^{\frac{۱}{x}}=۹$$

درسنامه ۸: حالت مبهم 1^∞

فرض کنید می‌خواهیم حاصل $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ را حساب کنیم. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ آن‌گاه حالت مبهم 1^∞ پیش می‌آید.

قبل از یاد گرفتن روش رفع ابهام این‌گونه حدود، ابتدا توجه کنید که در این حالت در واقع «**یکِ حدی**» به توان «**بی‌نهایت**» رسیده است و بعضی دانشجویان تصور می‌کنند، عددِ یک را وقتی بی‌نهایت بار در خودش ضرب کنیم، حاصل برابر یک می‌شود و برای همین بعضاً در این‌گونه تست‌ها، طراحان سؤال، عددِ یک را به عنوان دام برای دانشجویان در نظر می‌گیرند. تصور این دانشجویان وقتی درست است که عدد یک، **حدی** نباشد و **یک مطلق** باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

۱) $1 = {}^{\text{بی‌نهایت}}(\text{یک مطلق}) = \left[1^+\right]^{+\infty} = \lim\limits_{x\to 0^+}\lfloor 1+x\rfloor^{\frac{1}{x}}$

۲) مبهم $= {}^{\text{بی‌نهایت}}(\text{یکِ حدی}) = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

پس حالت دوم موضوع اصلی بحث ما است. برای رفع ابهام این‌گونه حدها که به‌صورت مبهم 1^∞ هستند از هم‌ارزی $f(x)^{g(x)} \sim e^{g(x)[f(x)-1]}$ استفاده می‌کنیم، یعنی داریم:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)[f(x)-1]}}$$

مثال ۱۱۹: مقدار حد عبارت $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۹۱)

۱) e^{-2} ۲) e ۳) e^2 ۴) e^3

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون حد حالت مبهم 1^∞ دارد می‌توان چنین نوشت:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(\frac{2}{x^2-1}\right)}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2}} = e^2$$

مثال ۱۲۰: حاصل $\lim\limits_{x\to 0} y = (1+2x)^{\frac{3}{\sin 2x}}$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۹۴)

۱) e^{-1} ۲) e ۳) e^2 ۴) e^3

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» حالت مبهم $(1)^\infty$ را پیش‌رو داریم:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin 2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\sin 2x}(1+2x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3(2x)}{\sin 2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3(2x)}{2x}} = e^{3(1)} = e^3$$

توجه کنید که $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$ می‌باشد.

مثال ۱۲۱: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۴)

۱) صفر ۲) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{e}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» حد داده شده فرمِ 1^∞ دارد. با استفاده از هم‌ارزی کسینوس داریم $\cos(\sqrt{x}) \simeq 1-\dfrac{(\sqrt{x})^2}{2} = 1-\dfrac{x}{2}$ و در ادامه به جای $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{g(x)}$ می‌توانیم $\lim\limits_{x\to 0} e^{g(x)[f(x)-1]}$ را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{x}{2x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

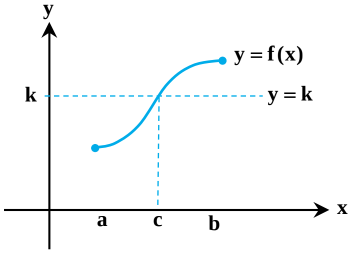
مثال ۱۲۲: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4}\right)^{e^{\frac{1}{x^2}}}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{e}$ ۴) $\dfrac{1}{e}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با حالت ابهام 1^∞ روبه‌رو هستیم. به راحتی داریم:

$$\text{حاصل حد} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4}-1\right)\times e^{\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^4}} = e^{0\times\text{تابع کراندار}} = e^0 = 1$$

درسنامه-۱: قضیه مقدار میانی (بولتزانو)

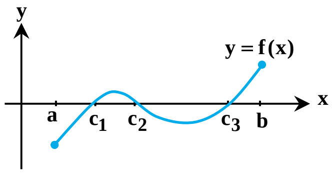


فرض کنیم تابع f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و k مقداری بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، در این‌صورت نقطه‌ای مانند c در این بازه قرار دارد که $f(c)=k$ شود. تعبیر هندسی این قضیه بسیار ساده است. اگر $f(a)<k$ و $f(b)>k$ باشد به این معنا است که نمودار $f(x)$ از زیر خط $y=k$ به بالای آن آمده است. بنابراین باید در نقطه‌ای مانند c با این خط برخورد کرده باشد یعنی $f(c)=k$. توضیح مختصری در مورد این‌که $c\in(a,b)$ است یا $c\in[a,b]$ لازم است. اگر بدانیم که $f(b)\le k\le f(a)$ آن‌گاه $c\in[a,b]$ است، یعنی ممکن است. $c=a$ یا $c=b$ باشد. اما اگر نامساوی اول اکید باشد، نتیجه می‌شود که $c\in(a,b)$ است. این قضیه یک نتیجه‌ی مهم دارد که از خودش معروف‌تر است:

نتیجه: هرگاه تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<۰$ آن‌گاه تابع $f(x)$ حداقل یک ریشه در بازه‌ی (a,b) دارد.

در توضیح این نتیجه باید گفت که وقتی $f(a)f(b)<۰$ می‌شود، یعنی $f(a)$ و $f(b)$ اعدادی غیرصفر و مختلف‌العلامه هستند و این یعنی یا $f(a)<۰<f(b)$ و یا $f(a)>۰>f(b)$، در هر صورت عدد حقیقی $k=۰$ بین $f(a)$ و $f(b)$ قرار دارد، پس یک c در این بازه وجود دارد که $f(c)=۰$ باشد.

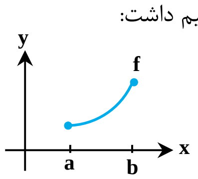
در اینجا هم اگر $f(a)f(b)\le ۰$ باشد، نتیجه می‌شود $c\in[a,b]$ است. اما اگر نامساوی اکید $f(a)f(b)<۰$ را داشته باشیم نتیجه می‌گیریم $c\in(a,b)$ است.



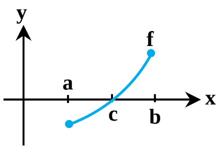
نکته ۲۳: قضیه‌ی مقدار میانی در مورد تعداد دقیق ریشه‌های $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ نظری نمی‌دهد. فقط می‌گوید اگر $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه باشند، حداقل یک ریشه در این بازه وجود دارد. ممکن است نمودار $f(x)$ طوری باشد که چند بار محور x ها را قطع کند. در این صورت دارای چند ریشه در این بازه خواهد بود.

با این حال اگر $f(x)$ تابعی اکیداً صعودی یا تابعی اکیداً نزولی باشد؛ به‌صورت دقیق‌تری می‌توانیم در مورد تعداد ریشه‌های آن بحث کنیم:

نکته ۲۴: هرگاه $f(x)$ تابعی پیوسته و اکیداً صعودی (یا پیوسته و اکیداً نزولی) در بازه‌ی $[a,b]$ باشد، دو حالت زیر را خواهیم داشت:



الف) اگر $f(a)$ و $f(b)$ هم‌علامت باشند $(f(a)f(b)>۰)$، آن‌گاه $f(x)$ در این بازه **هیچ** ریشه‌ای ندارد.



ب) اگر $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه باشند $(f(a)f(b)<۰)$، آن‌گاه $f(x)$ در این بازه **دقیقاً یک** ریشه دارد.

مثال ۱۶۲: معادله $x^۳-۳x+۱=۰$ در فاصله $[۰,۲]$: (معماری کشتی ـ سراسری ۸۵)

۱) هیچ ریشه‌ای ندارد.
۲) دارای دو ریشه است.
۳) بیش از دو ریشه دارد.
۴) دارای یک ریشه است.

پاسخ: گزینه «۲» توجه کنید که داریم: $f(-۲)<۰\ ,\ f(۰)>۰\ ,\ f(۱)<۰\ ,\ f(۲)>۰$

بنابراین طبق قضیه مقدار میانی معادله سه جواب دارد، که دو جواب آن در فاصله $[۰,۲]$ است. به طور دقیق‌تر یک جواب در فاصله $[۰,۱]$ و یک جواب در فاصله $[۱,۲]$ می‌باشد.

مثال ۱۶۳: بزرگترین ریشه معادله $x^۴+۲x-۲=۰$ در کدام بازه قرار دارد؟ (ایمنی صنعتی ـ سراسری ۹۱)

۱) $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴})$
۲) $(۱,\frac{۹}{۸})$
۳) $(\frac{۳}{۴},\frac{۷}{۸})$
۴) $(\frac{۷}{۸},۱)$

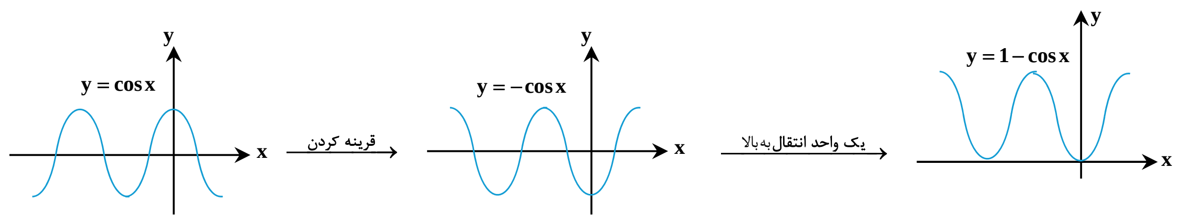
پاسخ: گزینه «۳» چون $f(\frac{۳}{۴})<۰$ و $f(\frac{۷}{۸})>۰$، پس معادله داده شده ریشه‌ای در بازه $(\frac{۳}{۴},\frac{۷}{۸})$ دارد.

مثال ۱۶۴: معادله $e^x+\cos x-۱=۰$ دارای چند ریشه است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۵)

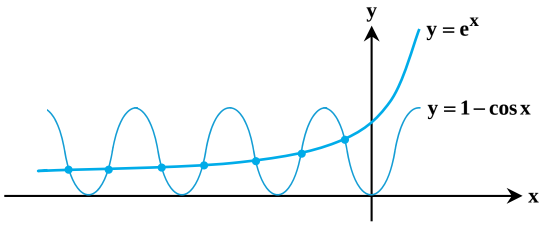
۱) هیچ
۲) یک
۳) سه
۴) بی‌نهایت

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: معادله‌ی داده شده را به صورت $e^x=۱-\cos x$ می‌نویسیم. تعداد جواب‌های این معادله برابر با تعداد نقاط برخورد منحنی‌های $f(x)=e^x$ و $g(x)=۱-\cos x$ است. اگر نمودار این دو تابع را رسم کنید به وضوح می‌بینید که بی‌نهایت بار یکدیگر را قطع می‌کنند. مراحل رسم $g(x)$ به صورت زیر است:



رسم نمودار $y=e^{x}$ ساده است. این تابع اکیداً صعودی است $e^{\circ}=۱$، $e^{-\infty}=\circ$ و $e^{\infty}=\infty$.
بنابراین واضح است که e^{x} و $۱-\cos x$ بی‌نهایت بار یکدیگر را قطع می‌کنند:



روش دوم: برای هر عدد منفی مانند x داریم:

$$-\infty<x<\circ \Rightarrow e^{-\infty}<e^{x}<e^{\circ} \Rightarrow \circ<f(x)<۱$$

در مضارب فرد و منفی π مانند $x=-\pi,-۳\pi,-۵\pi,\cdots$ داریم:

$$g(x)=۱-\cos x=۱+۱=۲>f(x) \Rightarrow g(x)-f(x)>\circ$$

و در مضارب زوج و منفی π مانند $x=-۲\pi,-۴\pi,-۶\pi,\cdots$ داریم:

$$g(x)=۱-\cos x=۱-۱=\circ<f(x) \Rightarrow g(x)-f(x)<\circ$$

پس بی‌شمار نقطه مانند c_k وجود دارد که $g(c_k)-f(c_k)=\circ$.

مثال ۱۶۵: معادله $x^{۵}+(x-۱)^{۵}+(x-۲)^{۵}+\cdots+(x-۵)^{۵}=\circ$ چند ریشه دارد؟

۱) حداقل یک ریشه ۲) حداقل ۳ ریشه ۳) دقیقاً یک ریشه ۴) ۵ ریشه مثبت

پاسخ: گزینه «۳» سمت چپ معادله فوق را $f(x)$ می‌نامیم، واضح است که $f(x)$ پیوسته می‌باشد. در $x=۶$ همه‌ی پرانتزها مثبت می‌شوند، پس مجموع آن‌ها هم مثبت است. یعنی $f(۶)>\circ$. در $x=-۱$ همه‌ی پرانتزها منفی هستند، پس مجموع آن‌ها هم منفی است، یعنی $f(-۱)<\circ$. همچنین واضح است که هر چه مقدار x افزایش یابد، مقدار $x^{۵}$، $(x-۱)^{۵}$، ...، $(x-۵)^{۵}$ نیز افزایش می‌یابد در نتیجه $f(x)$ صعودی است. بنابراین معادله‌ی $f(x)=\circ$ دقیقاً یک ریشه دارد.

مثال ۱۶۶: اگر f و g توابعی پیوسته بر $[a,b]$ باشند، با کدام شرط زیر نمودار f و g الزاماً یکدیگر را در نقطه‌ای بین a و b قطع می‌کنند؟ (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) $f(b)>g(b)$ و $f(a)<g(a)$ ۲) $f(b)>g(b)$ و $f(a)>g(a)$ ۳) $f(b)<g(b)$ و $f(a)<g(a)$ ۴) $f(b)<g(b)$ و $f(a)=g(a)$

پاسخ: گزینه «۱» تابع $h(x)=f(x)-g(x)$ را در نظر بگیرید، طبق شرایط گزینه (۱)، $h(a)<\circ$ و $h(b)>\circ$، پس طبق نتیجه قضیه مقدار میانی، حداقل یک نقطه مانند c بین a و b وجود دارد به طوریکه $h(c)=\circ$ یعنی $f(c)=g(c)$.

نکته ۲۵: هر چندجمله‌ای از درجه فرد حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

نکته ۲۶: (قضیه نقطه ثابت) اگر $f:[a,b]\to[a,b]$ تابعی پیوسته باشد، آن‌گاه حداقل یک نقطه مانند c بین a و b وجود دارد به طوری که $f(c)=c$ می‌باشد.

مثال ۱۶۷: برای توابع $p(x)=x^{۹۹}+ax^{۹۷}+bx+c$ $(a,b,c>\circ)$ و $f(x)=\frac{\pi}{۲}\cos(\frac{۲}{\pi}x^{۲})$ کدام گزینه برقرار است؟

۱) $p(x)$ حداقل یک ریشه حقیقی دارد و کمان α در ربع دوم موجود است به‌طوری که $f(\alpha)=\alpha$.
۲) $p(x)$ ریشه حقیقی ندارد و کمان α در ربع اول وجود دارد که $f(\alpha)=\alpha$.
۳) $p(x)$ حداقل یک ریشه حقیقی دارد و کمان α در ربع اول وجود دارد که $f(\alpha)=\alpha$.
۴) $p(x)$ ریشه حقیقی ندارد و کمان α در ربع دوم وجود دارد که $f(\alpha)=\alpha$.

پاسخ: گزینه «۳» $p(x)$ چندجمله‌ای از درجه‌ی فرد است بنابراین حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد. در مورد $f(x)$ با توجه به گزینه‌ها به دنبال کمانی هستیم که $f(\alpha)=\alpha$ باشد. در ربع اول داریم $\circ\le x\le\frac{\pi}{۲}$ و همچنین $f(\circ)=\frac{\pi}{۲}\cos(\circ)=\frac{\pi}{۲}$ و $f(\frac{\pi}{۲})=\frac{\pi}{۲}\cos(\frac{۲}{\pi}\frac{\pi^{۲}}{۴})=\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi}{۲}=\circ$. پس $\circ\le x\le\frac{\pi}{۲}$ و $\circ\le f(x)\le\frac{\pi}{۲}$ یعنی $f:\left[\circ,\frac{\pi}{۲}\right]\to\left[\circ,\frac{\pi}{۲}\right]$ است. (برای توضیح کامل‌تر می‌توان گفت وقتی $\circ\le x\le\frac{\pi}{۲}$ داریم $\circ\le\frac{۲}{\pi}x^{۲}\le\frac{\pi}{۲}$ پس $\frac{۲}{\pi}x^{۲}$ در ربع اول قرار دارد، در نتیجه $\circ\le\cos(\frac{۲}{\pi}x^{۲})\le۱$ و به همین دلیل $\circ\le f(x)\le\frac{\pi}{۲}$). این نشان می‌دهد که یک زاویه مانند α در ربع اول وجود دارد که $f(\alpha)=\alpha$. البته در ربع دوم این شرط برقرار نیست. در ربع دوم داریم $\frac{\pi}{۲}\le x\le\pi$ و $f(\frac{\pi}{۲})=\circ$ و $f(\pi)=\frac{\pi}{۲}$ پس نمی‌توان گفت که $\frac{\pi}{۲}\le f(x)\le\pi$ است.

مدرسان شریف

فصل سوم

« مشتق و کاربرد مشتق »

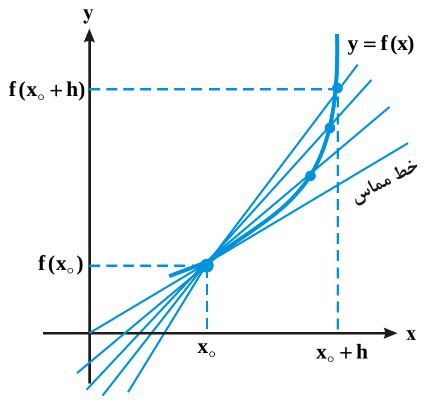
درسنامه۱: مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

در این درسنامه ابتدا مشتق را تعریف می‌کنیم و سپس انواع فرمول‌های مشتق‌گیری را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

تعبیر هندسی و تعریف مشتق

فرض کنید می‌خواهیم شیب خط مماس بر نمودار $y=f(x)$ در نقطه به طول $x_\circ$ روی آن را به دست آوریم. برای این کار ابتدا مطابق شکل روبه‌رو یک نقطه‌ی دیگر به طول $x_\circ+h$ را روی منحنی انتخاب کرده و شیب خط گذرا از دو نقطه را که به صورت زیر محاسبه می‌شود می‌نویسیم:

$$\text{شیب خط } d=\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{(x_\circ+h)-x_\circ}=\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$$



هر چقدر مقدار h کوچک‌تر شود. دو نقطه‌ی روی منحنی به هم نزدیک‌تر و در حالتی که h به سمت صفر میل می‌کند. دو نقطه بر هم منطبق می‌شوند. در این حالت خط d به خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی $x_\circ$ تبدیل می‌شود یعنی داریم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی } f(x) \text{ در نقطه‌ی } x_\circ = \lim_{h\to\circ}\left(\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}\right)$$

اگر به جای شیب خط مماس از کلمه‌ی (مشتق) استفاده کنیم، اکنون می‌توانیم تعریف مشتق در یک نقطه را ارائه دهیم:

$$\text{مشتق تابع } y=f(x) \text{ در نقطه‌ی } x_\circ = \lim_{h\to\circ}\left(\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}\right)$$

اما به نظر می‌رسد بهتر است به جای عبارت سمت چپ، واژه‌ی کوتاه‌تر و از آن مهم‌تر ریاضی‌وار قرار دهیم (تا در محاسبات مجبور نباشیم، تمام عبارت سمت چپ را بنویسیم)!! معمولاً $f'(x_\circ)$ و یا به عبارت دیگر، $y'(x_\circ)$ یعنی مشتق در نقطه‌ی $x_\circ$ در کتاب‌ها به کار می‌رود. البته $\frac{dy}{dx}$ نیز به جای $f'(x)$ به کار می‌رود.

نکته۱: اگر به شکل و توضیحات قبلی دقت کنید، متوجه می‌شوید که $x_\circ$ یک نقطه‌ی ثابت است؛ اما h (یعنی فاصله‌ی $x_\circ$ تا نقطه‌ی دوم در حال تغییر است و به سمت صفر میل می‌کند. اگر نقطه‌ی دوم را با $x=x_\circ+h$ نشان بدهیم، وقتی h به سمت صفر می‌رود، نقطه x به $x_\circ$ نزدیک می‌شود. به عبارتی وقتی h به سمت صفر میل کند، آن‌گاه x به سمت $x_\circ$ میل خواهد کرد (این موضوع با نوشتن $x-x_\circ=h$ واضح‌تر است). پس می‌توانیم در تعریف مشتق به جای $x_\circ+h$ از متغیر x و همچنین به جای h از $x-x_\circ$ استفاده کنیم و به جای $h\to\circ$، بگوییم $x\to x_\circ$ و شکل دیگری از تعریف مشتق را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\left(\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}\right)$$

این تعریف، بیشتر از تعریف قبلی (تعریف اول که شامل h بود) در حل سؤالات کاربرد دارد.

توجه داشته باشید که در بعضی از سؤال‌ها به جای h در فرمول از Δx استفاده می‌کنند:

$$f'(x_\circ)=\lim_{\Delta x\to\circ}\frac{f(x_\circ+\Delta x)-f(x_\circ)}{\Delta x}$$

تذکر: برای آن‌که $f'(x_0)$ عدد حقیقی باشد، یعنی تابع $f(x)$ در x_0 مشتق‌پذیر باشد، باید حد فوق وجود داشته باشد. حالا به مخرج کسر در این حد توجه کنید، مخرج کسر به سمت صفر می‌رود. اگر صورت به صفر میل نکند، مقدار حد $\pm\infty$ خواهد شد. پس برای مشتق‌پذیر بودن $f(x)$ در x_0 باید صورت کسر هم به سمت صفر میل کند. این نتیجه می‌دهد که باید $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ باشد. اما این، همان تعریف پیوستگی است. پس برای مشتق‌پذیر بودن $f(x)$ در x_0 لازم است $f(x)$ در x_0 پیوسته باشد. در ضمن یادتان باشد در صورتی می‌توان گفت تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی x_0، مشتق‌پذیر است که علاوه بر پیوستگی در همسایگی x_0، حد فوق موجود و مقداری حقیقی داشته باشد.

مثال ۱: فرض کنید f تابعی باشد که به ازای هر دو عدد حقیقی x و y روابط $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ و $f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2$ برقرار باشد:

الف) $f(0)$ را پیدا کنید.

ب) $f'(0)$ را پیدا کنید.

ج) $f'(x)$ را پیدا کنید.

پاسخ: از جمله مسائلی که از تعریف مشتق در حل آن‌ها استفاده می‌شود، سؤالاتی است که ارتباطی بین $f(x)$، $f(y)$ و $f(x+y)$ دیده می‌شود. دقت کنید در این سؤال، سه خواسته مطرح شده که هر سه قسمت را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

الف) با قرار دادن $x=0$ و $y=0$ در تساوی داده شده داریم:

$$f(0+0)=f(0)+f(0)+0 \Rightarrow f(0)=2f(0) \Rightarrow f(0)=0$$

ب) برای محاسبه‌ی $f'(0)$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

در قسمت (الف) دیدیم که $f(0)=0$، بنابراین داریم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

ج) برای محاسبه‌ی $f'(x)$ می‌توانیم از تساوی داده شده در صورت سؤال استفاده کرده و $f(x+h)$ را بدست آوریم. کافی است به جای y در این تساوی h قرار دهیم تا فرم کلی آن شبیه آنچه باشد که قبلاً دیده‌ایم:

$$f(x+h)=f(x)+f(h)+x^2h+xh^2$$

حالا می‌توانیم کسر $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ را تشکیل دهیم و با محاسبه‌ی حد، وقتی $h\to 0$، ضابطه‌ی $f'(x)$ را تعیین کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x)+f(h)+x^2h+xh^2]-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+x^2h+xh^2}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)}{h}+x^2+xh\right)$$

واضح است که $\lim\limits_{h\to 0}xh=0$ و طبق صورت سؤال $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=1$. در نتیجه داریم:

$$f'(x)=1+x^2$$

مثال ۲: فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ مشتق پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=b$، که $b\in\mathbb{R}$، در این صورت کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ موجود نباشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ موجود نیست.

۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=b$

۳) برای هر $0<h$، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=b$

۴) اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ موجود باشد، آن‌گاه $b=0$

پاسخ: گزینه «۱» با ارائه یک مثال که در شرایط مسأله صدق می‌کند گزینه نادرست را مشخص می‌کنیم. قرار می‌دهیم $f(x)=bx$. در این صورت f در شرایط مسأله صدق می‌کند، واضح است که $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ موجود نیست، ولی $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ موجود و برابر b می‌باشد پس گزینه (۱) نادرست است.

مشتق چپ و راست

الف) تابع f در $x=x_0$ مشتق راست دارد هرگاه حد مقابل وجود داشته باشد:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ب) تابع f در $x=x_0$ مشتق چپ دارد هرگاه حد مقابل وجود داشته باشد:

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

اگر تابعی در یک نقطه مانند x_0 دارای مشتق راست و چپ باشد و این دو مشتق با هم مساوی باشند، می‌گوییم تابع در نقطه x_0 دارای مشتق است (عکس مطلب فوق نیز صادق است).

$$f'(x_0^+)=f'(x_0^-)=f'(x_0)$$

مثال ۳: اگر $f(x)=\begin{cases}\text{arctg}x & ; |x|\le 1\\ \frac{\pi}{4}\text{sgn}(x)+\frac{x-1}{2} & ; |x|>1\end{cases}$، آن‌گاه در مورد $f'(-1)$ و $f'(1)$ کدام گزینه صحیح است؟ (sgnx تابع علامت است.)

۱) $f'(-1)$ وجود ندارد و $f'(1)=\frac{1}{2}$ است.
۲) $f'(-1)$ وجود ندارد و $f'(1)=1$ است.
۳) $f'(-1)$ و $f'(1)$ هر دو وجود ندارند.
۴) مشتق راست در نقطه‌ی $x=-1$، دو برابر مشتق چپ در نقطه‌ی $x=1$ است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای آن که ضابطه f را بهتر ببینیم، نامساوی $|x|\le 1$ و $|x|>1$ را به‌صورت باز شده می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\text{arctg}(x) & ;\ -1\le x\le 1\\ \frac{\pi}{4}\text{sgn}(x)+\frac{x-1}{2} & ;\ x>1 \text{ یا } x<-1\end{cases}$$

توجه کنید که برای اعداد مثبت $\text{sgn}(x)=1$ و برای اعداد منفی $\text{sgn}(x)=-1$ است. مشتق چپ و راست را در $x=1$ حساب کنیم:

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}-\frac{\pi}{4}}{x-1}=\frac{1}{2}\ ,\ f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\text{arctg}x-\frac{\pi}{4}}{x-1}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}$$

پس $f'(1)=\frac{1}{2}$ است. اکنون مشتق چپ و راست را در $x=-1$ حساب کنیم:

$$\left.\begin{aligned}f'(-1^+)&=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\text{arctg}x+\frac{\pi}{4}}{x+1}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}\\ f'(-1^-)&=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{-\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}+\frac{\pi}{4}}{x+1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'(-1^+)\ne f'(-1^-)\Rightarrow$$ $f'(-1)$ وجود ندارد.

رابطه‌ی بین مشتق و پیوستگی

اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=x_0$ دارای مشتق باشد، آن‌گاه $f(x)$ در x_0 پیوسته است. البته پیوستگی در یک نقطه شرط **لازم** برای مشتق‌پذیری در آن نقطه است ولی شرط کافی نمی‌باشد. به عبارت دیگر عکس قضیه فوق صادق نیست، یعنی اگر تابعی در نقطه x_0 پیوسته باشد، دلیل بر مشتق‌پذیری تابع در نقطه x_0 **نخواهد بود**. برای مثال تابع $y=|x|$ در $x=0$ پیوسته است ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۴: در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x+a & , x\le 1\\ b\sqrt[3]{x} & , x>1\end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است، مقدار $\frac{2b-a}{2}$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) ۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» چون تابع در نقطه $x=1$ مشتق‌پذیر است، لذا پیوسته نیز خواهد بود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)\Rightarrow 1+a=b \qquad (1)$$

و چون تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است، لذا مشتق چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابرند و خواهیم داشت:

$$f'(x)=\begin{cases}1 & ;\ x\le 1\\ \frac{b}{3\sqrt[3]{x^2}} & ;\ x>1\end{cases}\Rightarrow \frac{b}{3}=1\Rightarrow b=3\xrightarrow{(1)}a=2\Rightarrow\frac{2b-a}{2}=2$$

مثال ۵: فرض کنید $f(x)=\begin{cases}(1+e^{\frac{1}{x}})^{-1} & ;\ x\ne 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$ باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (MBA ـ سراسری ۹۲)

۱) $f(x)$ در $x=0$، فقط پیوستگی چپ دارد.
۲) $f(x)$ در $x=0$، پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.
۳) $f(x)$ در $x=0$، مشتق‌پذیر است.
۴) $f(x)$ در $x=0$، فقط پیوستگی راست دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا شرایط پیوستگی تابع را بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}f(x)&=\lim_{x\to 0^+}(1+e^{\frac{1}{x}})^{-1}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{0^+}}}=\frac{1}{1+e^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0\\ \lim_{x\to 0^-}f(x)&=\lim_{x\to 0^-}(1+e^{\frac{1}{x}})^{-1}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{0^-}}}=\frac{1}{1+e^{-\infty}}=\frac{1}{1+0}=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0$$

بنابراین تابع موردنظر در نقطه‌ی $x=0$ فقط از راست پیوسته است و بنابراین مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۶: تابع $f(x)=\begin{cases}|x|^x & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ به ازای چه مقادیری از a در همسایگی نقطه $x=0$ مشتق‌پذیر است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) به ازاء هر a دلخواه ۲) برای $a=0$ ۳) برای $a=1$ ۴) به ازاء هیچ‌مقدار a

پاسخ: گزینه «۴» طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|^x-a}{x}$$

شرط لازم (نه کافی) برای وجود $f'(0)$، آن است که f در $x=0$ پیوسته باشد. بنابراین باید داشته باشیم:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)\Rightarrow a=\lim_{x\to 0}|x|^x=\lim_{x\to 0}e^{xLn|x|}$$

می‌دانیم که $\lim_{x\to 0}xLn|x|=0$ است. برای مثال از سمت راست داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}xLnx=\lim_{x\to 0^+}\frac{Lnx}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$$

از سمت چپ نیز، به صورت مشابه مقدار حد $xLn|x|$ برابر با صفر می‌شود پس داریم:

$$a=\lim_{x\to 0}e^{xLn|x|}=e^0=1$$

حالا با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{xLn|x|}-1}{x}$$

از هم‌ارزی $e^u\simeq 1+u$ استفاده می‌کنیم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{1+xLn|x|-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{xLn|x|}{x}=\lim_{x\to 0}Ln|x|=Ln(0^+)=-\infty$$

پس به ازای هیچ مقداری از a، مقدار $f'(0)$ عددی حقیقی نمی‌شود. پس گزینه (۴) صحیح است.

مثال ۷: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n^2} & ;\ x=\frac{1}{n} & ,\ n=\pm1,\pm2,\dots\\ 0 & ;\ x\neq\frac{1}{n} & ,\ n=\pm1,\pm2,\dots\end{cases}$ تعریف شده است. کدام‌یک از احکام زیر در مورد رفتار f در نقطه $x=0$ درست است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۶)

۱) نه پیوسته و نه مشتق‌پذیر ۲) هم پیوسته و هم مشتق‌پذیر

۳) پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست. ۴) مشتق‌پذیر است ولی پیوسته نیست.

پاسخ: گزینه «۲» گزینه‌ها خیلی خوب طراحی نشده‌اند! چرا که گزینه (۴) را از همان ابتدا می‌توان رد کرد!؟ هر دانش‌آموز دبیرستانی هم می‌داند، امکان ندارد تابع مشتق‌پذیر باشد، ولی پیوسته نباشد!

ابتدا پیوستگی $f(x)$ را در $x=0$ بررسی می‌کنیم. واضح است که $f(0)=0$. حالا برای محاسبه‌ی $\lim_{x\to 0}f(x)$ دو حالت داریم. اگر $x=\frac{1}{n}$ باشد وقتی $x\to 0$، داریم $n\to\infty$ پس داریم:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

و اگر x شامل اعدادی به جز $\frac{1}{n}$ها باشد، داریم:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}0=0$$

پس در هر صورت داریم $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$. بنابراین $f(x)$ در $x=0$ پیوسته است. برای بررسی $f'(0)$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

باز هم دو حالت بالا را بررسی می‌کنیم:

$$x\neq\frac{1}{n}\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0\quad,\quad x=\frac{1}{n}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{n^2}\Rightarrow f'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

پس در هر دو حالت $f'(0)=0$ به دست می‌آید. یعنی $f(x)$ در $x=0$ مشتق‌پذیر است.

توجه: اگر از همان ابتدا مشتق‌پذیری $f(x)$ در $x=0$ را نشان می‌دادیم دیگر نیازی به نشان دادن پیوستگی $f(x)$ در این نقطه نداشتیم، اما روند معمول آن است که ابتدا پیوستگی و سپس مشتق‌پذیری را بررسی می‌کنند.

مثال ۸: فرض کنیم $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و $g=f'$، در این صورت: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) f و g در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کنند. ۲) g پیوسته است.

۳) f در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند ولی g لزوماً چنین نیست. ۴) gof پیوسته است.

