آزمون‌های مبحثی و جامع + پاسخ‌های تشریحی

موج آزمون ریاضی

ویراست دوم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

نشر الگو

پیشگفتار

سال‌هاست که در کشور ما اصلی‌ترین راه ورود به دانشگاه، قبولی در کنکور سراسری است. آزمونی که ویژگی اصلی‌اش چهارگزینه‌ای بودن پرسش‌هاست، و البته دشواری‌اش بیشتر به دلیل کوتاه بودن زمان پاسخ‌گویی است تا دشواری سؤال‌ها. از این‌رو، رویکرد آموزشی بسیاری از معلمان، به ویژه در سال‌های پایانی دورهٔ متوسطه، تدریس مطالب درسی بر پایهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای است. با این همه، هر چند که بعید است شما پیش از سال دوازدهم تحصیل‌تان با پرسش‌های چهارگزینه‌ای دست و پنجه نرم نکرده باشید، اگر قصد ورود به دانشگاه را دارید، گریزی از آن نیست!

نشر الگو، برای دانش‌آموزان دورهٔ دوم متوسطه، در هر پایه و برای هر درس ریاضی، **کتاب سه‌بعدی** شامل درسنامهٔ مفصل، تمرین‌های تشریحی و پرسش‌های چهارگزینه‌ای و **کتاب تست** شامل درسنامهٔ خلاصه و پرسش‌های چهارگزینه‌ای منتشر کرده است. معلوم است که تعداد پرسش‌های چهارگزینه‌ای کتاب‌های تست، نسبت به کتاب‌های سه‌بعدی بسیار بیشتر است. همچنین دانش‌آموزانی که مایل‌اند همزمان با یادگیری مباحث درس حسابان ۲ سال دوازدهم، مطالب دروس ریاضی ۱ و حسابان ۱ را مرور کنند، می‌توانند از کتاب **ریاضیات جامع رشتهٔ ریاضی** استفاده کنند. این کتاب شامل درسنامهٔ کامل و تست‌های جامع و متنوع هر سه درس است.

کتاب‌های **موج‌آزمون** ویژهٔ آمادگی برای کنکور سراسری است. کتابی که در دست دارید، مربوط به درس‌های ریاضی ۱ سال دهم، حسابان ۱ سال یازدهم و حسابان ۲ سال دوازدهم است. در این کتاب همهٔ مباحث این درس‌ها را در دوازده فصل تنظیم کرده‌ایم. در هر آزمون، ده پرسش مربوط به همان مبحث را آورده‌ایم. توجه کنید که ممکن است تعداد آزمون‌های یک مبحث، بیش از یکی باشد. در انتهای هر فصل، به‌جز فصل‌های (۱)، (۳) و (۷)، یک یا چند آزمون جامع مربوط به مباحث همان فصل را آورده‌ایم. فصل سیزدهم را به آزمون‌هایی برای آمادگی آزمون‌های آزمایشی (قلم‌چی) اختصاص داده‌ایم. در هر آزمون این فصل متناسب با مباحث مشخص شدهٔ آن، پرسش‌های چهارگزینه‌ای آورده‌ایم. اگر می‌خواهید برای هر یک از این آزمون‌ها بیشتر تمرین کنید، می‌توانید به آزمون‌های مرتبط با مباحث آن که در جدول زیر مشخص شده‌اند مراجعه کنید.

	آزمون‌های مرتبط
آزمون اول قلم‌چی	۶۷ - ۶۶ - ۶۰ - ۵۹ - ۵۸ - ۵۷ - ۵۶ - ۵۵ - ۳۹ - ۳۸ -۳۷
آزمون دوم قلم‌چی	۷۳ - ۷۲ - ۷۱ - ۷۰ - ۶۹ - ۶۸ - ۶۷ - ۶۶
آزمون سوم قلم‌چی	۷۰ - ۶۹ - ۶۷ - ۶۶ - ۶۵ - ۶۴ - ۶۳ - ۶۲ - ۶۱ - ۱۸
آزمون چهارم قلم‌چی	۸۲ - ۸۱ - ۸۰ - ۷۹ - ۷۸ - ۷۷ - ۷۶ - ۱۷ - ۱۶ - ۱۵ - ۱۴ - ۱۳ - ۱۲ - ۱۱ - ۱۰ - ۹ - ۸ - ۷ - ۶ - ۵ - ۴ - ۳ - ۲ - ۱ ۹۰ - ۹۱
آزمون پنجم قلم‌چی	۹۴ - ۹۳ - ۹۲ - ۹۱ - ۹۰ - ۸۹ - ۸۸ - ۸۷ - ۸۶ - ۸۵ - ۸۴ - ۸۳ - ۷۰ - ۶۹ - ۶۷ - ۶۶ - ۱۸
آزمون ششم قلم‌چی	۱۰۱ - ۱۰۰ - ۹۹ - ۹۴ - ۹۳ - ۹۲ - ۹۱ - ۹۰ - ۸۹ - ۸۸ - ۵۸ - ۵۷ - ۳۵ - ۳۴ - ۳۰ - ۲۷ - ۲۶ - ۲۳ - ۲۲ - ۲۱ - ۲۰ - ۱۹ ۱۰۹ - ۱۰۸ - ۱۰۷ - ۱۰۶ - ۱۰۵ - ۱۰۴ - ۱۰۳ - ۱۰۲
آزمون هفتم قلم‌چی	۱۱۲ - ۱۱۱ - ۱۱۰ - ۱۰۹ - ۱۰۸ - ۱۰۷ - ۹۴ - ۹۳ - ۹۲ - ۹۱ - ۹۰ - ۸۹ - ۸۸ - ۷۰ - ۶۹ - ۶۷ - ۶۶ - ۱۸
آزمون هشتم قلم‌چی	۳۰ - ۲۷ - ۲۶ - ۲۳ - ۲۲ - ۲۱ - ۲۰ - ۱۹ - ۱۷ - ۱۶ - ۱۵ - ۱۴ - ۱۳ - ۱۲ - ۱۱ - ۱۰ - ۹ - ۸ - ۷ - ۶ - ۵ - ۴ - ۳ - ۲ - ۱ ۷۳ - ۷۲ - ۷۱ - ۶۸ - ۶۵ - ۶۴ - ۶۳ - ۶۲ - ۶۱ - ۶۰ - ۵۹ - ۵۸ - ۵۷ - ۵۶ - ۵۵ - ۳۹ - ۳۸ - ۳۷ - ۳۵ - ۳۴
آزمون نهم قلم‌چی	۱۱۷ - ۱۱۶ - ۵۴ - ۵۳ - ۳۶ - ۳۵ - ۳۴ - ۳۳ - ۳۰ - ۲۹ - ۲۸ - ۲۵ - ۲۴
آزمون دهم قلم‌چی	۱۲۳ - ۱۲۲ - ۱۲۱ - ۱۲۰ - ۱۱۹ - ۱۱۸ - ۱۱۷ - ۱۱۶ - ۵۲ - ۵۱ - ۵۰ - ۴۹ - ۴۸ - ۴۷ - ۴۶ - ۴۵ - ۴۴ - ۴۳ - ۴۲ - ۴۱ ۱۲۸ - ۱۲۷ - ۱۲۵ - ۱۲۴
آزمون یازدهم قلم‌چی	۱۳۵ - ۱۳۴ - ۱۳۳ - ۱۳۲ - ۱۳۱ - ۱۲۸ - ۱۲۷ - ۱۲۶ - ۱۲۵ - ۱۲۴ - ۱۲۳ - ۱۲۲ - ۱۲۱ - ۱۲۰ - ۱۱۹ - ۱۱۸ - ۱۱۷ - ۱۱۶

	آزمون‌های مرتبط
آزمون دوازدهم قلم‌چی	۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۱۲ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۵ - ۱۶ - ۱۷ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۸ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ -۹۹ - ۱۰۰ - ۱۰۱ - ۱۰۲ - ۱۰۳ - ۱۰۴ - ۱۰۵ - ۱۰۶
آزمون سیزدهم قلم‌چی	۱۱۲ - ۱۱۱ - ۱۱۰ - ۱۰۹ - ۱۰۸ - ۱۰۷ - ۹۴ - ۹۳ - ۹۲ - ۹۱ - ۹۰ - ۸۹ - ۸۸ - ۷۰ - ۶۹ - ۶۷ - ۶۶ - ۱۸
آزمون چهاردهم قلم‌چی	۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۱۲ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۵ - ۱۶ - ۱۷ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۱۴۴ - ۱۴۳ - ۱۴۲ - ۱۴۱ - ۱۴۰ - ۱۳۹ - ۱۳۸ - ۱۳۷ - ۱۳۶ - ۷۳ - ۷۲ - ۷۱ - ۶۸ - ۶۵ - ۶۴
آزمون پانزدهم قلم‌چی	۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۵۷ - ۵۸ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۱۳۶ - ۱۳۷ - ۱۳۸ - ۱۳۹ - ۱۴۰ - ۱۴۱ - ۱۴۲ - ۱۴۳ - ۱۴۴ - ۱۴۵ - ۱۴۶ - ۱۴۷ - ۱۴۸ - ۱۴۹ - ۱۵۰ - ۱۵۱ - ۱۵۲ - ۱۵۳ - ۱۵۴
آزمون شانزدهم قلم‌چی	۱۱۶ - ۱۱۷ - ۱۱۸ - ۱۱۹ - ۱۲۰ - ۱۲۱ - ۱۲۲ - ۱۲۳ - ۱۲۴ - ۱۲۵ - ۱۲۶ - ۱۲۷ - ۱۲۸ - ۱۲۹ - ۱۳۰ - ۱۳۱ - ۱۳۲ - ۱۳۳ - ۱۳۴ - ۱۳۵ - ۱۳۶ - ۱۳۷ - ۱۳۸ - ۱۳۹ - ۱۴۰ - ۱۴۱ - ۱۴۲ - ۱۴۳ - ۱۴۴ - ۱۴۵ - ۱۴۶ - ۱۴۷ - ۱۴۸ - ۱۴۹ - ۱۵۰ - ۱۵۱ - ۱۵۲ - ۱۵۳ - ۱۵۴

در جدول زیرآزمون‌های مرتبط با مباحث آزمون‌های آزمایشی گزینه دو را آورده‌ایم.