پاسخ: گزینه «۱» هر تابع پیوسته، در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند. علاوه بر آن، مشتق هر تابع هم در بازه‌ی (a,b) دارای خاصیت مقدار میانی است. حالا در این سؤال؛ تابع f مشتق‌پذیر است، پس پیوسته است؛ در نتیجه دارای خاصیت مقدار میانی است. تابع g هم مشتقِ f است پس دارای خاصیت مقدار میانی است. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

در مورد سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۲): تابع پیوسته‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ را بر بازه‌ی $[0,1]$ در نظر بگیرید، می‌دانیم که $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ اما، $f'(x)$ در $x=0$ پیوسته نیست. پس تابع مشتق لزوماً پیوسته نیست.

بررسی گزینه (۳): همان‌طور که گفتیم f و f' هر دو در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کنند.

بررسی گزینه (۴): همان‌طور که در بررسی گزینه‌ی (۱) گفتیم، تابع $g=f'$ لزوماً پیوسته نیست. پس ترکیب gof هم لزوماً پیوسته نیست. برای مثال $f(x)=\sqrt{x}$ بر بازه‌ی $[0,1]$ را در نظر بگیرید:

$$g(x)=f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g(f(x))=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}}}$$

می‌بینیم که gof در $x=0$ پیوسته نیست.

رابطه‌ی بین مشتق چپ یا راست و پیوستگی تابع مشتق:

اگر حد $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $f'(x_0^+)$ وجود دارد و $f'(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$. در این صورت می‌گوییم تابع مشتق، مشتق راست متناهی در x_0 دارد، در نتیجه دارای پیوستگی راست نیز می‌باشد و اگر حد $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $f'(x_0^-)$ نیز وجود دارد $(f'(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x))$ و می‌گوییم تابع مشتق، دارای مشتق چپ متناهی است و تابع مشتق دارای پیوستگی چپ است.

نقاط مشتق‌ناپذیر توابع

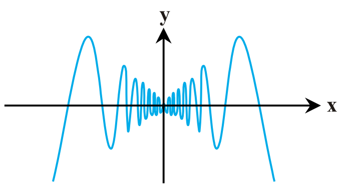
در این قسمت می‌خواهیم انواع نقاط مشتق‌ناپذیر را بررسی کنیم. برای درک بهتر، آن‌ها را به طور جداگانه دسته‌بندی کرده و برای هر یک مثال مخصوص به خودش را نیز آورده‌ایم:

۱ـ اگر تابع در همسایگی نقطه‌ای تعریف نشده باشد، آن‌گاه تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست. مثلاً تابع $f(x)=\sqrt[4]{x}$ را در نظر بگیرید. این تابع در نقطه‌ی $x_0=0$ مشتق‌ناپذیر است؛ چون در همسایگی چپ صفر، تعریف نشده است.

۲ـ اگر تابع در نقطه‌ای ناپیوسته باشد، در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست. مثلاً تابع $f(x)=\begin{cases} x^4+1 & ; x>1 \\ 2 & ; x=1 \\ x^4-1 & ; x<1 \end{cases}$، در نقطه‌ی $x=1$ پیوستگی راست دارد، ولی پیوستگی چپ ندارد و این یعنی تابع پیوسته نیست و در نتیجه $f(x)$ در نقطه‌ی $x=1$، مشتق‌پذیر نیز نمی‌باشد.

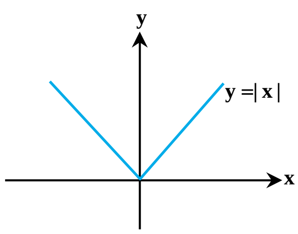
۳ـ اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=x_0$ پیوسته باشد، ولی حد $\lim\limits_{x\to x_0}(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0})$ موجود نباشد، آن‌گاه باز هم می‌توان گفت تابع در نقطه‌ی $x=x_0$ مشتق‌ناپذیر است. برای مثال تابع $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. این تابع در نقطه‌ی $x_0=0$ پیوسته است، ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست، چون داریم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}(\frac{f(x)-f(0)}{x-0})=\lim_{x\to 0}(\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x})=\lim_{x\to 0}(\sin\frac{1}{x}) \Rightarrow \text{حد وجود ندارد.}$$



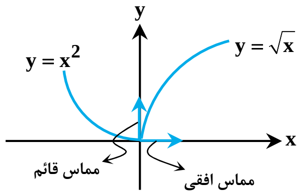
۴ـ هرگاه مشتقات چپ و راست تابع $y=f(x)$ در x_0 **موجود** و برابر با **عددی حقیقی** بوده ولی با هم **مساوی نباشند**، در این صورت در آن نقطه تابع مشتق ندارد و خط مماس بر $f(x)$ وجود ندارد و فقط دو نیم مماس چپ و راست می‌توان بر منحنی رسم کرد. به چنین نقاطی، **نقاط زاویه‌دار** می‌گویند. در این حالت دو «نیم‌مماس» داریم که زاویه‌ی بین آن‌ها متغیر و بین ۰ تا ۱۸۰ درجه است.

برای مثال به تابع $y=|x|$ دقت کنید؛ این تابع در نقطه‌ی $x_0=0$ مشتق‌ناپذیر است و همان‌طور که در شکل می‌بینید، در این نقطه، زاویه‌دار یا به عبارت دیگر «گوشه‌دار» است.



$$f'(0)=\lim_{x\to 0}(\frac{f(x)-f(0)}{x-0})=\lim_{x\to 0}(\frac{|x|-0}{x-0}) \Rightarrow \begin{cases} f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{x}{x})=1 \\ f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\frac{-x}{x})=-1 \end{cases} \Rightarrow f'(0^+)\neq f'(0^-)$$

تذکر۲: چنانچه یکی از مشتقات متناهی و دیگری نامتناهی باشد، در این صورت باز هم تابع مشتق‌پذیر نیست و تفاوت آن با وضعیت قبل این است که یکی از مماس‌ها قائم است. برای مثال به تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ x\le 0 \\ \sqrt{x} & ; \ x>0 \end{cases}$ دقت کنید، این تابع در نقطه‌ی $x_0=0$ مشتق‌ناپذیر است، چون داریم:



$$\begin{cases} f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty \\ f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-0}{1}=0 \end{cases}$$

تذکر۳: چنانچه یکی از مشتقات موجود و متناهی و دیگری اصلاً وجود نداشته باشد، باز هم می‌توان گفت تابع در آن نقطه مشتق‌ناپذیر است و در این نقطه هم یک نیم‌مماس داریم. برای مثال تابع مقابل را در نظر بگیرید:

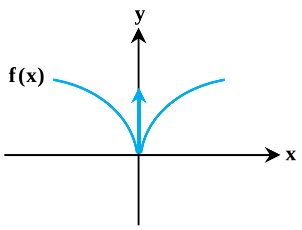
$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ; \ x\ge 0 \\ \sin\dfrac{1}{x}+1 & ; \ x<0 \end{cases}$$

این تابع در نقطه‌ی $x_0=0$ دارای مشتق راست است و مقدار آن برابر با صفر می‌باشد. اما به مقدار مشتق چپ در این نقطه توجه کنید:

$$f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sin(\frac{1}{x})+1-1}{x-0}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}\sin(\dfrac{1}{x})=-\infty\times(\text{کران‌دار غیرصفر})\Rightarrow \text{حد وجود ندارد.}$$

۵ـ اگر هر دو مشتق چپ و راست، در نقطه‌ی $x=x_0$ نامتناهی شوند ($+\infty$ یا $-\infty$ شوند)، آن‌گاه باز هم می‌توان گفت تابع در نقطه‌ی $x=x_0$ مشتق‌ناپذیر است. برای تابع پیوسته‌ی f، اگر هر دو مشتق **نامتناهی ولی هم علامت** شوند (یعنی یا هر دو $+\infty$ شوند و یا هر دو $-\infty$ شوند)، آن‌گاه این نقطه را **نقطه‌ی عطف قائم** می‌نامند. در این حالت دو نیم‌مماس عمودی به معادله‌ی $x=x_0$ داریم که با هم زاویه‌ی 180° می‌سازند و این نیم‌مماس‌ها با هم، تشکیل خطی را می‌دهند که از درون منحنی f عبور می‌کند. اگر هر دو مشتق **نامتناهی ولی مختلف‌العلامت** شوند (یعنی یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$ شود) آن‌گاه این نقطه را **نقطه‌ی بازگشت** می‌نامند. در این حالت دو نیم‌مماس به معادله‌ی $x=x_0$ داریم که با هم زاویه‌ی صفر درجه می‌سازند (در واقع بر هم منطبق هستند).

برای مثال نقطه‌ی $x_0=0$ برای تابع $f(x)=\sqrt{|x|}$، نقطه‌ی بازگشت محسوب می‌شود، چون داریم:

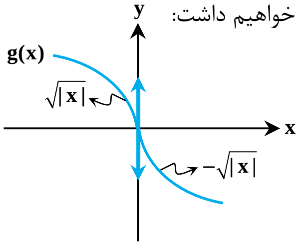


$$\begin{cases} f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sqrt{|x|}-0}{x-0}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=+\infty \\ f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sqrt{|x|}-0}{x-0}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sqrt{-x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{-x}{x\sqrt{-x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{-x}}\right)=-\infty \end{cases}$$

در محاسبه‌ی $f'(0^-)$ دقت کنید که چون $x\to 0^-$، یعنی x از سمت چپ به صفر میل می‌کند و عددی منفی است؛ پس $-x>0$ و $\sqrt{-x}$ تعریف شده است.

توجه داشته باشید برای توابعی به فرم کلی $y=\sqrt{|ax+b|}$ نقطه‌ی $x=-\dfrac{b}{a}$ طول نقطه بازگشت و برای توابعی به فـرم کلـی $y=\sqrt[2n+1]{(x-\alpha)^{2m}}\ (n\ge m)$ نقطه‌ای به طول $x=\alpha$ همواره طول نقطه بازگشت محسوب می‌شود.

به عنوان نمونه‌ای از عطف قائم، به تابع $g(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|} & ; \ x<0 \\ -\sqrt{|x|} & ; \ x\ge 0 \end{cases}$ توجه کنید. تفاوت این تابع با تابع $f(x)$ در آن است که در ناحیه‌ی $x\ge 0$ به جای $\sqrt{|x|}$ از $-\sqrt{|x|}$ استفاده شده است. نشان می‌دهیم که تابع $g(x)$ در $x=0$ دارای عطف قائم است. با محاسبه‌ی $g'(0^+)$ و $g'(0^-)$ خواهیم داشت:



$$\begin{cases} g'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{-\sqrt{|x|}-0}{x-0}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{-\sqrt{x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{x}}\right)=-\infty \\ g'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sqrt{|x|}-0}{x-0}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sqrt{-x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{-x}{x\sqrt{-x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{-x}}\right)=-\infty \end{cases}$$

می‌بینیم که از هر دو طرف $-\infty$ بدست می‌آید، پس $x=0$ یک عطف قائم برای $g(x)$ است.

در این‌جا توجه شما را به نکته‌ای جلب می‌کنیم که ممکن است باعث اشتباه برخی از دانشجویان شود. وقتی مشتق‌های چپ و راست بی‌نهایت و هم‌علامت می‌شوند، نمودار تابع دارای دو نیم‌مماس در جهت‌های مختلف است. اما وقتی مشتق‌های چپ و راست مختلف‌العلامت باشند، خطوط نیم‌مماس، هم‌جهت شده و بر هم منطبق می‌شوند. علت این امر آن است که مقدار مشتق‌های بدست آمده، ربطی به جهت نیم‌مماس‌های رسم شده ندارد، بلکه شیب آن‌ها را می‌دهد.

جمع‌بندی: به عنوان خلاصه‌ای مفید، می‌توان گفت؛ اگر تابعی پیوسته باشد و مشتق چپ و راست در نقطه x_0، هر دو عددی حقیقی و مساوی هم باشند، آن‌گاه تابع در نقطه‌ی x_0 مشتق‌پذیر است. بنابراین در سایر حالت‌ها، همان‌طور که در توضیحات قبل بررسی شد، تابع در نقطه‌ی مورد بررسی مشتق‌ناپذیر است.

درسنامه۲: مشتق‌گیری ضمنی

معادلات بی‌شماری وجود دارند که شامل دو متغیر x و y هستند. در بعضی از آن‌ها، بدست آوردن یکی برحسب دیگری، کار راحتی است. در واقع همان معادلاتی که تاکنون مشتق آن‌ها را محاسبه کردیم، از جمله‌ی این موارد بودند. اما در برخی از آن‌ها نمی‌توان فرمول صریحی که مثلاً y را برحسب x بیان کند، به آسانی پیدا کرد. مثلاً به معادله‌ی $x^{۲}-xy+y^{۳}=۱$ توجه کنید؛ در این معادله پیدا کردن فرمول صریحی که y را بر حسب x بیان کند، آسان نیست؛ چون باید یک معادله‌ی درجه سوم را برحسب y حل کنیم. به عنوان یک مثال دیگر توجه کنید که اوضاع در برخی معادلات مثل $xy+\sin y+x^{۲}=۱$ وخیم‌تر هم می‌شود! چون در این مثال اساساً نمی‌توان فرمول صریحی برحسب x بدست آورد! سؤالی که پیش می‌آید، این است که: «در این‌گونه توابع، مشتق را چطور حساب کنیم؟» جواب این سؤال، استفاده از «مشتق‌گیری ضمنی» است. فرض کنیم تمام اجزای معادله‌ی دو متغیره‌ای شامل x و y و اعداد ثابت را به یک طرف تساوی آورده و مساوی صفر قرار دهیم. یعنی به حالت $f(x,y)=۰$ برسیم؛ در این صورت y'_x (یعنی مشتق y نسبت به x) از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\text{مشتق } f \text{ نسبت به } x \text{ با فرض این‌که } y \text{ عددی ثابت باشد}}{\text{مشتق } f \text{ نسبت به } y \text{ با فرض این‌که } x \text{ عددی ثابت باشد}}$$

برای مثال، y' برای معادله‌ی $x^{۳}-y^{۳}=۳x+۱$ به این‌صورت حساب می‌شود؛ باید در صورت کسر فرض کنیم y عددی ثابت است (که می‌دانیم مشتقش صفر است) و مشتق نسبت به x را حساب کنیم و به همین ترتیب برای مخرج کسر باید فرض کنیم x عددی ثابت است (که می‌دانیم مشتقش صفر است) و مشتق نسبت به y را حساب کنیم. توجه داشته باشید که چه در صورت و چه در مخرج کسر (یعنی چه y عدد ثابت فرض شود و چه x)، مشتق عدد ثابت هم صفر است و ما برای نشان دادن این موضوع به جای مشتق عددِ ثابت در مخرج و در صورت، صفر قرار داده‌ایم که البته می‌توانستیم کلاً ننویسیم!

$$f(x,y)=۰\Rightarrow x^{۳}-y^{۳}-۳x-۱=۰\Rightarrow y'_x=-\frac{۳x^{۲}-۰-۳-۰}{۰-۳y^{۲}-۰-۰}=\frac{۳(x^{۲}-۱)}{۳y^{۲}}=\frac{x^{۲}-۱}{y^{۲}}$$

مثال ۵۷: چنانچه y تابعی از x باشد و $Ln(xy)+۵xy+x=xy$، مقدار $\frac{dy}{dx}$ در $x=۱$ و $y=۳$ برابر است با:

(مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۱)

۱) $-\frac{۴۲}{۱۳}$ ۲) $-\frac{۱۳}{۴۲}$ ۳) $-\frac{۲۱}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۳}{۴۲}$

پاسخ: گزینه «۱» از روش مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم:

$$Lnx+Lny+۴xy+x=۰\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{۱}{x}+۴y+۱}{\frac{۱}{y}+۴x}=-\frac{۴۲}{۱۳}$$

مثال ۵۸: اگر $(\cos y)^{x}=(\sin x)^{y}$ باشد، مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $(\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۴})$ کدام است؟ (نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۴)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{Ln۲}{\pi}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\pi Ln۲$

پاسخ: گزینه «۲» ضابطه‌ی تابع به‌طور ضمنی بیان شده، بنابراین به کمک مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$f(x,y)=(\cos y)^{x}-(\sin x)^{y}=۰$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{(\cos y)^{x}Ln(\cos y)-y(\cos x)(\sin x)^{y-۱}}{x(-\sin y)(\cos y)^{x-۱}-(\sin x)^{y}Ln(\sin x)}\Rightarrow\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۴})}=-\frac{(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{\frac{\pi}{۲}}Ln(\frac{۱}{\sqrt{۲}})-۰}{\frac{\pi}{۲}(\frac{-۱}{\sqrt{۲}})(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{\frac{\pi}{۲}-۱}-۰}=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\frac{-۲\sqrt{۲}}{\pi})Ln\frac{۱}{\sqrt{۲}}=-\frac{Ln۲}{\pi}$$

مثال ۵۹: اگر $x = y + \cfrac{1}{y+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{y+\cdots}}}$، آن‌گاه $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟ (جمله‌ها همین‌طور تا بی‌نهایت ادامه دارد.)

۱) $\frac{2x-y}{x}$ ۲) $\frac{y-2x}{x}$ ۳) $\frac{2x-y}{y}$ ۴) $\frac{y-2x}{y}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا به عبارت توجه کنید؛ عبارت داده شده در مخرج کسر همان x است.

$$x = y + \cfrac{1}{\underbrace{\boxed{y+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{y+\cdots}}}}_{x}} \Rightarrow x = y + \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x} x^2 = xy + 1 \Rightarrow x^2 - xy - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{استفاده از مشتق‌گیری ضمنی}} \frac{dy}{dx} = -\frac{2x-y}{-x} = \frac{2x-y}{x}$$

مثال ۶۰: اگر $y = (\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)^{\cdots}}}$، آن‌گاه مقدار $\frac{dy}{dx}$ را حساب کنید. (جمله‌ها در توان تا بی‌نهایت ادامه دارد و $\cos x$ مثبت است)

پاسخ: با توجه به این‌که تابعی توانی برحسب x داریم، ابتدا از طرفین Ln می‌گیریم. دقت کنید تمام عباراتی که در توان هستند، پس از Ln گرفتن به پشت Ln منتقل می‌شوند:

$$\text{Ln}y = \text{Ln}\cos x^{\cos x^{\cos x^{\cdots}}} \Rightarrow \text{Ln}y = \cos x^{\cos x^{\cdots}} \times \text{Ln}\cos x$$

خُب عبارت پشت Ln همان y است، لذا داریم:

$$\text{Ln}y = y\text{Ln}\cos x \Rightarrow \text{Ln}y - y\text{Ln}\cos x = 0$$

حالا با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\sin x}{\cos x}\times y}{\frac{1}{y} - \text{Ln}\cos x} = -\frac{y^2 \text{tg}x}{1 - y\text{Ln}\cos x}$$

نکته ۱۲: در برخی مسائل بدون توجه به فرمول و بدون این‌که یک‌بار x را ثابت و بار دیگر y را ثابت فرض کنیم، می‌توانیم بگوییم x متغیر است و y تابع آن و برحسب x مشتق بگیریم و مشتق y را y' بنامیم. مثلاً در مسأله‌ای که ابتدا حل کردیم، داریم:

$$x^3 - y^3 - 3x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} 3x^2 - 3y^2 \times y' - 3 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } 3} x^2 - y^2 y' - 1 = 0 \Rightarrow y^2 y' = x^2 - 1 \Rightarrow y' = \frac{x^2-1}{y^2}$$

این روش بیشتر در محاسبات مشتقات مرتبه دوم و بالاتر توابع ضمنی کاربرد دارد و شاید گاهی اوقات محاسبات را ساده‌تر کند.

مثال ۶۱: از معادله $y^3 + y = x$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۹ و MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{-3}{16}$ ۲) $\frac{-5}{32}$ ۳) $\frac{-3}{32}$ ۴) $\frac{-1}{16}$

پاسخ: گزینه «۳» به ازای $x = 2$ از $y^3 + y = x$ نتیجه می‌شود $y = 1$.

$$y^3 + y = x \Rightarrow (3y^2+1)y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{4} \;,\; 6yy'^2 + (3y^2+1)y'' = 0 \Rightarrow 6(1)(\frac{1}{4})^2 + 4y'' = 0 \Rightarrow y'' = \frac{-6}{64} = \frac{-3}{32}$$

مثال ۶۲: از رابطه $x^2 + 4y^2 = 9$ اگر $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{K}{y^3} = 0$ باشد، عدد K کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۶)

۱) $-\frac{4}{9}$ ۲) $-\frac{9}{16}$ ۳) $\frac{9}{16}$ ۴) $\frac{4}{9}$

پاسخ: گزینه «۳» واضح است باید $\frac{d^2y}{dx^2}$ محاسبه گردد:

$$x^2 + 4y^2 = 9 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{8y} = \frac{-x}{4y} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4y+4xy'}{16y^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4y - \frac{4x^2}{4y}}{16y^2} = \frac{-4y^2 - x^2}{16y^3} = \frac{-9}{16y^3} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{9}{16y^3} = 0$$

مثال ۶۳: مشتق سوم یعنی (y'''_x) برای تابع $x^2+y^2=25$، در نقطه‌ی $(3,4)$ کدام است؟

۱) $-\frac{25}{64}$ ۲) $\frac{25}{64}$ ۳) $-\frac{225}{1024}$ ۴) $\frac{225}{1024}$

پاسخ: گزینه «۳» می‌خواهیم با استفاده از روش مشتق‌گیری ضمنی، ۳ مرتبه از تابع مشتق بگیریم، به این منظور همه عبارت‌ها را به یک طرف منتقل کرده و طرف دیگر تساوی صفر قرار می‌دهیم و داریم:

$$x^2+y^2-25=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y} \xrightarrow{\text{با جایگذاری } (3,4)} y'(3,4)=-\frac{3}{4}$$

$$x+yy'=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} 1+y'^2+yy''=0 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 1+(-\frac{3}{4})^2+4y''(3,4)=0 \Rightarrow y''(3,4)=-\frac{25}{64}$$

$$1+y'^2+yy''=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} 0+2y'y''+y'y''+yy'''=0 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 2(-\frac{3}{4})(-\frac{25}{64})+(-\frac{3}{4})(-\frac{25}{64})+4y'''(3,4)=0 \Rightarrow \mathbf{y'''(3,4)=-\frac{225}{1024}}$$

نکته ۱۳: اگر در مسائل x'_y یا همان $\frac{dx}{dy}$ سؤال شده باشد، باید y را متغیر فرض کرد و از تابع مشتق گرفت. دقت کنید در این حالت فرمول مشتق ضمنی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x'_y=\frac{dx}{dy}=-\frac{\text{مشتق تابع } f \text{ نسبت به } y \text{ با فرض } x \text{ عددی ثابت}}{\text{مشتق تابع } f \text{ نسبت به } x \text{ با فرض } y \text{ عددی ثابت}}$$

با دقت در رابطه فوق واضح است، همواره دو مشتق x'_y و y'_x عکس یکدیگر هستند:

$$x'_y=\frac{1}{y'_x} \quad \text{یا} \quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

مثال ۶۴: از رابطه $x^2+xy+5y^2-4x-3y=0$، مقدار x'_y در نقطه $(1,1)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۵- ۳) ۱ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه «۱»

$$x'_y=\frac{dx}{dy}=-\frac{x+10y-3}{2x+y-4}\Big|_{(1,1)}=-\frac{1+10-3}{2+1-4}=8$$

مثال ۶۵: از رابطه $xy^2-x^2+y=5$ مقدار $\frac{d^2x}{dy^2}$ در نقطه $(1,2)$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{2}$ ۲) $\frac{23}{2}$ ۳) $\frac{31}{4}$ ۴) $\frac{61}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا با مشتق‌گیری ضمنی، $\frac{dx}{dy}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{f'_y}{f'_x}=-\frac{2xy+1}{y^2-2x}$$

حالا یک‌بار دیگر از طرفین مشتق می‌گیریم. دقت کنید که در این مثال، بر خلافِ همیشه x تابعی بر حسب y است:

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{2[x'y+x\times 1][y^2-2x]-[2y-2x'][2xy+1]}{(y^2-2x)^2}$$

نیازی به محاسبه‌ی بیشتر نداریم. با جایگذاری $(x,y)=(1,2)$ در مشتقِ اول داریم: $\frac{dx}{dy}=-\frac{4+1}{4-2}=-\frac{5}{2}$ پس $x'=-\frac{5}{2}$ است. حالا با جایگذاری این مقادیر در مشتق دوم داریم:

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{2[-5+1][4-2]-[4+5][4+1]}{(4-2)^2}=\frac{61}{4}$$

مثال ۶۶: از رابطه $x=\frac{y^2}{2-y}$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه $y=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{8}{9}$ ۲) $-\frac{8}{27}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $-\frac{4}{27}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$x=\frac{y^2}{2-y} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{2y(2-y)-(-1)(y^2)}{(2-y)^2}=\frac{4y-y^2}{(2-y)^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=\frac{(2-y)^2}{4y-y^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(2-y)(-y')(4y-y^2)-(4y'-2yy')\times(2-y)^2}{(4y-y^2)^2}$$

از طرفی چون $y'=\frac{(2-y)^2}{4y-y^2}$، لذا به ازای $y=1$، $y'(1)=\frac{(2-1)^2}{4\times 1-1^2}=\frac{1}{3}$، با جایگذاری این مقدار در ضابطه y'' داریم:

$$y''(1)=\frac{d^2y}{dx^2}(1)=\frac{[2(2-1)(-\frac{1}{3})(4\times 1-1^2)]-[(4\times(\frac{1}{3})-2\times 1(\frac{1}{3}))(2-1)^2]}{(4\times 1-1^2)^2}=\frac{-2-\frac{2}{3}}{3^2}=\frac{-\frac{8}{3}}{9}=-\frac{8}{27}$$

مثال ۶۷: در تابع $y=x+\frac{1}{2}\sin 2x$ ، مقدار $\frac{d^2x}{dy^2}$ به ازای $x=\frac{\pi}{6}$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{4\sqrt{3}}{27}$　　۲) $\frac{-8\sqrt{3}}{27}$　　۳) $\frac{8\sqrt{3}}{27}$　　۴) $\frac{-4\sqrt{3}}{9}$

پاسخ: گزینه «۳» همه متغیرها را به یک سمت تساوی می‌آوریم:

$$y=x+\frac{1}{2}\sin 2x \Rightarrow 2x+\sin 2x-2y=0$$

با مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{f'_y}{f'_x}=-\frac{-2}{2+2\cos 2x}=\frac{1}{1+\cos 2x}$$

با مشتق‌گیری دوباره نسبت به y داریم:

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+\cos 2x}\right)\times\frac{dx}{dy}=\frac{2\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}\times\frac{1}{1+\cos 2x}$$

حالا $x=\frac{\pi}{6}$ را قرار می‌دهیم:

$$x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{(1+\frac{1}{2})^3}=\frac{\sqrt{3}}{(\frac{3}{2})^3}\Rightarrow\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{8\sqrt{3}}{27}$$

تذکر ۷: استفاده ناشیانه از فرمول مشتق‌گیری ضمنی بعضاً ممکن است نتایج غلطی به بار آورد! مثلاً فرض کنید معادله‌ی $x^2+y^2=-1$ را داده باشند و از ما بخواهند مشتق بگیریم. اگر ما به راحتی بنویسیم: $y'_x=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$، اشتباه کرده‌ایم! چون چنین منحنی‌ای اصلاً وجود خارجی ندارد! پس نمی‌توان از آن مشتق گرفت (در معادله‌ی داده شده، مجموع یک عبارت مثبت در سمت چپ، برابر با عددی منفی شده است!).

نکته ۱۴: هرگاه با تبدیل x به y و y به x معادله‌ی $f(x,y)$ تغییری نکند، یعنی $f(x,y)=f(y,x)$ معلوم می‌شود که f'_y با تبدیل x به y و y به x در ضابطه‌ی f'_x بدست می‌آید. مثلاً وقتی $f(x,y)=\mathrm{Ln}(x^2+xy+y^2)$ باشد، می‌دانیم $f'_x=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}$ حالا در همین کسر، x و y را به یکدیگر تبدیل می‌کنیم و $f'_y=\frac{2y+x}{y^2+yx+x^2}$ بدست می‌آید. این موضوع یک نتیجه‌ی مهم دارد. در نقاطی که به صورت (a,a) باشند مثل نقطه‌ی $(1,1)$ یا $(-2,-2)$ خواهیم داشت: $f'_x(a,a)=f'_y(a,a)$.

مثال ۶۸: از معادله‌ی $\sin(x^2y+y^2x)+x^{y^2}+y^{x^2}=c$ حاصل $\frac{dy}{dx}$ در نقطه‌ی (π,π) کدام است؟

۱) π^π　　۲) $\sin(2\pi)^2+\pi^\pi$　　۳) -1　　۴) $-\pi$

پاسخ: گزینه «۳» معادله‌ی داده شده با تبدیل x به y و y به x تغییری نمی‌کند، یعنی $f(x,y)=f(y,x)$ است. در نقطه‌ی داده شده هم $y=x$ است.

پس در این نقطه $f'_x(\pi,\pi)=f'_y(\pi,\pi)$ در نتیجه داریم:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x(\pi,\pi)}{f'_y(\pi,\pi)}=-1$$

درسنامه ۵: استفاده از تعریف مشتق در حل مسائل

در این قسمت سراغ سؤالاتی می‌رویم که در اکثر آن‌ها مجبوریم از تعریف مشتق کمک بگیریم.

چه زمانی لازم است از تعریف مشتق استفاده کنیم؟

برای محاسبه‌ی $f'(x_0)$ همیشه می‌توانیم از تعریف مشتق استفاده کنیم. با وجود این، واضح است که این کار پر دردِسر و در برخی سؤالات، توأم با محاسبات پیچیده است. و همان‌طور که می‌دانید استفاده از قواعد مشتق‌گیری سریع‌تر و راحت‌تر است. برای مثال اگر در تابع $f(x)=x^2$ بخواهیم $f'(1)$ را حساب کنیم، ایرادی ندارد که از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

البته با توجه به قواعد مشتق‌گیری همه می‌دانیم که مشتق تابع $f(x)=x^2$ به‌صورت $f'(x)=2x$ است و در نتیجه $f'(1)=2$ خواهد بود. پس لازم نبود با استفاده از تعریف مشتق وقت خود را تلف کنیم.

ولی گاهی اوقات مجبور می‌شویم از طریق تعریف مشتق مقدار $f'(x_0)$ را بدست آوریم. این زمانی رخ می‌دهد که ضابطه‌ی $f(x)$ برای $x=x_0$ با ضابطه‌ی آن در نواحی $x>x_0$ و $x<x_0$ یکسان نباشد. مثلاً به تابع $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x} & ;\ x\neq 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$ توجه کنید. می‌خواهیم $f'(x)$ را در $x=0$ محاسبه کنیم. با دقت به ضابطه‌ی $f(x)$ متوجه می‌شویم که ضابطه‌ی آن در $x=0$ با ضابطه‌ی آن برای نقاط $x>0$ و $x<0$ (یعنی همان $x\neq 0$) فرق دارد. در خود نقطه‌ی $x=0$ داریم $f(0)=0$، اما برای $x>0$ و $x<0$ (یعنی $x\neq 0$) داریم $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$. این نشان می‌دهد که برای محاسبه‌ی $f'(0)$ حق نداریم از قواعد معمولی مشتق‌گیری استفاده کنیم بلکه باید از طریق تعریف مشتق مقدار آن را تعیین کنیم.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$$

در محاسبه‌ی این حد دقت کنید که $\cos\frac{1}{x}$ کران‌دار است (چون بین ۱- تا ۱+ قرار دارد) و از طرفی $\lim_{x\to 0}x=0$ است؛ به همین خاطر حاصل‌ضرب آن‌ها یعنی $x\cos\frac{1}{x}$ به سمت صفر می‌رود. (هرگاه $\cos(\pm\infty)$ یا $\sin(\pm\infty)$ به وجود آید حد وجود ندارد؛ مگر آن که یک عامل صفرشونده در این جملات ضرب شده باشد که فرم $\cos(\pm\infty)\times 0$ یا $\sin(\pm\infty)\times 0$ را ایجاد کند) پس با استفاده از تعریف مشتق متوجه شدیم که $f'(0)=0$ است.

مثال ۹۱: در تابع $f(x)=\begin{cases}x\lfloor x+1\rfloor & ;\ x<2\\ 4 & ;\ x=2\\ x\lfloor x\rfloor & ;\ x>2\end{cases}$ مقدار $f'(2)$ کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

۱) $f'(2)=1$ ۲) $f'(2)=4$ ۳) $f'(2)=2$ ۴) $f(x)$ در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا از پیوستگی $f(x)$ در $x=2$ اطمینان پیدا می‌کنیم: $f(2^-)=2\lfloor 2^-+1\rfloor=4$ ، $f(2)=4$ ، $f(2^+)=2\lfloor 2^+\rfloor=4$ پس f در $x=2$ پیوسته است. حالا می‌خواهیم $f'(2)$ را بدست آوریم، اما تابع $f(x)$ در $x=2$ و $x>2$ و $x<2$ ضابطه‌ی یکسانی ندارد. پس مجبوریم از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

حالا می‌خواهیم $f(2)$ و $f(x)$ را در صورت کسر جایگذاری کنیم. به وضوح $f(2)=4$ است. اما به جای $f(x)$ کدام ضابطه را قرار بدهیم؟ خُب این بستگی به آن دارد که $x>2$ یا $x<2$ باشد، به همین خاطر ناچار می‌شویم مشتق راست و مشتق چپ را جداگانه حساب کنیم:

$$\begin{cases}f'(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x\lfloor x+1\rfloor-4}{x-2}\\ f'(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x\lfloor x\rfloor-4}{x-2}\end{cases}$$

وقتی $x\to 2^-$، یعنی x از سمت چپ به ۲ میل می‌کند x عددی نزدیک به ۲ اما کوچکتر از آن است (مثلاً $x\simeq 1/99$) پس $x+1$ عددی نزدیک به ۳ اما کوچکتر از آن است این نشان می‌دهد که $\lfloor x+1\rfloor=2$.

$$f'(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2(x-2)}{x-2}=2$$

وقتی $x\to 2^+$، یعنی x از سمت راست به ۲ میل می‌کند، x عددی نزدیک به ۲ اما بزرگتر از آن است (مثلاً $x\simeq 2/01$) پس $\lfloor x\rfloor=2$ می‌شود.

$$f'(2^+)=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)}{x-2}=2$$

بنابراین $f'(2^+)=f'(2^-)=2$، یعنی تابع $f(x)$ در $x=2$ مشتق‌پذیر و مشتق آن برابر با ۲ است ($f'(2)=2$).

مثال ۹۲: مشتق تابع $f(x)=x^2\lfloor \sin x\rfloor$ در $x=0$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۱)

۱) -1　　۲) 0　　۳) 1　　۴) موجود نیست

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تابع $\lfloor \sin x\rfloor$ در $x=0$ ناپیوسته است؛ زیرا مقدار داخل جزء صحیح، عدد صحیح می‌شود. پس، از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\lfloor \sin x\rfloor}{x}=\lim_{x\to 0}x\lfloor \sin x\rfloor=0\times(\text{کران‌دار})=0$$

توضیح: برای توضیح کاملتر درباره‌ی تابع $\lfloor \sin x\rfloor$ توجه کنید که با استفاده از هم‌ارزی داریم $\sin x\simeq x$ پس $\lfloor \sin x\rfloor\simeq\lfloor x\rfloor$ حالا حد چپ برابر است با $\lfloor 0^-\rfloor=-1$ و حد راست برابر است با $\lfloor 0^+\rfloor=0$ پس $\lfloor \sin x\rfloor$ در $x=0$ ناپیوسته اما کران‌دار است.

مثال ۹۳: تابع $f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x^n & x>0\end{cases}$ برای $n\in N$ داده شده است. به ازای کدام n تابع f مشتق‌پذیر است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) برای هر n　　۲) برای $n>1$　　۳) فقط برای $n=2$　　۴) فقط برای $n\ge 3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» کافیست مشتق چپ و راست تابع در نقطه $x=0$ را بررسی کنیم:

$$f'_-(0)=0,\ f'_+(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^n-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}$$

برای داشتن مشتق در نقطه $x=0$ باید مشتق چپ و راست در این نقطه باهم برابر باشند، لذا:

$$\lim_{x\to 0}x^{n-1}=0\Rightarrow n-1>0\Rightarrow n>1$$

باید توجه داشت که تابع داده شده برای همه نقاط داده شده پیوسته می‌باشد.

مثال ۹۴: اگر $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(\sin x)^2[2-\cos x]}{x} & ;\ x\neq 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$ کدام گزاره زیر صحیح است؟ (منظور از $[t]$ جزء صحیح t است). (معدن ـ سراسری ۹۱)

۱) $f'(0)=1$　　۲) $f'(0)=2$　　۳) $f'(0)=3$　　۴) $f'(0)$ وجود ندارد

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» وقتی x به سمت صفر میل می‌کند، حاصل $\cos x$ کمی از یک کمتر می‌باشد؛ بنابراین $(2-\cos x)$ کمی از یک بیشتر خواهد بود و لـذا جزء صحیح آن برابر یک می‌شود.

پس $\lfloor 2-\cos x\rfloor=1$ را قرار می‌دهیم و خواهیم داشت: $f(x)\simeq\dfrac{(\sin x)^2}{x}$ برای $x\to 0$.

چون ضابطه‌ی f در $x=0$ تغییر می‌کند باید از تعریف مشتق در نقطه $x=0$ استفاده کنیم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2}{x^2}\sim\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

توجه به ادبیات مسأله‌ی مطرح شده: فرض کنید تابع $f(x)$ چند ضابطه‌ای باشد و برای $x=x_0$، $x>x_0$ و $x<x_0$ ضابطه‌ی یکسانی نداشته باشد. البته ممکن است دو تا از این نواحی ضابطه‌ی یکسان داشته باشند. با دقت به ادبیات مسأله یکی از این دو حالت را خواهیم داشت:

حالت اول: اگر فقط بخواهیم وجود یا عدم وجود مشتق را در نقطه‌ی $x=x_0$ بررسی کنیم و نیازی به بررسی پیوسته بودن یا کران‌دار بودن تـابع $f'(x)$ نداشـته باشیم باید از تعریف مشتق استفاده کرده و $f'(x_0)$ را محاسبه کنیم. در این حالت استفاده از قواعد مشتق‌گیری برای محاسبه‌ی $f'(x)$ نه درست است و نـه لازم است. تنها کاری که باید بکنیم، نوشتن تعریف مشتق در نقطه‌ی $x=x_0$ و محاسبه‌ی آن است. دقت کنید در ایـن حالـت مـا فقـط $f'(x_0)$ را مـی‌خـواهیم و بـه ضابطه‌ی $f'(x)$ در سایر نقاط نیازی نداریم.

حالت دوم: اگر صورت سؤال (یا محتوای برخی از گزینه‌ها) در مورد پیوسته بودن یا کران‌دار بودن $f'(x)$ باشد، دیگر محاسـبه‌ی $f'(x_0)$ از راه تعریـف مشـتق، کافی نیست. در این موارد ما مجبوریم هم $f'(x_0)$ را از راه تعریف محاسبه کنیم و هم $f'(x)$ را برای $x\neq x_0$ با کمک قواعد مشتق‌گیـری بدسـت آوریـم. آن‌گـاه نتیجه‌ی بدست آمده را به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f'(x)=\begin{cases}(\text{از قواعد مشتق‌گیری}) & ;\ x\neq x_0\\ (\text{از تعریف مشتق}) & ;\ x=x_0\end{cases}$$

حالا می‌توانیم پیوسته بودن تابع $f'(x)$ را مورد بررسی قرار دهیم.

همچنین اگر سؤال مطرح شده در مورد $f''(x_0)$ باشد، باید $f'(x)$ را هم در نقطه‌ی $x=x_0$ (با استفاده از تعریف مشتق) و هم در سایر نقاط (با استفاده از قواعد مشتق‌گیری) محاسبه کنیم تا با داشتن ضابطه‌ی $f'(x)$ در همه‌ی نقاط بتوانیم $f''(x_0)$ را از راه تعریف حساب کنیم.

مثال ۹۵: تابع $f(x)=\begin{cases}(x^2-1)^2\cos\frac{1}{x-1} & ; x\neq 1\\ 0 & ; x=1\end{cases}$ را داریم. آیا تابع $f'(x)$ در $x=1$ پیوسته است؟

☑ **پاسخ:** این مثال، نمونه‌ای از حالت دوم است که در آن بررسی وجود $f'(1)$ کافی نیست، بلکه باید علاوه بر محاسبه‌ی $f'(1)$، ضابطه‌ی $f'(x)$ را برای سایر نقاط هم حساب کنیم تا بتوانیم در مورد پیوسته بودن آن نظر بدهیم. در گام نخست باید از وجود $f'(1)$ مطمئن شویم. ابتدا نگاهی به پیوسته بودن f در $x=1$ می‌اندازیم: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0\times$کران‌دار$=0$ پس f در $x=1$ پیوسته است. برای محاسبه‌ی $f'(1)$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)^2\cos\frac{1}{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)^2\cos\frac{1}{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-1)(x+1)^2\cos\frac{1}{x-1}=0$$

در آخرین حد توجه کنید که $-1\leq\cos\frac{1}{x-1}\leq 1$ کران‌دار است و $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)(x+1)^2=0$. پس حاصل‌ضرب آن‌ها به صفر میل می‌کند (به بیان ساده‌تر $0\times\cos\infty=0$).

تا اینجا متوجه شدیم که $f'(1)$ وجود دارد و برابر با صفر است. حالا باید از قواعد مشتق‌گیری استفاده کنیم تا $f'(x)$ را برای $x\neq 1$ هم داشته باشیم:

$$x\neq 1\Rightarrow f(x)=(x^2-1)^2\cos\frac{1}{x-1}\Rightarrow f'(x)=4x(x^2-1)\cos\frac{1}{x-1}+\frac{(x^2-1)^2}{(x-1)^2}\sin\frac{1}{x-1}=4x(x^2-1)\cos\frac{1}{x-1}+(x+1)^2\sin\frac{1}{x-1}$$

پس می‌توانیم ضابطه‌ی تابع $f'(x)$ را به طور کامل یعنی برای $x=1$ و $x\neq 1$ به این صورت بنویسیم:

$$f'(x)=\begin{cases}4x(x^2-1)\cos\frac{1}{x-1}+(x+1)^2\sin\frac{1}{x-1} & ; x\neq 1\\ 0 & ; x=1\end{cases}$$

حالا می‌توانیم پیوسته بودن $f'(x)$ در $x=1$ را تحقیق کنیم. برای آن‌که $f'(x)$ پیوسته باشد باید حد آن وقتی $x\to 1$، با مقدارش در $x=1$ برابر شود.

$$\lim_{x\to 1}f'(x)=\lim_{x\to 1}\left[4x(x^2-1)\cos\frac{1}{x-1}+(x+1)^2\sin\frac{1}{x-1}\right]$$

اگر فرم این حد را به بیان ساده بنویسیم به این صورت است:

$$\lim_{x\to 1}f'(x)=[0\times\cos(\pm\infty)+4\times\sin(\pm\infty)]$$

جمله‌ی اول که فرم آن $0\times\cos(\pm\infty)$ است، مقدارش صفر می‌شود. اما جمله‌ی دوم که به فرم $4\times\sin(\pm\infty)$ است حدش وجود ندارد. بنابراین متوجه شدیم که $\lim\limits_{x\to 1}f'(x)$ وجود ندارد. این نشان می‌دهد که $f'(x)$ در این نقطه پیوسته نیست.

مثال ۹۶: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{\sqrt{x}} & ; x>0\\ x\sin\frac{1}{\sqrt{1-x}} & ; x\leq 0\end{cases}$ تعریف می‌شود، در این صورت تابع f: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۹)

۱) در $x=1$ پیوسته نیست.
۲) حداقل در دو نقطه مشتق‌پذیر نیست.
۳) در صفر پیوسته و مشتق‌پذیر است.
۴) همه‌جا پیوسته است ولی در صفر مشتق‌پذیر نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» توجه کنید که در ضابطه $x\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$ دامنه به‌صورت $x>0$ است و تابع f نیز به ازای $x>0$ در این ضابطه تعریف شده است. چون $x\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$ در دامنه خود پیوسته است، پس f به ازای $x>0$ پیوسته است. همچنین در ضابطه $x\sin\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ دامنه به‌صورت $1-x>0$، یعنی $x<1$ می‌باشد. یعنی به ازای $x<1$ تابع $x\sin\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ پیوسته است و چون تابع f نیز به ازای $x\leq 0$ در این ضابطه تعریف شده، پس f به ازای $x\leq 0$ پیوسته است.

بنابراین کافی است پیوستگی f را در نقطه صفر بررسی کنیم:

$$1)\ f(0)=0$$

$$2)\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{\sqrt{1-x}}=0\times(\text{عبارت کراندار})=0$$

$$3)\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{\sqrt{x}}=0\times(\text{عبارت کراندار})=0$$

$\Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)\Rightarrow$ تابع f در صفر نیز پیوسته است.

برای بررسی مشتق‌پذیری f در صفر از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sin\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}=\sin(+\infty)\Rightarrow$$ مشتق راست f در صفر موجود نیست $\Rightarrow$ f در صفر مشتق‌پذیر نیست

مثال ۹۷ : اگر $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{xLn2}-\dfrac{1}{2^x-1} & ; x\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & ; x=0\end{cases}$، آن‌گاه مقدار $f'(0)$ کدام است؟ (از سؤالات ریاضی عمومی دانشگاه MIT)

۱) $-(\frac{Ln2}{12})^2$ ۲) $-\frac{Ln2}{12}$ ۳) $\frac{Ln2}{12}$ ۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۲» در $x=0$ ضابطه‌ی $f(x)$ عوض شده است، بنابراین لازم است از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{xLn2}-\frac{1}{2^x-1}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(2^x-1)-2xLn2-xLn2(2^x-1)}{2x^2Ln2(2^x-1)}$$

این حد فرم مبهم $\frac{0}{0}$ را داراست. با توجه به این‌که $x=0$ ریشه‌ی چندگانه‌ی مخرج است (در مخرج عوامل $x.x.(2^x-1)$ را داریم که هر سه عامل در $x=0$ صفر می‌شوند)، می‌توان حدس زد که محاسبه حد احتیاج به استفاده مکرر از قاعده‌ی هوپیتال دارد که قطعاً کار مشکل و زمان‌بری است. به همین علت از بسط مک‌لورنِ 2^x کمک می‌گیریم تا محاسبات ساده‌تر شوند. اگر بسط مک‌لورن 2^x را نمی‌دانید، ایرادی ندارد! می‌توانید از بسط مک‌لورن e^x به این صورت استفاده کنید:

$$2^x=e^{Ln2^x}=e^{xLn2}=1+xLn2+\frac{(xLn2)^2}{2!}+\cdots$$

ضمناً با تغییر متغیر $t=xLn2$ عبارات را ساده‌تر می‌نویسیم، چون $x\to 0$، پس $t\to 0$:

$$f'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{2(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots)-2t-t(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots)}{\frac{2}{Ln2}t^2(t+\frac{t^2}{2}+\cdots)}\xrightarrow{\text{انجام محاسبات}}f'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{12}t^4+\cdots}{\frac{2}{Ln2}(t^3+\frac{t^4}{2}+\cdots)}$$

اکنون چون $t\to 0$، لذا از قانون کمترین درجه استفاده می‌کنیم. کوچکترین درجه‌ای که در صورت و مخرج داریم t^3 است. بنابراین داریم:

$$f'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{6}t^3}{\frac{2}{Ln2}t^3}=-\frac{Ln2}{12}$$

بررسی توابعی به فرم کلی $f^a(x)\sin\frac{c}{g^b(x)}$ و $f^a(x)\cos\frac{c}{g^b(x)}$ ($a\in\mathbb{R}$ و $b>0$)

توابع به فرم $f^a(x)\sin\frac{c}{g^b(x)}$ و $f^a(x)\cos\frac{c}{g^b(x)}$ به علت ویژگی‌هایی که دارند مورد توجه طراحان سؤال در آزمون‌های مختلف قرار دارند. در این قسمت ابتدا به‌صورت مفهومی و گام به گام این توابع را بررسی می‌کنیم و در پایان به یک جمع‌بندی می‌رسیم که با توجه به اعداد ثابت a و b بتوانیم پیوسته بودن، مشتق‌پذیر بودن و سایر ویژگی‌های آن‌ها را تشخیص دهیم.

می‌دانیم که چندجمله‌ای‌ها و توابع $\sin x$ و $\cos x$ همواره پیوسته و مشتق‌پذیرند. بنابراین تابعی مانند $y=x^3\cos x^2$ همه‌جا پیوسته و مشتق‌پذیر است. اما اگر $b>0$ و a دلخواه باشد، تابع $y=x^a\cos\frac{c}{x^b}$ در $x=0$ تعریف شده نیست. فرض کنید مقدار تابع در $x=0$ را به‌صورت جداگانه تعریف کنیم. در این صورت به تابع دو ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^a\cos\frac{c}{x^b} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$ می‌رسیم که پیوسته بودن یا مشتق‌پذیر بودن آن در $x=0$ نیاز به بررسی دارد. اگر به جای x از عامل $(x-x_0)$ استفاده کنیم، تابع دو ضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases}(x-x_0)^a\cos\frac{c}{(x-x_0)^b} & ; x\neq x_0\\ 0 & ; x=x_0\end{cases}$ بدست می‌آید که در $x=x_0$ نیاز به بررسی دارد. در ادامه‌ی مطلب با حل یک مثال به‌صورت کاملاً تشریحی به یک جمع‌بندی می‌رسیم که به کمک آن بتوانیم پیوسته بودن، مشتق‌پذیر بودن و سایر ویژگی‌های چنین توابعی را به سرعت تشخیص دهیم.

مثال ۹۸: تابع $h(x)=\begin{cases}(x-1)^a\sin\dfrac{1}{(x-1)^b} & ; x\neq 1\\ 0 & ; x=1\end{cases}$ را داریم، **الف)** آیا این تابع در $x=1$ پیوسته است؟ **ب)** آیا در این نقطه مشتق‌پذیر است؟

ج) اگر $h'(x)$ وجود دارد آیا $h'(x)$ تابعی کران‌دار و پیوسته است؟ ($a\in\mathbb{R}$ و $b>0$)

پاسخ: پیش از آن‌که پاسخ دادن به پرسش‌ها را آغاز کنیم، توجه شما را به این نکته جلب می‌کنیم که چون $-1\leq\sin\dfrac{1}{(x-1)^b}\leq 1$ است، بنابراین در محاسبه‌ی حد $h(x)$ و همچنین در محاسبه‌ی مشتق آن می‌توانیم از قضیه‌ی ساندویچ استفاده کنیم.

الف) پیوستگی $h(x)$ در $x=1$: برای آن‌که $h(x)$ در $x=1$ پیوسته باشد، باید $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=h(1)$. در محاسبه‌ی این حد از قضیه‌ی ساندویچ استفاده می‌کنیم:

$$-1\leq\sin\frac{1}{(x-1)^b}\leq 1\Rightarrow -(x-1)^a\leq(x-1)^a\sin\frac{1}{(x-1)^b}\leq(x-1)^a\Rightarrow -(x-1)^a\leq h(x)\leq(x-1)^a$$

اگر a منفی باشد، آن‌گاه $(x-1)^a$ کسری است که مخرج آن به سمت صفر می‌رود. مثلاً برای $a=-2$ داریم: $(x-1)^{-2}=\dfrac{1}{(x-1)^2}$. اما اگر $a>0$ باشد، خواهیم داشت $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^a=0$، پس $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=0$. به عبارت دیگر که شرط پیوسته بودن $h(x)$ در $x=1$ آن است که a مثبت باشد.

ب) مشتق‌پذیری $h(x)$ در $x=1$: تابع $h(x)$ برای $x\neq 1$ یک ضابطه دارد و در $x=1$ ضابطه‌ی دیگری دارد. بنابراین باید از تعریف مشتق برای محاسبه‌ی $h'(1)$ استفاده کنیم:

$$h'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^a\sin\dfrac{1}{(x-1)^b}}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-1)^{a-1}\sin\frac{1}{(x-1)^b}$$

در این‌جا به حدی رسیدیم که مشابه حدی است که در بررسی پیوستگی $h(x)$ با آن روبرو شدیم. با استفاده از قضیه‌ی ساندویچ داریم:

$$-\lim_{x\to 1}(x-1)^{a-1}\leq\lim_{x\to 1}(x-1)^{a-1}\sin\frac{1}{(x-1)^b}\leq\lim_{x\to 1}(x-1)^{a-1}$$

برای آن‌که $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{a-1}=0$ باشد، لازم است توان آن مثبت باشد؛ یعنی $a-1>0$، که نتیجه می‌دهد $a>1$. پس $h(x)$ در $x=1$ با شرط $a>1$ مشتق‌پذیر است.

ج) پیوسته و کران‌دار بودن $h'(x)$: برای آن که بتوانیم پیوستگی $h'(x)$ را بررسی کنیم، باید در $x=1$ مقدار $h'(1)$ را با استفاده از تعریف مشتق و برای $x\neq 1$، $h'(x)$ را با استفاده از قواعد مشتق‌گیری محاسبه کنیم. در قسمت (ب) از تعریف مشتق استفاده کردیم و دیدیم که اگر $a>1$ باشد، $h'(1)$ موجود و برابر با صفر است. با استفاده از قواعد مشتق‌گیری $h'(x)$ را برای $x\neq 1$ نیز محاسبه می‌کنیم.

$$h'(x)=\begin{cases}a(x-1)^{a-1}\sin\dfrac{1}{(x-1)^b}-\dfrac{b(x-1)^a}{(x-1)^{b+1}}\cos\dfrac{1}{(x-1)^b} & ; x\neq 1\\ 0 & ; x=1\end{cases}$$

با ساده‌کردن کسرها متوجه می‌شویم که برای $x\neq 1$ ضابطه‌ی $h'(x)$ چنین است:

$$h'(x)=a(x-1)^{a-1}\sin\frac{1}{(x-1)^b}-b(x-1)^{a-b-1}\cos\frac{1}{(x-1)^b}$$

همان‌طور که می‌دانید $\cos\dfrac{1}{(x-1)^b}$ و $\sin\dfrac{1}{(x-1)^b}$ توابع کران‌داری هستند که مقدار آن‌ها بین $+1$ و -1 قرار دارد. بنابراین برای آن‌که $\lim\limits_{x\to 1}h'(x)=0$ شود، لازم است $(x-1)^{a-1}$ و $(x-1)^{a-b-1}$ توان‌های مثبت داشته باشند. زیرا اگر یکی از آن‌ها توان منفی داشته باشد، عامل $(x-1)$ به مخرج کسر می‌رود و حد آن $\pm\infty$ می‌شود. اگر توان‌ها مثبت باشند، یعنی $a-b-1>0$ و $a-1>0$، آن‌گاه حد این عبارات وقتی $x\to 1$، برابر با صفر است و خواهیم داشت $\lim\limits_{x\to 1}h'(x)=0$. در این حالت تابع $h'(x)$ پیوسته و کران‌دار است. دقت کنید که اگر $a>b+1$ باشد، آن‌گاه $a-b-1$ و $a-1$ هر دو مثبت می‌شوند. نتیجه آن است که اگر $a>b+1$، $h'(x)$ پیوسته و کران‌دار است. البته یک حالت دیگر هم باید بررسی شود. اگر $a=b+1$، توان‌ها منفی نمی‌شوند، اما یکی از توان‌ها صفر می‌شود در این حالت داریم:

$$h'(x)=a(x-1)^b\sin\frac{1}{(x-1)^b}-ab\cos\frac{1}{(x-1)^b}$$

حالا اگر $x\to 1$، به بیان ساده خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 1}h'(x)=0\times\sin(\pm\infty)-ab\cos(\pm\infty)=-ab\cos(\pm\infty)\Rightarrow -ab\leq\lim_{x\to 1}h'(x)\leq ab$$

در این صورت $\lim\limits_{x\to 1}h'(x)$ وجود ندارد، یعنی $h'(x)$ ناپیوسته است. با این حال کران‌دار بودن $h'(x)$ به جای خود باقی است زیرا مقدار آن بی‌نهایت نشده است؛ بلکه بین دو عدد حقیقی $\pm ab$ قرار دارد. اکنون نتایج بخش (ج) را به طور خلاصه مرور می‌کنیم:

اگر $a>b+1$، تابع $h'(x)$ پیوسته و کران‌دار است. اگر $a=b+1$ باشد، تابع $h'(x)$ کران‌دار است اما دیگر پیوسته نیست. اگر $a<b+1$ باشد، تابع $h'(x)$ نه پیوسته است و نه کران‌دار است.

جمع‌بندی: می‌خواهیم شرط لازم و کافی برای پیوسته بودن، مشتق‌پذیر بودن و سایر ویژگی‌های توابع به فرم زیر را به‌صورت خلاصه بیان کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}|x-x_0|^a\cos\dfrac{c}{|x-x_0|^b} & ;\ x\neq x_0\\ 0 & ;\ x=x_0\end{cases}\qquad \text{یا}\qquad f(x)=\begin{cases}|x-x_0|^a\sin\dfrac{c}{|x-x_0|^b} & ;\ x\neq x_0\\ 0 & ;\ x=x_0\end{cases}$$

در این توابع حتماً $b>0$ است؛ زیرا اگر b منفی باشد با یک تابع معمولی که در x_0 پیوسته و مشتق‌پذیر است سر و کار داریم و چیزی برای بررسی باقی نمی‌ماند. وجود یا عدم وجود قدرمطلق تأثیری بر جواب ما ندارد. همچنین توابع سینوس و کسینوس در این نتایج مشابه هم هستند:

الف) شرط آن مشتق kام وجود داشته باشد: $a>k(1+b)-b$

ب) شرط آن‌که مشتق kام پیوسته باشد: $a>k(1+b)$

ج) شرط آن‌که مشتق kام کران‌دار باشد: $a\geq k(1+b)$

در روابط (ب) و (ج) اگر $k=0$ قرار دهید شرط پیوسته بودن و کران‌دار بودنِ $f(x)$ هم بدست می‌آید. در واقع مشتقِ صفرم، یعنی خود تابع $f(x)$.

تذکر ۸: در توابعی که به‌صورت $h(x)=\begin{cases}f^{\alpha}(x)\sin\dfrac{c}{g^{\beta}(x)} & ;\ x=x_0\\ 0 & ;\ x\neq x_0\end{cases}$ هستند، برای بررسی پیوسته بودن، مشتق‌پذیر بودن و سایر ویژگی‌های $h(x)$ در نقطه‌ی $x=x_0$ بهترین کار آن است که از تجزیه یا هم‌ارزی‌ها استفاده کنیم و عامل $(x-x_0)$ را ایجاد کنیم. آن‌گاه می‌توانیم با دقت به توان این عامل در $f(x)$ و $g(x)$ از همان جمع‌بندی فوق استفاده کرده و مسأله را به سرعت حل کنیم. برای مثال به تابع $h(x)=\begin{cases}(x^2-2x+1)^3\cos\dfrac{1}{\sin^2(x-1)} & ;\ x\neq 1\\ 0 & ;\ x=1\end{cases}$ توجه کنید.

می‌خواهیم در $x=1$ ویژگی‌های $h(x)$ را بررسی کنیم. در $x=1$ می‌توانیم از هم‌ارزی $\sin(x-1)\simeq x-1$ استفاده کنیم. بنابراین $\sin^2(x-1)\simeq(x-1)^2$. همچنین با توجه به اتحاد داریم: $(x^2-2x+1)=(x-1)^2$، پس $(x^2-2x+1)^3=(x-1)^6$ است. پس می‌توانیم $h(x)$ را به‌صورت $h(x)=\begin{cases}(x-1)^6\cos\dfrac{1}{(x-1)^2} & ;\ x\neq 1\\ 0 & ;\ x=1\end{cases}$ بنویسیم. حالا از جمع‌بندی بالا کمک می‌گیریم؛ در این مثال $a=6$ و $b=2$ است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید؛ نامساوی‌های $a>1\times(1+b)-b$ و $a>1\times(1+b)$ برقرارند، پس $h'(x)$ در $x=1$ موجود و پیوسته است. نامساوی $a>2\times(1+b)-b$ هم برقرار است، پس $h''(1)$ وجود دارد. اما نامساوی $a>2\times(1+b)$ برقرار نیست؛ پس $h''(x)$ در $x=1$ ناپیوسته است.

مثال ۹۹: فرض کنید تابع f روی $[-1,1]$ به صورت $f(x)=\begin{cases}x^a\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ تعریف شده باشد آن گاه: (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) اگر $a\geq 0$، پیوسته است.
۲) اگر $a\geq 1$ ، $f'(0)$ موجود است.
۳) اگر $a\geq 2$، f' پیوسته است.
۴) اگر $a>2$، f' پیوسته است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» طبق توضیحات متن درس، برای این تابع $k=1$ و $b=1$ است. پس f به شرطی پیوسته است که $a>0$ باشد. و f' به شرطی پیوسته است که $a>1(1+1)$ یعنی $a>2$ باشد، بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

در مورد وجود $f'(0)$ که در گزینه‌ی (۲) به آن اشاره شده است، طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^a\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^{a-1}\sin\frac{1}{x}$$

$\sin\frac{1}{x}$ تابعی کران‌دار است. این حد به شرطی وجود دارد که $a-1>0$ باشد یعنی $a>1$ باشد. بنابراین گزینه (۲) درست نیست.

مثال ۱۰۰: در مورد تابع $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ ، کدام گزینه درست است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۵)

۱) $f(x)$ در $x=0$ حد ندارد.
۲) $f(x)$ در $x=0$ حد دارد ولی پیوسته نیست.
۳) $f'(x)$ موجود است ولی در $x=0$ پیوسته نیست.
۴) $f(x)$ در $x=0$ پیوسته است ولی مشتق ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

آهنگ‌های وابسته

در این قسمت می‌خواهیم مهم‌ترین مطلب این درسنامه را آموزش دهیم. اگر قرار باشد از این درسنامه سؤال طرح شود، معمولاً بیشترین انتخاب طراحان، مطالب این قسمت خواهد بود (هر چند از مبحث «رشد و زوال» نیز سؤالاتی در آزمون‌ها هر چند سال یکبار طرح می‌شود).

در برخی سؤالات، علاوه بر این که دو کمیت مختلف با هم توسط یک فرمول مرتبط هستند، هر دوی آن‌ها نیز تابعی از یک متغیر سوم (معمولاً زمان) هستند. در این‌گونه سؤالات، معمولاً آهنگ تغییر هریک از دو کمیت نسبت به متغیر سوم سؤال می‌شود. برای حل این‌گونه سؤالات روال کار این است که معادله‌ای پیدا کنیم که این دو کمیت را به هم مربوط می‌کند و سپس با استفاده از قاعده‌ی زنجیری از دو طرف این معادله نسبت به متغیر سوم مشتق بگیریم و به یک معادله می‌رسیم که آهنگ کمیت‌های اصلی را به هم مرتبط می‌کند.

مثال ۱۱۵: بالنی کروی را از هوا پر می‌کنیم. به طوری که حجم آن با آهنگ $۱۰۰(\frac{cm^۳}{s})$ زیاد می‌شود. وقتی که قطر بالن $۵۰\,cm$ است، شعاع بالن با چه آهنگی بزرگ می‌شود؟

پاسخ: ابتدا دو کمیت اصلی را شناسایی و برای آن‌ها نماد مناسب را انتخاب کرده و با یک فرمول این دو کمیت را به هم مرتبط می‌کنیم. واضح است حجم بالن (v) و قطر آن (و به عبارت دیگر شعاع آن r) هر دو بر اساس کمیت سومی به نام زمان (t) تغییر می‌کنند. اما ارتباط بین v و r چیست؟ همه می‌دانیم حجم یک کره برابر است با $v=\frac{۴}{۳}\pi r^۳$. خُب حالا از طرفین این رابطه نسبت به t مشتق می‌گیریم: (از مشتق‌گیری زنجیری استفاده می‌کنیم.)

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}.\frac{dr}{dt}=۴\pi r^۲(\frac{dr}{dt})$$

ما دنبال $\frac{dr}{dt}$ هستیم، لذا داریم:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{۱}{۴\pi r^۲}(\frac{dv}{dt})$$

از صورت مسأله می‌دانیم $\frac{dv}{dt}=۱۰۰(\frac{cm^۳}{s})$ و $r=۲۵cm$، لذا داریم:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{۱}{۴\pi(۲۵)^۲}\times۱۰۰(\frac{cm}{s})=\frac{۱}{۲۵\pi}(\frac{cm}{s})$$

دستورالعمل حلِ مسائل آهنگ‌های وابسته

برای حل این‌گونه سؤالات مراحل زیر را به‌صورت گام به گام انجام دهید:

گام اول: ابتدا مسأله را با دقت بخوانید و متغیرها را با حروف نام‌گذاری کنید. سعی کنید حروف اول متغیرها انتخاب شود. مثلاً V برای حجم، L برای طول، t برای زمان و ... .

گام دوم: معادله‌ای شامل دو کمیت اصلی مرتبط به هم بنویسید که هر دو وابسته به پارامتر سوم (معمولاً زمان) هستند. ممکن است معادله را بلد باشید و یا مجبور باشید با رسم شکل به معادله دلخواه برسید. شاید در برخی سؤالات مثلاً سه متغیر داشته باشیم که هر سه تای آن‌ها، وابسته به یک متغیر چهارم (معمولاً زمان) باشند. در این‌گونه سؤالات، دنبال رابطه‌ای (معمولاً با استفاده از فرمول‌های هندسی) باشید که از آن سه مورد، یکی را حذف کند (یعنی یکی از آن سه مورد را برحسب دو متغیر دیگر مشخص کند).

گام سوم: از طرفین معادله نسبت به متغیر مستقل (متغیری که تمام کمیت‌ها به آن وابسته هستند و همان‌طور که گفتیم معمولاً زمان است) مشتق زنجیری بگیرید.

گام چهارم: در مرحله‌ی آخر، مفروضات مسأله را جایگزین کنید و جواب مسأله را معین کنید.