	آزمون‌های مرتبط
آزمون اول گزینه دو	۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۸ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳
آزمون دوم گزینه دو	۱۸ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۹ - ۷۰
آزمون سوم گزینه دو	۱۸ - ۶۹ - ۷۰ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۹۰ - ۹۱
آزمون چهارم گزینه دو	۱۲ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۵ - ۱۶ - ۱۷ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴
آزمون پنجم گزینه دو	۱۸ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۹ - ۷۰ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴ - ۱۰۷ - ۱۰۸ - ۱۰۹ - ۱۱۰ - ۱۱۱ - ۱۱۲
آزمون ششم گزینه دو	۹۹- ۱۰۰ - ۱۰۱ - ۱۰۲ - ۱۰۳ - ۱۰۴ - ۱۰۵ - ۱۰۶ - ۱۰۷ - ۱۰۸ - ۱۰۹ - ۱۱۰ - ۱۱۱ - ۱۱۲ - ۱۱۳ - ۱۱۴ - ۱۱۵ - ۱۱۶ - ۱۱۷
آزمون هفتم گزینه دو	۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۵۳ - ۵۴ - ۱۱۶ - ۱۱۷ - ۱۱۸ - ۱۱۹ - ۱۲۰ - ۱۲۱ - ۱۲۲ - ۱۲۳ - ۱۲۴ - ۱۲۵ - ۱۲۶ - ۱۲۷ - ۱۲۸ - ۱۲۹ - ۱۳۰ - ۱۳۱ - ۱۳۲ - ۱۳۳ - ۱۳۴ - ۱۳۵
آزمون هشتم گزینه دو	۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۱۱۸ - ۱۱۹ - ۱۲۰ - ۱۲۱ - ۱۲۲ - ۱۲۳ - ۱۲۴ - ۱۲۵ - ۱۲۶ - ۱۲۷ - ۱۲۸ - ۱۲۹ - ۱۳۰ - ۱۳۱ - ۱۳۲ - ۱۳۳ - ۱۳۴ - ۱۳۵ - ۱۳۶ - ۱۳۷ - ۱۳۸ - ۱۳۹ - ۱۴۰ - ۱۴۱ - ۱۴۲ - ۱۴۳ - ۱۴۴
آزمون نهم گزینه دو	۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۱۲ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۵ - ۱۶ - ۱۷ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱- ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۸ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ -۹۹ - ۱۰۰ - ۱۰۱ - ۱۰۲ - ۱۰۳ - ۱۰۴ - ۱۰۵ - ۱۰۶
آزمون دهم گزینه دو	۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۱۲ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۵ - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۶۰ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۹ - ۷۰ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴ - ۱۰۷ - ۱۰۸ - ۱۰۹ - ۱۱۰ - ۱۱۱ - ۱۱۲
آزمون یازدهم گزینه دو	۸ - ۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۸ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۱۱۶ - ۱۱۷ - ۱۱۸ - ۱۱۹ - ۱۲۰ - ۱۲۱ - ۱۲۲ - ۱۲۳ - ۱۲۴ - ۱۲۵ - ۱۲۶ - ۱۲۷ - ۱۲۸ - ۱۲۹ - ۱۳۰ - ۱۳۱ - ۱۳۲ - ۱۳۳ - ۱۳۴ - ۱۳۵ - ۱۳۶ - ۱۳۷ - ۱۳۸ - ۱۳۹ - ۱۴۰ - ۱۴۱ - ۱۴۲ - ۱۴۳ - ۱۴۴ - ۱۴۵ - ۱۴۶ - ۱۴۷ - ۱۴۸ - ۱۴۹ - ۱۵۰ - ۱۵۱ - ۱۵۲ - ۱۵۳ - ۱۵۴

وظیفـهٔ خـود می‌دانیـم از همکاران عزیزمان در نشـر الگـو، خانم‌ها هاله ایمانی، فهیمـه گودرزی و عاطفه ربیعـی برای مطالعه و ویرایـش کتاب، خانم‌ها لیلا پرهیزکاری و راضیه صالحی برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان

فهرست

فصل اول: بازه و مجموعه

آزمون ۱: مجموعه‌های اعداد ۲
آزمون ۲: مجموعه‌ها ۳

فصل دوم: الگو و دنباله

آزمون ۳: الگو و دنباله ۴
آزمون ۴: دنبالهٔ حسابی (۱) ۵
آزمون ۵: دنبالهٔ حسابی (۲) ۶
آزمون ۶: دنبالهٔ هندسی (۱) ۷
آزمون ۷: دنبالهٔ هندسی (۲) ۸
آزمون ۸: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (۱) ۹
آزمون ۹: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (۲) ۱۰
آزمون ۱۰: آزمون فصل دوم (۱) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۱
آزمون ۱۱: آزمون فصل دوم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۲

فصل سوم: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم

آزمون ۱۲: توان و ریشه ۱۳
آزمون ۱۳: اتحاد (۱) ۱۴
آزمون ۱۴ اتحاد (۲) ۱۵
آزمون ۱۵: تجزیه (۱) ۱۶
آزمون ۱۶: تجزیه (۲) ۱۷
آزمون ۱۷: گویا کردن مخرج‌های گنگ ۱۸
آزمون ۱۸: بخش‌پذیری و تقسیم ۱۹

فصل چهارم: معادله، تعیین علامت و نامعادله

آزمون ۱۹: حل معادلهٔ درجهٔ دوم ۲۰
آزمون ۲۰: روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) ۲۱
آزمون ۲۱: روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (۲) ۲۲
آزمون ۲۲: رابطهٔ بین ضرایب و علامت جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم ۲۳
آزمون ۲۳: معادله‌های درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم خاص ۲۴
آزمون ۲۴: معادله‌های گویا (۱) ۲۵
آزمون ۲۵: معادله‌های گویا (۲) ۲۶
آزمون ۲۶: تعیین علامت و نامعادله (۱) ۲۷
آزمون ۲۷: تعیین علامت و نامعادله (۲) ۲۸
آزمون ۲۸: معادله‌های گنگ (۱) ۲۹
آزمون ۲۹: معادله‌های گنگ (۲) ۳۰
آزمون ۳۰: حل هندسی معادلات ۳۱
آزمون ۳۱: آزمون فصل چهارم (۱) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۳۲
آزمون ۳۲: آزمون فصل چهارم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۳۳

فصل پنجم: قدرمطلق و جزء صحیح

آزمون ۳۳: قدرمطلق و ویژگی‌های آن ۳۴
آزمون ۳۴: معادلات و نامعادلات قدرمطلقی (۱) ۳۵
آزمون ۳۵: معادلات و نامعادلات قدرمطلقی (۲) ۳۶
آزمون ۳۶: توابع شامل قدرمطلق ۳۷
آزمون ۳۷: جزء صحیح و ویژگی‌های آن (۱) ۳۸
آزمون ۳۸: جزء صحیح و ویژگی‌های آن (۲) ۳۹
آزمون ۳۹: تابع جزء صحیح ۴۰
آزمون ۴۰: آزمون فصل پنجم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۴۱

فصل ششم: توابع نمایی و لگاریتمی

آزمون ۴۱: تابع نمایی (۱) ۴۲
آزمون ۴۲: تابع نمایی (۲) ۴۳

آزمون ۴۳: معادلات و نامعادلات نمایی (۱) ۴۴
آزمون ۴۴: معادلات و نامعادلات نمایی (۲) ۴۵
آزمون ۴۵: لگاریتم (۱) ۴۶
آزمون ۴۶: لگاریتم (۲) ۴۷
آزمون ۴۷: توابع لگاریتمی (۱) ۴۸
آزمون ۴۸: توابع لگاریتمی (۲) ۴۹
آزمون ۴۹: معادلات و نامعادلات لگاریتمی (۱) ۵۰
آزمون ۵۰: معادلات و نامعادلات لگاریتمی (۲) ۵۱
آزمون ۵۱: آزمون فصل ششم (۱) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۵۲
آزمون ۵۲: آزمون فصل ششم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۵۳

فصل هفتم: هندسهٔ تحلیلی

آزمون ۵۳: خط راست (۱) ۵۴
آزمون ۵۴: خط راست (۲) ۵۵

فصل هشتم: تابع

آزمون ۵۵: مفاهیم اولیه ۵۶
آزمون ۵۶: توابع معروف ۵۷
آزمون ۵۷: سهمی و تابع درجهٔ دوم (۱) ۵۸
آزمون ۵۸: سهمی و تابع درجهٔ دوم (۲) ۵۹
آزمون ۵۹: دامنه و برد تابع و تساوی توابع ۶۰
آزمون ۶۰: مدل‌سازی با توابع ۶۱
آزمون ۶۱: جبر توابع (۱) ۶۲
آزمون ۶۲: جبر توابع (۲) ۶۳
آزمون ۶۳: ترکیب توابع (۱) ۶۴
آزمون ۶۴: ترکیب توابع (۲) ۶۵
آزمون ۶۵: ترکیب توابع (۳) ۶۶
آزمون ۶۶: تبدیل نمودار توابع (۱) ۶۷
آزمون ۶۷: تبدیل نمودار توابع (۲) ۶۹
آزمون ۶۸: توابع یک‌به‌یک ۷۱
آزمون ۶۹: توابع یکنوا (۱) ۷۲
آزمون ۷۰: توابع یکنوا (۲) ۷۳
آزمون ۷۱: تابع وارون (۱) ۷۴
آزمون ۷۲: تابع وارون (۲) ۷۵
آزمون ۷۳: تابع وارون (۳) ۷۶
آزمون ۷۴: آزمون فصل هشتم (۱) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۷۷
آزمون ۷۵: آزمون فصل هشتم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۷۸

فصل نهم: مثلثات

آزمون ۷۶: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه ۷۹
آزمون ۷۷: نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی ۸۰
آزمون ۷۸: اتحادهای مثلثاتی (۱) ۸۱
آزمون ۷۹: اتحادهای مثلثاتی (۲) ۸۲
آزمون ۸۰: واحدهای اندازه‌گیری زاویه ۸۳
آزمون ۸۱: نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۱) ۸۴
آزمون ۸۲: نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۲) ۸۵
آزمون ۸۳: سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۱) ۸۶
آزمون ۸۴: سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۲) ۸۷
آزمون ۸۵: سینوس و کسینوس زاویهٔ 2α (۱) ۸۸
آزمون ۸۶: سینوس و کسینوس زاویهٔ 2α (۲) ۸۹
آزمون ۸۷: سینوس و کسینوس زاویهٔ 2α (۳) ۹۰
آزمون ۸۸: تانژانت مجموع دو زاویه (۱) ۹۱
آزمون ۸۹: تانژانت مجموع دو زاویه (۲) ۹۲
آزمون ۹۰: توابع مثلثاتی (۱) ۹۳
آزمون ۹۱: توابع مثلثاتی (۲) ۹۴
آزمون ۹۲: معادلات مثلثاتی (۱) ۹۵
آزمون ۹۳: معادلات مثلثاتی (۲) ۹۶
آزمون ۹۴: معادلات مثلثاتی (۳) ۹۷

آزمون ۹۵: آزمون فصل نهم (۱) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۹۸
آزمون ۹۶: آزمون فصل نهم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۹۹
آزمون ۹۷: آزمون فصل نهم (۳) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۰۰
آزمون ۹۸: آزمون فصل نهم (۴) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۰۱