مثال ۱۱۶: نقطه‌ای بر خم $y^۲=x^۳$ چنان حرکت می‌کند که فاصله‌اش $r(t)$ از مبدأ مختصات در صفحه با آهنگ ثابت ۲ واحد در ثانیه زیاد می‌شود. در لحظه‌ای که نقطه متحرک دارای طول ۲ می‌باشد، مقدار $\frac{dx}{dt}$ چند واحد بر ثانیه است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که فاصله‌ی هر نقطه به مختصات (x,y)، برابر با $r=\sqrt{x^۲+y^۲}$ است و به عبارت دیگر رابطه‌ی $r^۲=x^۲+y^۲$ را داریم. حالا سؤال را خوب مطالعه کنید. آهنگ افزایش فاصله، یعنی $\frac{dr}{dt}$ برابر با ۲ واحد در ثانیه داده شده و مقدار $\frac{dx}{dt}$ از ما خواسته شده است. پس باید معادله‌ای بین r و x داشته باشیم. همان‌طور که می‌بینید بر اساس رابطه‌ی $r^۲=x^۲+y^۲$ معادله‌ای بین r، x و y داریم. یعنی y اضافی است! پس باید آن را برحسب r یا x بنویسیم. در ابتدای سؤال y برحسب x داده شده، پس می‌توان به جای $y^۲$ در رابطه $x^۳$ قرار داد و بنابراین رابطه به شکل $r^۲=x^۲+x^۳$ تبدیل می‌شود.

حالا همه چی آماده مشتق‌گیری زنجیری نسبت به t شده است و بنابراین داریم:

$$۲r\frac{dr}{dt}=۲x\frac{dx}{dt}+۳x^۲\frac{dx}{dt}\quad(*)$$

در مرحله‌ی آخر جایگذاری‌ها را انجام می‌دهیم؛ به ازای $x=۲$، مقدار $r=۲\sqrt{۳}$ (با جایگزینی در رابطه $r^۲=x^۲+x^۳$) بدست می‌آید، که با جایگذاری مقادیر r و x در رابطه $(*)$ داریم:

$$۲\times۴\sqrt{۳}=۲\times۲\frac{dx}{dt}+۳(۲)^۲\frac{dx}{dt}\Rightarrow ۸\sqrt{۳}=۱۶(\frac{dx}{dt})\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(\frac{واحد}{ثانیه})$$

مثال ۱۱۷: **اگر حجم یک گلوله برفی به شکل کره با شعاع R، با آهنگ $0/3\frac{mm^3}{s}$ کاهش یابد، مساحت سطح آن با چه آهنگی کاهش خواهد یافت؟**
(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) $0/6\frac{1}{R}\frac{mm^2}{S}$ ۲) $0/5\frac{1}{R}\frac{mm^2}{S}$ ۳) $0/3\frac{1}{R}\frac{mm^2}{S}$ ۴) $0/1\frac{1}{R}\frac{mm^2}{S}$

پاسخ: گزینه «۱» در واقع خواسته سؤال $\frac{dS}{dt}$ است. با توجه به این که سؤال $\frac{dV}{dt}$ را داده است، از قاعده مشتق زنجیره‌ای کمک می‌گیریم: علامت منفی نشان‌دهنده کاهش مساحت است.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dS}{dt}=\frac{dS}{dV}\times\frac{dV}{dt}\\ S=4\pi R^2\\ V=\frac{4}{3}\pi R^3\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{dS}{dt}=\frac{\frac{dS}{dR}}{\frac{dV}{dR}}\times\frac{dV}{dt}=\frac{8\pi R}{4\pi R^2}\times(-0/3)=-0/6\frac{1}{R}$$

تذکر ۱۱: هرگاه آهنگ تغییر کمیتی در حال **کاهش** باشد، علامت آن را **منفی** و هرگاه آهنگ تغییر کمیتی در حال **افزایش** باشد، علامت آن را **مثبت** در نظر می‌گیریم.

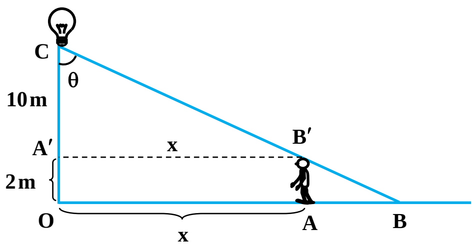
مثال ۱۱۸: **قطر یک گوی یخی ۶cm است. این قطر با آهنگ $0/5\,cm/h$ در اثر ذوب‌شدن کاهش می‌یابد. حجم گوی با کدام سرعت تغییر می‌کند؟**
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳)

۱) $-18\pi\,cm/h$ ۲) $-9\pi\,cm/h$ ۳) $-6\pi\,cm/h$ ۴) $-3\pi\,cm/h$

پاسخ: گزینه «۲» فرض کنیم $D(t)$ قطر گوی یخی در لحظه‌ی t باشد و t_0 را لحظه‌ای فرض کنید که قطر گوی یخی ۶cm بوده است. اگر $V(t)$ حجم گوی در لحظه t باشد می‌دانیم که $V(t)=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D(t)}{2}\right)^3=\frac{\pi}{6}D^3(t)$. بنابر اطلاعات داده شده در لحظه t_0 داریم $D(t_0)=6cm$ و سرعت تغییر $D(t)$ نسبت به زمان یعنی $\frac{dD(t)}{dt}$ در لحظه t_0 برابر است با $-0/5\frac{cm}{h}$ به عبارتی $D'(t_0)=-0/5$. حال سرعت تغییر حجم نسبت به زمان یعنی $\frac{dV}{dt}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\frac{dV(t)}{dt}\right|_{t_0}=V'(t_0)=\frac{\pi}{6}3D^2(t_0)D'(t_0)=\frac{\pi}{6}(3)(6)^2(-0/5)=-9\pi$$

مثال ۱۱۹: **مردی با قد 2m با تندی $1(\frac{m}{s})$ به سوی یک تیر چراغ برق که لامپ آن در ارتفاع 12(m) از زمین نصب شده است، حرکت می‌کند. اگر مطابق شکل θ زاویه بین تیر چراغ برق و یک شعاع نورانی از چراغ برای این فرد باشد، سرعت تغییر θ وقتی این مرد در فاصله‌ی ۲۰ متری از تیر چراغ برق قرار دارد، چند درجه است؟**



۱) $-\frac{18}{50}$ ۲) $-\frac{18}{5}$ ۳) $-\frac{18}{5\pi}$ ۴) $-\frac{18}{50\pi}$

پاسخ: گزینه «۳» اگر صورت سؤال را دقیق بخوانیم متوجه می‌شویم که $\frac{d\theta}{dt}$ را از ما خواسته است. اما سؤال چه اطلاعاتی را به ما داده است؟ قد این مرد و ارتفاع لامپ تا زمین را داریم، همچنین تندی یعنی $\frac{dx}{dt}=1(\frac{m}{s})$ را هم داریم. از دادن $\frac{dx}{dt}$ و خواستن $\frac{d\theta}{dt}$ در صورت سؤال می‌توان فهمید که باید دنبال رابطه‌ای بین θ و x باشیم. ابتدا فرض کنیم x فاصله‌ی مرد تا پای تیر باشد، مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{A'B'C}$ رابطه‌ی $tg\theta=\frac{x}{10}$ را داریم، به عبارتی $x=10\,tg\theta$. با مشتق‌گیری از طرفین معادله نسبت به متغیر t داریم:

$$\frac{dx}{dt}=10\times\frac{d(tg\theta)}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}=10(\frac{1}{\cos^2\theta})\frac{d\theta}{dt}$$

چون دنبال $\frac{d\theta}{dt}$ هستیم، لذا بهتر است $\frac{d\theta}{dt}$ در یک طرف تساوی باشد، یعنی رابطه را به‌صورت مقابل می‌نویسیم:

$$\frac{d\theta}{dt}=(\frac{\cos^2\theta}{10})\frac{dx}{dt}\quad,\quad(*)$$

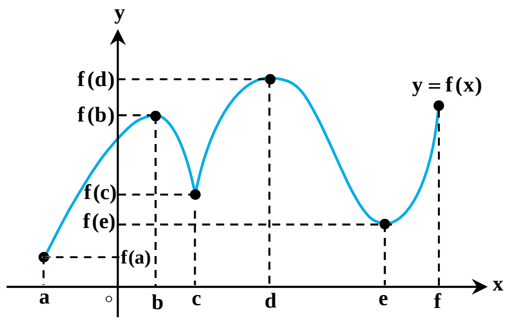
خُب مسأله گفته وقتی مرد در فاصله‌ی ۲۰ متری قرار دارد، یعنی وقتی $x=20m$، آهنگ تغییرِ θ یا همان $\frac{d\theta}{dt}$ چقدر است؟ پس باید رابطه‌ای بین θ و x هم پیدا کنیم، یعنی $\cos^2\theta$ را برحسب x بنویسیم. می‌توان در مثلث $A'B'C$، مقدار $\cos\theta$ را به راحتی حساب کرد:

$$\cos\theta=\frac{|A'C|}{|B'C|}=\frac{10}{\sqrt{10^2+x^2}}$$

درسنامه ۸: نقاط اکسترمم، عطف و تشخیص رفتار تابع

در این درسنامه می‌خواهیم چند مورد از مهم‌ترین کاربردهای مشتق را بررسی کنیم. مفاهیمی مانند تعیین نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق، تعریف تقعر و روش‌های بدست آوردن نقطه عطف و بررسی توابع صعودی و نزولی از مهم‌ترین مواردی هستند که در این درسنامه مورد بررسی قرار می‌گیرند.

تعریف ماکزیمم و مینیمم نسبی (موضعی)



برای درک بهتر این بحث، به شکل مقابل دقت کنید:
به نقطه‌ی $(b,f(b))$ توجه کنید. این نقطه اگرچه بالاترین نقطه روی منحنی نیست، اما از نقاط مجاور خود بالاتر است، به این‌گونه نقاط، **ماکزیمم نسبی** (موضعی) می‌گویند. به همین ترتیب نقاط $(c,f(c))$ و $(e,f(e))$ اگرچه پایین‌ترین نقاط روی منحنی نیستند، اما از نقاط مجاور خود پایین‌تر هستند، به این‌گونه نقاط **مینیمم نسبی** (موضعی) گفته می‌شود. در مورد نقاط $(a,f(a))$ و $(d,f(d))$ در قسمت بعد توضیح خواهیم داد. اما قبل از آن، تعریف دقیق‌تر و مفهومی‌تری را از نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی ارائه می‌دهیم:

تعریف: تابع f در نقطه‌ای به طول c دارای ماکزیمم نسبی است به شرطی که به ازای هر x به قدر کافی نزدیک به c (یعنی به ازای هر x در همسایگی c) نامساوی $f(c) \geq f(x)$ برقرار باشد. در این‌صورت به مقدار $f(c)$ ماکزیمم f گفته می‌شود. به همین ترتیب f در c مینیمم نسبی دارد به شرطی که به ازای تمام x های واقع در همسایگی c، نامساوی $f(c) \leq f(x)$ برقرار باشد. در این صورت به مقدار $f(c)$ مینیمم f گفته می‌شود.

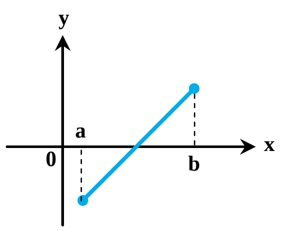
توجه ۱: دقت کنید نقطه‌ای مانند $(a,f(a))$ نمی‌تواند مینیمم نسبی نامگذاری شود، چون همان‌طور که گفتیم تعریف مینیمم نسبی در هر نقطه مستلزم این است که مقادیر تابع در طرفین آن نقطه معلوم باشد و آن نقطه پایین‌تر از آن‌ها قرار گرفته باشد. در واقع ماکزیمم و مینیمم نسبی، فقط در نقاط درونی بازه تعریف می‌شوند و به هیچ‌وجه نقاط ابتدا و انتهای بازه نمی‌توانند ماکزیمم و مینیمم نسبی باشند.

توجه ۲: به مقادیر ماکزیمم و مینیمم مقادیر اکسترمم نیز گفته می‌شود. در واقع وقتی نوشته می‌شود « اکسترمم »، ما نمی‌دانیم منظور چیست؟ یعنی ممکن است مینیمم و یا ماکزیمم مدنظر نویسنده باشد.

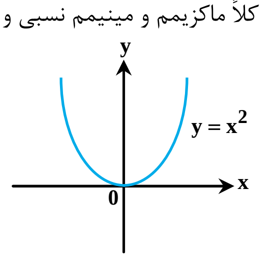
تعریف ماکزیمم و مینیمم مطلق

به وضعیت نمودار $y=f(x)$ در شکل قبل در بازه $[a,f]$ توجه کنید. نقطه‌ی $(a,f(a))$ از هر نقطه‌ای در نمودار این تابع (در بازه داده شده) پایین‌تر است. به این نقطه **مینیمم مطلق** می‌گویند. به همین ترتیب نقطه‌ی $(d,f(d))$ از هر نقطه‌ای در نمودار این تابع (در بازه داده شده) بالاتر است، به این نقطه **ماکزیمم مطلق** می‌گویند. در واقع در حوزه تعریف تابع $y=f(x)$، بیشترین و کمترین مقدار عرض تابع به ترتیب ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع نامیده می‌شوند.
معمولاً در مسائل، وقتی Max و یا Min مطلق مطرح می‌شود که بازه مشخص شده باشد. توجه داشته باشید که نقطه‌ی $(d,f(d))$ در عین حال، ماکزیمم نسبی هم می‌تواند لقب بگیرد، چون از تمام نقاط همسایگی خود نیز بالاتر است. اما همان‌طور که گفتیم نقطه‌ی $(a,f(a))$ نمی‌تواند مینیمم نسبی لقب بگیرد، چون در سمت چپ آن، وضعیت نقاط معلوم نیست، یعنی همسایگی کاملی در حول این نقطه نداریم.

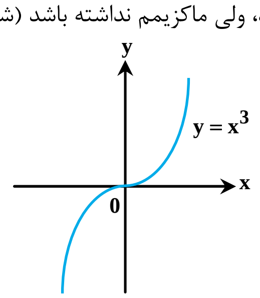
تذکر ۱۴: یک تابع ممکن است ماکزیمم و مینیمم نسبی نداشته باشد، ولی ماکزیمم و مینیمم مطلق داشته باشد (شکل ۱) و یا ممکن است تابعی مینیمم داشته باشد، ولی ماکزیمم نداشته باشد (شکل ۲) و یا ممکن است کلاً ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق نداشته باشد (شکل ۳).



شکل (۱)
نقطه b طول ماکزیمم مطلق
و نقطه a طول مینیمم مطلق است
و تابع ماکزیمم و مینیمم نسبی ندارد.



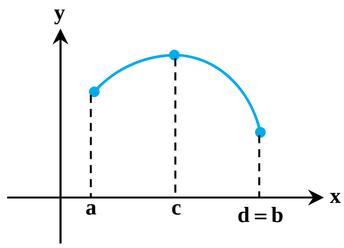
شکل (۲)
مینیمم نسبی و مطلق f برابر
با 0 است $f(0)=0$ و این تابع ماکزیمم ندارد.



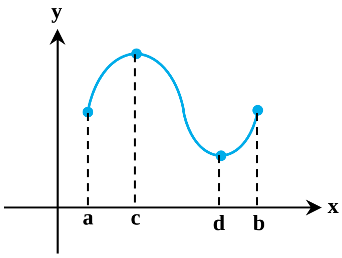
شکل (۳)
تابع $y=x^3$ ماکزیمم و مینیمم مطلق
و حتی نسبی ندارد.

قضیه: اگر f تابعی **پیوسته** روی بازه **[a,b]** باشد، آن‌وقت، f یک ماکزیمم مطلق مانند $f(c)$ و یک مینیمم مطلق مانند $f(d)$ دارد، که در این‌جا c و d اعدادی در بازه‌ی $[a,b]$ هستند و ممکن است همان نقاط a یا b باشند. به عنوان مثال، به شکل‌های رسم شده توجه کنید:

قضیه: اگر f تابعی **پیوسته** روی بازه **$[a,b]$** باشد، آن‌وقت، f یک ماکزیمم مطلق مانند $f(c)$ و یک مینیمم مطلق مانند $f(d)$ دارد، که در این‌جا c و d اعدادی در بازه‌ی $[a,b]$ هستند و ممکن است همان نقاط a یا b باشند. به عنوان مثال، به شکل‌های زیر توجه کنید:

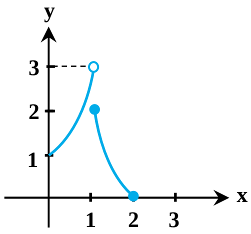


c طول ماکزیمم مطلق و d (یا همان b) طول مینیمم مطلق است.

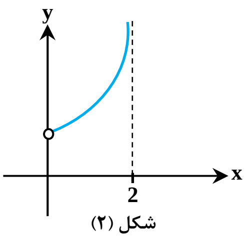


c طول نقطه ماکزیمم مطلق و d طول نقطه‌ی مینیمم مطلق است.

دقت کنید در قضیه فوق، شرط پیوسته بودن f و بسته بودن بازه $[a,b]$، شرط‌های ضروری برای وجود اکسترمم مطلق هستند. برای مثال به دو شکل مقابل توجه کنید. این تابع روی بازه بسته $[0,2]$ تعریف شده، اما پیوسته نیست. برای همین نمی‌توان انتظار داشت حتماً قضیه فوق برقرار باشد. همان‌طور که در شکل (۱) می‌بینید، این تابع مقدار مینیمی برابر با $f(2)=0$ دارد اما مقدار ماکزیمم ندارد (اشتباه نکنید، ۳ ماکزیمم نیست، چون این تابع، مقادیر به دلخواه نزدیک به ۳ را می‌گیرد، اما هیچ‌گاه واقعاً برابر با ۳ نمی‌شود). در شکل دوم، تابع در بازه $(0,2)$ پیوسته است، اما نه مقدار ماکزیمم دارد و نه مقدار مینیمم (این که ماکزیمم ندارد که روشن است، اما ممکن است تصور شود $\underline{1}$ مینیمم است. دقت کنید که تابع به اندازه‌ی دلخواه به $\underline{1}$ نزدیک می‌شود، اما هیچ‌گاه $\underline{1}$ نمی‌شود). پس باز هم نمی‌توان گفت این مثال قضیه فوق را نقض کرده است. چون بازه $(0,2)$ بسته نیست.

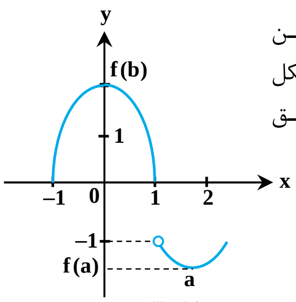


شکل (۱)



شکل (۲)

و بالاخره در پایان لازم است تأکید کنیم که عکس قضیه فوق برقرار نیست؛ یعنی ممکن است تابعی ناپیوسته باشد، اما هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق داشته باشد. شکل (۳) این مورد را تأیید می‌کند که $f(a)$ و $f(b)$ به ترتیب مینیمم و ماکزیمم مطلق هستند.



شکل (۳)

نحوه تعیین نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی

تا این‌جا با مفهوم نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آشنا شدید. حالا می‌خواهیم بدانیم این نقاط چگونه تعیین و مشخص می‌شوند؟ در واقع می‌خواهیم نحوه‌ی بدست آوردن نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی یک تابع را با هم مرور کنیم. برای تعیین نقاط اکسترمم (ماکزیمم یا مینیمم) یک تابع، ابتدا باید نقاطی را انتخاب کنیم که این نقاط شرط لازم را برای احراز پست « نقاط اکسترمم» دارند؛ این نقاط را « نقاط بحرانی» می‌نامیم.

تعریف نقاط بحرانی: به نقاطی از دامنه $f(x)$ که در آن‌ها مشتق وجود ندارد و یا اگر مشتق وجود دارد، برابر با صفر است، نقاط بحرانی می‌گویند.

خُب پس از تعیین نقاط بحرانی (انتخاب کاندیدهای نقاط اکسترمم) باید فرآیند بررسی و انتخاب نهایی را انجام دهیم. تا ببینیم کدام‌یک از این نقاط بحرانی ماکزیمم و کدام‌یک مینیمم و حتی کدام‌یک نه ماکزیمم و نه مینیمم هستند. برای این بررسی و انتخاب نهایی، آزمون‌هایی وجود دارد که ابتدا به « آزمون اول» اشاره می‌کنیم.

مثال ۱۶۸: نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^{\frac{3}{5}}(4-x)$ را تعیین کنید.

پاسخ: ابتدا $x^{\frac{3}{5}}$ را در پرانتز ضرب می‌کنیم و بعد مشتق می‌گیریم (البته می‌توانیم برای مشتق‌گیری از قاعده مشتق حاصل‌ضرب هم استفاده کنیم):

$$f(x)=4x^{\frac{3}{5}}-x^{\frac{8}{5}} \Rightarrow f'(x)=4\times\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}-\frac{8}{5}x^{\frac{8}{5}-1}=\frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}}-\frac{8}{5}x^{\frac{3}{5}}=\frac{12}{5x^{\frac{2}{5}}}-\frac{8x^{\frac{3}{5}}}{5} \Rightarrow f'(x)=\frac{12-8x}{5x^{\frac{2}{5}}}$$

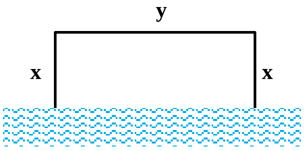
واضح است به ازای $x=\frac{3}{2}$ مشتق برابر با صفر است و به ازای $x=0$ مشتق وجود ندارد، پس دو نقطه $x=0$ و $x=\frac{3}{2}$ نقاط بحرانی تابع f هستند.

درسنامه۹: مسائل بهینه‌سازی

در این درسنامه می‌خواهیم یکی از مهم‌ترین کاربردهای مشتق را بررسی کنیم. البته این کاربردها بر پایه مفاهیم ماکزیمم و مینیمم توابع که قبلاً یاد گرفتیم، بنا نهاده شده‌اند. بسیاری از جنبه‌های عملی زندگی، مانند مینیمم کردن هزینه، ماکزیمم کردن سود، ساخت قطعات مختلف صنعتی با کمترین ماده اولیه، کوتاه‌ترین زمان برای طی کردن یک مسیر و بسیاری دیگر از کاربردهای عملی مشتق در این درسنامه بررسی می‌شود.

در این نوع مسائل، معمولاً ارتباط چند متغیر با هم داده می‌شود (و یا در ماهیت مسأله وجود دارد که باید کشف شود!) و ما باید اکسترمم تابعی را حساب کنیم که فقط برحسب یک متغیر است. برای همین لازم است سعی کنیم در ضابطه‌ی تابع، با نوشتن تمام متغیرها بر حسب یک متغیر مورد نظر، این تابع را **فقط** برحسب یک متغیر بنویسیم و سپس با استفاده از مشتق‌گیری و آزمون‌های مشتق اول و مشتق دوم و دیگر روش‌ها، ماکزیمم و مینیمم تابع را تعیین کنیم.

مثال۲۳۹: کشاورزی ۲۴۰۰ متر توری دارد و می‌خواهد ناحیه‌ای مستطیلی شکل را که با رودخانه‌ای هم مرز است، حصارکشی کند. البته احتیاجی نیست مرز کنار رودخانه حصارکشی شود و فقط باید سه مرز دیگر حصارکشی شود. ابعاد زمینی که بیشترین مساحت را دارد، پیدا کنید.



☑ **پاسخ:** مسأله به دنبال ماکزیمم کردن مساحت مستطیلی است که یک ضلع ندارد! البته این ماجرا (یعنی نداشتن یک ضلع) در مقدار مساحت تأثیری ندارد، ولی در مقدار محیط مستطیل تأثیرگذار است. خُب اول ببینیم مسأله چه چیزی را به ما داده است؟ سؤال به ما محیط مستطیل را داده است. بنابراین داریم: $۲x + y = ۲۴۰۰ \quad (*)$

توجه کنید که اگر قرار بود مرز سمت رودخانه هم بسته شود، آن‌وقت مسأله فرق می‌کرد و رابطه‌ی بالا به‌صورت $۲(x+y) = ۲۴۰۰$ نوشته می‌شد. تساوی $(*)$ تنها چیزی است که مسأله آن را به عنوان مقدار معلوم داده است و از ما ماکزیمم مساحت مستطیل را می‌خواهد. اگر مساحت مستطیل را S بنامیم. واضح است دنبال ماکزیمم کردن $S = xy$ هستیم. اما تابع مساحت برحسب دو متغیر x و y داده شده است و باید یکی از آن‌ها در رابطه‌ی S وجود نداشته نباشد! برای این منظور از داده مسأله، یعنی تساوی $(*)$ کمک می‌گیریم و y را برحسب x بدست می‌آوریم (البته فرقی ندارد، می‌توان x را برحسب y بدست آورد) بنابراین $y = ۲۴۰۰ - ۲x$ است که با جایگزینی y در رابطه‌ی S به یک تابع یک متغیره برحسب x می‌رسیم:

$$S(x) = x(۲۴۰۰ - ۲x) = ۲۴۰۰x - ۲x^۲$$

حالا کافی است از تابع مشتق گرفته و برابر با صفر قرار دهیم:

$$S'(x) = ۲۴۰۰ - ۴x = ۰ \Rightarrow x = ۶۰۰$$

این نقطه طول نقطه ماکزیمم است، این موضوع به راحتی با استفاده از آزمون مشتق دوم مشخص می‌شود.

چون $S''(x) = -۴ < ۰$، پس $x = ۶۰۰$ قطعاً S را ماکزیمم می‌کنند با قرار دادن این مقدار x در رابطه‌ی $(*)$ y برابر با ۱۲۰۰ متر بدست می‌آید. یعنی مستطیلی به عرض ۶۰۰ و به طول ۱۲۰۰ بزرگترین مساحت ممکن را داراست.

توضیح: البته در برخی مسائل بهینه‌سازی، بازه بسته‌ای به‌صورت پنهان در خودِ تابع وجود دارد که در این صورت باید مقدار تابع در نقاط ابتدا و انتهای بازه نیز کنترل شود تا نقطه اکسترمم دقیق بدست آید. مثلاً در این مثال چون $S = x(۲۴۰۰ - ۲x)$، پس تلویحاً بازه‌ای برای x ایجاد می‌شود که به ازای آن، مساحت منفی و یا صفر نشود. x باید بزرگتر از صفر و کوچکتر از ۱۲۰۰ باشد تا S منفی نشود؛ پس $۰ < x < ۱۲۰۰$ و به ازای این مقادیر $S(۰) = S(۱۲۰۰) = ۰$ و باز هم تأیید می‌شود که $S(۶۰۰) = ۷۲۰۰۰۰$ ماکزیمم مطلق است.

مثال۲۴۰: مجموعه تمام مستطیل‌هایی که محیط آن‌ها ۱۶ است را در نظر می‌گیریم. طول قطر مستطیلی که قطرش مینیمم است، کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$　　۲) $۴\sqrt{۲}$　　۳) $۲\sqrt{۲}$　　۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مستطیلی را در نظر بگیرید که محیط آن ۱۶ است و طول قطرش تابعی است که می‌خواهیم آن را مینیمم کنیم. اگر طول مستطیل را با y و عرض آن را با x نشان دهیم، آن‌گاه طبق قضیه فیثاغورس طول قطر آن $d = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ بدست می‌آید. در واقع d تابعی است که دنبال مینیمم کردن آن هستیم. اما دقت کنید که d بر حسب دو متغیر x و y است و باید با یکی از این متغیرها خداحافظی کنیم و البته فرقی ندارد کدام‌یک حذف شوند، مثلاً می‌توانیم y را برحسب x تعیین کنیم. سؤال نسبتاً ساده‌ای است و به راحتی می‌توان از همان داده مسأله y را بر حسب x نوشت: $۲(x+y) = ۱۶ \Rightarrow x + y = ۸ \Rightarrow y = ۸ - x$

حالا با جایگذاری در ضابطه‌ی d، تابعی یک متغیره برحسب x به‌صورت مقابل داریم: $d(x) = \sqrt{x^۲ + (۸ - x)^۲}$

باید از $d(x)$ مشتق بگیریم تا مینیمم آن را تعیین کنیم. اما چون رادیکال داریم برای جلوگیری از محاسبات پیچیده‌تر می‌توانیم طرفین را به توان ۲ برسانیم و اکسترمم $d^۲$ را حساب کنیم (توجه داشته باشید که این کار هیچ تغییری در صحت جواب ندارد و فقط برای راحتی کار است، چون وقتی $d^۲$ مینیمم شود، قطعاً d هم مینیمم است. با وجود این، برای تمرین هم شده می‌توانید نقطه‌ی مینیمم را از مشتق‌گیری از خودِ d تعیین کرده و به یکسان بودن جواب‌ها برسید).

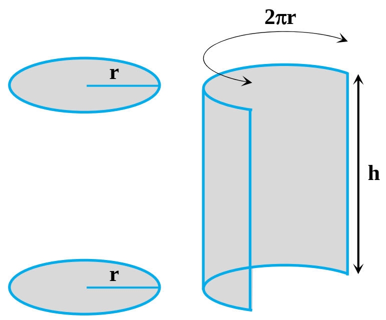
$$d^۲(x) = x^۲ + (۸ - x)^۲ \Rightarrow (d^۲(x))' = ۰ \Rightarrow ۲x + ۲(۸ - x)(-۱) = ۰ \Rightarrow ۲x - ۱۶ + ۲x = ۰ \Rightarrow ۴x = ۱۶ \Rightarrow x = ۴$$

پس $x = ۴$ طول نقطه مینیمم است و به ازای آن $y = ۴$ و بنابراین $d(x) = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{۴^۲ + ۴^۲} = ۴\sqrt{۲}$، طول قطر مینیمم است. در واقع اگر $x = y = ۴$ باشد و به عبارت دیگر شکل مربع باشد، طول قطر مینیمم خواهد شد.

توضیح بیشتر: توجه داشته باشید که اصول کار این است که کنترل شود نقطه بدست آمده طول نقطه مینیمم باشد و احیاناً طول نقطه ماکزیمم نباشد (که این کار برای این سؤال به راحتی با آزمون مشتق اول و یا آزمون مشتق دوم صورت می‌گیرد).

مثال ۲۴۱: می‌خواهیم یک قوطی فلزی به شکل استوانه بسازیم که ۱ لیتر روغن را در خود جای دهد. اگر بخواهیم هزینه فلز به کار رفتـه شـده در ساخت این قوطی مینیمم باشد، ابعاد قوطی را باید چگونه انتخاب کنیم؟

پاسخ: ابتـدا مسـأله را خـوب بخـوانیم و ببینـیم چـه چیزهـایی داده و دنبـال چـه چیزهـایی اسـت؟



حجم استوانه برابر با ۱ لیتر داده شده است. پس $V = ۱۰۰۰(cm^۳)$، دیگر چیز معلومی نداریم و دنبال این هستیم که هزینه فلز به کار رفته شده مینیمم شود، و این یعنی مقدار فلز به کار رفته شده، کمتـرین مقـدار ممکن باشد. مقدار فلز به کار رفته شده، همان مساحت سطوح استوانه می‌باشد که شامل دو دایـره بـالایی و پایینی و مساحت کناره‌ها می‌باشد. که در شکل مقابل آن‌ها را به‌صورت مجزا نشان داده‌ایم. اگر فرض کنیم r شعاع قاعده و h ارتفاع قوطی استوانه‌ای باشد (مطابق شکل مقابل). آن‌گاه مساحت به‌صورت زیر است، دقـت کنید مساحت کناره‌ها، مستطیلی به عرض $۲\pi r$ و طول h است و برای همین ایـن مسـاحت برابـر $۲\pi r \times h$ است، پس مساحت کل استوانه برابر است با: $S = ۲\pi r^۲ + ۲\pi rh$

خُب تابعی بر حسب دو متغیر نوشته شده که قرار است مینیمم شود. همان‌طور که گفتیم S باید فقط برحسب یکی از متغیرها نوشته شـود و البتـه فرقـی نـدارد، برحسب r و یا برحسب h، اما در این‌جا بهتر است h را برحسب r بدست بیاوریم و S را فقط برحسب r بنویسیم (چـون قـرار اسـت از رابطـهٔ $\pi r^۲ h = ۱۰۰۰$ برای این منظور استفاده کنیم و برای بدست آوردن r برحسب h باید رادیکال وارد محاسبات کنیم که نباشد، بهتر است!)

بنابراین با توجه به داده مسأله $h = \dfrac{۱۰۰۰}{\pi r^۲}$ و با جایگزینی داریم:

$$S(r) = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r(\frac{۱۰۰۰}{\pi r^۲}) = ۲\pi r^۲ + \frac{۲۰۰۰}{r} \ , \ (r > ۰)$$

خُب حالا تقریباً قسمت مشکل مسأله حل شده است و کافی است از S مشتق بگیریم:

$$S'(r) = ۴\pi r - \frac{۲۰۰۰}{r^۲} = \frac{۴(\pi r^۳ - ۵۰۰)}{r^۲} \Rightarrow S'(r) = ۰ \Rightarrow \pi r^۳ = ۵۰۰ \Rightarrow r = \sqrt[۳]{\frac{۵۰۰}{\pi}}$$

و چون $h = \dfrac{۱۰۰۰}{\pi r^۲}$، پس داریم:

$$h = \frac{۱۰۰۰}{\pi(\frac{۵۰۰}{\pi})^{\frac{۲}{۳}}} = \frac{۲ \times ۵۰۰}{\frac{\pi}{\pi^{\frac{۲}{۳}}}(۵۰۰)^{\frac{۲}{۳}}} = \frac{۲ \times (۵۰۰)^{\frac{۱}{۳}}}{\pi^{\frac{۱}{۳}}} = ۲\ (\sqrt[۳]{\frac{۵۰۰}{\pi}}) = ۲r$$

یعنی برای مینیمم کردن هزینه فلز به کار رفته در این قوطی باید $r = \sqrt[۳]{\frac{۵۰۰}{\pi}}$ و ارتفاع یعنی h، باید دو برابر شعاع و به عبارت دیگر ارتفاع برابر با قطر باشد.

توضیح: اما از کجا فهمیدیم $r = \sqrt[۳]{\frac{۵۰۰}{\pi}}$ تابع S را مینیمم می‌کند و احیاناً آن را ماکزیمم نمی‌کند؟

برای این‌کار به چند طریق می‌توان این موضوع را کنترل کرد که استفاده از آزمون مشتق دوم برای این مثال بسیار راحـت اسـت. بـرای ایـن کـار از $S'(r)$ دوبـاره مشتق می‌گیریم:

$$S'(r) = ۴\pi r - \frac{۲۰۰۰}{r^۲} \Rightarrow S''(r) = ۴\pi + \frac{۴۰۰۰}{r^۳}$$

چون به ازای $r = \sqrt[۳]{\frac{۵۰۰}{\pi}}$، علامت $S''(r)$ مثبت است، پس r تابع S را مینیمم می‌کند.

یادآوری فرمول‌های لازم برای حل مسائل خاص این درسنامه

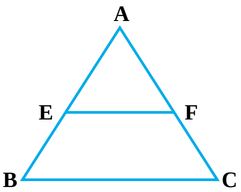
در این قسمت سعی کرده‌ایم در یک صفحه روابط و فرمول‌های موردنیاز را برای حل مسائل بهینه‌سازی یادآوری کنیم. هرچند این روابط از اطلاعات هندسـی دوره دبیرستان است، اما ممکن است برخی از خوانندگان آن را فراموش کرده باشند.

۱ـ حجم کره‌ای به شعاع r برابر با $V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$ و مساحت کره‌ای به شعاع r برابر با $S = ۴\pi r^۲$ است.

۲ـ مساحت کل استوانه‌ای به شعاع r و ارتفاع h برابر با $S = ۲\pi rh + ۲(\pi r^۲)$ است که $۲\pi rh$ مساحت جانبی و $۲(\pi r^۲)$ مساحت دو دایـره بـالا و پـایین اسـتوانه است. در ضمن حجم این استوانه برابر است با $V = \pi r^۲ h$.

۳ـ حجم یک مخروط به شعاع قاعده، r و ارتفاع h برابر با $V=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$ است و مساحت یک مخروط به شعاع r، ارتفاع h و طول مولد L از رابطه $S=\pi rL+\pi r^{۲}$ حساب می‌شود که πrL سطح جانبی مخروط و $\pi r^{۲}$ مساحت قائم مخروط است.

۴ـ حجم منشور به مساحت قاعده **S** و ارتفاع **h** برابر با $V=S.h$ است.

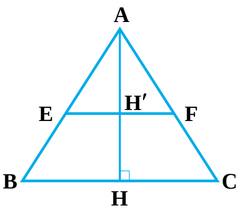


۵ـ روابط در مثلث: یکی از پرکاربردترین قضایایی که در مثلث استفاده می‌کنیم، قضیه تالس است که بیان می‌دارد؛ اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یک ضلع پدید می‌آورد برابر با نسبت پاره‌خط‌هایی است که روی ضلع دیگر ایجاد می‌کند. یعنی اگر در مثلث ABC مقابل EF موازی BC باشد، آن‌گاه رابطه‌ی زیر را داریم:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$$

البته نتیجه دیگری بین اضلاع هم نتیجه می‌شود که مهم‌ترین آن به شکل زیر است:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$



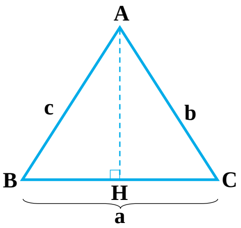
یک نتیجه‌ی فرعی دیگر که در سؤالات ممکن است به کار بیاید، بین ارتفاع وارد بر ضلع و اضلاع مثلث است؛ اگر AH ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد، داریم:

$$\frac{AH'}{AH}=\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$

مساحت مثلث:

مساحت مثلث ABC بیشتر به کمک رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$S=\frac{۱}{۲}(\text{قاعده}\times\text{ارتفاع})=\frac{۱}{۲}(AH\times BC)$$



و گاهی اوقات اگر زاویه بین دو ضلع معلوم باشد، مساحت به شکل زیر نیز بیان می‌شود:

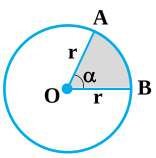
$$S=\frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}ab\sin C$$

۶ـ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a برابر با $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ است.

۷ـ مساحت ذوزنقه از رابطه‌ی مقابل حساب می‌شود: $S=\frac{۱}{۲}(\text{ارتفاع})\times(\text{مجموع دو قاعده})$

قطاع دایره:

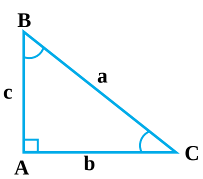
قسمتی از دایره محدود به دو شعاع از دایره و کمان مقابل به زاویه بین دو شعاع مذکور را قطاعی از دایره می‌نامند.



$$\boxed{\text{طول کمان } \overset{\frown}{AB}=r\alpha}\quad,\quad\boxed{S_{OAB\ \text{قطاع}}=\frac{۱}{۲}r\ (\text{طول کمان } \overset{\frown}{AB})\Rightarrow S_{OAB\ \text{قطاع}}=\frac{۱}{۲}r^{۲}\alpha}$$

روابط مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه:

در یک مثلث قائم‌الزاویه روابط زیر را داریم:



$$\sin\hat{C}=\frac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی } \hat{C}}{\text{وتر}}=\frac{c}{a}\quad,\quad\cos\hat{C}=\frac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی } \hat{C}}{\text{وتر}}=\frac{b}{a}$$

طبیعی است که $tg\hat{C}=\frac{c}{b}$ و $\cot g\,\hat{C}=\frac{b}{c}$ می‌شود.

■ فاصله نقطه دلخواه $A(x_{\circ},y_{\circ})$ از خط $ax+by+c=\circ$ از رابطه $d=\frac{|ax_{\circ}+by_{\circ}+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$ بدست می‌آید.

دستورالعمل حل مسائل بهینه‌سازی

در این قسمت، روش گام به گام حل این نوع مسائل را توضیح می‌دهیم:

گام اول: مسأله را دقیق بخوانید و تمام کمیت‌هایی که معلوم و مجهول هستند، مشخص کنید. در واقع از خود بپرسید مسأله چه چیزهایی داده است و چه چیزهایی از ما می‌خواهد؟ سعی کنید برای هر کمیت، یک حرف انگلیسی مناسب در نظر بگیرید. مثلاً S برای مساحت، t برای زمان، h برای ارتفاع، V برای حجم و نظایر آن.

گام دوم: کمیتی که دنبال ماکزیمم و یا مینیمم کردن آن هستیم را شناسایی کنید. این کمیت را به‌صورت تابعی برحسب متغیرهای دیگر بنویسید.

گام سوم: اگر در گام دوم، تابع را برحسب بیش از یک متغیر نوشته‌اید، سعی کنید ابتدا با استفاده از مقادیر معلوم که در گام اول آن‌ها را مشخص کرده‌اید یا با فرمول‌هایی که از قبل می‌دانید و یا ترسیم شکل و استفاده از فرمول‌های هندسی، ارتباطی بین متغیرها ایجاد کنید و سپس با نوشتن آن‌ها برحسب **فقط یک متغیر** کاری کنید که تنها یک متغیر در ضابطه‌ی تابعی که دنبال اکسترمم کردن آن هستید، باقی بماند.

گام چهارم: قسمت مشکل مسأله پشت سر گذاشته شده است و بقیه راه نسبتاً آسان است! چون شما تابعی دارید که فقط برحسب یک متغیر است و دنبال تعیین ماکزیمم یا مینیمم این تابع هستید که تعیین ماکزیمم و مینیمم توابع را قبلاً یاد گرفته‌ایم (معمولاً در بیشتر مسائل باید از تابع مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهید و ریشه‌های مشتق را بدست آورید. البته اگر دامنه تابع بازه‌ای بسته بود، می‌توانید از روش تعیین اکسترمم‌های مطلق تابع کمک بگیرید). در نهایت باید مطمئن شوید که مقدار اکسترمم بدست آمده، همانی است که شما دنبال آن هستید. مثلاً اگر دنبال ماکزیمم هستید، شما نباید مینیمم را پیدا کرده باشید!

مثال ۲۴۲: فاصله کدام نقطه روی سهمی $y^۲ = ۲x$ به نقطه $(۱,۴)$ نزدیک‌تر است؟

۱) $(۲,۲)$ ۲) $(۳,\sqrt{۶})$ ۳) $(۴,۲\sqrt{۲})$ ۴) $(۸,۴)$

پاسخ: گزینه «۱» این سؤال نسبتاً ساده است؛ صورت سؤال اطلاعات خاصی به ما نداده است و البته توضیحات فارسی که باید به روابط ریاضی هم تبدیل شوند، خیلی کم است. مهم‌ترین قسمت که باید برای آن فرمول نوشته شود، فاصله دو نقطه از یکدیگر می‌باشد. می‌دانیم فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

$$d = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲}$$

با توجه به‌صورت سؤال، باید رابطه‌ی فاصله نقطه‌ای مانند (x,y) روی سهمی $y^۲ = ۲x$ از نقطه‌ای مانند $(۱,۴)$ را بنویسیم که به‌صورت زیر است:

$$d = \sqrt{(x-۱)^۲ + (y-۴)^۲}$$

خُب تابعی که باید مینیمم شود، همین فاصله (یعنی d) است. اما همان‌طور که می‌بینید این تابع برحسب دو متغیر x و y نوشته شده است؛ بنابراین باید یکی از متغیرها را برحسب دیگری بنویسیم (فرقی هم ندارد کدام را برحسب دیگری بنویسیم). برای راحتی در محاسبات x را برحسب y می‌نویسیم. دقت کنید چون نقطه (x,y) روی سهمی مورد نظر است، پس برای هر x و y همواره $x = \frac{۱}{۲}y^۲$ است. بنابراین d به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$d = \sqrt{(\frac{۱}{۲}y^۲ - ۱)^۲ + (y-۴)^۲}$$

حالا باید d را مینیمم کنیم و برای این منظور باید از آن نسبت به y مشتق بگیریم، اما چون رادیکال داریم، کمی کار سخت می‌شود؛ بنابراین بهتر است $d^۲$ را مینیمم کنیم که در واقع هر نقطه‌ای به عنوان طول نقطه مینیمم $d^۲$ بدست بیاید، دقیقاً طول نقطه مینیمم d نیز خواهد بود.

$$d^۲ = (\frac{۱}{۲}y^۲ - ۱)^۲ + (y-۴)^۲ \Rightarrow (d^۲)' = ۲(\frac{۱}{۲}y^۲ - ۱)(y) + ۲(y-۴) = y^۳ - ۸ \Rightarrow (d^۲)' = y^۳ - ۸ = ۰ \Rightarrow y = ۲$$

به راحتی واضح است وقتی $y < ۲$، آن‌گاه $(d^۲)' < ۰$ و وقتی $y > ۲$، آن‌گاه $(d^۲)' > ۰$ است. پس بنا بر آزمون مشتق اول، $y = ۲$ تابع $d^۲$ را مینیمم می‌کند (البته دلیل هندسی آن نیز واضح است، چون نزدیک‌ترین نقطه روی این سهمی به نقطه $(۱,۴)$ وجود دارد ولی مثلاً دورترین نقطه را اساساً نمی‌توان تعریف کرد و به عبارت دیگر تابع d ماکزیمم ندارد). از طرفی به ازای $y = ۲$ مقدار $x = \frac{۱}{۲}y^۲ = ۲$ بدست می‌آید. بنابراین نزدیک‌ترین نقطه روی منحنی $y^۲ = ۲x$ به $(۱,۴)$ نقطه‌ی $(۲,۲)$ است.

مثال ۲۴۳: فاصله نزدیکترین نقطه از منحنی $f(x) = \frac{۲}{\sqrt{x^۲+۱}}$ از مبدأ مختصات کدام است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳» در واقع می‌خواهیم عبارت $d = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و یا به طور معادل $d^۲ = g(x,y) = x^۲ + y^۲$ را تحت قید $y = \frac{۲}{\sqrt{x^۲+۱}}$ مینیمم کنیم. با جایگزینی y از رابطه $y = \frac{۲}{\sqrt{x^۲+۱}}$ در معادله g نتیجه می‌شود:

$$g(x,y) = x^۲ + \frac{۴}{x^۲+۱} \Rightarrow g'(x) = ۲x - \frac{۸x}{(x^۲+۱)^۲} = ۰ \Rightarrow ۲x(x^۲+۱)^۲ = ۸x$$

از حل معادله فوق ۱ و ۱- و $x = ۰$ بدست می‌آید و مقادیر متناظر برای y به ترتیب $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۲}$ و ۲ خواهد بود. با جایگزینی نقاط $P(۱,\sqrt{۲})$، $P'(-۱,\sqrt{۲})$، $P''(۰,۲)$ در d، مشاهده می‌شود که حداقل مقدار ممکن برای d برابر $\sqrt{۳}$ است.

مدرسان شریف

فصل چهارم

« انتگرال »

درسنامه‌ا: فرمول‌ها و تغییر متغیرهای مناسب در انتگرال‌گیری

در فصل مشتق، داستان از این قرار بود که تابعی به ما داده می‌شد و از ما می‌خواستند مشتق آن را حساب کنیم. در این فصل برعکس این کار را از ما می‌خواهند، یعنی عبارتی به ما داده می‌شود و از ما می‌خواهند که معلوم کنیم عبارت داده شده، مشتق چه تابعی است؟

اگر $f(x)$ تابعی پیوسته باشد و $F(x)$، تابع اولیه $f(x)$ باشد، آن‌گاه تساوی زیر را داریم:

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

فرمول‌های مهم انتگرال

خُب، حالا باید فرمول‌هایی را یاد بگیریم که ارتباط صددرصدی با فرمول‌های مشتق دارند. در فرمول‌های زیر u تابعی از x می‌باشد:

۱) $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}+c \qquad (n \neq -1)$

۲) $\int \dfrac{du}{u} = \operatorname{Ln}|u|+c$

۳) $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\operatorname{Ln}a}+c \qquad (a>0, a\neq 1)$

۴) $\int e^u du = e^u + c$

۵) $\int \sin u\, du = -\cos u + c$

۶) $\int \cos u\, du = \sin u + c$

۷) $\int (1+\operatorname{tg}^2 u)du = \int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c$

۸) $\int (1+\operatorname{cotg}^2 u)du = \int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{cotg} u + c$

۹) $\int \operatorname{tg} u\, du = -\operatorname{Ln}|\cos u|+c$

۱۰) $\int \operatorname{cotg} u\, du = \operatorname{Ln}|\sin u|+c$

۱۱) $\int \dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{Arctg}\dfrac{u}{a}+c = -\dfrac{1}{a}\operatorname{Arccotg}(\dfrac{u}{a})+c \ , \ a\neq 0$

۱۲) $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{Arcsin}(\dfrac{u}{a})+c = -\operatorname{Arccos}(\dfrac{u}{a})+c \ , \ a\neq 0$

۱۳) $\int \dfrac{du}{\cos u} = \operatorname{Ln}|\operatorname{tg}(\dfrac{u}{2}+\dfrac{\pi}{4})|+c = \operatorname{Ln}|\operatorname{tg}u+\sec u|+c$

۱۴) $\int \dfrac{du}{\sin u} = \operatorname{Ln}|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}|+c = \operatorname{Ln}|\csc u - \operatorname{cotg} u|+c$

۱۵) $\int \cosh u\, du = \sinh u + c$

۱۶) $\int \sinh u\, du = \cosh u + c$

۱۷) $\int \operatorname{cotgh} u\, du = \operatorname{Ln}|\sinh u|+c$

۱۸) $\int \operatorname{tgh} u\, du = \operatorname{Ln}(\cosh u)+c$

۱۹) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \operatorname{Ln}(u+\sqrt{u^2-a^2})+c = \cosh^{-1}(\dfrac{u}{a})+c$

۲۰) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \operatorname{Ln}|u+\sqrt{u^2+a^2}|+c = \sinh^{-1}(\dfrac{u}{a})+c \ , \ a>0$

۲۱) $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\operatorname{Ln}\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right|+c = \begin{cases} -\dfrac{1}{a}\operatorname{tgh}^{-1}(\dfrac{u}{a}) & ; \ |u|<|a| \\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{cotgh}^{-1}(\dfrac{u}{a}) & ; \ |u|>|a| \end{cases}$

۲۲) $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}|\dfrac{u}{a}|+c \ , \ a>0$

۲۳) $\int \sqrt{u^2\pm a^2}du = \dfrac{1}{2}[u\sqrt{u^2\pm a^2} \pm a^2\operatorname{Ln}|u+\sqrt{u^2\pm a^2}|]+c$

۲۴) $\int \sqrt{a^2-u^2}du = \dfrac{1}{2}[u\sqrt{a^2-u^2}+a^2\sin^{-1}\dfrac{u}{|a|}]+c$

اکثر روابط فوق با توجه به فرمول‌های مشتق قابل درک هستند و برخی دیگر نیز با توجه به قواعد انتگرال‌گیری که بعداً آموزش داده خواهد شد، قابل محاسبه هستند؛ ولی بهتر است این فرمول‌ها حفظ شوند. البته فرمول‌های ۲۲، ۲۳ و ۲۴ از اهمیت کمتری برخوردار هستند و سه فرمول ۱۹، ۲۰ و ۲۱ بهتر است حفظ شوند، اما اگر حاصل آن‌ها یادتان نباشد با استفاده از تکنیک‌هایی که در آینده خواهیم گفت، قابل محاسبه هستند.

خواص انتگرال نامعین

از خواص مهم انتگرال نامعین می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) $\int [f(u)+g(u)]du = \int f(u)du + \int g(u)du$

۲) اگر k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه داریم: $\int kf(u)du = k\int f(u)du$

۳) هیچ وقت **نمی‌توان نوشت:** $\int f(u)g(u)du = \int f(u)du \times \int g(u)du \quad , \quad \int \frac{f(u)}{g(u)}du = \frac{\int f(u)du}{\int g(u)du}$

۴) انتگرال یک تابع فرد، همواره تابعی زوج است. ولی انتگرال یک تابع زوج، تابعی نه زوج و نه فرد است. البته صرف‌نظر از ثابت c می‌توان گفت، انتگرال یک تابع زوج، یک تابع فرد می‌شود:

$$\int \underbrace{\cos x}_{\text{تابع زوج}}\,dx = \underbrace{\sin x}_{\text{تابع فرد}} + c \quad , \quad \int \underbrace{\sin x}_{\text{تابع فرد}}\,dx = \underbrace{-\cos x}_{\text{تابع زوج}} + c$$

قبل از ورود به بحث اصلی انتگرال، در این قسمت سعی کرده‌ام کمی تمرین ابتدایی را با هم انجام دهیم:

$$۱)\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{۱}{۲}}dx = \frac{x^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱} + c = ۲x^{\frac{۱}{۲}} + c = ۲\sqrt{x} + c \quad , \quad ۲)\int \frac{dx}{x+۲} = \text{Ln}\,|x+۲| + c$$

$$۳)\int ۳^x dx = \frac{۳^x}{\text{Ln}۳} + c \quad , \quad ۴)\int ۵e^x dx = ۵\int e^x dx = ۵e^x + c$$

$$۵)\int \sin ۳x\,dx = \int (\frac{۳}{۳})\sin ۳x\,dx = \frac{۱}{۳}\int (\sin ۳x)۳dx = -\frac{۱}{۳}\cos ۳x + c$$

$$۶)\int \cos ۷x\,dx = \int \frac{۷}{۷}\cos ۷x\,dx = \frac{۱}{۷}\int (\cos ۷x)۷dx = \frac{۱}{۷}\sin ۷x + c$$

$$۷)\int (۲+\text{tg}^۲x)dx = \int [۱+(۱+\text{tg}^۲x)]dx = \int dx + \int (۱+\text{tg}^۲x)dx = x + \text{tg}x + c$$

$$۸)\int \pi(۱+\text{cotg}^۲x)dx = -\pi\,\text{cotg}x + c \quad , \quad ۹)\int \text{tg}\pi x\,dx = \frac{۱}{\pi}\int \pi\text{tg}\pi x\,dx = -\frac{۱}{\pi}\int \frac{-\pi\sin \pi x}{\cos \pi x}dx = -\frac{۱}{\pi}\text{Ln}\,|\cos \pi x| + c$$

$$۱۰)\int (\frac{\sin x + \cos x}{\sin x})dx = \int \frac{\sin x}{\sin x}dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = x + \text{Ln}\,|\sin x| + c$$

در این مثال در انتگرال دوم با فرض $u = \sin x$، آن‌گاه $du = \cos x dx$ و لذا با انتگرال $\int \frac{du}{u}$ روبه‌رو هستیم.

$$۱۱)\int \frac{dx}{۹+x^۲} = \frac{۱}{۳}\text{Arctg}(\frac{x}{۳}) + c \quad , \quad ۱۲)\int \frac{dx}{\sqrt{۳-x^۲}} = \text{Arc}\sin(\frac{x}{\sqrt{۳}}) + c$$

$$۱۳)\int \frac{dx}{x^۲-۴} = \frac{۱}{۴}\text{Ln}\left|\frac{x-۲}{x+۲}\right| + c \quad , \quad ۱۴)\int \frac{dx}{\sqrt{(x-۲)^۲+۹}} = \text{Ln}\left|(x-۲)+\sqrt{(x-۲)^۲+۹}\right| + c$$

$$۱۵)\int \frac{۳dx}{\sin ۳x} = \text{Ln}\left|\text{tg}\frac{۳x}{۲}\right| + c = \text{Ln}\,|\csc ۳x - \text{cotg}۳x| + c \quad , \quad ۱۶)\int \frac{۲dx}{\cos ۲x} = \text{Ln}\left|\text{tg}(x+\frac{\pi}{۴})\right| + c = \text{Ln}\,|\text{tg}۲x + \sec ۲x| + c$$

$$۱۷)\int \cosh ۸x\,dx = \frac{۱}{۸}\sinh ۸x + c \quad , \quad ۱۸)\int \frac{۱}{۹}\sinh ۹x\,dx = \frac{۱}{۸۱}\cosh ۹x + c$$

تذکر۱: همان‌طور که در فرمول‌های مهم انتگرال ملاحظه می‌کنید؛ وقتی عبارتی بر حسب u داریم، du نیز کنار آن وجود دارد. در بعضی از مثال‌های فوق، مانند مثال شماره ۵، عبارت $\sin ۳x$ داخل انتگرال موجود است، ولی $۳dx$ کنار آن وجود ندارد. لذا با تغییری که مشاهده کردید، $۳dx$ را ایجاد کردیم تا بتوانیم از فرمول‌های ذکر شده استفاده کنیم، چون اگر $u = ۳x$، آن‌گاه $du = ۳dx$ می‌شود. این تغییر در مثال‌های ۶، ۹، ۱۷ و ۱۸ نیز انجام شده است، تغییرات انجام شده ساده‌ترین نوع **تغییر متغیر** می‌باشد که با توجه به مثال‌های زیر می‌توان درک بهتری از مفهوم «تغییر متغیر» داشت:

مثال۱: حاصل انتگرال‌های زیر را با استفاده از روش تغییر متغیر بیابید.

$$۱)\ I = \int (۳x+۵)^{۱۷}dx \Rightarrow u = ۳x+۵ \to du = ۳dx \to \boxed{dx = \frac{du}{۳}}$$

$$\Rightarrow I = \int u^{۱۷}(\frac{du}{۳}) = \frac{۱}{۳}\int u^{۱۷}du = \frac{۱}{۳}(\frac{u^{۱۸}}{۱۸}) + c = \frac{(۳x+۵)^{۱۸}}{۵۴} + c$$

$$۲)\ I = \int \cos(۱+\pi x)dx \Rightarrow u = \pi x + ۱ \to du = \pi dx \to \boxed{dx = \frac{du}{\pi}}$$

$$\Rightarrow I = \int (\cos u)\frac{du}{\pi} = \frac{۱}{\pi}\int \cos u\,du = \frac{۱}{\pi}\sin u + c = \frac{۱}{\pi}\sin(۱+\pi x) + c$$

$$۳)I=\int\frac{dx}{(\mathrm{Arc}\cos x)^{۵}\sqrt{۱-x^{۲}}}\Rightarrow u=\mathrm{Arc}\cos x\Rightarrow \boxed{du=-\frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{-du}{u^{۵}}=-\int u^{-۵}du=\frac{۱}{۴}u^{-۴}+c=\frac{۱}{۴(\mathrm{Arc}\cos x)^{۴}}+c$$

$$۴)I=\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=\int(\sin\sqrt{t})\frac{dt}{\sqrt{t}}\Rightarrow\sqrt{t}=u\to\frac{dt}{۲\sqrt{t}}=du\to\boxed{\frac{dt}{\sqrt{t}}=۲du}$$

$$\Rightarrow I=\int ۲\sin u\,du=-۲\cos u+c=-۲\cos\sqrt{t}+c$$

$$۵)I=\int\frac{۲x+۳}{۲x+۱}dx\xrightarrow{\text{صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم}}\int(۱+\frac{۲}{۲x+۱})dx=\int dx+\underbrace{\int\frac{۲dx}{۲x+۱}}_{I_۱}$$

یادتان باشد در انتگرال‌هایی که صورت و مخرج چندجمله‌ای هستند و درجه صورت و مخرج یکی است، اولین کاری که می‌کنیم، تقسیم صورت بر مخرج است. خب به ادامه‌ی حل بپردازیم، حاصل انتگرال اول برابر با x می‌باشد، برای حل انتگرال دوم داریم:

$$۲x+۱=u\to ۲dx=du\to I_۱=\int\frac{۲dx}{۲x+۱}=\int\frac{du}{u}=\mathrm{Ln}|u|+c=\mathrm{Ln}|۲x+۱|+c\Rightarrow I=x+\mathrm{Ln}|۲x+۱|+c$$

$$۶)I=\int\frac{\mathrm{Arc}\sin x+x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx=\underbrace{\int\frac{\mathrm{Arc}\sin x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx}_{I_۱}+\underbrace{\int\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx}_{I_۲}$$

$$\left.\begin{array}{l}I_۱:\mathrm{Arc}\sin x=u\Rightarrow\boxed{\frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}=du}\qquad\Rightarrow I_۱=\int u\,du=\frac{u^{۲}}{۲}+c_۱=\frac{(\mathrm{Arc}\sin x)^{۲}}{۲}+c_۱\\ I_۲:۱-x^{۲}=t\Rightarrow -۲x\,dx=dt\Rightarrow\boxed{x\,dx=-\frac{dt}{۲}}\Rightarrow I_۲=-\frac{۱}{۲}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{۱}{۲}\int t^{-\frac{۱}{۲}}dt=-t^{\frac{۱}{۲}}+c_۲=-\sqrt{۱-x^{۲}}+c_۲\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=I_۱+I_۲=\frac{(\mathrm{Arc}\sin x)^{۲}}{۲}-\sqrt{۱-x^{۲}}+c_۱+c_۲$$

البته می‌توانیم به جای $c_۱+c_۲$، c را قرار دهیم.

$$۷)I=\int\frac{\mathrm{Ln}\sqrt{z}}{z}dz=\int\frac{\mathrm{Ln}\,z^{\frac{۱}{۲}}}{z}dz=\frac{۱}{۲}\int\frac{\mathrm{Ln}z}{z}dz\Rightarrow \mathrm{Ln}z=u\Rightarrow\boxed{\frac{dz}{z}=du}$$

$$\Rightarrow I=\frac{۱}{۲}\int u\,du=\frac{۱}{۲}(\frac{u^{۲}}{۲})+c=\frac{۱}{۴}(\mathrm{Ln}z)^{۲}+c$$

$$۸)I=\int\frac{dx}{۱+\cos^{۲}x}=\int\frac{dx}{۱+\frac{۱}{۱+tg^{۲}x}}=\int\frac{(۱+tg^{۲}x)}{۲+tg^{۲}x}dx\to tgx=u\to\boxed{(۱+tg^{۲}x)dx=du}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{du}{۲+u^{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathrm{Arctg}(\frac{u}{\sqrt{۲}})+c=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathrm{Arc\,tg}(\frac{tgx}{\sqrt{۲}})+c$$

$$۹)I=\int x^{۲}\cos(x^{۳}+۳)dx\Rightarrow x^{۳}+۳=u\Rightarrow ۳x^{۲}dx=du\to\boxed{x^{۲}dx=\frac{du}{۳}}$$

$$\Rightarrow I=\frac{۱}{۳}\int\cos u\,du=\frac{\sin u}{۳}+c=\frac{\sin(x^{۳}+۳)}{۳}+c$$

$$۱۰)\ I=\int x(۲x+۵)^{۱۰}dx\Rightarrow ۲x+۵=u\to\left|\begin{array}{l}۲x=u-۵\to\boxed{dx=\frac{du}{۲}}\\ x=\frac{u-۵}{۲}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow I=\int(\frac{u-۵}{۲})(u)^{۱۰}(\frac{du}{۲})=\frac{۱}{۴}\int(u-۵)u^{۱۰}du=\frac{۱}{۴}\int(u^{۱۱}-۵u^{۱۰})du=\frac{۱}{۴}[\frac{u^{۱۲}}{۱۲}-\frac{۵}{۱۱}u^{۱۱}]+c=\frac{۱}{۴}[\frac{(۲x+۵)^{۱۲}}{۱۲}-\frac{۵(۲x+۵)^{۱۱}}{۱۱}]+c$$

درسنامه ۵: نکات و خواص مهم انتگرال‌های معین

در این قسمت نکات مهم انتگرال معین را ارائه می‌دهیم. سؤالات بسیاری با استفاده از این نکات به راحتی حل می‌شوند.

۱) اگر در یک انتگرال معین جای حد بالا و پایین تعویض شود، باید یک منفی در انتگرال ضرب شود:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

مثال ۱۴۷: اگر $A=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x^4+1}$ و $B=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{x^2dx}{x^4+1}$، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $B=A+\frac{1}{2}$ ۲) $B=A+2$ ۳) $B=A$ ۴) $B=A+1$

پاسخ: گزینه «۳» در این‌گونه سؤالات باید سعی کنیم A یا B را برحسب هم به‌دست آوریم، نه اینکه هر کدام را جداگانه حساب کنیم. ابتدا انتگرال B را با استفاده از تغییر متغیر $x=\frac{1}{t}$ محاسبه می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}\ ,\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=2\ ,\ x=2\Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

$$B=\int_2^{\frac{1}{2}}\frac{(\frac{1}{t})^2}{(\frac{1}{t})^4+1}(-\frac{dt}{t^2})=-\int_2^{\frac{1}{2}}(\frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1+t^4}{t^4}\times t^2})dt=-\int_2^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+t^4}dt\xrightarrow{\text{با توجه به نکته‌ی گفته شده}}B=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dt}{1+t^4}$$

ملاحظه می‌کنید انتگرال B دقیقاً با انتگرال A برابر شد.

مثال ۱۴۸: اگر $A=\int_0^1\frac{e^t}{t+1}dt$، آن‌گاه مقدار انتگرال $\int_{a-1}^{a}\frac{e^{-t}}{t-a-1}dt$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۸)

۱) $e^{-a}A$ ۲) $-e^{a}A$ ۳) $e^{a}A$ ۴) $-e^{-a}A$

پاسخ: گزینه «۴» در این‌گونه سؤالات باید سعی کنیم حدود انتگرال دوم را به حدود انتگرال اول تبدیل کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم $t=a-u$ و لذا داریم:

$$dt=-du\ ,\ t=a\Rightarrow u=0\ ,\ t=a-1\Rightarrow u=1$$

$$\int_{a-1}^{a}\frac{e^{-t}}{t-a-1}dt=\int_1^0\frac{e^{-(a-u)}}{a-u-a-1}(-du)=-\int_1^0\frac{e^{-a}.e^u}{-(u+1)}du=-e^{-a}\int_0^1\frac{e^u}{u+1}du=-e^{-a}A$$

مثال ۱۴۹: اگر $F(x)=\int_1^x\frac{e^t}{t}dt, x>0$ باشد، مقدار انتگرال $\int_1^x\frac{e^{at}}{t}dt$ بر حسب F برابر کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۹)

۱) $F(ax)$ ۲) $F(ax)+F(a)$ ۳) $F(ax)-F(a)$ ۴) $-F(ax)$

پاسخ: گزینه «۳» تغییر متغیر مقابل را اعمال می‌کنیم:

$$u=at\Rightarrow du=adt\ ,\ t=\frac{u}{a}\ ,\ t=1\Rightarrow u=a\ ,\ t=x\Rightarrow u=ax$$

$$\int_1^x\frac{e^{at}}{t}dt=\int_a^{ax}\frac{e^u}{\frac{u}{a}}.\frac{du}{a}=\int_a^{ax}\frac{e^u}{u}du=\int_a^1\frac{e^u}{u}du+\int_1^{ax}\frac{e^u}{u}du=-\int_1^a\frac{e^u}{u}du+\int_1^{ax}\frac{e^u}{u}du=-F(a)+F(ax)$$

■ این سؤال روش تستی و سریع دارد که در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی (۱) و (۲) بدون دخالت دست! (روش رد گزینه‌ها)» آن را حل کرده‌ایم.