فصل دهم: حد و پیوستگی

آزمون ۹۹: مفهوم حد و قضایای حد (۱) ۱۰۲
آزمون ۱۰۰: مفهوم حد و قضایای حد (۲) ۱۰۳
آزمون ۱۰۱: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای تابع‌های گویا و گنگ (۱) ۱۰۴
آزمون ۱۰۲: حاصل مبهم $\frac{0}{0}$ برای تابع‌های گویا و گنگ (۲) ۱۰۵
آزمون ۱۰۳: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای حدهای مثلثاتی (۱) ۱۰۶
آزمون ۱۰۴: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای حدهای مثلثاتی (۲) ۱۰۷
آزمون ۱۰۵: پیوستگی (۱) ۱۰۸
آزمون ۱۰۶: پیوستگی (۲) ۱۰۹
آزمون ۱۰۷: حد بی‌نهایت (۱) ۱۱۰
آزمون ۱۰۸: حد بی‌نهایت (۲) ۱۱۱
آزمون ۱۰۹: مجانب قائم ۱۱۲
آزمون ۱۱۰: حد در بی‌نهایت (۱) ۱۱۳
آزمون ۱۱۱: حد در بی‌نهایت (۲) ۱۱۴
آزمون ۱۱۲: مجانب افقی ۱۱۵
آزمون ۱۱۳: آزمون فصل دهم (۱) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۱۶
آزمون ۱۱۴: آزمون فصل دهم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۱۷
آزمون ۱۱۵: آزمون فصل دهم (۳) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۱۸

فصل یازدهم: مشتق

آزمون ۱۱۶: مفهوم مشتق (۱) ۱۱۹
آزمون ۱۱۷: مفهوم مشتق (۲) ۱۲۰
آزمون ۱۱۸: قواعد مشتق‌گیری (۱) ۱۲۱
آزمون ۱۱۹: قواعد مشتق‌گیری (۲) ۱۲۲
آزمون ۱۲۰: قواعد مشتق‌گیری (۳) ۱۲۳
آزمون ۱۲۱: مشتق تابع مرکب (۱) ۱۲۴
آزمون ۱۲۲: مشتق تابع مرکب (۲) ۱۲۵
آزمون ۱۲۳: مشتق تابع مرکب (۳) ۱۲۶
آزمون ۱۲۴: مشتق‌پذیری ۱۲۷
آزمون ۱۲۵: خط مماس بر نمودار تابع ۱۲۸
آزمون ۱۲۶: آهنگ تغییر ۱۲۹
آزمون ۱۲۷: مشتق دوم (۱) ۱۳۰
آزمون ۱۲۸: مشتق دوم (۲) ۱۳۱
آزمون ۱۲۹: قاعدهٔ هوپیتال (۱) ۱۳۲
آزمون ۱۳۰: قاعدهٔ هوپیتال (۲) ۱۳۳
آزمون ۱۳۱: آزمون فصل یازدهم (۱) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۳۴
آزمون ۱۳۲: آزمون فصل یازدهم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۳۵
آزمون ۱۳۳: آزمون فصل یازدهم (۳) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۳۶
آزمون ۱۳۴: آزمون فصل یازدهم (۴) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۳۷
آزمون ۱۳۵: آزمون فصل یازدهم (۵) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۳۸

فصل دوازدهم: کاربردهای مشتق

آزمون ۱۳۶: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع (۱) ۱۳۹
آزمون ۱۳۷: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع (۲) ۱۴۰
آزمون ۱۳۸: نقاط بحرانی ۱۴۱

آزمون ۱۳۹: اکسترمم‌های نسبی (۱) ۱۴۲
آزمون ۱۴۰: اکسترمم‌های نسبی (۲) ۱۴۳
آزمون ۱۴۱: اکسترمم‌های مطلق (۱) ۱۴۴
آزمون ۱۴۲: اکسترمم‌های مطلق (۲) ۱۴۵
آزمون ۱۴۳: بهینه‌سازی (۱) ۱۴۶
آزمون ۱۴۴: بهینه‌سازی (۲) ۱۴۷
آزمون ۱۴۵: جهت تقعر (۱) ۱۴۸
آزمون ۱۴۶: جهت تقعر (۲) ۱۴۹
آزمون ۱۴۷: نقطهٔ عطف (۱) ۱۵۰
آزمون ۱۴۸: نقطهٔ عطف (۲) ۱۵۱
آزمون ۱۴۹: رسم نمودار (۱) ۱۵۲
آزمون ۱۵۰: رسم نمودار (۲) ۱۵۳
آزمون ۱۵۱: آزمون فصل دوازدهم (۱) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۵۴
آزمون ۱۵۲: آزمون فصل دوازدهم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۵۵
آزمون ۱۵۳: آزمون فصل دوازدهم (۳) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۵۶
آزمون ۱۵۴: آزمون فصل دوازدهم (۴) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۵۷

فصل سیزدهم: شبیه‌ساز آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری

آزمون ۱۵۵: متناسب با آزمون اول قلم‌چی ۱۵۸
آزمون ۱۵۶: متناسب با آزمون دوم قلم‌چی ۱۶۱
آزمون ۱۵۷: متناسب با آزمون سوم قلم‌چی ۱۶۳
آزمون ۱۵۸: متناسب با آزمون چهارم قلم‌چی ۱۶۵
آزمون ۱۵۹: متناسب با آزمون پنجم قلم‌چی ۱۶۷
آزمون ۱۶۰: متناسب با آزمون ششم قلم‌چی ۱۶۹
آزمون ۱۶۱: متناسب با آزمون هفتم قلم‌چی ۱۷۱
آزمون ۱۶۲: متناسب با آزمون هشتم قلم‌چی ۱۷۳
آزمون ۱۶۳: متناسب با آزمون نهم قلم‌چی ۱۷۵
آزمون ۱۶۴: متناسب با آزمون دهم قلم‌چی ۱۷۷
آزمون ۱۶۵: متناسب با آزمون یازدهم قلم‌چی ۱۷۹
آزمون ۱۶۶: متناسب با آزمون دوازدهم قلم‌چی ۱۸۱
آزمون ۱۶۷: متناسب با آزمون سیزدهم قلم‌چی ۱۸۳
آزمون ۱۶۸: متناسب با آزمون چهاردهم قلم‌چی ۱۸۵
آزمون ۱۶۹: متناسب با آزمون پانزدهم قلم‌چی ۱۸۷
آزمون ۱۷۰: متناسب با آزمون شانزدهم قلم‌چی ۱۸۹
آزمون ۱۷۱: آزمون جامع (۱) متناسب با کنکور سراسری .. ۱۹۱
آزمون ۱۷۲: آزمون جامع (۲) متناسب با کنکور سراسری .. ۱۹۳
آزمون ۱۷۳: آزمون جامع (۳) متناسب با کنکور سراسری .. ۱۹۵
آزمون ۱۷۴: آزمون جامع (۴) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۹۸ - داخل کشور) ۱۹۷
آزمون ۱۷۵: آزمون جامع (۵) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۹۸ - خارج کشور) ۱۹۹

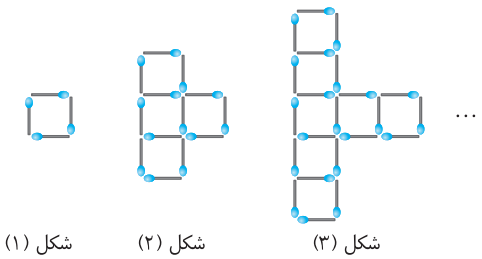
فصل چهاردهم: پاسخ‌های تشریحی ۲۰۲

فصل پانزدهم: پاسخنامهٔ کلیدی ۳۶۶

آزمون ۳ الگو و دنباله

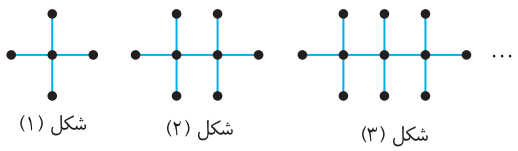
محل انجام محاسبات

۲۱- تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته برای ساختن شکل چهاردهم در الگوی مقابل چندتا است؟



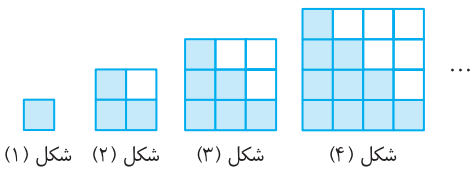
۱) ۱۰۳
۲) ۱۱۲
۳) ۱۲۱
۴) ۱۳۰

۲۲- تعداد نقاط شکل بیستم در الگوی مقابل چندتا است؟



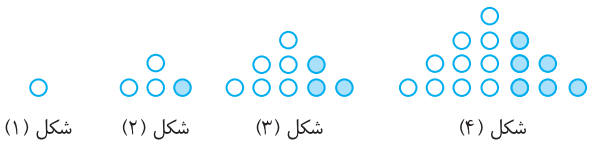
۱) ۶۰
۲) ۶۱
۳) ۶۲
۴) ۶۴

۲۳- در الگوی مقابل، اختلاف تعداد مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده در شکل سی‌اُم چندتاست؟



۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۳۰
۴) ۳۵

۲۴- در الگوی زیر، در چه شکلی نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها برابر با $\frac{۸}{۱۷}$ است؟



۱) ۱۸
۲) ۱۷
۳) ۱۶
۴) ۱۵

۲۵- در الگوی زیر، در شکل چندم تعداد گوی‌های رنگی برابر با ۱۱۳ است؟

۱) ۱۷
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۴

۲۶- همهٔ جمله‌های دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{۲n-k}{۵n+۳}$ با هم برابرند. مقدار k کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$
۲) $-\frac{۴}{۵}$
۳) $-\frac{۶}{۵}$
۴) $-\frac{۷}{۵}$

۲۷- کدام‌یک می‌تواند جملهٔ عمومی دنبالهٔ $۲, ۳, ۱۰, ۱۵, \ldots$ باشد؟

۱) $n+۱$
۲) $n^۲-(-۱)^n$
۳) $۳n^۲-۸n+۷$
۴) $۲n^۲-۵n+۵$

۲۸- در یک دنباله با جملهٔ عمومی a_n، $a_۱=۱$ و به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$ رابطهٔ $a_{n+۱}=\frac{n}{n+۱}a_n$ برقرار است. مقدار $a_{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹۹}$
۲) $\frac{۱}{۱۰۰}$
۳) $\frac{۱}{۱۰۱}$
۴) $\frac{۱}{۱۰۲}$

۲۹- اگر بزرگ‌ترین جملهٔ دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=-۳n^۲+۱۲n+c$ برابر ۸ باشد، مقدار c کدام است؟