۲) اگر $f(x)$ تابعی زوج و انتگرال‌پذیر روی بازه $[-a,a]$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

۳) اگر $f(x)$ تابعی فرد و انتگرال‌پذیر روی بازه $[-a,a]$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$$

مدرسان شریف

فصل پنجم

« کاربرد انتگرال »

درسنامه: محاسبه‌ی حد مجموع به کمک انتگرال معین

در این درسنامه می‌خواهیم یکی از مهم‌ترین کاربردهای انتگرال معین را شرح دهیم. محاسبه‌ی حدودی که در آن‌ها حد در بی‌نهایت مورد سؤال قرار می‌گیرد و تعداد جملات آن به طور نامتناهی افزایش می‌یابد، با استفاده از تبدیل آن به کمک انتگرال معین بحث این درسنامه است. در واقع قصد ما این است که به جای محاسبه‌ی حد، حاصل یک انتگرال را حساب کنیم. در واقع می‌توان ثابت کرد که:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{i}{n}\right)=\int_a^b f(x)\,dx$$

برای ساده‌سازی رابطه، می‌توانیم مثلاً $a=0$ و $b=1$ قرار دهیم و فرمول به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

در واقع فارسی فرمول بالا این میشه که به جای محاسبه‌ی حد سمت چپ، برو انتگرال سمت راست رو حساب کن!

روش سه گام برای محاسبه‌ی حد مجموع:

برای محاسبه‌ی حد مجموع سه گام زیر معمولاً انجام می‌گیرد که البته برای منظم شدن ذهن شما آن‌ها را بیان می‌کنیم:

گام اول: ایجاد $\frac{1}{n}$ در پشت پرانتز حد مجموع (البته در برخی سؤالات $\frac{1}{n}$ خودش وجود دارد.)

گام دوم: تشخیص ضابطه‌ی $f\left(\frac{i}{n}\right)$ در پرانتز حد مجموع و جایگزینی $x=\frac{i}{n}$ و رسیدن به $f(x)$

گام سوم: محاسبه‌ی حاصل $\int_0^1 f(x)\,dx$ و گزارش آن به عنوان جوابِ حد مجموع

مثال ۱: مقدار $A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» برای درک بهتر، هر جمله را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم:

ابتدا سعی می‌کنیم در تمام جملات $\frac{1}{n}$ را پشت پرانتز ایجاد کنیم و این کار با تقسیم صورت و مخرج کسرها بر n^2 صورت می‌گیرد.

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{n}{n^2+1}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}\right) & \Rightarrow i=1\\
\frac{n}{n^2+4}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n^2}}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}\right) & \Rightarrow i=2\\
\frac{n}{n^2+9}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{9}{n^2}}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{3}{n})^2}\right) & \Rightarrow i=3\\
\vdots & \\
\frac{n}{n^2+n^2}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{n^2}{n^2}}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right) & \Rightarrow i=n
\end{array}\right\}\Rightarrow f\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$$

بنابراین با توجه به اینکه عبارت داخل پرانتز (در صورت سؤال) به فرم $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} f(\frac{i}{n})$ نوشته شده که $f(\frac{i}{n})=\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$ است، لذا می‌توان با توجه به تعریف گفته شده، حد را محاسبه کرد:

$$A=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=[\mathrm{Arctg}x]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۲: مقدار $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[e^{\frac{-a}{n}}+e^{\frac{-2a}{n}}+\cdots+e^{\frac{-na}{n}}]$ عبارت است از: (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۲)

۱) $1-e^{-a}$ ۲) e^{-a} ۳) $\frac{e^{-a}}{a}$ ۴) $\frac{1}{a}(1-e^{-a})$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به وجود $\frac{1}{n}$ در پشت پرانتز، کافی است فقط بنویسیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}e^{\frac{-ia}{n}} \Rightarrow f(\frac{i}{n})=e^{-\frac{i}{n}a}$$

حاصل حد مجموع ریمانی فوق برابر است با:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{-ia}{n}}=\int_0^1 e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^1=-\frac{1}{a}(e^{-a}-1)=\frac{1}{a}(1-e^{-a})$$

مثال ۳: مقدار حد $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+n^2}$ کدام است؟ (مهندسی نساجی ـ سراسری ۹۵)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا n^2 را از داخل سری خارج می‌کنیم:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2})$$

عبارت داخل پرانتز، یک مجموع ریمان و برابر $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$ است. در نتیجه داریم:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\tan^{-1}\theta\Big|_0^1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{\pi}{4})=0$$

مثال ۴: $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}}{\mathrm{Ln}(\frac{1}{n})+\mathrm{Ln}(\frac{2}{n})+\cdots+\mathrm{Ln}(\frac{n}{n})}$ ، برابر کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) $-\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) $e-1$ ۴) $1-e$

پاسخ: گزینه «۴» سؤال در واقع دو حد مجموع در صورت و مخرج کسر، یک انتگرال جزء به جزء که البته اکثراً حاصل آن را حفظ هستند و در نهایت یک نکته حدی دارد؛ بنابراین به لحاظ حجم محاسبات برای داوطلب عادی سنگین است! ابتدا لازم است $\frac{1}{n}$ را ایجاد کنیم؛ با ضرب صورت و مخرج کسر داده شده در $\frac{1}{n}$ داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ln}(\frac{i}{n})}=\frac{\int_0^1 e^x dx}{\int_0^1 \mathrm{Ln}x\,dx}=\frac{e^x\Big|_0^1}{(x\mathrm{Ln}x-x)\Big|_0^1}=\frac{e-1}{-1-0}=1-e$$

توجه کنید که همواره داریم: $\lim_{x\to 0^+}x\mathrm{Ln}x=0$.

مثال ۵: مقدار $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sinh(\frac{1}{n})+\sinh(\frac{2}{n})+\cdots+\sinh(\frac{n}{n})}{\cosh(\frac{1}{n})+\cosh(\frac{2}{n})+\cdots+\cosh(\frac{n}{n})}$ ، برابر کدام گزینه است؟ (MBA ـ سراسری ۹۷)

۱) $\frac{e}{e-1}$ ۲) $\frac{e}{e+1}$ ۳) $\frac{e+1}{e-1}$ ۴) $\frac{e-1}{e+1}$

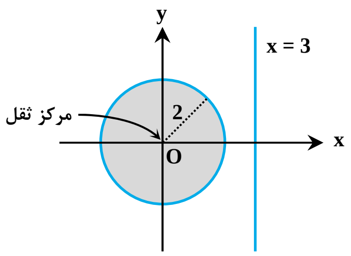
قضایای گلدن ـ پاپوس

برای محاسبه‌ی «حجم حاصل از دوران یک ناحیه» یا «سطح حاصل از دوران یک منحنی» حول خط افقی $y=k$ یا خط عمودی $x=k$ فرمول‌هایی را مطالعه کردیم. با این حال این فرمول‌ها محدودیت‌هایی دارند که استفاده از آن‌ها را برای برخی نواحی مشکل می‌کند. مثلاً محور دوران ممکن است یک خط مایل باشد، همچنین ناحیه‌ای که درحال دوران است، ممکن است یک چندضلعی باشد که مرزهای متعددی دارد؛ یعنی بین دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ قرار ندارد. **به شرط آن‌که محور دوران ناحیه‌ی مورد نظر را قطع نکرده باشد،** می‌توانیم با استفاده از قضیه‌ای به نام پاپوس، حجم یا سطح حاصل از دوران را حساب کنیم. فرمول‌های پاپوس را می‌توان به این شکل بیان کرد:

۱) مساحت سطح حاصل از دوران یک منحنی، حول محوری که آن را قطع نمی‌کند، برابر است با حاصل‌ضرب درازای منحنی (طول قوس منحنی) در محیط پیموده شده توسط مرکز ثقل (مرکز هندسی) منحنی.

۲) حجم حاصل از دوران یک ناحیه، حول محوری که ناحیه را قطع نمی‌کند، برابر است با حاصل‌ضرب مساحت ناحیه در محیط پیموده شده توسط مرکز ثقل (مرکز هندسی) ناحیه.

مثال ۱۷۵: حجم چنبره‌ی حاصل از دوران ناحیه‌ی درون دایره $x^۲+y^۲=۴$ حول خط $x=۳$ را بیابید.



پاسخ : فاصله مرکز ثقل دایره از محور دوران برابر۳ است. بنابراین محیط دایره پیموده شده توسط مرکز ثقل برابر است با: $P=۲\pi\times۳=۶\pi$ = محیط دایره

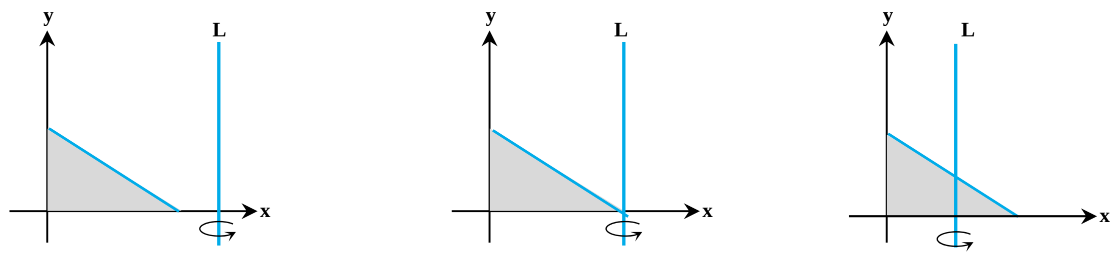
و مساحت ناحیه دوران یافته (مساحت دایره) برابر $\pi\times۲^۲=۴\pi$ می‌باشد. بنابراین طبق قضیه دوم پاپوس داریم:

$۴\pi\times۶\pi=۲۴\pi^۲$ = حجم

نحوه‌ی استفاده از قضایای گلدن ـ پاپوس

می‌خواهیم نحوه‌ی استفاده از فرمول‌های پاپوس را به‌صورت ساده‌تر توضیح دهیم. قبل از ورود به بحث، به مهم‌ترین شرط برای استفاده از این فرمول‌ها اشاره می‌کنیم.

شرط استفاده از قضایا: فقط وقتی از فرمول‌های گلدن پاپوس استفاده کنید که محور دوران، ناحیه‌ی موردنظر یا منحنی مورد نظر را قطع نکرده باشد. به شکل‌های زیر توجه کنید، در این شکل‌ها قرار است ناحیه‌ی S که درون مثلث قرار دارد، حول خطِ L دوران کند.



در شکل سمت راست، خط L این ناحیه را قطع کرده است، پس نمی‌توانیم از فرمول پاپوس استفاده کنیم. اما در شکل وسط و شکل سمت چپ، استفاده از فرمول پاپوس ایرادی ندارد. همانطور که در شکل وسط می‌بینید، تماس داشتن محور دوران با ناحیه‌ی داده شده اشکالی ایجاد نمی‌کند.

اکنون فرمول‌های پاپوس را به‌صورت فارسی بیان می‌کنیم:

فرمول اول: سطح حاصل از دوران منحنی C حول خط L $=۲\pi$ (طول قوسِ C) × (فاصله‌ی مرکز ثقل C از خط L)

فرمول دوم: حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی S حول خط L $=۲\pi$ (مساحت S) × (فاصله‌ی مرکز ثقل S از خط L)

اگر مرکز ثقل ناحیه‌ی S یا مرکز ثقل منحنی C مشخص باشد، محاسبه‌ی فاصله‌ی آن از خط L به‌سادگی انجام می‌شود. بنابراین نتایج زیر گرفته می‌شوند:

۱ـ اگر طول قوس منحنیِ C و مرکز ثقل آن معلوم باشند، با استفاده از فرمول اول، مساحت سطح حاصل از دوران به‌دست می‌آید. در واقع این فرمول رابطه‌ای بین سه کمیت (فاصله‌ی مرکز ثقل C از خط L)، (طول قوسِ C) و (سطح حاصل از دوران منحنی C حول خط L) را بیان می‌کند. اگر دو تا از این کمیت‌ها معلوم باشند، می‌توانیم سومی را محاسبه کنیم.

۲ـ وقتی مساحت ناحیه‌ی S و مرکز ثقل آن معلوم باشند، با استفاده از فرمول دوم، حجم جسم حاصل از دوران به‌دست می‌آید. در واقع فرمول دوم پاپوس، یک رابطه بین سه کمیت مقابل برقرار کرده است: (فاصله‌ی مرکز ثقل S از خط L)، (مساحت S) و (حجم حاصل از دوران S حول L) بنابراین با داشتن دو تا از این کمیت‌ها می‌توانیم سومی را حساب کنیم. مثلاً اگر حجم حاصل از دوران و مساحت ناحیه‌ی S را داشته باشیم، می‌توانیم فاصله‌ی مرکز ثقل S تا خط L را به‌دست آوریم.

تشخیص مرکز ثقل: برای استفاده از فرمول‌های پاپوس، باید بتوانیم مرکز ثقل ناحیه‌ی داده شده را تعیین کنیم. اگر ناحیه‌ی مورد نظر یک بیضی یا دایره باشد، مرکز آن بیضی یا دایره همان مرکز ثقل ناحیه است.

در مورد چندضلعی‌ها هم محاسبه‌ی مرکز ثقل به سادگی انجام می‌شود. مختصات مرکز ثقل یک مثلث، میانگین مختصات رئوس آن مثلث است. مثلاً مرکز ثقل مثلثی با رئوس $A(۰,۰)$، $B(۲,۰)$ و $C(۴,۳)$ به این صورت به‌دست می‌آید: $(\bar{x},\bar{y})=\frac{A+B+C}{۳}=\frac{۱}{۳}(۰+۲+۴,۰+۰+۳)=(۲,۱)$

به همین ترتیب مرکز ثقل یک n ضلعی برابر با میانگین مختصات رئوس آن n ضلعی است. در این رابطه، نیازی به منتظم بودن n ضلعی نداریم. برای مثال مرکز ثقل یک چهارضلعی با رئوس $A(۴,۰)$، $B(۱,۴)$، $C(۱,۱)$ و $D(۲,۱)$ به این صورت مشخص می‌شود:

$$(\bar{x},\bar{y})=\frac{A+B+C+D}{۴}=\frac{۱}{۴}(۴+۱+۱+۲,۰+۴+۱+۱)=\frac{۱}{۴}(۸,۶)=(۲,\frac{۳}{۲})$$

مثال ۱۷۶: قرص دایره به مرکز $(b,۰)$ و به شعاع a در صفحه‌ی $xy(۰<a<b)$، حول محور y (محور عرض‌ها) دوران کرده و یک چنبره به وجود آورده است. حجم جسم دوار کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)

۱) $۴\pi ba$ ۲) $\pi^۲a^۲b$ ۳) $۴\pi^۲ba^۲$ ۴) $(۲\pi b)(\pi a^۲)$

پاسخ: گزینه «۴» مساحت دایره به شعاع a برابر $\pi a^۲$ می‌باشد. فاصله مرکز ثقل یعنی مرکز دایره تا محور yها برابر b می‌باشد، پس طبق قضیه پاپوس داریم:

$$\text{حجم}=۲\pi b\times\pi a^۲$$

مثال ۱۷۷: مختصات مرکز ثقل سطح همگن محدود به منحنی $y=\sqrt{۶x-x^۲}$ و محور xها کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۷)

۱) $(۲,\frac{\pi}{۴})$ ۲) $(۲,\frac{۴}{\pi})$ ۳) $(۳,\frac{\pi}{۴})$ ۴) $(۳,\frac{۴}{\pi})$

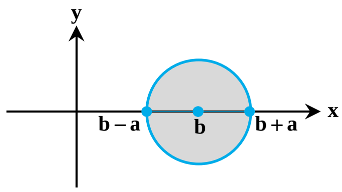
پاسخ: گزینه «۴» معادله داده شده را می‌توان به‌صورت $y=\sqrt{۹-(x-۳)^۲}$ نوشت که نیم‌دایره‌ای به شعاع ۳ و مرکز $P(۳,۰)$ است. با توجه به تقارن نیم‌دایره نسبت به خط $x=۳$، مرکز ثقل روی این خط قرار دارد. برای محاسبه عرض مرکز ثقل از قضیه پاپوس استفاده می‌کنیم. از دوران نیم‌دایره حول محور xها کره‌ای به شعاع ۳ به‌دست می‌آید که حجم کره برابر ۳۶π می‌باشد، مساحت نیم‌دایره برابر $\frac{۹\pi}{۲}$ است، حال طبق قضیه پاپوس: $۳۶\pi=۲\pi\bar{y}\times\frac{۹\pi}{۲}\Rightarrow\bar{y}=\frac{۴}{\pi}$

مثال ۱۷۸: دایره‌ای به مرکز $(b,۰)$ و شعاع a را حول محور yها دوران می‌دهیم. حجم جسم ایجاد شده چند برابر $\pi^۲$ است؟ $(۰<a<b)$

(از سؤالات پایان ترم دانشگاه‌های شریف، امیرکبیر و علم و صنعت)

۱) $۴a^۲b$ ۲) $a^۲b^۲$ ۳) $a^۲b$ ۴) $۲a^۲b$

پاسخ: گزینه «۴» چون $a<b$ است، پس $b-a$ مثبت می‌شود و این نشان می‌دهد که محور yها با دایره‌ی داده شده برخورد نمی‌کند، پس بهتر است از فرمول گلدن پاپوس استفاده کنیم. اگر ناحیه‌ی A که مرکز ثقل آن نقطه‌ی P است حولِ خط L که خارج از A قراردارد دوران کند، جسمی به‌دست می‌آید که آن را تیوب می‌نامیم و حجم آن برابر است با $V=۲\pi Sd$.



در این فرمول S برابر است با مساحتِ ناحیه‌ی A و d برابر است با فاصله‌ی نقطه‌ی P از خط L. از این فرمول وقتی استفاده می‌کنیم که محور دوران خارج از ناحیه‌ی A باشد و همچنین مرکز ثقل A را بتوان به راحتی معلوم کرد.

برای مثال وقتی ناحیه‌ی A یک دایره یا بیضی یا مربع باشد این فرمول مناسب است.

در این تمرین، ناحیه‌ی A دایره‌ای به مرکز نقطه $P:(b,۰)$ و شعاع a است و محور دوران، محور yها است، پس $d=b$ و $S=\pi a^۲$.

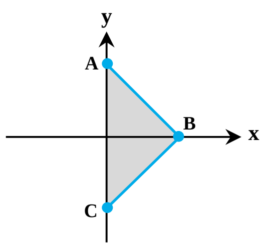
حجم شکل مورد نظر برابر است با: $V=۲\pi Sd=۲\pi^۲a^۲b$.

مثال ۱۷۹: حجم حاصل از دوران مثلث با سه رأس به مختصات $(۰,۱)$ و $(۰,-۱)$ و $(۱,۰)$ حول خط $x=۲$ برابر کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{۱۴\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۸\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۳}$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم مرکز ثقل یک مثلث به رئوس A، B و C از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{۳}\quad,\quad y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{۳}$$



بنابراین مرکز ثقل مثلث ABC نقطه $G(\frac{۱}{۳},۰)$ می‌باشد. مساحت مثلث ABC برابر $S=\frac{۱\times۲}{۲}=۱$ می‌باشد. فاصله‌ی نقطه‌ی G تا خط $x=۲$ برابر با $\frac{۵}{۳}=۲-\frac{۱}{۳}$ است، پس طبق قضیه پاپوس داریم:

$$\text{حجم}=۲\pi\ (\text{مساحت سطح مورد نظر})\ (\text{فاصله مرکز ثقل شکل از محور دوران})=۲\pi(۱)(\frac{۵}{۳})=\frac{۱۰\pi}{۳}$$

فصل ششم

« دنباله و سری »

درسنامه: تعریف و بررسی رفتار دنباله‌ها

تعریف دنباله: به بیان ساده، هر دنباله، یک لیست از اعداد حقیقی است که این لیست جمله‌ی اول مشخصی دارد، ولی جمله‌ی آخر ندارد.

جمله عمومی یک دنباله: یک دنباله را می‌توان با یک جمله‌ی عمومی که به نوعی همان ضابطه‌ی دنباله می‌باشد، مشخص نمود. جمله‌ی عمومی را معمولاً با a_n نمایش می‌دهیم.

۱) $a_n = n = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$

۲) $a_n = (-1)^{n-1} = \{1, -1, 1, -1, \cdots\}$

۳) $a_n = (-\frac{1}{2})^n = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\}$

۴) $a_n = \frac{1}{2^n} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots\}$

مثال ۱: چند جمله از دنباله $\{\frac{1+3n}{n+1}\}$ بین ۲ و $\frac{8}{3}$ قرار دارند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۲» باید جمله‌ی عمومی دنباله را بین ۲ و $\frac{8}{3}$ قرار دهیم و ببینیم به ازای چه n هایی نامساوی برقرار است:

$$2 < \frac{3n+1}{n+1} < \frac{8}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3n+1}{n+1} > 2 \Rightarrow 3n+1 > 2n+2 \Rightarrow n > 1 \\ \frac{3n+1}{n+1} < \frac{8}{3} \Rightarrow 9n+3 < 8n+8 \Rightarrow n < 5 \end{cases} \Rightarrow 1 < n < 5$$

چون n عددی طبیعی است، پس فقط به ازای $n = 2$ ، $n = 3$ و $n = 4$ ، این شرایط برقرار است.

مثال ۲: دنباله $a_n = \{n^2 - 10n + 16\}$ ، چند جمله منفی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۴» باید همواره $a_n < 0$ باشد، بنابراین داریم:

$$a_n < 0 \Rightarrow n^2 - 10n + 16 < 0 \Rightarrow (n-2)(n-8) < 0 \Rightarrow 2 < n < 8 \xrightarrow{\text{عددی طبیعی است } n} n = 3, 4, 5, 6, 7$$

تعریف ریاضی همگرایی یک دنباله: اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، بتوانیم یک عدد طبیعی مانند M پیدا کنیم، که برای هر $n \geq M$ داشته باشیم: $|a_n - L| < \varepsilon$ ، آن‌گاه می‌گوییم دنباله a_n به عدد حقیقی L همگراست (منظور از $|a_n - L|$ در واقع فاصله جملات دنباله از نقطه‌ی همگرایی است).

به تعبیر دیگر دنباله $\{a_n\}$ را به عدد حقیقی L همگرا می‌گوییم، هرگاه برای تمام همسایگی‌های متقارن L به شعاع دلخواه ε ، عدد طبیعی بسیار بزرگی مانند M پیدا شود که تمام جملات دنباله از شماره M به بعد درون این همسایگی قرار بگیرند.

مثال ۳: اگر $a_n = \frac{n}{n+2}$ به ازای چه مقدار M رابطه $\forall n > M : |a_n - 1| < \frac{1}{100}$ خواهد بود؟

۱) ۱۰۹۷ ۲) ۱۹۸ ۳) ۲۰۰ ۴) ۱۹۶

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به تعریف ریاضی همگرایی دنباله داریم:

$$|a_n - 1| < \frac{1}{100} \Rightarrow |\frac{n}{n+2} - 1| < \frac{1}{100} \Rightarrow |\frac{2}{n+2}| < \frac{1}{100} \Rightarrow n+2 > 200 \Rightarrow \mathbf{n > 198}$$

مثال۴: به ازای چه مقادیری از n، جملات دنباله $\{\frac{5n^2}{n^2+2}\}$ در همسایگی ۵ به شعاع $\frac{1}{20}$ قرار دارند؟

۱) $n<15$ ۲) $n>13$ ۳) $n>15$ ۴) $n>14$

پاسخ: گزینه «۴» حد دنباله برابر با ۵ است، بنابراین داریم:

$$|a_n-5|<\frac{1}{20}\Rightarrow\left|\frac{5n^2}{n^2+2}-5\right|<\frac{1}{20}\Rightarrow\frac{10}{n^2+2}<\frac{1}{20}\Rightarrow n^2+2>200\Rightarrow n^2>198\Rightarrow \mathbf{n>14}$$

مثال۵: به ازای چه مقادیری از n، جملات دنباله $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ از عدد ۱، کمتر از عدد ۰/۰۰۱ است؟

۱) $n>999$ ۲) $n>1000$ ۳) $n>1001$ ۴) $n>1002$

پاسخ: گزینه «۲» حد دنباله برابر با یک است، بنابراین داریم:

$$|a_n-L|<\frac{1}{1000}\Rightarrow\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\frac{1}{1000}\Rightarrow\left|\frac{n+1-n}{n}\right|<\frac{1}{1000}\Rightarrow\frac{1}{n}<\frac{1}{1000}\Rightarrow \mathbf{n>1000}$$

مثال۶: جملات دنباله $\{\frac{2n^2-32}{n^2-41}\}$ برای مقادیر $n>71$ در کدام همسایگی قرار می‌گیرند؟

۱) $(2\,,\,2/01)$ ۲) $(1/995\,,\,2/005)$ ۳) $(2\,,\,2/05)$ ۴) $(2\,,\,2/005)$

پاسخ: گزینه «۱» حد دنباله برابر ۲ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$a_n-2=\frac{2n^2-32}{n^2-41}-2=\frac{50}{n^2-41}\quad(1)\quad,\quad\frac{50}{n^2-41}>0\Rightarrow a_n-2>0\Rightarrow a_n>2$$

در صورت تست قید شده $n>71$، لذا $n^2>5041$، پس $n^2-41>5000$ که اگر طرفین نامساوی را عکس کنیم، داریم:

$$\frac{1}{n^2-41}<\frac{1}{5000}\xrightarrow{\text{طرفین را در عدد ۵۰ ضرب می‌کنیم}}\frac{50}{n^2-41}<\frac{50}{5000}\xrightarrow{(1)}a_n-2<\frac{1}{100}\Rightarrow a_n<2/01$$

با توجه به گزینه‌ها، بازه **(۲,۲/۰۱)** صحیح است.

بررسی همگرایی و واگرایی دنباله‌ها

دنباله همگرا: اگر حد یک دنباله در زمانی که $n\to+\infty$ حساب شود و حاصل این حد یک عدد حقیقی مشخص مانند L شود، آن‌گاه می‌گوییم این دنباله همگراست و عدد همگرایی آن L است. دقت کنید برای همگرایی دنباله، حد دنباله **نباید** بی‌نهایت شود و یا **نباید** دو عدد متفاوت (یا حتی چند مقداری) شود.

دنباله واگرا: اگر حد یک دنباله در زمانی که $n\to+\infty$ حساب شود و حاصل برابر بی‌نهایت (∞) شود و یا دنباله حد مشخصی نداشته باشد، می‌گوییم این دنباله واگراست. منظور از حد مشخص نداشتن دنباله، این است که مقدار حد دنباله به ازای مقادیر مختلف n، برابر چند مقدار مختلف شود.

تذکر۱: مقدار عددی $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$، همان عدد همگرایی دنباله a_n می‌باشد.

تذکر۲: در این فصل هر جا می‌نویسیم $n\to\infty$ منظورمان این است که $n\to+\infty$. بنابراین اگر در برخی سؤالات علامت مثبت را کنار ∞ نگذاشته‌ایم، منظورمان این نیست که ∞ همان $\pm\infty$ است، بلکه در مورد دنباله‌ها فقط $+\infty$ مدنظر ما است.

نکته۱: اگر c عددی حقیقی باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}c^n$ با شرط $|c|<1$ (یا به عبارت دیگر $-1<c<1$) همواره همگرا به صفر است و به ازای $|c|>1$، دنباله واگراست چون حاصل حد دنباله $\{c^n\}$ برابر ∞ می‌شود.

مثال۷: به ازای چه مقداری از x دنباله $\{(\frac{x}{x+1})^n\}$ همگرا می‌شود؟

۱) $x>-\frac{1}{2}$ ۲) $x<-\frac{1}{2}$ ۳) $x=-\frac{1}{2}$ ۴) همواره همگراست.

پاسخ: گزینه «۱» باید $\frac{x}{x+1}=1$ و یا $|\frac{x}{x+1}|<1$ باشد تا دنباله همگرا شود:

$$\begin{cases}\frac{x}{x+1}=1\Rightarrow x=x+1\Rightarrow 0=1\Rightarrow \text{غیر ممکن است}\\ |\frac{x}{x+1}|<1\Rightarrow|x|<|x+1|\Rightarrow x^2<x^2+2x+1\Rightarrow \mathbf{x>-\frac{1}{2}}\end{cases}$$

مثال ۸: کدامیک از گزاره‌های زیر در مورد دنباله $\{a_n\}$ درست است؟

۱) اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا باشد، دنباله $\{(-1)^n a_n\}$ نیز همگراست.
۲) اگر دنباله $\{a_n\}$ واگرا باشد، دنباله $\{(-1)^n a_n\}$ همگراست.
۳) اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا باشد، دنباله $\{a_n^2\}$ نیز همگراست.
۴) اگر دنباله $\{a_n^2\}$ همگرا باشد، دنباله $\{a_n\}$ نیز همگراست.

پاسخ: گزینه «۳» اگر فرض کنیم $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^2 = L\times L = L^2$ پس $\{a_n^2\}$ همگراست.

بررسی گزینه (۱): اگر فرض کنیم $a_n = 1$، آن‌گاه $\{(-1)^n\} = \{(-1)^n \times 1\}$ که می‌دانیم یک دنباله نوسانی و واگراست، پس گزینه (۱) غلط است.

بررسی گزینه (۲): اگر فرض کنیم $a_n = n$، آن‌گاه $\{(-1)^n a_n\} = \{(-1)^n n\}$ و واضح است این دنباله هم واگراست، پس گزینه (۲) غلط است.

بررسی گزینه (۴): اگر فرض کنیم $a_n = (-1)^n$، آن‌گاه $a_n^2 = (-1)^{2n} = 1$، که دنباله همگراست، ولی خود دنباله $\{a_n\}$ واگراست.

نکته ۲: با اضافه یا کم کردن تعداد محدودی جمله به یک دنباله همگرایی و یا واگرایی آن دنباله تغییری نمی‌کند.

محاسبه حدود و عدد همگرایی در دنباله‌ها

در محاسبه حد دنباله‌ها، کلیه قوانینی که برای توابع در $+\infty$ وجود دارند، قابل استفاده هستند. فقط باید به این نکته توجه شود که در دنباله‌ها، دامنه اعداد طبیعی می‌باشد. از جمله نکاتی که در محاسبه حد دنباله‌ها کاربرد بیشتری دارند، به‌صورت زیر است:

۱) وقتی $n\to+\infty$، آن‌گاه هم‌ارزی زیر را داریم (اگر k زوج باشد، باید $a>0$ باشد.)

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[k]{an^k+bn^{k-1}+\cdots}) = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[k]{a}\,|n+\frac{b}{ka}|$$

واضح است وقتی k فرد است، علامت قدرمطلق لازم نیست.

مثال ۹: کدام گزینه در مورد دنباله‌های $A=\{\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\}$ و $B=\{\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}+\sqrt{n}}\}$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\lim\limits_{n\to\infty} A = 1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} B = 0$
۲) $\lim\limits_{n\to\infty} A = \lim\limits_{n\to\infty} B = \infty$
۳) $\lim\limits_{n\to\infty} A = \frac{1}{3}$ و $\lim\limits_{n\to\infty} B = \infty$
۴) $\lim\limits_{n\to\infty} A = \frac{1}{3}$ و $\lim\limits_{n\to\infty} B = 0$

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از هم ارزی رادیکال و چندجمله‌ای‌ها در بی‌نهایت داریم:

$$\lim_{n\to\infty} A \sim \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[3]{-1}\left(n+\frac{1}{3(-1)}\right)+n\right] = \lim_{n\to\infty}\left(-n+\frac{1}{3}+n\right) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} B \sim \lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3}+\sqrt{n}} \sim \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[4]{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{n} = \infty$$

مثال ۱۰: حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sin^2\pi\sqrt{n^2+n})$ کدام است؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) $\frac{1}{2}$
۴) حاصل حد نامشخص است.

پاسخ: گزینه «۲» یک سؤال بسیار جالب، با ظاهری جذاب که در نظر اول تستی ساده به نظر می‌رسد! اما احتمال اشتباه در حل این تست و انتخاب گزینه (۴) بسیار زیاد است! برای حل این سؤال از اطلاعات مثلثاتی و هم‌ارزی در بی‌نهایت استفاده می‌کنیم: عبارت زیر رادیکال هم‌ارز با $(n+\frac{1}{1\times 2})$ می‌باشد:

$$\lim_{n\to+\infty}\sin^2[\pi\sqrt{n^2+n}] \sim \lim_{n\to+\infty}\sin^2[\pi(n+\frac{1}{2})] = \lim_{n\to+\infty}\sin^2(n\pi+\frac{\pi}{2}) = (\pm\sin\frac{\pi}{2})^2 = 1$$

توضیح در مورد قسمت نهایی محاسبه‌ی فوق: می‌دانیم وقتی n زوج باشد $\sin(n\pi+\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}$ و وقتی n فرد باشد، $\sin(n\pi+\frac{\pi}{2})=-\sin\frac{\pi}{2}$ می‌شود، اما توجه کنید در توان سینوس عدد ۲ قرار دارد و این یعنی این که همواره مقدار حد برابر با ۱ می‌شود.