۱) ۱۲
۲) -۸
۳) ۲۰
۴) -۴

۳۰- چند جمله از ابتدای دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=\log_۲\frac{n}{n+۱}$ را جمع کنیم تا حاصل برابر -۳ شود؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

آزمون ۴ — دنبالهٔ حسابی (۱)

محل انجام محاسبات

۳۱- در یک دنباله، $a_1=3$ و برای هر $n\geq 1$، $a_n-a_{n+1}=2$. در این دنباله مقدار $\frac{a_{10}}{a_5}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{3}{2}$

۳۲- اگر در دنباله‌ای حسابی $3a_4+4a_5-7a_9=124$، مقدار قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ۳− ۲) ۴− ۳) ۶− ۴) ۸−

۳۳- در دنبالهٔ حسابی $3x-1, 3x-4, 4x-2, \ldots$ جملهٔ چهارم کدام است؟

۱) ۱۹− ۲) ۲۲− ۳) ۲۳− ۴) ۲۵−

۳۴- چندمین جمله از دنبالهٔ حسابی $-1, 2, 5, \ldots$ برابر ۲۱۸ است؟

۱) هفتاد و یکم ۲) هفتاد و چهارم ۳) هفتاد و پنجم ۴) هفتاد و هشتم

۳۵- در دنبالهٔ حسابی $2, 6, 10, \ldots$ چند جملهٔ کوچک‌تر از ۵۰۰ وجود دارد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۲۶ ۴) ۱۲۸

۳۶- سه زاویهٔ مثلثی دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند. میانگین اندازهٔ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه‌های این مثلث کدام است؟

۱) ۴۵° ۲) ۶۰° ۳) ۷۵° ۴) ۹۰°

۳۷- زاویه‌های یک پنج‌ضلعی دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند. اگر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه برابر ۸۶° باشد، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه کدام است؟

۱) ۱۱۰° ۲) ۱۱۵° ۳) ۱۲۰° ۴) ۱۳۰°

۳۸- در جدول زیر، بین دو عدد $\sqrt{3}-5$ و $\sqrt{3}+5$، چهار واسطهٔ حسابی می‌نویسیم. کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم کدام است؟

$\sqrt{3}-5$					$\sqrt{3}+5$

۱) $\sqrt{3}-4$ ۲) $\sqrt{3}-3$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{3}-1$

۳۹- مجموع سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی برابر ۱۵ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۴۵ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\pm\frac{1}{2}$ ۲) ± 2 ۳) ± 3 ۴) ± 4

۴۰- جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی برابر قدرنسبت این دنباله است و حاصل‌ضرب نُه جملهٔ نخست این دنباله برابر $10^8\times 10!$ است. جملهٔ دهم این دنباله کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۹۰۰ ۴) ۱۰۰۰

محل انجام محاسبات

آزمون ۵ دنبالهٔ حسابی (۲)

۴۱- جملهٔ عمومی دنباله‌ای حسابی به‌صورت $a_n=\frac{۵-۲n}{۳}$ است. قدرنسبت دنباله چقدر از جملهٔ اول کمتر است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۴۲- در دنباله‌ای حسابی $a_۱+a_۳=۱۶$ و $a_۲+a_۵+a_۸=۵۱$. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۳- جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی $a, ۲a-۱, ۱-۳a, \ldots$ کدام است؟

۱) $۱-\frac{n}{۲}$ ۲) $n-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}-n$ ۴) $\frac{n}{۲}+۱$

۴۴- اگر $a+b, a+c, b+c$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، کدام گزینه دنباله‌ای حسابی را نشان می‌دهد؟

۱) b, a, c ۲) b, c, a ۳) a, c, b ۴) a, b, c

۴۵- در دنبالهٔ حسابی $۱۹۶, ۱۹۲, ۱۸۸, \ldots$ نخستین جملهٔ کوچک‌تر از ۱۰ چندمین جمله است؟

۱) ۴۶ ۲) ۴۷ ۳) ۴۸ ۴) ۴۹

۴۶- در دنباله‌ای حسابی، جملهٔ دهم ۳۲ واحد کمتر از دومین جمله است. اگر جملهٔ چهارم دنباله برابر ۱۵ باشد، چند جمله از دنباله مثبت هستند؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۴۷- اگر جواب‌های معادلهٔ $(x-a)(x^۲-۸x+۱۲)=۰$ جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، a چند مقدار مختلف ممکن است باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۴۸- اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. نسبت طول ضلع بلندتر زاویهٔ قائمه به طول ضلع کوتاه‌تر زاویهٔ قائمهٔ این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۴۹- مجموع چهار جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی برابر صفر و مجموع مربعات آن‌ها برابر ۸۰ است. حاصل‌ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

۱) -۱۸ ۲) -۲۷ ۳) -۳۶ ۴) -۴۵

۵۰- بین دو عدد $m^۲+۳m+۴$ و $m^۲+۴$، تعداد $m-۱$ عدد را طوری درج می‌کنیم که اعداد حاصل، یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند. قدرنسبت دنبالهٔ حاصل کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

آزمون ۶ دنبالهٔ هندسی (۱)

۵۱- در دنباله‌ای با جملهٔ عمومی a_n می‌دانیم $a_{n+1}=\frac{۳}{۲}a_n$. اگر $a_۳=۳$، مقدار $a_{۲۹}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳^{۲۷}}{۲^{۲۶}}$ ۲) $\frac{۳^{۲۸}}{۲^{۲۷}}$ ۳) $\frac{۳^{۲۹}}{۲^{۲۸}}$ ۴) $\frac{۳^{۳۰}}{۲^{۲۹}}$

۵۲- اگر $\sqrt{a}, \sqrt[۴]{۲}, \sqrt[۳]{۲}$ سه جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی باشند، جملهٔ سیزدهم این دنباله کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $۲\sqrt[۶]{۲}$ ۳) $۲\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $۴\sqrt[۶]{۲}$

۵۳- واسطهٔ حسابی جواب‌های معادله‌ای درجهٔ دوم ۴/۵ و واسطهٔ هندسی جواب‌های آن ۱/۵ است. این معادله کدام است؟

۱) $۴x^۲-۳۶x+۹=۰$ ۲) $۴x^۲+۳۶x+۹=۰$

۳) $x^۲-۱۸x+۹=۰$ ۴) $x^۲+۱۸x+۹=۰$

۵۴- در دنباله‌ای هندسی با جملات مثبت می‌دانیم $a_۱a_۶=۲۷$ و $a_۲a_۴=۹$. مقدار $a_۵$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۸۱

۵۵- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $-\frac{۱}{۲}$، مجموع جملات پنجم و هشتم چند برابر مجموع جملات هفتم و هشتم است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۵۶- حاصل‌ضرب پنج جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی برابر ۱۰۲۴ است. جملهٔ وسط کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۵۷- بین دو عدد $\sqrt{۲}$ و $۱۶\sqrt{۲}$ هفت واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم (جملهٔ اول $\sqrt{۲}$ است). جملهٔ سوم دنبالهٔ حاصل کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۲}$ ۳) $۳۲\sqrt{۲}$ ۴) $۶۴\sqrt{۲}$

۵۸- جملهٔ هشتادونهم دنبالهٔ حسابی $\ldots, -\frac{۹۵}{۸}, -۱۲$ با جملهٔ ششم دنبالهٔ هندسی $\ldots, ۲۴۳$ برابر است. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) -۳ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۵۹- اگر $a, ۸, b$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی‌اند. اگر ۴ واحد به b اضافه کنیم، اعداد جدید دنباله‌ای هندسی می‌سازند. مجموع مقادیر ممکن a کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

۶۰- جملات دوم، ششم و چهاردهم دنباله‌ای حسابی، سه جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی هستند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۲

آزمون ۷ دنبالهٔ هندسی (۲)

محل انجام محاسبات

۶۱- در یک دنبالهٔ هندسی می‌دانیم $\frac{a_۸}{a_۶}=\sqrt{۲}$. مقدار $\frac{a_۷}{a_۳}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\sqrt{۸}$

۶۲- اگر $۲^{x-۴}, ۴^{۳x}, ۸^{۲-۳x}, \ldots$ دنباله‌ای هندسی باشد، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $-\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۰}$

۶۳- اگر جملهٔ هفتم دنبالهٔ هندسی $\log_۴ a, \log_{۱۶} a, \ldots$ برابر $\frac{۱}{۳۲}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۶۴- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱، $a_۵-a_۱=۱۳۰$ و $a_۴-a_۲=۲۵$. مقدار $a_۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۴}$ ۲) $\frac{۵}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲۴}$ ۴) $\frac{۲۵}{۲۴}$

۶۵- بین اعداد مثبت a و b پنج واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم (جملهٔ اول a است). اگر چهار واسطهٔ هندسی درج می‌کردیم، قدرنسبت دو برابر حالت قبل می‌شد. قدرنسبت دنباله در حالتی که پنج واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۶۶- در دنباله‌ای هندسی، مجموع سه جملهٔ متوالی ۱۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۶۴ است. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۶۷- اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱ تشکیل می‌دهند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}}$ ۳) $\frac{۱+\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۴) $\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۱۰}}{۲}}$

۶۸- اگر اعداد $x+۴$، $۲x+y$ و $۲y+x$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی و سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، مقدار $x+۲y$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) ۸

۶۹- جملات سوم، پنجم و ششم دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n=a-n$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی هستند. جملهٔ دهم دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۷۰- در یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت، جملات سوم، پنجم و هشتم به‌ترتیب جملات اول تا سوم یک دنبالهٔ هندسی‌اند. نسبت جملهٔ چهارم دنبالهٔ هندسی به جملهٔ دوازدهم دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) $\frac{۲۳}{۲۶}$ ۲) $\frac{۲۵}{۲۶}$ ۳) $\frac{۲۷}{۲۶}$ ۴) $\frac{۲۹}{۲۶}$

آزمون ۸ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (۱)

محل انجام محاسبات

۷۱- جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی برابر -۶ و جملهٔ آخر آن برابر ۳۰ است. اگر مجموع جمله‌های این دنبالهٔ حسابی ۱۲۰ باشد، تعداد جمله‌های آن چندتا است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۷۲- اگر $\frac{n-۲}{۲n}, \frac{n-۳}{۲n}, \frac{n-۴}{۲n}$ سه جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی باشند، مجموع n جملهٔ نخست این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{n-۳}{۲}$ ۲) $\frac{n-۲}{۴}$ ۳) $\frac{n-۳}{۴}$ ۴) $\frac{n-۱}{۴}$

۷۳- مجموع تعدادی از جمله‌های دنبالهٔ حسابی $۵۰, ۴۶, ۴۲, \ldots$ از ابتدا حداکثر کدام است؟

۱) ۳۳۰ ۲) ۳۳۴ ۳) ۳۳۸ ۴) ۳۴۴

۷۴- در یک دنبالهٔ حسابی ۲ واحد از قدرنسبت کم می‌کنیم. برای اینکه مجموع ده جملهٔ اول ثابت بماند، چقدر باید به جملهٔ اول اضافه کنیم؟

۱) ۹ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۷۵- اگر اعداد سمت چپ معادلهٔ $۱+۴+۷+\cdots+x=۱۴۵$ جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، مقدار x کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۵ ۳) ۲۸ ۴) ۳۱

۷۶- قدرنسبت دنباله‌ای هندسی برابر ۲ است. مجموع n جملهٔ نخست این دنباله کدام است؟

۱) $۲a_n - a_۱$ ۲) $۳a_n - a_۱$ ۳) $۲a_n + a_۱$ ۴) $۳a_n + a_۱$

۷۷- در دنباله‌ای هندسی $a_۲ = ۳$ و $a_۷ = ۹۶$. مقدار $S_{۱۰}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۰۴۹}{۲}$ ۲) $\frac{۳۰۵۷}{۲}$ ۳) $\frac{۳۰۶۹}{۲}$ ۴) $\frac{۳۰۷۱}{۲}$

۷۸- مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a, aq, aq^۲, \ldots$ چند برابر مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a, \frac{a}{q}, \frac{a}{q^۲}, \cdots$ است؟

۱) q^n ۲) $q^{n-۱}$ ۳) $q^{n+۱}$ ۴) $q^{n+۲}$

۷۹- در دنباله‌ای هندسی و غیرثابت با جمله‌های مثبت $S_۶ = ۲۱S_۲$. قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۸۰- در دنباله‌ای هندسی، مجموع ده جملهٔ اول ۳۳ برابر مجموع پنج جملهٔ اول است. جملهٔ پنجم چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) ۸۱ ۲) ۲۴۳ ۳) ۱۶ ۴) ۷۲۹

آزمون ۹ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (۲)

محل انجام محاسبات

۸۱- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع جمله‌های هفتم و چهاردهم برابر ۶۰ است. مجموع بیست جملهٔ اول دنباله کدام است؟
۱) ۶۰۰ ۲) ۶۲۰ ۳) ۶۴۰ ۴) ۶۵۰

۸۲- در دنبالهٔ حسابی $۳, ۷, ۱۱, \ldots$ حداقل چند جمله از ابتدای آن را جمع کنیم تا حاصل بزرگ‌تر از ۳۰۰ شود؟
۱) یازده جمله ۲) دوازده جمله ۳) سیزده جمله ۴) چهارده جمله

۸۳- در دنباله‌ای حسابی و n جمله‌ای، $a_۱ = -۷$ ، $a_۲ = -۳$ و $S_n - a_n = ۵۶$. مقدار n کدام است؟
۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۸۴- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع سه جملهٔ اول برابر ۱۰ و مجموع سه جملهٔ آخر برابر ۸۰ است. اگر مجموع تمام جمله‌ها برابر ۳۰۰ باشد، تعداد جمله‌های دنباله کدام است؟
۱) ۲۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۸۵- در یک دنبالهٔ حسابیِ $۲k+۱$ جمله‌ای، نسبت مجموع $k+۱$ جملهٔ با ردیف فرد به مجموع k جملهٔ با ردیف زوج کدام است؟
۱) $\frac{۲k}{۲k+۱}$ ۲) $\frac{۴k+۳}{۲k+۱}$ ۳) $\frac{۴k+۳}{۴k+۲}$ ۴) $\frac{k+۱}{k}$

۸۶- مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $S_n = \frac{۴}{۳}(۳^n - ۱)$ به‌دست می‌آید. جملهٔ پنجم دنباله کدام است؟
۱) ۱۴۴ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۲۴ ۴) ۲۷۰

۸۷- در دنبالهٔ هندسی $۱, \sqrt[۳]{۳}, \sqrt[۳]{۹}, \ldots$ مجموع شش جملهٔ دوم چند برابر مجموع شش جملهٔ اول است؟
۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۸۸- دربارهٔ دنبالهٔ $a_۱, a_۲, \ldots$ می‌دانیم $S_n = ۲^n - ۱$. حاصل $a_۱^۲ + \cdots + a_n^۲$ کدام است؟
۱) $(۲^n - ۱)^۲$ ۲) $\frac{۱}{۳}(۲^n - ۱)$ ۳) $۴^n - ۱$ ۴) $\frac{۱}{۳}(۴^n - ۱)$

۸۹- تعداد جمله‌های یک دنبالهٔ هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جمله‌های دنباله ۳ برابر مجموع جمله‌های با ردیف زوج باشد، قدرنسبت آن کدام است؟
۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۰- حاصل $\frac{t^{۱۱} + t^{۱۰} + t^۹ + \cdots + t + ۱}{t^۹ + t^۶ + t^۳ + ۱}$ به‌ازای $t = \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}$ کدام است؟
۱) $۳ + \sqrt{۵}$ ۲) $۳ - \sqrt{۵}$ ۳) $۲ + \sqrt{۵}$ ۴) $۴ - \sqrt{۵}$

آزمون ۱۰ آزمون فصل دوم (۱) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

محل انجام محاسبات

۹۱- در یک دنبالهٔ اعداد، $a_1=1$ و برای هر $n\geq 2$، $a_n=2a_{n-1}+1$. جملهٔ هشتم این دنباله کدام است؟ تجربی - ۹۵

۱) ۱۲۷ ۲) ۱۵۹ ۳) ۲۴۷ ۴) ۲۵۵

۹۲- اعداد $2^b, 4\sqrt{2}, 2^a$ سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی‌اند. واسطهٔ حسابی a و b کدام است؟ ریاضی - ۸۷

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) $\sqrt{2}$

۹۳- تفاضل جملهٔ دهم از جملهٔ دوازدهم یک دنبالهٔ حسابی برابر ۵ و مجموع جملهٔ دهم و دوازدهم برابر ۲۵ است. جملهٔ بیست و یکم این دنباله کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۸۴

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷/۵ ۴) ۳۸/۵

۹۴- جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنبالهٔ حسابی، می‌توانند سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟ تجربی - ۹۲

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{7}{4}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{7}{3}$

۹۵- اگر جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنبالهٔ حسابی به‌ترتیب سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟ ریاضی - ۸۱

۱) ۳ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{4}{3}$

۹۶- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جملهٔ اول برابر ۳ است. مجموع شش جملهٔ اول کدام است؟ ریاضی - ۸۸

۱) ۱۰/۸ ۲) ۱۱/۲ ۳) ۱۲/۶ ۴) ۱۳/۴

۹۷- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع بیست جملهٔ اول سه برابر مجموع دوازده جملهٔ اول آن است. اگر جملهٔ سوم برابر ۶ باشد، جملهٔ دهم کدام است؟ ریاضی - ۹۰

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۹۸- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع پنج جملهٔ اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جملهٔ بعدی است. جملهٔ دوم چند برابر جملهٔ اول است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۹- عددهای طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جمله‌های هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد:

$$(1),(2,3),(4,5,6),(7,8,9,10),\ldots$$

مجموع جمله‌ها در دستهٔ بیستم کدام است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۴

۱) ۴۰۱۰ ۲) ۴۰۲۰ ۳) ۴۰۳۰ ۴) ۴۰۴۰

۱۰۰- حاصل $\frac{t^8-t^7+t^6-\cdots-t+1}{t^6-t^3+1}$ به‌ازای $t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

آزمون ۱۱ آزمون فصل دوم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

محل انجام محاسبات

۱۰۱- در یک دنبالهٔ اعداد، $a_1=3$ و برای هر $n\geq 2$، $a_n=2a_{n-1}-2$. مقدار a_8-a_7 کدام است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱) ۳۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

۱۰۲- اعداد $2p+3, 3p+4, 5p-1$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟ ریاضی - ۸۴

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۰۳- در یک دنبالهٔ هندسی مجموع سه جملهٔ متوالی برابر ۱۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۲۱۶ است. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟ تجربی - ۹۰

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۰۴- در یک دنبالهٔ حسابی جملات اول، پنجم و یازدهم به‌ترتیب سه جملهٔ متوالی از دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱ هستند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱) $\frac{6}{5}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۰۵- در یک دنبالهٔ حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ هندسی باشند. چندمین جملهٔ این دنباله، صفر است؟ تجربی - ۸۸

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۱۰۶- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع سه جملهٔ اول ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول ۱۵۳ است. جملهٔ اول چند برابر جملهٔ پنجم است؟ ریاضی - ۸۹

۱) $\frac{81}{16}$ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۶

۱۰۷- در بیست جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ است. جملهٔ اول کدام است؟ خارج از کشور تجربی - ۸۵

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۸- عددهای طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جمله‌های هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته باشد:

$$(1),(3,5),(7,9,11),\dots$$

مجموع دو جملهٔ اول و آخر دستهٔ سی‌اُم کدام است؟ تجربی - ۹۴

۱) ۱۷۰۰ ۲) ۱۷۵۰ ۳) ۱۸۰۰ ۴) ۱۸۵۰

۱۰۹- تعداد جمله‌های یک دنبالهٔ هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جمله‌های دنباله ۳ برابر مجموع جمله‌های با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟ ریاضی - ۹۴

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۰- حاصل $\frac{t^{11}+t^{10}+t^9+\cdots+t+1}{t^9+t^6+t^3+1}$ به‌ازای $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ کدام است؟ ریاضی - ۹۳

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۶ (۱) توجه کنید که $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

پس $n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)=۲۴$

به این ترتیب $\begin{cases} n(A)+n(B)=۲۴ \\ n(A)-n(B)=۴ \end{cases} \Rightarrow n(B)=۱۰$

۱۷ (۱) توجه کنید که $A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow n(A\cup B)=n(B)$

طبق فرض $n(A\cup B)=۹$، پس $n(B)=۹$. از طرف دیگر،

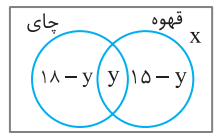
$$n(A)+n(A')=n(B)+n(B')\Rightarrow n(A)+۱۴=۹+۱۰\Rightarrow n(A)=۵$$

۱۸ (۲) فرض کنید A مجموعهٔ علاقه‌مندان به ریاضی و B مجموعهٔ علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به هیچ کدام از این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$$۱۰۰-x=۸۵+۷۰-n(A\cap B)$$

پس $n(A\cap B)=۵۵+x$. برای اینکه $n(A\cap B)$ حداقل باشد، باید $x=۰$، بنابراین حداقل مقدار ممکن $n(A\cap B)$ برابر با ۵۵ است.