۲) اگر $|a|>|b|>|c|$، آن‌گاه هم ارزی زیر را داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}(a^n+b^n+c^n) \sim \lim_{n\to+\infty} a^n$$

مثال ۱۱: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2^n+3^n+5^n}{4^n+5^n+10^n})$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» در مخرج کسر، عدد ۱۰ از بقیه بزرگتر و در صورت کسر عدد ۵ از بقیه بزرگتر است، بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{2^n+3^n+5^n}{4^n+5^n+10^n}) \sim \lim_{n\to+\infty}\frac{5^n}{10^n} = \lim_{n\to+\infty}(\frac{5}{10})^n = 0$$

۳) هم‌ارزی زیر در محاسبه حدود در بی‌نهایت کاربرد زیادی دارد. در این هم‌ارزی P عددی ثابت و بزرگ‌تر از ۱− است:

$$\lim_{n\to+\infty}(1^P+2^P+3^P+\cdots+n^P)\sim\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^{P+1}}{P+1}\right)\quad,\quad(P>-1)$$

البته در برخی مسائل ممکن است هم‌ارزی فوق به شکل دقیق‌تر زیر نیز استفاده شود:

$$\lim_{n\to+\infty}(1^P+2^P+3^P+\cdots+n^P)\sim\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^{P+1}}{P+1}+\frac{n^P}{2}\right)\quad,\quad(P>-1)$$

با استفاده از فرمول گفته شده، دو هم‌ارزی زیر نیز حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}(2+4+6+\cdots+2n)\sim\lim\limits_{n\to+\infty}n(n+1)\sim\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\\ \lim\limits_{n\to+\infty}(1+3+5+\cdots+(2n-1))\sim\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2)\end{cases}$$

مثال ۱۲: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{2n^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از هم‌ارزی گفته شده، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{2}}{2n^2}=\frac{1}{4}$$

مثال ۱۳: مقدار حد عبارت $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\frac{1}{n})(\frac{1+2^{1390}+\cdots+n^{1390}}{n^{1390}})$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۹۱)

۱) ۰ ۲) $\sin(\frac{1}{1391})$ ۳) $\sin(\frac{1}{1390})$ ۴) $\frac{1}{1391}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از رابطه هم‌ارزی $\lim\limits_{n\to\infty}1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k\simeq\frac{n^{k+1}}{k+1}$ و همچنین هم‌ارزی $\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$ می‌توان چنین نوشت:

$$\lim_{n\to+\infty}\sin(\frac{1}{n})(\frac{1+2^{1390}+\cdots+n^{1390}}{n^{1390}})=\lim_{n\to+\infty}\sin(\frac{1}{n})(\frac{n^{1391}}{1391n^{1390}})=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})(\frac{n}{1391})=\frac{1}{1391}$$

مثال ۱۴: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{2\sqrt[3]{n^2}}$، کدام است؟ (ریاضی و آمار ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در صورت کسر از هم‌ارزی $1^p+2^p+\cdots+n^p\sim\frac{n^{p+1}}{p+1}$ استفاده می‌کنیم:

$$\text{جواب حد}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{-\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}+\cdots+n^{-\frac{1}{3}}}{2n^{\frac{2}{3}}}\simeq\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}n^{\frac{2}{3}}}{2n^{\frac{2}{3}}}=\frac{3}{4}$$

توضیح: می‌توانستیم با فاکتورگیری از $\frac{1}{n}$ و خارج کردن ضریب $\frac{1}{2}$ حد مجموع داده شده را به صورت ریمانی بنویسیم. در این صورت به $\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{k}{n}}}$ می‌رسیم که جواب آن $\frac{1}{2}\int_0^1x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}$ می‌شود. البته راه‌حل بالا، ساده‌تر است.

۴) اگر a و b اعداد بزرگ‌تر از یک و $k>0$ آن‌گاه در بی‌نهایت سرعت رشد بعضی از توابع به‌صورت زیر است (علامت $\prec$ به معنی بسیار کوچک‌تر است.)

$$\log_a n<n^k<b^n<n!<n^n$$

مثال ۱۵: حد دنباله‌ی $\left\{\frac{2^n}{(n+2)!}\right\}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۳)

۱) صفر است. ۲) بینهایت است. ۳) یک است. ۴) وجود ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به این که سرعت رشد $n!$ بیشتر از 2^n است، لذا حاصل حد صفر است.

مثال ۱۶: مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}[(\frac{1}{e^e})^n+(\frac{1}{e^\pi})^n+(\frac{1}{\pi^e})^n+(\frac{1}{\pi^\pi})^n]^{\frac{1}{n}}$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{\pi^\pi}$ ۲) $\frac{1}{e^e}$ ۳) $\frac{1}{e^\pi}$ ۴) $\frac{1}{\pi^e}$

پاسخ: گزینه «۲» باید با استفاده از قانون رشد ببینیم کدام‌یک از جملات رشد بیشتری دارند. بزرگترین جمله، به ازای کمترین مقدار مخرج به‌دست می‌آید.

واضح است $\pi>3>e$، پس داریم: $\pi^\pi>\pi^e>e^\pi>e^e$، یعنی e^e از همه کوچکتر است، پس $\frac{1}{e^e}$ از همه بزرگتر است: $\lim\limits_{n\to+\infty}[(\frac{1}{e^e})^n]^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{e^e}$ = حاصل حد

مثال ۱۷: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!+2n^8+Lnn}{n!+5^n+4n}}$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۴)

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۲» از جملات $2n^2$ و Lnn در صورت کسر و از جملات 5^n و $4n$ در مخرج کسر صرف‌نظر می‌کنیم، چرا که وقتی $n\to+\infty$ تنها با جملاتی سر و کار داریم که از لحاظ رشد، بیشترین رشد را داشته باشند.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!+2n^8+Lnn}{n!+5^n+4n}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n!}}=\sqrt[n]{1}=1$$

مثال ۱۸: حد دنباله $1,-\frac{2}{2},\frac{3}{4},\frac{-4}{8},\frac{5}{16},\ldots$ در صورت وجود کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» در اینگونه سؤالات مهم‌ترین کار نوشتن ضابطه‌ی جمله عمومی است. ضابطه‌ی دنباله a_n به‌صورت $a_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n-1}}$ است.

بنابراین حد دنباله a_n برابر است با:
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n-1}}=0$$

با توجه به اینکه سرعت رشد مخرج (2^{n-1}) بیشتر از صورت کسر (n) می‌باشد، بنابراین مقدار حد فوق برابر صفر است.

مثال ۱۹: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}(2\sin\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\cos n)^n$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۶)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) e ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا توجه داشته باشید که وقتی $n\to\infty$، $\sin\frac{1}{n}$ به سمت صفر میل می‌کند، ولی $-1\le\cos n\le 1$ می‌باشد و داریم:

$$\lim_{x\to\infty}(2\sin\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\cos n)^n=\lim_{x\to\infty}(2\sin 0+\frac{1}{3}\cos n)^n=\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{3}\cos n)^n=\lim_{x\to\infty}\frac{(-1\le \text{یک عدد}\le 1)^n}{3^n}=0$$

توجه داشته باشید که رشد مخرج از صورت بیشتر است پس حاصل حد صفر می‌شود.

مثال ۲۰: اگر $a_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4n^3+\sin n+1}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4n^3+\sin n+2}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4n^3+\sin n+n}}$، آن‌گاه مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $+\infty$ ۴) 0

پاسخ: گزینه «۱» یک سؤال بسیار ساده از حدود دنباله‌ها! واضح است در بی‌نهایت دنباله، هم‌ارز با دنباله‌ی زیر است:

$$\lim_{n\to\infty}a_n\sim\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4n^3}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4n^3}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4n^3}})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{2n\sqrt{n}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{2n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n})$$

تعداد جملات دنباله n تاست، پس حاصل حد برابر با مقدار مقابل است:
$$\lim_{n\to\infty}n\times(\frac{1}{2n})=\frac{1}{2}$$

مثال۲۱: مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n^3}}{Lnn}$ کدام است؟　(هواشناسی ـ دکتری ۹۷)

۱) ۰　　۲) $\frac{1}{3}$　　۳) ۳　　۴) ∞

پاسخ: گزینه «۳» برای حل این حد، ابتدا از هم‌ارزی $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim Lnn$ کمک می‌گیریم. حال کافی است در این هم ارزی به جای n ، مقدار n^3 را قرار دهیم و خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{n^3}\frac{1}{k}\sim Lnn^3=3Lnn\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n^3}}{Lnn}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{3Lnn}{Lnn}=3$$

مثال۲۲: اگر θ زاویه بین دو بردار $(1,1,\cdots,1)$ و $(1,2,\cdots,n)$ در $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\theta$ برابر است با:　(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{\pi}{6}$　　۲) $\frac{\pi}{4}$　　۳) $\frac{\pi}{3}$　　۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» فرض کنیم $\vec{A}=(1,1,\cdots,1)$ و $\vec{B}=(1,2,\cdots,n)$ و θ زاویه بین این بردارها باشد. داریم:

$$\cos(\theta)=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\frac{1+2+3+\cdots+n}{\sqrt{1^2+1^2+\cdots+1^2}\sqrt{1^2+2^2+\cdots+n^2}}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}$$

هرگاه $n\to\infty$، با استفاده از قانون بزرگ‌ترین درجه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\cos(\theta)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n)}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{n(n)(2n)}{6}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^2}{\sqrt{\frac{2}{6}n^2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\theta=\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{6}$$

۵) قضیه ساندویچ: سه دنباله a_n، b_n و c_n را در نظر بگیرید، اگر $a_n\le c_n\le b_n$ و داشته باشیم $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=L$ آن‌گاه $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=L$ خواهد بود.

مثال۲۳: اگر دنباله $a_n=2+\frac{\sin n!}{n+2}$ و $b_n=2+\frac{\sin n+\cos n}{\sqrt{n+2}}$ و همچنین $a_n<c_n<b_n$ باشد، آن‌گاه دنباله c_n به کدام عدد همگراست؟

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا حدود a_n و b_n را حساب می‌کنیم، دقت شود در محاسبه حد a_n، همواره مقدار $-1\le\sin n!\le1$ است:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}(2+\frac{\sin n!}{n+2})=2+\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n+2})\times\sin n!=2+0\times(-1\le \text{عددی}\le1)=2+0=2$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(2+\frac{\sin n+\cos n}{\sqrt{n+2}})=2+\lim_{n\to\infty}(\frac{\sin n+\cos n}{\sqrt{n+2}})=2+\frac{\text{عدد حقیقی}}{\text{بی نهایت}}=2+0=2$$

چون $a_n<c_n<b_n$، لذا بر طبق قضیه ساندویچ $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=2$ خواهد بود.

مثال۲۴: حد $\lim(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$ در صورت وجود، برابر است با:　(مهندسی مواد ـ سراسری ۹۱)

۱) $Ln\sqrt{2}$　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) ۱　　۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه حد مجموع داریم، به نظر می‌رسد باید از قضیه ساندویچ به تست پاسخ دهیم، می‌دانیم هر یک از جملات مجموع فوق کوچکتر از $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و بزرگتر از $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ می‌باشد بنابراین مجموع فوق بزرگتر از $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ و کوچکتر از $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ می‌باشد.

$$\lim_{h\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\lim(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})<\lim_{h\to\infty}(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}})$$

$1<$ حد خواسته شده <1

بنابراین طبق قضیه ساندویچ حاصل حد خواسته شده برابر ۱ است.

بسط مک‌لورن توابع معروف به شرح زیر است:

۱) $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad,\quad (x\in\mathbb{R})$

۲) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\quad,\quad (x\in\mathbb{R})$

۳) $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad,\quad (x\in\mathbb{R})$

۴) $\mathrm{Ln}(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n\quad,\quad (-1<x\le 1)$

۵) $(1+x)^k = 1+\frac{kx}{1!}+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n\ ,\ |x|<1$

سری فوق در صورتی که k عددی طبیعی باشد، به ازای تمام xها معتبر است، اما به ازای هر k حقیقی و غیر طبیعی، برای $|x|<1$ معتبر است و البته در مورد نقاط روی مرز با توجه به مقادیر k نتایج زیر را داریم:

در این سری اگر $k>0$، آن‌گاه سری در نقاط $x=\pm 1$ هم معتبر است. اگر $k\le -1$، آن‌گاه سری در نقاط $x=\pm 1$ معتبر **نیست**. اگر $-1<k<0$، آن‌گاه سری در نقطه‌ی $x=1$ معتبر است، اما در $x=-1$ معتبر **نیست**.

۶) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad,\quad (|x|<1)$

۷) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\quad,\quad (|x|<1)$

۸) $\sinh x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad,\quad (x\in\mathbb{R})$

۹) $\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad,\quad (x\in\mathbb{R})$

۱۰) $\mathrm{Arc}\sin x = x+\frac{x^3}{2\times 3}+\frac{1\times 3x^5}{2\times 4\times 5}+\cdots=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n\times n!}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right),|x|<1$

۱۱) $\mathrm{tg}x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots\quad,\quad (|x|<\frac{\pi}{2})$

۱۲) $\mathrm{Arctg}x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad,\quad (-1\le x\le 1)$

۱۳) $\mathrm{Arctgh}x = x+\frac{x^3}{3}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad,\quad (-1<x<1)$

۱۴) $\mathrm{Arc}\sinh x = x-\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)+\cdots=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n\times n!}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right),|x|<1$

توصیه‌نامه!

بیشتر دانشجویان در حفظ کردن سری‌های داده شده، خصوصاً (فرم بسته‌ی آن‌ها) دچار مشکل هستند. برای همین در این قسمت سعی کرده‌ام توصیه‌هایی را به شما عزیزان ارائه دهم: در ابتدا توصیه بنده این است که حتماً این صفحه را جزء صفحاتی در نظر بگیرید که مرتب به آن سر می‌زنید و با تکرار سعی‌کنید فرمول‌ها به خاطر سپرده شوند. مثلاً این صفحه را اکثر اوقات همراه خود داشته باشید. البته کپی این صفحه! مبادا این برگه را از وسط کتاب پاره کنید!!)

اما از این‌ها که بگذریم، شما باید قواعدی را برای خود درست کنید. مثلاً می‌دانیم $\sin x$ تابعی فرد است، پس باید جملات آن فرد باشند، پس x^{2n+1}، مخصوص بسط $\sin x$ است و به همین ترتیب x^{2n}، مخصوص بسط $\cos x$ است. از طرفی چون سینوس و کسینوس تغییر علامت می‌دهند، عبارت $(-1)^n$ در هر دو بسط حضور فعال دارد! نکته‌ی دیگر آن که؛ هر چی در توان x بود، باید با اضافه شدن علامت فاکتوریل به آن، در مخرج کسر ظاهر شود. اما از اعداد مختلط می‌دانیم $e^{ix}=\cos x+i\sin x$، یعنی بسط e^x هم جملات $\cos x$ را در خود دارد و هم جملات $\sin x$ را، لذا دیگر لازم نیست جملات زوج و فرد را از هم جدا کنیم! یعنی باید در این بسط، توان x، n باشد، و همان توان با علامت فاکتوریل در مخرج قرار بگیرد $(n!)$ و چون e^x همواره مثبت است، پس علامت بین جملات همواره مثبت است و دیگر خبری از $(-1)^n$ نیست! در واقع این بسط جمع جملات سینوس و کسینوس با مثبت کردن علامت تمام جمله‌ها می‌باشد، (فرم باز دو بسط سینوس و کسینوس را با هم جمع کنید، موضوع برایتان قابل درک‌تر است)

به همین شکل با دانستن بسط $\sin x$ و $\cos x$ می‌توانیم به راحتی فرمول بسط‌های $\sinh x$ و $\cosh x$ را در ذهن خود به راحتی ذخیره کنیم. چون این دو عبارت همواره مثبت هستند، پس باید تمام جملات مثبت باشند، پس کافی است در دو بسط $\sin x$ و $\cos x$ عبارت $(-1)^n$ را از بین ببریم تا به بسط دو عبارت $\sinh x$ و $\cosh x$ برسیم.

یکی دیگر از بسط‌های مهم، بسط $\mathrm{Ln}(1+x)$ است. در این بسط، جملات یکی در میان، مثبت و منفی هستند. توان x مانند e^x به‌صورت x^n است و تفاوت اساسی این است که دیگر در این بسط در مخرج کسر خبری از $n!$ فاکتوریل در مخرج نیست و فقط n حضور دارد و به همین دلیل دیگر حد پایین سیگما نمی‌تواند صفر باشد و n از $\underline{1}$ شروع می‌شود. (چون در غیر این‌صورت، مخرج صفر می‌شود!) و تفاوت دیگرش با e^x این است که $(-1)^{n+1}$ در سری حضور دارد و این طبیعی است، چون $\mathrm{Ln}(1+x)$، برخلاف e^x می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

بسط مهم دیگر، بسط برنولی (بسط شماره ۵) می‌باشد که باید آن را حفظ کنید. در این بسط به غیر از جمله‌ی اول که $\underline{1}$ است، توان‌های طبیعی از x وجود دارند و شروع از $k=1$ می‌باشد و در هر مرحله، عدد موجود در توان x با علامت فاکتوریل در مخرج ظاهر می‌شود. ضریب x^1، برابر با k، ضریب x^2 برابر با $k(k-1)$ و به همین ترتیب هر بار با افزایش یک واحدی در توان x، شاهد این هستیم که یک واحد از k کم می‌شود و در ضریب جمله‌ی قبلی ضرب می‌شود.

فرم خاص این سری، به‌صورت ۶ و ۷ می‌باشد که در تست‌ها کاربرد فراوان دارد.

سخن آخر این‌که؛ تا سال ۹۱، بیشتر سؤالات مربوط به بسط‌های فوق بوده‌اند، اما در سال‌های اخیر به نظر می‌رسد؛ بسط‌های $\mathrm{Arc}\sin x$ و $\mathrm{Arctg}x$ نیز مورد توجه طراحان قرار گرفته‌اند. بنابراین این دو بسط را حتماً حفظ باشید! (برای خود قاعده درست کنید و یا بارها و دست کم قبل از امتحان، این بسط‌ها را مطالعه کنید!)

مثال ۲۸۰: بسط مک‌لورن تابع $f(x)=xe^x$ کدام است؟

۱) $x+x^۲+\frac{x^۳}{۲!}+\frac{x^۴}{۳!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$

۲) $x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots+\frac{x^{n+۱}}{n!}+\cdots$

۳) $x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$

۴) $x+x^۲+\frac{x^۳}{۲!}+\frac{x^۴}{۳!}+\cdots+\frac{x^{n+۱}}{n!}+\cdots$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به بسط مک‌لورن تابع e^x داریم:

$$e^x=۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \Rightarrow x.e^x=x+x^۲+\frac{x^۳}{۲!}+\frac{x^۴}{۳!}+\cdots+\frac{x^{n+۱}}{n!}+\cdots$$

مثال ۲۸۱: ضریب $x^۳$ در بسط مک‌لورن $f(x)=\int_۰^x e^{-t^۲}dt$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{-۱}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{-۱}{۶}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به بسط مک‌لورن تابع $e^{-t^۲}$ داریم:

$$f(x)=\int_۰^x e^{-t^۲}dt=\int_۰^x(۱-t^۲+\frac{t^۴}{۲}-\cdots)dt=(t-\frac{t^۳}{۳}+\frac{t^۵}{۱۰}-\cdots)\Big|_۰^x=x-\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۵}{۱۰}-\cdots$$

بنابراین ضریب $x^۳$ برابر $\frac{-۱}{۳}$ می‌باشد.

مثال ۲۸۲: در بسط تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱+x}}$ به‌صورت توان‌های صعودی x، ضریب $x^۳$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{-۷}{۲۴}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۳۲}$ ۴) $\frac{-۵}{۱۶}$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از بسط دوجمله‌ای (بسط برنولی) داریم:

$$(۱+x)^n=۱+nx+\frac{n(n-۱)}{۲}x^۲+\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}x^۳+\cdots$$

پس ضریب $x^۳$ برابر است با: $\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}$. در این سؤال $n=-\frac{۱}{۲}$ و لذا داریم:

$$x^۳ \text{ ضریب }=\frac{-\frac{۱}{۲}(-\frac{۱}{۲}-۱)(-\frac{۱}{۲}-۲)}{۶}=\frac{-\frac{۱}{۲}(-\frac{۳}{۲})(-\frac{۵}{۲})}{۶}=-\frac{۱۵}{۴۸}=-\frac{۵}{۱۶}$$

مثال ۲۸۳: بسط مک‌لورن $\sin x$ عبارت است از $x-\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۵}{۵!}-\cdots$. اگر f تابعی باشد به‌طوری که $f'(x)=\sin(x^۲)$، آن‌گاه ضریب $x^۷$ در بسط مک‌لورن $f(x)$ کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{۱}{۷!}$ ۲) ۰ ۳) $-\frac{۱}{۴۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۷!}$

پاسخ: گزینه «۳» برای نوشتن بسط مک‌لورن $\sin x^۲$ به جای x در سری $x^۲$ قرار می‌دهیم: $\sin x$ داریم:

$$f'(x)=\sin x^۲=x^۲-\frac{x^۶}{۳!}+\frac{x^{۱۰}}{۵!}-\cdots \to f(x)=\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۷}{۷\times ۳!}+\cdots$$

ضریب $x^۷$ در بسط $f(x)$ با انتگرال گرفتن از $-\frac{x^۶}{۶}=-\frac{x^۶}{۳!}$ حاصل می‌شود که جمله $-\frac{x^۷}{۴۲}$ را تولید می‌کند و لذا ضریب $x^۷$ برابر $-\frac{۱}{۴۲}$ می‌باشد.

مثال ۲۸۴: اگر بخواهیم بسط مک‌لورن تابع $f(x)=\frac{x}{x^۴+۹}$ را بنویسیم، شرط همگرایی سری مک‌لورن این تابع کدام است؟

۱) $|x|<۳$ ۲) $|x|<\sqrt{۳}$ ۳) $|x|<۹$ ۴) $|x|<\sqrt[۴]{۳}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا سعی می‌کنیم تابع را به‌صورت $\frac{۱}{۱+u}$ در آوریم تا بتوانیم از فرمول این بسط استفاده کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{۹+x^۴}=\frac{x}{۹(۱+\frac{x^۴}{۹})}=\frac{x}{۹}(\frac{۱}{۱+\frac{x^۴}{۹}})$$

می‌دانیم با شرط $|x|<۱$، بسط $\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n x^n=\frac{۱}{۱+x}$ برقرار است، حالا اگر در طرفین این بسط $\frac{x^۴}{۹}$ قرار دهیم، داریم:

$$\frac{۱}{۱+\frac{x^۴}{۹}}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n(\frac{x^۴}{۹})^n$$

طبیعی است؛ وقتی به جای x، $\frac{x^۴}{۹}$ قرار می‌دهیم، شرط همگرایی هم از $|x|<۱$ به $|\frac{x^۴}{۹}|<۱$ تغییر می‌کند. پس داریم:

$$x^۴<۹ \Rightarrow x^۲<۳ \Rightarrow |x|<\sqrt{۳}$$

در واقع می‌توان گفت؛ شعاع همگرایی سری $\sqrt{۳}$ است.

مثال ۲۸۵: در بسط مک‌لورن $f(x)=\sqrt{1+\sin x}$، ضریب x^3 برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{48}$ ۲) $-\frac{1}{48}$ ۳) $\frac{7}{48}$ ۴) $-\frac{7}{48}$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم بسط مک‌لورن $(1+u)^{\frac{1}{2}}$ به‌صورت مقابل است:

$$(1+u)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}u+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}u^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}u^3+\cdots=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{3}{6\times 8}u^3+\cdots$$

چون ضریب x^3 مدنظر است تا u^3 بسط می‌دهیم. در این صورت با جایگزینی $u=\sin x$ نتیجه می‌شود:

$$\sqrt{1+\sin x}=1+\frac{1}{2}\sin x+\frac{-1}{8}\sin^2 x+\frac{1}{16}\sin^3 x+\cdots$$

حال ضریب x^3 را در هریک از جملات فوق به‌دست می‌آوریم. در جمله $\frac{1}{2}\sin x$ ضریب x^3 برابر $\frac{-1}{12}$ می‌باشد، زیرا $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\cdots$. جمله $\frac{-1}{8}\sin^2 x$ تابعی زوج است، پس فاقد جمله x^3 است. در جمله $\frac{1}{16}\sin^3 x$ چون $\sin^3 x\sim x^3$، پس ضریب x^3 برابر $\frac{1}{16}$ است. بنابراین در مجموع ضریب x^3 برابر است با:

$$x^3 \text{ ضریب } =\frac{1}{16}-\frac{1}{12}=\frac{-1}{48}$$

مثال ۲۸۶: در بسط مک‌لورن تابع e^{x^2+2x}، ضریب x^2 برابر کدام گزینه است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این‌که بسط مک‌لورن e^x به‌صورت مقابل است:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

ابتدا بسط مک‌لورن e^{x^2} و e^{2x} را به‌دست می‌آوریم، بدین منظور در بسط e^x به جای xها یک‌بار $2x$ و بار دیگر x^2 را جایگزین می‌کنیم.

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots \qquad e^{2x}=1+2x+\frac{4x^2}{2!}+\cdots$$

حال برای به‌دست آوردن بسط مک‌لورن موردنظر یعنی e^{x^2+2x}، بسط‌های فوق را در هم ضرب می‌کنیم.

$$e^{x^2+2x}=e^{x^2}.e^{2x}=(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots)(1+2x+2x^2+\cdots)$$

برای به‌دست آوردن ضریب x^2 جملاتی از پرانتز اول که در پرانتز دوم ضرب و x^2 ایجاد می‌کنند را در نظر می‌گیریم. در این صورت ضریب x^2 برابر ۳ به‌دست می‌آید.

مثال ۲۸۷: در بسط مک‌لورن تابع $f(x)=e^{tg^{-1}x}-1$، ضریب x^3 برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» بسط $tg^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\cdots$ می‌باشد، بنابراین:

$$f(x)=e^{tg^{-1}x}-1=(x-\frac{x^3}{3})+\frac{(x-\frac{x^3}{3})^2}{2!}+\frac{(x-\frac{x^3}{3})^3}{3!}+\cdots$$

ضریب x^3 در جمله اول بالا برابر $\frac{-1}{3}$، در جمله دوم x^3 وجود ندارد و در جمله سوم ضریب x^3 برابر $\frac{1}{6}$ می‌باشد. پس در مجموع ضریب x^3 برابر $\frac{-1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{-1}{6}$ می‌باشد.

مثال ۲۸۸: در بسط مک‌لورن تابع $\frac{1+x^3}{1+x^2}$، کدام جمله درست <u>نیست</u>؟

۱) ضریب x^2 با ضریب x^6 برابر است.
۲) ضریب x^3 با ضریب x^4 برابر است.
۳) ضریب x^5 با ضریب x^7 برابر است.
۴) ضریب x^8 با ضریب x^4 برابر است.

پاسخ: گزینه «۳» بسط مک‌لورن $\frac{1}{1+x}$ به‌صورت مقابل است:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

در بسط فوق به جای x، x^2 قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots$$

بنابراین بسط $\frac{1+x^3}{1+x^2}$ برابر است با:

$$\frac{1+x^3}{1+x^2}=(1+x^3)(1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots)$$

با توجه به عبارت به‌دست آمده در بالا، ضریب x^5 برابر (-1) و ضریب x^7 برابر (۱) می‌باشد.

مثال ۲۸۹: ضریب x^{10} در بسط مک‌لورن $f(x)=\cosh x-\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{10!}$ ۲) $\frac{2}{10!}$ ۳) $\frac{1}{9!}$ ۴) $\frac{2}{9!}$

پاسخ: گزینه «۲» بسط مک‌لورن $\cos x$ و $\cosh x$ به‌صورت زیر است:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

بنابراین ضریب x^{10} در بسط مک‌لورن $\cosh x-\cos x$ برابر $\frac{2}{10!}$ است.

مثال ۲۹۰: در بسط تابع $f(x)=\sin^2 x$ برحسب توان‌های صعودی x، ضریب x^6 کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{2}{45}$ ۲) $\frac{4}{45}$ ۳) $\frac{1}{30}$ ۴) $\frac{1}{15}$

پاسخ: گزینه «۱» بهتر است ابتدا توان دوم را از بین ببریم تا نوشتن بسط مک‌لورن ساده‌تر شود:

$$f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\cdots)$$

بنابراین x^6 فقط در یک جمله از بسط ظاهر می‌شود:

$$x^6\ \text{ضریب}=-\frac{1}{2}(\frac{-2^6}{6!})=\frac{2^5}{6!}=\frac{2^5}{2\times3\times4\times5\times6}=\frac{2}{3\times5\times3}=\frac{2}{45}$$

مثال ۲۹۱: بسط تیلور تابع $Ln(\cos x)$ تا جمله x^3 کدام است؟ (نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۳)

۱) $-\frac{1}{2}x^2$ ۲) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$ ۳) $-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$ ۴) $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$

پاسخ: گزینه «۱» یادآوری کنیم که: $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$ و $Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$. با نوشتن جملاتی که درجه آن‌ها حداکثر ۳ است خواهیم داشت:

$$f(x)=Ln(\cos x)\simeq Ln(1-\frac{x^2}{2})=-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2})^2+\cdots=-\frac{1}{2}x^2-\cdots$$

مثال ۲۹۲: ضریب x در بسط مک‌لورن تابع $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ برابر با چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{e}{2}$ ۴) $\frac{e}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» با دانستن بسط‌های مک‌لورن توابع $Ln(1+x)$ و e^x و نیز رابطه‌ی $a^b=e^{bLna}$ داریم:

$$Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\quad,\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}Ln(1+x)}=e^{\frac{1}{x}(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots)}\xrightarrow{\text{چون ضریب x مدنظر می‌باشد فقط دو جمله‌ی اول را می‌نویسیم}}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-+\cdots}\sim e.e^{-\frac{x}{2}}\times e^{\frac{x^2}{3}}\times\cdots=e(1-\frac{x}{2}+\cdots)(1+\frac{x^2}{3}+\cdots)$$

ملاحظه می‌شود که ضریب x برابر $-\frac{e}{2}$ است.

مثال ۲۹۳: حاصل جمع سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n+1}$ ، کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۹۴)

۱) $|x|<1$, $\ln(1-x^2)$
۲) $|x|\le 1$, $\ln(1+x^2)$
۳) $|x|\le 1$, $x\ne 0$, $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$
۴) $\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}$, $x\ne 0,1$ و ۱ به ازای $x=0$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به بسط مک لورنِ تابع $f(x)=\ln(1+x)$ داریم:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots : |x|\le 1$$

اگر در تساوی فوق به جای x ها قرار دهیم x^2، خواهیم داشت:

$$\ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\cdots : |x|\le 1$$

حال با تقسیم طرفینِ تساوی فوق بر x^2 داریم:

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^6}{4}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n+1}$$

توجه کنید که این سری هم در بازه‌ی $-1\le x\le 1$ همگراست. به ازای $x=\pm 1$ به سری متناوب $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ می‌رسیم که همگراست. البته برای آن‌که تقسیم بر x^2 تعریف شده باشد باید $x\ne 0$ باشد، پس $-1\le x\le 1$ و $x\ne 0$ است.