۱۹ (۲) **راه‌حل اول** فرض کنید x نفر نه چای دوست دارند، نه قهوه، بنابراین $۳۰-x$ نفر یا چای دوست دارند یا قهوه و y نفر هم چای و هم قهوه دوست دارند. تعداد کسانی را که چای یا قهوه یا هر دو را دوست دارند در نمودار ون مقابل مشخص کرده‌ایم.



$$x+۱۸-y+y+۱۵-y=۳۰\Rightarrow x=y-۳$$

با توجه به اینکه تعداد افراد هیچ گروهی منفی نیست، می‌توان نوشت

$$x\geq ۰\ ,\ y\geq ۰\ ,\quad ۱۵-y\geq ۰\Rightarrow y\leq ۱۵\Rightarrow ۰\leq y\leq ۱۵$$

پس $۰\leq y-۳\leq ۱۲\Rightarrow ۰\leq x\leq ۱۲$

پس حداکثر ۱۲ نفر نه چای دوست دارند نه قهوه.

راه‌حل دوم فرض کنید A مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که چای دوست ندارند و B مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که قهوه دوست ندارند. در این صورت

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=۱۲+۱۵-n(A\cup B)=۲۷-n(A\cup B)$$

از طرف دیگر، $n(A\cup B)\geq n(B)=۱۵$، بنابراین

$$n(A\cap B)=۲۷-n(A\cup B)\leq ۲۷-۱۵=۱۲$$

بنابراین حداکثر ۱۲ دانش‌آموز ممکن است که نه چای دوست داشته باشند نه قهوه (توجه کنید که اگر $A\subseteq B$، این وضعیت پیش می‌آید).

۲۰ (۳) چون $A\subseteq B$، پس $A\cup B=B$. از طرف دیگر،

$$A\subseteq B\Rightarrow n(A)\leq n(B)$$

اکنون توجه کنید که $۱۴=n(A)+۲n(B)\leq n(B)+۲n(B)=۳n(B)$ و چون $n(B)$ عددی طبیعی است، پس $n(B)\geq ۵$. بنابراین $n(A\cup B)=n(B)\geq ۵$.

۲۱ (۳) شکل اول ۴ چوب کبریت دارد و برای ساختن هر شکل، ۹ چوب کبریت به شکل قبلی اضافه می‌شود. پس در شکل nاُم، $۴+۹(n-۱)$ یعنی $۹n-۵$ چوب کبریت وجود دارد. بنابراین در شکل چهاردهم ۱۲۱ چوب کبریت وجود دارد.

۲۲ (۳) **راه‌حل اول** تعداد نقاط شکل‌ها را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	…	n
تعداد نقاط	۱+۳+۱	۲+۴+۲	۳+۵+۳	…	n+(n+۲)+n

بنابراین در شکل nاُم، $۳n+۲$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

راه‌حل دوم اگر ۴ نقطه به چهار گوشهٔ شکل‌ها اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل nاُم برابر $۳(n+۲)$ خواهد بود. پس در شکل nاُم، $۳(n+۲)-۴$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

۲۳ (۳) تعداد مربع‌های رنگ‌شده در شکل nاُم برابر است با $۱+۲+۳+\cdots+n$.

تعداد مربع‌های رنگ‌نشده در شکل nاُم برابر است با $۰+۱+۲+\cdots+(n-۱)$. بنابراین تعداد مربع‌های رنگ شده در شکل nاُم، n تا بیشتر از تعداد مربع‌های رنگ نشدهٔ آن است. پس در شکل سی‌اُم، اختلاف مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده برابر ۳۰تا است.

۲۴ (۲) تعداد کل گوی‌ها در شکل nاُم برابر است با

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$$

تعداد گوی‌های رنگی در شکل nاُم برابر است با $۱+۲+۳+\cdots+(n-۱)=\frac{n(n-۱)}{۲}$

بنابراین نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها در شکل nاُم برابر است با $\frac{\frac{n(n-۱)}{۲}}{n^۲}=\frac{n-۱}{۲n}$. به این ترتیب $\frac{n-۱}{۲n}=\frac{۸}{۱۷}$. پس $n=۱۷$.

۲۵ (۲) با توجه به الگو، در شکل‌هایی که شمارهٔ آن‌ها زوج است، نصف تعداد گوی‌ها یعنی $\frac{n^۲}{۲}$ رنگ می‌شود. در شکل‌هایی که شمارهٔ آن‌ها فرد است، تعداد گوی‌ها نیز فرد است. اگر گوی وسطی را کنار بگذاریم تعداد گوی‌ها $n^۲-۱$ خواهد بود که نصف آن‌ها را رنگ می‌کنیم و سپس گوی وسطی را نیز رنگ می‌کنیم. پس $\frac{n^۲-۱}{۲}+۱$ گوی رنگ می‌شود. توجه کنید که اگر n عددی زوج باشد، $\frac{n^۲}{۲}$ نیز عددی زوج است. پس در شکل‌های با شمارهٔ زوج، تعداد گوی‌های رنگ شده زوج است و در شکل‌هایی با شمارهٔ فرد، تعداد گوی‌های رنگ شده فرد است. چون ۱۱۳ گوی رنگی در شکل nاُم وجود دارد، پس n باید فرد باشد. بنابراین

$$\frac{n^۲-۱}{۲}+۱=۱۱۳\Rightarrow n^۲-۱=۲۲۴\Rightarrow n^۲=۲۲۵\Rightarrow n=۱۵$$

۲۶ (۳) چون همهٔ جمله‌های دنباله با هم برابرند، پس جمله‌های اول و دوم آن نیز با هم برابرند:

$$a_۱=a_۲\Rightarrow\frac{۲-k}{۸}=\frac{۴-k}{۱۳}\Rightarrow ۲۶-۱۳k=۳۲-۸k\Rightarrow ۵k=-۶\Rightarrow k=-\frac{۶}{۵}$$

توجه کنید که اگر $k=-\frac{۶}{۵}$، آن‌گاه $a_n=\frac{۲}{۵}$.

۲۷ (۲) چند جملهٔ اول هر کدام از دنباله‌ها به شکل زیر است:

گزینهٔ (۱) $۲,۳,۴,۵,\ldots$ گزینهٔ (۲) $۲,۳,۱۰,۱۵,\ldots$

گزینهٔ (۳) $۲,۳,۱۰,۲۳,\ldots$ گزینهٔ (۴) $۲,۳,۸,۱۷,\ldots$

بنابراین فقط $n^۲-(-۱)^n$ می‌تواند جملهٔ عمومی دنباله باشد.

۲۸ (۲) به چند جملهٔ اول دنباله توجه کنید:

$$a_۲=\frac{۱}{۲}a_۱=\frac{۱}{۲}\times ۱=\frac{۱}{۲}\ ,\quad a_۳=\frac{۲}{۳}a_۲=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}\ ,\quad a_۴=\frac{۳}{۴}a_۳=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین با توجه به الگوی جملات می‌توان گفت $a_n=\frac{۱}{n}$، پس $a_{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}$.

۲۹ (۴) بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم $y=-۳x^۲+۱۲x+c$ به‌ازای $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱۲}{-۶}=۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین بزرگ‌ترین جملهٔ دنبالهٔ مورد نظر برابر $a_۲$ است. در نتیجه $a_۲=۸\Rightarrow -۳\times ۴+۱۲\times ۲+c=۸\Rightarrow c=-۴$

۳۰ (۳) توجه کنید که

$$a_۱=\log_۲\frac{۱}{۲}\ ,\quad a_۲=\log_۲\frac{۲}{۳}\ ,\quad a_۳=\log_۲\frac{۳}{۴}\ ,\quad \ldots$$

بنابراین مجموع n جملهٔ اول دنباله به‌صورت زیر است:

$$S_n=\log_۲\frac{۱}{۲}+\log_۲\frac{۲}{۳}+\log_۲\frac{۳}{۴}+\cdots+\log_۲\frac{n-۱}{n}+\log_۲\frac{n}{n+۱}$$

$$=\log_۲(\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times\cdots\times\frac{n-۱}{n}\times\frac{n}{n+۱})=\log_۲\frac{۱}{n+۱}=-\log_۲(n+۱)$$

بنابراین $-\log_۲(n+۱)=-۳\Rightarrow n+۱=۲^۳=۸\Rightarrow n=۷$

۳۱ ۳ چون $a_{n+1}-a_n=-2$، پس دنبالهٔ مورد نظر دنباله‌ای حسابی است که قدرنسبت آن -2 است. چون جملهٔ اول برابر ۳ است، پس

$$a_5=a_1+4d=3+4(-2)=-5\ ,\quad a_{10}=a_1+9d=3+9(-2)=-15$$

بنابراین $\frac{a_{10}}{a_5}=\frac{-15}{-5}=3$.

۳۲ ۲ از رابطهٔ داده شده به‌دست می‌آید

$$3(a_1+3d)+4(a_1+4d)-7(a_1+8d)=124\Rightarrow -31d=124\Rightarrow d=-4$$

۳۳ ۴ قدرنسبت این دنباله برابر است با $3x-4-(3x-1)=-3$

بنابراین $4x-2=(3x-4)-3\Rightarrow x=-5$

بنابراین جملهٔ سوم دنباله برابر است با $4(-5)-2=-22$ و جملهٔ چهارم برابر است با $-22-3=-25$

۳۴ ۲ چون $a_1=-1$ و $d=2-(-1)=3$، پس $a_n=-1+3(n-1)$ یعنی $a_n=3n-4$. بنابراین $a_k=3k-4=218$، پس $k=74$.

۳۵ ۲ چون $a_1=2$ و $d=4$، پس جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $a_n=2+4(n-1)=4n-2$ است. برای اینکه جمله‌ها کوچک‌تر از ۵۰۰ باشند، باید $a_n<500$ باشد. یعنی

$$4n-2<500\Rightarrow n<\frac{502}{4}\Rightarrow n\le 125$$

پس ۱۲۵ جملهٔ اول دنباله کمتر از ۵۰۰ هستند.

۳۶ ۲ اندازهٔ زاویه‌های مثلث را به‌صورت $a-d,a,a+d$ در نظر می‌گیریم.

مجموع اندازهٔ زاویه‌های مثلث برابر 180° است. پس

$$a-d+a+a+d=180^\circ\Rightarrow a=60^\circ$$

میانگین اندازهٔ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث همان a است که برابر 60° است.

۳۷ ۴ زاویه‌های پنج‌ضلعی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a-2d,a-d,a,a+d,a+2d$$

در نتیجه، چون مجموع اندازهٔ زاویه‌های پنج‌ضلعی برابر 540° است، پس

$$a-2d+a-d+a+a+d+a+2d=540^\circ$$

بنابراین $5a=540^\circ$ و در نتیجه $a=108^\circ$. اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه 86° است، پس $a-2d=86^\circ$ و در نتیجه $d=11^\circ$. پس اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه یعنی $a+2d$ برابر است با $108^\circ+2\times 11^\circ=130^\circ$.

۳۸ ۲ **راه‌حل اول** چون $a_1=\sqrt{3}-5$ و $a_6=\sqrt{3}+5$، پس

$$a_6=a_1+5d\Rightarrow \sqrt{3}+5=\sqrt{3}-5+5d\Rightarrow d=2$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، عدد $\sqrt{3}-5+2$ یا همان $\sqrt{3}-3$ است.

راه‌حل دوم قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر است با

$$d=\frac{(\sqrt{3}+5)-(\sqrt{3}-5)}{4+1}=\frac{10}{5}=2$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، برابر است با $(\sqrt{3}-5)+2=\sqrt{3}-3$

۳۹ ۴ سه جملهٔ متوالی دنباله را به‌صورت $a-d,a,a+d$ در نظر می‌گیریم.

بنابراین $a-d+a+a+d=15\Rightarrow 3a=15\Rightarrow a=5$

از طرف دیگر، $(a-d)\times a\times(a+d)=45\Rightarrow a(a^2-d^2)=45$

چون $a=5$، پس $5(25-d^2)=45\Rightarrow d^2=16\Rightarrow d=\pm 4$

۴۰ ۲ فرض کنید قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر d باشد. در این صورت

$$a_1=d\ ,\quad a_n=a_1+(n-1)d=d+(n-1)d=nd$$

به این ترتیب $a_1a_2a_3\dots a_9=10^8\times 10!\Rightarrow d(2d)(3d)\cdots(9d)=10^8\times 10!$

$$d^9\times 9!=10^9\times 9!\Rightarrow d=10$$

بنابراین $a_{10}=10d=100$.

۴۱ ۴ **راه‌حل اول** با قرار دادن $n=1$ در جملهٔ عمومی به‌دست می‌آید $a_1=1$. با قرار دادن $n=2$ در جملهٔ عمومی به‌دست می‌آید $a_2=\frac{1}{3}$. بنابراین $d=a_2-a_1=-\frac{2}{3}$. پس $a_1-d=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$.

راه‌حل دوم جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d و جملهٔ اول a_1 به‌صورت $a_n=a_1+(n-1)d$ است، بنابراین $a_n=dn+(a_1-d)=-\frac{2}{3}n+\frac{5}{3}$. پس

$$a_1-d=\frac{5}{3}$$

۴۲ ۲ از $a_1+a_3=16$ نتیجه می‌شود $a_1+a_1+2d=16\Rightarrow a_1+d=8$

چون $a_2+a_5+a_8=51$، پس $a_1+d+a_1+4d+a_1+7d=51\Rightarrow 3a_1+12d=51$

از حل دستگاه $\begin{cases}a_1+d=8\\3a_1+12d=51\end{cases}$ به‌دست می‌آید $d=3$.

۴۳ ۱ چون دنباله حسابی است، پس $2a-1=\frac{a+1-3a}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

بنابراین $d=(2a-1)-a=a-1=-\frac{1}{2}$. پس جملهٔ عمومی دنباله به شکل مقابل است:

$$a_n=a_1+(n-1)d\Rightarrow a_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(n-1)=1-\frac{n}{2}$$

۴۴ ۴ **راه‌حل اول** چون $a+b,a+c,b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c-(a+b)=(b+c)-(a+c)\Rightarrow c-b=b-a$$

در نتیجه a,b,c دنباله‌ای حسابی است.

راه‌حل دوم چون $a+b,a+c,b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c=\frac{a+b+b+c}{2}\Rightarrow 2(a+c)=a+2b+c\Rightarrow a+c=2b$$

در نتیجه a,b,c دنباله‌ای حسابی است.

۴۵ ۳ جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $a_n=196-4(n-1)=200-4n$ است. بنابراین $a_{50}=0$، در نتیجه، چون قدرنسبت دنباله برابر -4 است، پس

$$a_{47}=12,\quad a_{48}=8,\quad a_{49}=4,\quad a_{50}=0$$

۴۶ ۲ ابتدا قدرنسبت دنباله را پیدا می‌کنیم: $d=\frac{a_{10}-a_2}{10-2}=\frac{-32}{8}=-4$

بنابراین $a_4=a_1+3d=a_1-12=15$ و در نتیجه $a_1=27$. بنابراین جملهٔ عمومی دنباله می‌شود $a_n=27-4(n-1)=31-4n$. اکنون توجه کنید که

$$a_n>0\Rightarrow 31-4n>0\Rightarrow n\le 7$$

بنابراین هفت جملهٔ نخست دنباله مثبت هستند.

۴۷ ۲ چون $x^2-8x+12=(x-6)(x-2)$، پس جواب‌های معادلهٔ مورد نظر a، ۲ و ۶ هستند. حالت‌های مختلفی که این سه عدد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند، در زیر آمده است (توجه کنید که عدد وسط میانگین حسابی دو عدد دیگر است):

$$6,2,a\Rightarrow\frac{6+a}{2}=2\Rightarrow a=-2\ ,\qquad 2,6,a\Rightarrow\frac{2+a}{2}=6\Rightarrow a=10$$

$$6,a,2\Rightarrow\frac{6+2}{2}=a\Rightarrow a=4\ ,\qquad 2,a,6\Rightarrow\frac{2+6}{2}=a\Rightarrow a=4$$

$$a,6,2\Rightarrow\frac{a+2}{2}=6\Rightarrow a=10\ ,\qquad a,2,6\Rightarrow\frac{a+6}{2}=2\Rightarrow a=-2$$

بنابراین a ممکن است سه مقدار مختلف داشته باشد.

۴۸ (۳) اضلاع مثلث را $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$(a-d)^۲+a^۲=(a+d)^۲\Rightarrow a^۲+d^۲-۲ad+a^۲=a^۲+d^۲+۲ad$$

$$a^۲=۴ad\Rightarrow a=۴d$$

چون وتر بلندترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است، پس طول ضلع‌های زاویهٔ قائمه a و $a-d$ است، در نتیجه نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{a}{a-d}=\frac{۴d}{۴d-d}=\frac{۴d}{۳d}=\frac{۴}{۳}$

۴۹ (۳) چهار جملهٔ متوالی دنباله را به‌صورت $a-۳d, a-d, a+d, a+۳d$ در نظر می‌گیریم. بنابراین $a-۳d+a-d+a+d+a+۳d=۰\Rightarrow ۴a=۰\Rightarrow a=۰$

پس دنباله به‌صورت $-۳d, -d, d, ۳d$ است و

$$۹d^۲+d^۲+d^۲+۹d^۲=۸۰\Rightarrow d^۲=۴$$

بنابراین، حاصل‌ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد برابر است با

$$(۳d)(-۳d)=-۹d^۲=-۳۶$$

۵۰ (۳) ابتدا توجه کنید که m باید عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ باشد. پس

$$m^۲+۴<m^۲+۳m+۴$$

اگر $m-۱$ عدد بین عددهای داده شده درج کنیم، آن‌گاه قدرنسبت دنبالهٔ حاصل، برابر است با $d=\frac{m^۲+۳m+۴-m^۲-۴}{(m-۱)+۱}=\frac{۳m}{m}=۳$

۵۱ (۱) دنبالهٔ a_n، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{۳}{۲}$ است. در نتیجه

$$a_۳=a_۱r^۲\Rightarrow a_۳=a_۱(\frac{۳}{۲})^۲=۳\Rightarrow a_۱=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین $a_{۲۹}=a_۱(\frac{۳}{۲})^{۲۸}=\frac{۴}{۳}\times(\frac{۳}{۲})^{۲۸}=\frac{۳^{۲۷}}{۲^{۲۶}}$.

۵۲ (۲) ابتدا توجه کنید که $\sqrt[۴]{۲}$ واسطهٔ هندسی $\sqrt{a}$ و $\sqrt[۳]{۲}$ است، پس

$$(\sqrt[۴]{۲})^۲=\sqrt{a}\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}=\sqrt{a}\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}$$

از طرف دیگر، قدرنسبت این دنباله برابر است با $r=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۴]{۲}}$، در نتیجه

$$a_{۱۳}=a_۱r^{۱۲}=\sqrt{a}(\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۴]{۲}})^{۱۲}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}(\frac{۲^۴}{۲^۳})=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}\times۲=\frac{\sqrt[۶]{۲^۳}}{\sqrt[۶]{۲^۲}}(۲)=۲\sqrt[۶]{۲}$$

۵۳ (۱) فرض می‌کنیم جواب‌های معادله $x_۱$ و $x_۲$ باشند. در این صورت

$$\sqrt{x_۱x_۲}=۱/۵=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x_۱x_۲=\frac{۹}{۴},\quad \frac{x_۱+x_۲}{۲}=۴/۵\Rightarrow x_۱+x_۲=۹$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل $x^۲-۹x+\frac{۹}{۴}=۰$ است که اگر طرفین آن را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $۴x^۲-۳۶x+۹=۰$.

۵۴ (۳) از تساوی $a_۱a_۶=۲۷$ نتیجه می‌شود $a_۱\times a_۱r^۵=۲۷\Rightarrow a_۱^۲r^۵=۲۷$

از تساوی $a_۲a_۴=۹$ به‌دست می‌آید $a_۱r\times a_۱r^۳=۹\Rightarrow a_۱^۲r^۴=۹$

از تقسیم طرفین دو تساوی به‌دست آمده نتیجه می‌شود $\frac{a_۱^۲r^۵}{a_۱^۲r^۴}=\frac{۲۷}{۹}\Rightarrow r=۳$

با جای‌گذاری $r=۳$ در یکی از رابطه‌ها نتیجه می‌شود $a_۱=\pm\frac{۱}{۳}$. چون جملات دنباله مثبت هستند، پس $a_۱=\frac{۱}{۳}$ و در نتیجه $a_۵=a_۱r^۴=\frac{۱}{۳}\times۳^۴=۲۷$.

۵۵ (۲) مجموع جملات پنجم و هشتم برابر است با

$$a_۵+a_۸=a_۱r^۴+a_۱r^۷=a_۱r^۴(۱+r^۳)$$

مجموع جملات هفتم و هشتم برابر است با $a_۷+a_۸=a_۱r^۶+a_۱r^۷=a_۱r^۶(۱+r)$

بنابراین $\frac{a_۵+a_۸}{a_۷+a_۸}=\frac{a_۱r^۴(۱+r^۳)}{a_۱r^۶(۱+r)}=\frac{۱+r^۳}{r^۲(۱+r)}=\frac{۱-\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۴}(۱-\frac{۱}{۲})}=۷$.