مثال ۲۹۴: در بسط تابع $f(x)=e^{\sin x}$ به صورت توان‌های صعودی x ضریب x^4 کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\frac{1}{6}$
۲) $-\frac{1}{8}$
۳) ۰
۴) $\frac{1}{8}$

پاسخ: گزینه «۲» سری مک‌لورن $\sin x$ را به جای $\sin x$ قرار می‌دهیم و چون می‌خواهیم ضریب x^4 را محاسبه کنیم، بنابراین کافی است بسط $\sin x$ را تا x^3 بنویسیم.

$$e^{\sin x}\sim e^{x-\frac{x^3}{6}}=1+(x-\frac{x^3}{6})+\frac{(x-\frac{x^3}{6})^2}{2!}+\frac{(x-\frac{x^3}{6})^3}{3!}+\frac{(x-\frac{x^3}{6})^4}{4!}+\cdots$$

ضریب x^4 در جملات $(x-\frac{x^3}{6})$ و $\frac{(x-\frac{x^3}{6})^3}{3!}$ برابر صفر است (زیرا هر دو جمله فقط شامل توان‌های فرد می‌باشند. ضریب x^4 در جمله سوم یعنی $\frac{(x-\frac{x^3}{6})^2}{2!}$ برابر $\frac{-1}{6}$ و در جمله پنجم یعنی $\frac{(x-\frac{x^3}{6})^4}{4!}$ برابر $\frac{1}{24}$ می‌باشد.) بنابراین داریم: ضریب $x^4=\frac{-1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{-1}{8}$

مثال ۲۹۵: نمایش تابع $f(x)=\ln(\frac{1}{2+2x+x^2})$، بر حسب توان‌های مثبت $(x+1)$ به‌صورت سری، کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n}$
۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(x+1)^{2n+1}}{n}$
۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(x+1)^{2n}}{n}$
۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{2n}}{n}$

پاسخ: گزینه «۳» باید مخرج کسر را بازنویسی کنیم و در نهایت از بسط $\ln(1+u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}u^n}{n}$ استفاده کنیم.

$$f(x)=\ln\frac{1}{x^2+2x+2}=\ln\frac{1}{(x+1)^2+1}=-\ln((x+1)^2+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^{2n}}{n}$$

مثال ۲۹۶: ضریب x^4 در بسط مک لورن $\sin(e^x-1)$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{5}{24}$
۲) $\frac{1}{6}$
۳) $-\frac{5}{24}$
۴) $-\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول: با توجه به بسط مک‌لورن $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots$ و نیز $\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+\cdots$ و همچنین با در نظر داشتن خواسته سؤال که ضریب x^4 است، کافیست هر دو بسط را تا توان حداکثر ۴ بنویسیم. در این صورت داریم:

$$\sin(e^x-1)\sim\sin(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!})\sim(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!})-\frac{1}{3!}(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cancel{\frac{x^4}{4!}})^3$$

توجه کنید که در پرانتز دوم به این خاطر $\frac{x^4}{4!}$ را حذف کردیم که چون در این عبارت توانی، هر جمله‌ای که از ضرب در این قسمت بـه وجـود آیـد حتماً تـوانی بزرگ‌تر از ۴ دارد. پس داریم:

ضریب x^4: $\frac{1}{4!}-\frac{1}{3!}(\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{24}-\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{24}-\frac{6}{24}=\frac{-5}{24}$

روش دوم: ضریب x^4 در بسط مک‌لورن $f(x)$ برابر است با $\frac{f^{(4)}(0)}{4!}$ پس کافیست مشتق چهارم f را در $x=0$ محاسبه کنیم می‌دانیم که $(e^x)'=e^x$ و $(\sin u)'=u'\cos u$، بنابراین داریم:

$$f(x)=\sin(e^x-1)$$
$$f'(x)=e^x\cos(e^x-1)$$
$$f''(x)=e^x\cos(e^x-1)-e^{2x}\sin(e^x-1)\ \Rightarrow\ f'''(x)=(e^x-e^{3x})\cos(e^x-1)-3e^{2x}\sin(e^x-1)$$
$$f^{(4)}(x)=(e^x-3e^{3x})\cos(e^x-1)-e^x(e^x-e^{3x})\sin(e^{3x}-1)-6e^{2x}\sin(e^x-1)-3e^{3x}\cos(e^x-1)\ \Rightarrow\ f^{(4)}(0)=-5$$
$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots$$

ضریب x^4 برابر است با:
$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=\frac{-5}{4!}=\frac{-5}{24}$$

مثال ۲۹۷: در بسط مک‌لورن تابع $Ln(1-x+x^2)$ ضریب x^5 کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $-\frac{1}{10}$ ۳) $-\frac{1}{5}$ ۴) $-\frac{1}{10}$

پاسخ: گزینه «۳» یک روش این است که از بسط مک‌لورن $Ln(1+u)$ استفاده کنیم که برای این مثال $u=-x+x^2$ است $(u\to 0)$ اما این روش شاید کمی حجم محاسبات را بیشتر کند. روش دیگر استفاده از یک روش ابتکاری است؛ یعنی ضرب $(1+x)$ در صورت و مخرج عبارت جلوی Ln و بعد از آن استفاده از فرمول $Ln\frac{B}{A}=LnB-LnA$ است.

$$Ln(1-x+x^2)=Ln[\frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x}]=Ln(\frac{x^3+1}{x+1})=Ln(1+x^3)-Ln(1+x)=(x^3-\frac{(x^3)^2}{2}+\cdots)-(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5})$$
$$\Rightarrow x^5\ ضریب=-\frac{1}{5}$$

مثال ۲۹۸: در سری مک‌لورن تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$، ضریب x^2 کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۶-

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا برای ساده‌تر کردن ضابطه‌ی $f(x)$ از اتحاد مثلثاتی $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}{}^3-3\sin^4 x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos^4 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}$$
$$\Rightarrow f(x)=1-3\sin^2 x\cos^2 x\xrightarrow{\sin 2x=2\sin x\cos x}f(x)=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

اکنون از فرمول توان‌شکن $\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ استفاده می‌کنیم:
$$f(x)=1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}(1-\cos 4x)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

بسط مک‌لورن $\cos 4x$ را می‌نویسیم و ضریب x^2 در بسط تابع f مشخص می‌شود:
$$f(x)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}(1-\frac{(4x)^2}{2!}+\frac{(4x)^4}{4!}-\cdots)\Rightarrow x^2\ ضریب=\frac{3}{8}(\frac{-16}{2})=-3$$

مثال ۲۹۹: ضریب x^2 در بسط مک‌لورن تابع $f(x)=(1+x)^x$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به توضیحات در مورد بسط مک‌لورن توابع، می‌دانیم ضریب x^2 در بسط مک‌لورن تابع $f(x)$ برابر با $\frac{f''(0)}{2!}$ می‌شود، بنابراین لازم است $f''(x)$ را حساب کنیم:

$$f(x)=(1+x)^x\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}}Lnf(x)=xLn(1+x)\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}}\frac{f'(x)}{f(x)}=1\times Ln(1+x)+\frac{1}{1+x}\times x$$
$$\Rightarrow f'(x)=f(x)[Ln(1+x)+\frac{x}{1+x}]$$

حالا دوباره از طرفین مشتق می‌گیریم:
$$f''(x)=f'(x)[Ln(1+x)+\frac{x}{1+x}]+[\frac{1}{1+x}+\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}]f(x)\ \Rightarrow f''(x)=f'(x)[Ln(1+x)+\frac{x}{1+x}]+[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}]f(x)$$

ما دنبال $f''(0)$ بودیم، پس به راحتی داریم:
$$f''(0)=f'(0)(Ln1+0)+(1+1)f(0)=2f(0)$$

از متن سؤال به راحتی $f(0)=1$ به‌دست می‌آید، لذا $f''(0)=2$ و بنابراین ضریب x^2 برابر با $\frac{f''(0)}{2!}=\frac{2}{2}=1$ می‌باشد.

روش دیگر: حل ساده‌تر به این شکل است که با توجه به رابطه‌ی $a^b = e^{bLna}$، $f(x)$ را به شکل زیر بنویسیم:

$$(1+x)^x = e^{xLn(1+x)} = e^{x(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots)} = e^{x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^4} = e^{x^2}.e^{-\frac{1}{2}x^3}\times\cdots = (1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots)(1+(-\frac{1}{2}x^3)+\cdots)\times\cdots$$

همان‌طور که می‌بینید ضریب x^2 برابر با $\underline{1}$ است.

مثال ۳۰۰: **اگر مشتق nام تابع $f(x) = (x^2 - 6x - 2)e^{x-1}$ در نقطه‌ی $x = 1$ برابر با ۱۳۹۳ باشد، مقدار n کدام است؟**

۱) ۳۶ ۲) ۳۵ ۳) ۴۰ ۴) ۴۲

پاسخ: گزینه «۳» سؤال جالب و البته سختی است! اما تا وقتی بسط e^{x-1} حول نقطه‌ی $x = 1$ را بلدیم، باید به حل این سؤال امیدوار باشیم!

برای راحتی در محاسبات می‌توانیم از تغییر متغیر $x - 1 = t$ استفاده کنیم، در این صورت باید مشتق nام تابع $f(t)$ در نقطه‌ی $t = 0$ را حساب کنیم:

$$f(t) = [(t+1)^2 - 6(t+1) - 2]e^t = (t^2 - 4t - 7)e^t = (t^2 - 4t - 7)(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{t^n}{n!} + \cdots)$$

خُب برای رسیدن به مشتق nام تابع $f(t)$ در نقطه‌ی $t = 0$، باید از رابطه‌ی مقابل کمک بگیریم: $t^n \text{ ضریب} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow \mathbf{f^{(n)}(0) = n!\times(t^n \text{ ضریب})}$

اما قسمت مهم حل این سؤال اینجاست! جمله‌ی t^n در سه حالت ایجاد می‌شود، یکی ضرب t^2 در $\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}$، دیگری ضرب $-4t$ در $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ و در نهایت ضرب -7 در $\frac{t^n}{n!}$، بنابراین داریم:

$$t^n \text{ ضریب} = \frac{1}{(n-2)!} - \frac{4}{(n-1)!} - \frac{7}{n!} \quad , \quad f^n(0) = n!\times(t_n \text{ ضریب}) \Rightarrow$$

پس داریم:

$$f^{(n)}(0) = n![\frac{1}{(n-2)!} - \frac{4}{(n-1)!} - \frac{7}{n!}] = \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{4n!}{(n-1)!} - 7 = \frac{(n-2)!(n-1)n}{(n-2)!} - \frac{4(n-1)!n}{(n-1)!} - 7$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = (n-1)n - 4n - 7 \Rightarrow f^{(n)}(0) = n^2 - 5n - 7$$

اما سؤال گفته؛ مشتق nام تابع برابر با ۱۳۹۳ می‌باشد، لذا داریم: $n^2 - 5n - 7 = 1393 \Rightarrow n^2 - 5n - 1400 = 0 \Rightarrow (n-40)(n+35) = 0 \Rightarrow n = 40$

مثال ۳۰۱: **در بسط مک‌لورن تابع $f(x) = \sec x$، ضریب x^4 برابر کدام گزینه است؟**

۱) $-\frac{5}{24}$ ۲) $\frac{5}{24}$ ۳) $\frac{5}{12}$ ۴) $-\frac{5}{12}$

پاسخ: گزینه «۲» چون $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ و بسط مک‌لورن $\cos x$ به صورت $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots$ می‌باشد. پس برای به دست آوردن بسط $\sec x$، به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

در واقع، در این روش، باید صورت را بر مخرج (مطابق قواعد تقسیم که احتمالاً از دبیرستان بلد هستید، تقسیم کنید!) تقسیم را تا جایی ادامه می‌دهیم که در خارج‌قسمت به جمله‌ی x^4 برسیم و بعد در این وضعیت در عبارت «خارج قسمت» ضریب x^4 را به عنوان جواب معرفی می‌کنیم. ملاحظه می‌کنید در این سؤال ضریب x^4 برابر با $\frac{5}{24}$ به‌دست می‌آید. اگر در خارج‌قسمت جمله‌ی x^4 به‌وجود نیاید، معلوم می‌شود که ضریب آن صفر است. (البته این موضوع هیچ‌وقت برای تابع $f(x) = \frac{1}{\sec x}$ که تابعی زوج است، اتفاق نمی‌افتد!)

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \cline{2-2}
-1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} & 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} \\ \hline
\quad \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} & \\
-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{48} & \\ \hline
\quad \frac{5x^4}{24} - \frac{x^6}{48} &
\end{array}$$

مثال ۳۰۲: **در بسط مک‌لورن تابع $f(x) = tg^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$، ضریب x^3 کدام است؟ ($|x| < 1$)**

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{5}$

پاسخ: گزینه «۳» با یک سؤال نسبتاً جدید و البته جالب روبه‌رو هستیم. ما بسط مک‌لورن $tg^{-1}x$ را بلدیم، بیایید با هم تلاش کنیم سری صورت را به فرم سری $tg^{-1}x$ در بیاوریم! نمی‌دانم چرا هر وقت tg^{-1} می‌بینیم، بی‌اختیار به یاد فرمول‌های زیر می‌افتم!

$$tg^{-1}(\frac{a \pm b}{1 \mp ab}) = tg^{-1}a \pm tg^{-1}b \quad , \quad (ab < 1)$$

خُب با این فرمول چه بلایی می‌توانیم بر سر تابع داده شده بیاوریم!؟ اگر فرض کنیم $a = x$ و $b = x$، آن‌گاه داریم:

$$tg^{-1}(\frac{۲x}{۱-x^۲}) = tg^{-1}(\frac{x+x}{۱-(x)(x)}) = tg^{-1}x + tg^{-1}x = ۲tg^{-1}x$$

بنابراین بسط سری فوق به‌صورت مقابل است:

$$tg^{-1}(\frac{۲x}{۱-x^۲}) = ۲tg^{-1}x = ۲x - \frac{۲}{۳}x^۳ + \frac{۲}{۵}x^۵ - \frac{۲}{۷}x^۷ + - \cdots$$

مثال ۳۰۳: کدام‌یک از نامساوی‌های زیر صحیح نمی‌باشد؟ (علوم دریایی و اقیانوسی ـ سراسری ۹۳)

۱) $e^x \geq ۱+x$

۲) اگر $x > ۰$، $x - \frac{x^۳}{۶} < \sin x < x$

۳) اگر $۰ < y < x$ و $n > ۱$، $\frac{x^n - y^n}{x-y} > nx^{n-۱}$

۴) اگر $x > ۰$، $\frac{x}{۱+x} < Ln(۱+x) < x$

پاسخ: گزینه «۳» گزینه (۳) نادرست است. برای مثال به ازای $n = ۲$ داریم:

$$\frac{x^۲ - y^۲}{x-y} = x + y$$

حال با توجه به شرط $۰ < y < x$ داریم $x + y < ۲x$.

بنابراین به ازای $n = ۲$ داریم:

$$\frac{x^n - y^n}{x-y} < nx^{n-۱}$$

اما سایر گزینه‌ها را بررسی کنیم:

در گزینه (۱) با استفاده از بسط مک لورن e^x داریم: $e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots$ بنابراین $e^x - (۱+x) = \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots$ جمله غالب این بسط $\frac{x^۲}{۲!} \geq ۰$ است پس برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $e^x \geq ۱ + x$.

در مورد گزینه (۲) نیز وقتی $x > ۰$ داریم:

$$x - \frac{x^۳}{۳!} < \sin(x) = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \cdots < x$$

در مورد گزینه (۴) با استفاده از بسط‌های مک لورن در ناحیه همگرایی آن‌ها داریم:

$$\frac{x}{۱+x} = x\frac{۱}{۱+x} = x\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n x^n = \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n x^{n+۱} = x - x^۲ + \cdots$$

$$Ln(۱+x) = x - \frac{x^۲}{۲} + \cdots$$

با توجه به آن‌که $\frac{x^۲}{۲} < x^۲$ داریم $\frac{x}{۱+x} < Ln(۱+x)$ همچنین از دو جمله اول بسط $Ln(۱+x)$ معلوم است که در ناحیه $x > ۰$ داریم $Ln(۱+x) < x$.

نکته ۳۳: هر گاه تابعی فرد باشد، در بسط مک‌لورن آن جملات زوج وجود ندارد و هرگاه تابعی زوج باشد، در بسط مک‌لورن آن جملات فرد وجود ندارد.

مثال ۳۰۴: ضریب $x^۴$ در بسط مک‌لورن $x^۴tgx$ کدام است؟

۱) ۰
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۴!}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه «۱» تابع $x^۴tgx$ فرد است و بنابراین در بسط آن جملات زوج وجود ندارد پس ضریب $x^۴$ صفر است.

نکته ۳۴: شعاع همگرایی بسط تیلور تابع کسری f، حول نقطه‌ای مانند $x_۰$، برابر با مینیمم فاصله‌ی نقطه‌ی $x_۰$ تا ریشه‌های مخرج (چه ریشه‌های حقیقی و چه ریشه‌های مختلط) تابع می‌باشد.

مثال ۳۰۵: شعاع همگرایی سری مک‌لورن تابع $f(x) = \frac{۱}{(x^۲-۲)(۱+x^۲)}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این‌که در صورت سؤال عنوان شده بسط مک‌لورن تابع f، بنابراین باید $x_۰ = ۰$ در نظر گرفته شود. برای به‌دست آوردن شعاع همگرایی این تابع ابتدا ریشه‌های مخرج را حساب می‌کنیم:

$$x^۲ - ۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲} \;,\; x^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm i$$

کمترین فاصله نقاط $x = \pm i$ از نقطه‌ی $x_۰ = ۰$ برابر با $\underline{۱}$ و کمترین فاصله‌ی نقاط $x = \pm\sqrt{۲}$ از نقطه‌ی $x_۰ = ۰$ برابر $\sqrt{۲}$ است، بنابراین شعاع همگرایی برابر با یک است.

مشتق و انتگرال گرفتن از سری‌های توانی

فرض کنید سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n (x-x_۰)^n$ در فاصله $|x-x_۰|<R$ به تابع $f(x)$ همگرا باشد. اگر شعاع همگرایی مثبت باشد، آن‌گاه می‌توان از طرفین رابطه مشتق یا انتگرال گرفت، یعنی داریم:

$$۱)\ f'(x)=\sum_{n=۱}^{\infty} n a_n (x-x_۰)^{n-۱} \qquad ; \qquad |x-x_۰|<R$$

$$۲)\ \int_{x_۰}^{x} f(x)dx=\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{a_n}{n+۱}(x-x_۰)^{n+۱} \qquad ; \qquad |x-x_۰|<R$$

اگر از یک سری مشتق یا انتگرال بگیریم، بازه همگرایی سری‌های جدید به جز نقاط روی مرز، همان بازه‌ی همگرایی سری اصلی خواهد بود (نقاط روی مرز باید جداگانه بررسی شوند). توجه داشته باشید که مهم‌ترین کاربرد مشتق و انتگرال‌گیری از سری‌ها در محاسبه‌ی مقادیر سری‌ها می‌باشد.

مثال ۳۰۶: **حاصل سری $\sum_{n=۱}^{\infty} n(n+۲)x^n$ برابر با کدام گزینه است؟**

۱) $\frac{x^۲(۲-x)}{(۱-x)^۳}$ ۲) $\frac{x^۲(۳-x)}{(۱-x)^۳}$ ۳) $\frac{۲}{(۱-x)^۳}$ ۴) $\frac{x(۳-x)}{(۱-x)^۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به این‌که ضریب یک چند جمله‌ای از n، پشتِ x^n قرار دارد، پس طراح سؤال ما را هدایت کرده که از مشتق‌گیری از طرفین تساوی $\sum_{n=۰}^{\infty} x^n=\frac{۱}{۱-x}$ استفاده کنیم! ابتدا با یک مرحله مشتق‌گیری داریم: $\sum_{n=۱}^{\infty} nx^{n-۱}=\frac{۱}{(۱-x)^۲}$

خَب در این قسمت کمی دقت لازم است؛ در خواسته‌ی سؤال پشت عبارت شامل x، یک پرانتز $(n+۲)$ ضرب شده، پس ما باید در این قسمت توانی از x داشته باشیم که اگر از آن مشتق گرفتیم، بتوانیم به $(n+۲)$ در پشت عبارت شامل x برسیم، برای این منظور طرفین تساوی فوق را در $x^۳$ ضرب می‌کنیم، تا داخل سیگما عبارت $x^{n+۲}$ تولید شود.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} nx^{n-۱}\times x^۳=\frac{x^۳}{(۱-x)^۲} \Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} nx^{n+۲}=\frac{x^۳}{(۱-x)^۲}$$

حالا کافیست از طرفین نسبت به x مشتق بگیریم.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n(n+۲)x^{n+۱}=\frac{۳x^۲(۱-x)^۲-(۲)(-۱)(۱-x)x^۳}{(۱-x)^۴} \Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} n(n+۲)x^{n+۱}=\frac{۳x^۲(۱-x)+۲x^۳}{(۱-x)^۳} \Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} n(n+۲)x^{n+۱}=\frac{x^۲(۳-x)}{(۱-x)^۳} : (*)$$

اگه سمت چپ تساوی فوق را با آنچه طراح در صورت سؤال خواسته مقایسه کنیم می‌بینیم که تمام آن شبیه خواسته‌ی سؤال است، اما یک تفاوت دارد و آن این که در این تساوی $x^{n+۱}$ وجود داره! در این لحظه دو اتفاق می‌افتد!؟ دانشجویان بی‌دقت بدون توجه به توان $x^{n+۱}$، و با توجه به گزینه (۲) که اتفاقاً بـا سـمت راست تساوی فوق یکی است (توجه دارید که طراح بدجنس یا به عبارتی خودم! گزینه (۲) را چه جوری طرح کرده!!) گزینه (۲) را انتخاب می‌کنند و دانشجویان بادقت به سادگی با تقسیم طرفین تساوی فوق بر x، به تساوی زیر یا همان سری داده شده در صورت سؤال می‌رسند و گزینه (۴) را انتخاب می‌کنند. $\sum_{n=۱}^{\infty} n(n+۲)x^n=\frac{x(۳-x)}{(۱-x)^۳}$

البته مورد داشتیم که هیچ‌کدام از دو حالت فوق را انتخاب نکرده و وقتی به تساوی (*) رسیده و دیده $x^{n+۱}$ به وجود آمده، فکر کرده اشتباه حل کـرده و دوباره کلی راه حل قبلی را چک کرده!!

مثال ۳۰۷: **حاصل عبارت $\frac{۱}{(۱-x)^۴}$ برابر با کدام‌یک از گزینه‌ها است؟ $(|x|<۱)$**

۱) $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}{۳!}x^n$ ۲) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n(n+۱)(n+۲)(n+۳)}{۴!}x^n$

۳) $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}{۴!}x^n$ ۴) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n(n+۱)(n+۲)(n+۳)}{۳!}x^n$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به این‌که در مخرج کسر $(۱-x)^۴$ داریم، باید از طرفین بسط $\sum_{n=۰}^{\infty} x^n=\frac{۱}{۱-x}$ چند بار مشتق بگیریم، تا توان (۴) برای $۱-x$ در مخرج ایجاد شود. حال اگر از طرفین عبارت، سه بار مشتق بگیریم، داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{(۱-x)^۲}=\sum_{n=۱}^{\infty} nx^{n-۱} \Rightarrow f''(x)=\frac{۲}{(۱-x)^۳}=\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)x^{n-۲} \Rightarrow f'''(x)=\frac{۶}{(۱-x)^۴}=\sum_{n=۳}^{\infty} n(n-۱)(n-۲)x^{n-۳}$$

حالا که $\frac{۱}{(۱-x)^۴}$ ایجاد شد، باید با طرفین وسطین $\frac{۱}{(۱-x)^۴}$ را در یک طرف تساوی نگه داریم:

$$\frac{۱}{(۱-x)^۴}=\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}x^{n-۳} \xrightarrow{\text{قاعده لغزاندن حدود}} \frac{۱}{(۱-x)^۴}=\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(n+۳)(n+۲)(n+۱)}{۳!}x^n$$

مدرسان شریف

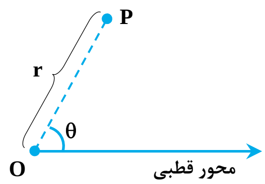
فصل هفتم

« دستگاه مختصات قطبی »

درسنامه: دستگاه مختصات قطبی و مفاهیم مرتبط با آن

تعریف دستگاه مختصات قطبی، ارتباط آن با دستگاه دکارتی، رسم نمودارهای قطبی و مفاهیم مرتبط با این دستگاه در این درسنامه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

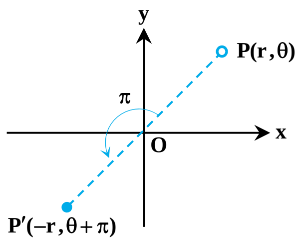
تعریف دستگاه مختصات قطبی



در دستگاه مختصات دکارتی، محل هر نقطه را با نوشتن مؤلفه‌های افقی و قائم آن به‌صورت (x,y) مشخص می‌کنیم، با این حال برای برخی از کاربردهای ریاضیات، استفاده از **دستگاه مختصات قطبی** مناسب‌تر است. این دستگاه نخستین بار توسط نیوتن مورد استفاده قرار گرفت. در این دستگاه نقطه‌ای به‌نام قطب (مبدأ) داریم که معادل همان نقطه‌ی $O(\circ,\circ)$ در دستگاه دکارتی است. یک نیم‌خط افقی که از O آغاز می‌شود و به سمت راست کشیده می‌شود، محور قطبی نام دارد. محور قطبی در واقع همان قسمت مثبت محور x هاست. حالا هر نقطه‌ی P از صفحه را به مبدأ وصل می‌کنیم. پاره‌خط OP به‌دست می‌آید. اندازه‌ی OP یعنی فاصله‌ی P از مبدأ را با r نشان می‌دهیم (برخی منابع به جای r از ρ استفاده می‌کنند) و زاویه‌ی OP با محور قطبی را θ می‌نامیم. بنابراین هر نقطه‌ی P در دستگاه قطبی با زوج مرتب (r,θ) نمایش داده می‌شود. اکنون به دو مورد زیر توجه کنید:

الف) هر نقطه از صفحه، فقط یک مقدار r دارد. برای مثال در نقطه‌ی $(x,y)=(۱,۱)$ می‌دانیم که $r=\sqrt{۲}$ است. اما θ در هر نقطه، بی‌شمار مقدار دارد. برای مثال در نقطه‌ی $(x,y)=(۱,۱)$ داریم $\theta=\frac{\pi}{۴}+۲k\pi$ که k هر عدد صحیح می‌تواند باشد. در ضمن در نقطه‌ی مبدأ داریم $r=\circ$ و θ می‌تواند هر مقداری تعریف شود. برای مثال نقاط $(r,\theta)=(\circ,\frac{\pi}{۴})$ و $(r,\theta)=(\circ,\frac{\pi}{۳})$ هر دو نشان‌دهنده‌ی مبدأ هستند.

ب) درست است که مفهوم هندسی r نمی‌تواند منفی باشد، اما در معادلات قطبی گاهی اوقات با مقادیر منفی r روبرو می‌شویم. برای مثال در معادله‌ی $r=۱-\frac{۴\theta}{\pi}$، به ازای $\theta=\frac{\pi}{۲}$ مقدار $r=-۱$ به‌دست می‌آید. بنابراین لازم است مفهوم نقطه‌ی $(-r,\theta)$ و رابطه‌ی آن با (r,θ) را معرفی کنیم.

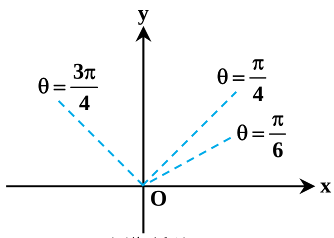


تعریف: هرگاه $r<\circ$ باشد، نمایش هندسی نقطه‌ی $P(r,\theta)$ نقطه‌ی $P'(-r,\theta+\pi)$ است. به عبارتی هرگاه مقدار r منفی به‌دست آمد از تساوی $(r,\theta)=(-r,\theta+\pi)$ استفاده می‌کنیم و به جای نقطه‌ی $P(r,\theta)$ نقطه‌ی $P'(-r,\theta+\pi)$ را مطابق شکل مشخص می‌کنیم.

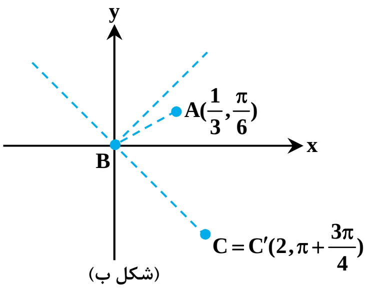
مثال ۱: نقاطی از منحنی $r=۱-\frac{۴}{\pi}\theta$ را که به ازای $\theta=\frac{\pi}{۶}$، $\theta=\frac{\pi}{۴}$ و $\theta=\frac{۳\pi}{۴}$ به دست می‌آیند، مشخص کنید.

پاسخ: نیم‌خط‌های $\theta=\frac{\pi}{۶}$، $\theta=\frac{\pi}{۴}$ و $\theta=\frac{۳\pi}{۴}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ببینیم روی هر کدام از آن‌ها چه نقطه‌ای به‌دست می‌آید. (شکل الف) جدول زیر را با جایگذاری این مقادیر در $r=۱-\frac{۴}{\pi}\theta$ تشکیل می‌دهیم.

θ	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{۳\pi}{۴}$
r	$\frac{۱}{۳}$	$\circ$	-۲



(شکل الف)



(شکل ب)

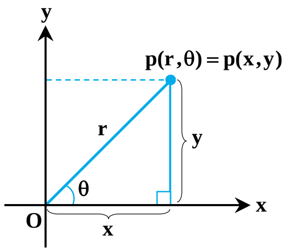
نقاط $A(\frac{۱}{۳},\frac{\pi}{۶})$، $B(۰,\frac{\pi}{۴})$ و $C(-۲,\frac{۳\pi}{۴})$ به‌دست آمده‌اند. نقطه‌ی A روی زاویه‌ی $\frac{\pi}{۶}$ و در فاصله‌ی $r=\frac{۱}{۳}$ از مبدأ قرار دارد. در نقطه‌ی B داریم $r=۰$. پس این نقطه همان مبدأ مختصات است. اما در نقطه‌ی C مقدار r منفی شده است. پس نقطه‌ی C روی زاویه‌ی $\frac{۳\pi}{۴}$ قرار ندارد بلکه روی زاویه‌ی $\pi+\frac{۳\pi}{۴}$ قرار دارد. در واقع به جای $C(-۲,\frac{۳\pi}{۴})$ باید $C'(۲,\pi+\frac{۳\pi}{۴})$ را نشان بدهیم.

نکته۱: با توجه به توضیحات گفته شده، نقطه‌ی $P(r,\theta)$ دارای نمایش‌های مختلفی به‌صورت $((-۱)^k r,\theta+k\pi)$ برای هر $k\in\mathbb{Z}$ است.

مثال۲: همه‌ی نمایش‌های ممکن برای نقطه‌ی $A(x,y)=(۰,۲)$ را در مختصات قطبی بنویسید.

پاسخ: نقطه‌ی A روی محور y ها و در فاصله‌ی ۲ واحد از مبدأ قرار دارد. بنابراین در این نقطه $\theta=\frac{\pi}{۲}$ و $r=۲$ است. پس طبق نکته‌ی فوق، همه‌ی نمایش‌های مختلف این نقطه در مختصات قطبی به‌صورت $((-۱)^k ۲,\frac{\pi}{۲}+k\pi)$ هستند.

ارتباط بین مختصات دکارتی و قطبی



گاهی اوقات لازم است از فضای قطبی به فضای دکارتی برویم و بالعکس. ارتباط میان مختصات قطبی و دکارتی را می‌توان در شکل مقابل دید که در آن قطب متناظر با مبدأ و محور قطبی بر قسمت مثبت محور x ها منطبق است. اگر مختصات دکارتی نقطه‌ی p را با (x,y) و مختصات قطبی آن را با (r,θ) نشان دهیم، آن‌گاه در مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل مقابل، روابط مقابل را داریم: $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\sin\theta=\frac{y}{r}$

و یا به عبارت دیگر:

$$\boxed{x=r\cos\theta \ , \ y=r\sin\theta}$$

رابطه‌ی فوق بیشتر زمانی استفاده می‌شود که مختصات قطبی نقطه را داریم و می‌خواهیم مختصات دکارتی نقطه را معلوم کنیم. البته با نوشتن قاعده فیثاغورس و همچنین محاسبه‌ی $tg\theta$ در مثلث فوق، روابط زیر را برای وقتی که x و y را داریم و دنبال r و θ هستیم، خواهیم داشت:

$$\boxed{r^۲=x^۲+y^۲ \ , \ tg\theta=\frac{y}{x}}$$

مثال۳: نقطه $(۴,\frac{\pi}{۳})$ را از مختصات قطبی به مختصات دکارتی تبدیل کنید.

پاسخ: در این سؤال $r=۴$ و $\theta=\frac{\pi}{۳}$ است، لذا داریم:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta=۴\times\cos\frac{\pi}{۳}=۴\times\frac{۱}{۲}=۲ \\ y=r\sin\theta=۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳} \end{cases} \xrightarrow{\text{مختصات دکارتی نقطه}} (۲,۲\sqrt{۳})$$

مثال۴: نقطه $(۱,-۱)$ را از مختصات دکارتی به مختصات قطبی تبدیل کنید.

پاسخ: اگر r را مثبت انتخاب کنیم، به راحتی داریم:

$$r=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۲} \ , \ tg\theta=\frac{y}{x}=\frac{-۱}{۱}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{۴}$$

خُب، برای تعیین θ در برخی سؤالات کمی داستان داریم! چون باید به محل قرارگیری نقطه $(۱,-۱)$ توجه کنیم. نقطه‌ی $(۱,-۱)$ در ربع چهارم قرار دارد، پس $\theta=-\frac{\pi}{۴}$ است. البته می‌توان $\theta=\frac{۷\pi}{۴}$ را نیز در نظر گرفت (۲π اضافه کردن به $-\frac{\pi}{۴}$ مقدار $\frac{۷\pi}{۴}$ را نتیجه می‌دهد). دقت کنید برای تعیین θ، اگر θ در ربع **اول** یا **چهارم** باشد، از همان فرمول $\theta=\mathbf{Arctg}\frac{y}{x}$ استفاده می‌کنیم، مثل همین مثال که داریم:

$$\theta=Arctg(\frac{y}{x})=Arctg(\frac{-۱}{۱})=-Arctg(\frac{۱}{۱})=-\frac{\pi}{۴}$$

اما اگر θ در ربع **دوم** و **سوم** باشد، باید از فرمول $\theta=\pi+\mathbf{Arctg}\frac{y}{x}$، مقدار θ را تعیین کنیم. مثلاً نقطه‌ی $(-۱,\sqrt{۳})$ در تبدیل به مختصات قطبی به شکل زیر می‌شود:

$$r=\sqrt{(-۱)^۲+(\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۱+۳}=\sqrt{۴}=۲ \ , \ \theta=\pi+Arctg(\frac{y}{x})=\pi+Arctg(\frac{\sqrt{۳}}{-۱})=\pi-Arctg\sqrt{۳}=\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{۳}$$