۵۶ (۳) این جملات را به‌صورت $\frac{a}{r^۲}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^۲$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\frac{a}{r^۲}\times\frac{a}{r}\times a\times ar\times ar^۲=۱۰۲۴\Rightarrow a^۵=۲^{۱۰}=۴^۵$$

در نتیجه جملهٔ وسط برابر ۴ است.

۵۷ (۱) **راه‌حل اول** این اعداد به شکل زیر هستند:

$$\sqrt{۲}, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, ۱۶\sqrt{۲}$$

پس $a_۱=\sqrt{۲}$ و $a_۹=۱۶\sqrt{۲}$. بنابراین

$$a_۱r^۸=۱۶\sqrt{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}r^۸=۱۶\sqrt{۲}\Rightarrow r^۸=۱۶\Rightarrow(r^۲)^۴=۲^۴\Rightarrow r^۲=۲$$

در نتیجه $a_۳=a_۱r^۲=۲\sqrt{۲}$.

راه‌حل دوم ابتدا قدرنسبت دنبالهٔ هندسی حاصل را به دست می‌آوریم:

$$r^{۷+۱}=\frac{۱۶\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}\Rightarrow r^۸=۱۶=۲^۴\Rightarrow r=\pm\sqrt{۲}$$

$$a_۳=a_۱r^۲=\sqrt{۲}\times(\pm\sqrt{۲})^۲=۲\sqrt{۲}$$

۵۸ (۲) قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر است با $-\frac{۹۵}{۸}-(-۱۲)=\frac{۱}{۸}$. بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت $a_n=-۱۲+\frac{۱}{۸}(n-۱)$ است.

در نتیجه جملهٔ هشتادونهم این دنباله برابر است با $a_{۸۹}=-۱۲+\frac{۱}{۸}\times(۸۹-۱)=-۱$.

اگر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را با r نشان دهیم، آن‌گاه جملهٔ ششم دنبالهٔ هندسی $=۲۴۳r^۵=(۳r)^۵$

بنابراین $(۳r)^۵=-۱\Rightarrow ۳r=-۱\Rightarrow r=-\frac{۱}{۳}$

۵۹ (۱) چون ۸ واسطهٔ حسابی عددهای a و b است، پس

$$a+b=۱۶\Rightarrow b=۱۶-a$$

اگر ۴ واحد به b اضافه کنیم، ۸ واسطهٔ هندسی عددهای a و $b+۴$ می‌شود. بنابراین

$$۶۴=a(b+۴)=a(۱۶-a+۴)=۲۰a-a^۲$$

پس $a^۲-۲۰a+۶۴=۰$ و مجموع مقادیر ممکن a برابر مجموع جواب‌های این معادله، یعنی برابر ۲۰ است (توجه کنید در این معادله $\Delta>۰$).

۶۰ (۴) جمله‌های دوم، ششم و چهاردهم دنبالهٔ حسابی را به‌ترتیب به‌صورت $a+d$، $a+۵d$ و $a+۱۳d$ در نظر می‌گیریم. چون این اعداد دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس $(a+۵d)^۲=(a+d)(a+۱۳d)\Rightarrow ۱۲d^۲=۴ad\Rightarrow a=۳d$

بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با $r=\frac{a+۵d}{a+d}=\frac{۳d+۵d}{۳d+d}=\frac{۸d}{۴d}=۲$.

۶۱ (۲) چون $\frac{a_۸}{a_۶}=\sqrt{۲}$، پس $\frac{a_۱r^۷}{a_۱r^۵}=\sqrt{۲}$. در نتیجه $r^۲=\sqrt{۲}$. بنابراین

$$\frac{a_۷}{a_۳}=\frac{a_۱r^۶}{a_۱r^۲}=r^۴=(r^۲)^۲=\sqrt{۲}^۲=۲$$

۶۲ (۳) چون $۴^{۳x}$ واسطهٔ هندسی $۲^{x-۴}$ و $۸^{۲-۳x}$ است، پس

$$(۴^{۳x})^۲=۲^{x-۴}\times۸^{۲-۳x}\Rightarrow۲^{۱۲x}=۲^{x-۴}\times۲^{۶-۹x}\Rightarrow۲^{۱۲x}=۲^{۲-۸x}$$

بنابراین $۱۲x=۲-۸x$، یعنی $x=\frac{۱}{۱۰}$.

۶۳ (۲) قدرنسبت دنبالهٔ هندسی مورد نظر برابر است با

$$r=\frac{\log_{۱۶}a}{\log_۴a}=\frac{\frac{\log a}{\log ۱۶}}{\frac{\log a}{\log ۴}}=\frac{\log ۴}{\log ۱۶}=\frac{\log ۴}{۲\log ۴}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $a_۷=a_۱r^۶\Rightarrow\frac{۱}{۳۲}=\log_۴a\times\frac{۱}{۶۴}\Rightarrow\log_۴a=۲\Rightarrow a=۴^۲=۱۶$

۶۴ ۴ توجه کنید که

$$a_۵-a_۱=۱۳۰\Rightarrow a_۱r^۴-a_۱=۱۳۰\Rightarrow a_۱(r^۴-۱)=۱۳۰$$

$$a_۴-a_۲=۲۵\Rightarrow a_۱r^۳-a_۱r=۲۵\Rightarrow a_۱r(r^۲-۱)=۲۵$$

اگر این دو تساوی را بر هم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{r^۴-۱}{r(r^۲-۱)}=\frac{۱۳۰}{۲۵}\Rightarrow\frac{(r^۲-۱)(r^۲+۱)}{r(r^۲-۱)}=\frac{۲۶}{۵}\Rightarrow\frac{r^۲+۱}{r}=\frac{۲۶}{۵}$$

$$۵(r^۲+۱)=۲۶r\Rightarrow ۵r^۲-۲۶r+۵=۰\Rightarrow r=۵\ ,\ r=\frac{۱}{۵}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

به این ترتیب،

$$a_۱r(r^۲-۱)=۲۵\Rightarrow a_۱\times ۵\times ۲۴=۲۵\Rightarrow a_۱=\frac{۵}{۲۴}$$

در نتیجه $a_۲=a_۱r=\frac{۲۵}{۲۴}$.

۶۵ ۳ در حالتی که پنج واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، $r^۶=\frac{b}{a}$. در حالتی که چهار واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، $r'^۵=\frac{b}{a}=(۲r)^۵$. بنابراین

$$r^۶=(۲r)^۵\Rightarrow r^۶=۳۲r^۵\Rightarrow r=۳۲$$

۶۶ ۳ این سه عدد را به‌صورت $\frac{a}{r},a,ar$ در نظر می‌گیریم. پس

$$\frac{a}{r}\times a\times ar=۶۴\Rightarrow a^۳=۶۴\Rightarrow a=۴$$

از طرف دیگر،

$$\frac{a}{r}+a+ar=۱۴\Rightarrow a(\frac{۱}{r}+۱+r)=۱۴$$

$$۴(\frac{۱}{r}+۱+r)=۱۴\Rightarrow ۲r^۲-۵r+۲=۰\Rightarrow r=\frac{۱}{۲},r=۲$$

بنابراین سه جملهٔ مورد نظر به ازای $r=\frac{۱}{۲}$، به‌صورت $۸,۴,۲$ و به ازای $r=۲$، به‌صورت $۲,۴,۸$ هستند. در هر دو حالت اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد برابر ۶ است.

۶۷ ۲ طول اضلاع مثلث را a، ar و $ar^۲$ در نظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ فیثاغورس، $a^۲+(ar)^۲=(ar^۲)^۲$. بنابراین

$$a^۲(۱+r^۲)=a^۲r^۴\Rightarrow r^۴-r^۲-۱=۰\Rightarrow r^۲=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow r=\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}}$$

۶۸ ۱ تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنبالهٔ ثابت است. بنابراین

$$\begin{cases}۲y+x=۲x+y\Rightarrow y=x\\ ۲y+x=x+۴\Rightarrow ۲y=۴\Rightarrow y=۲\end{cases}\Rightarrow x=y=۲\Rightarrow x+۲y=۶$$

۶۹ ۲ توجه کنید که $a_۳=a-۳\ ,\ a_۵=a-۵\ ,\ a_۶=a-۶$

بنابر فرض، $(a-۵)^۲=(a-۳)(a-۶)$. بنابراین

$$a^۲-۱۰a+۲۵=a^۲-۹a+۱۸\Rightarrow a=۷$$

در نتیجه $a_{۱۰}=۷-۱۰=-۳$.

۷۰ ۳ جملات سوم، پنجم و هشتم دنبالهٔ حسابی را به‌ترتیب $a+۲d$، $a+۴d$ و $a+۷d$ در نظر می‌گیریم. چون این جملات یک دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+۴d)^۲=(a+۲d)(a+۷d)\Rightarrow ۲d^۲=ad\Rightarrow a=۲d$$

بنابراین دنبالهٔ هندسی به‌صورت $۴d,۶d,۹d,\dots$ است که جملهٔ چهارم آن $\frac{۲۷}{۲}d$ است زیرا $r=\frac{۳}{۲}$ و $۹d\times\frac{۳}{۲}=\frac{۲۷}{۲}d$. همچنین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت مقابل است:

$$a_n=a+(n-۱)d=۲d+(n-۱)d=(n+۱)d$$

به این ترتیب $a_{۱۲}=۱۳d$ و نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{\frac{۲۷}{۲}d}{۱۳d}=\frac{۲۷}{۲۶}$.

۷۱ ۳ توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow ۱۲۰=\frac{n}{۲}(-۶+۳۰)\Rightarrow n=۱۰$$

۷۲ ۳ **راه‌حل اول** قدرنسبت دنبالهٔ مورد نظر برابر است با

$$\frac{n-۳}{۲n}-\frac{n-۲}{۲n}=-\frac{۱}{۲n}$$

بنابراین مجموع n جملهٔ نخست دنبالهٔ مورد نظر برابر است با

$$S_n=\frac{n}{۲}(\frac{n-۲}{n}-\frac{۱}{۲n}(n-۱))=\frac{n}{۲}(\frac{n-۳}{۲n})=\frac{n-۳}{۴}$$

راه‌حل دوم به‌ازای $n=۱$، سه جملهٔ اول دنباله $-\frac{۱}{۲},-۱,-\frac{۳}{۲}$ هستند. مجموع n جملهٔ نخست دنباله همان جملهٔ اول، یعنی $-\frac{۱}{۲}$ است. فقط مقدار گزینهٔ (۳) به ازای $n=۱$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ است.

۷۳ ۳ مجموع n جملهٔ نخست دنباله برابر است با $S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$.

چون $a_۱=۵۰$ و $d=-۴$، پس $S_n=\frac{n}{۲}(۱۰۰-۴(n-۱))=۵۲n-۲n^۲$. حداکثر مقدار عبارت درجهٔ دوم $-۲n^۲+۵۲n$ به ازای $n=\frac{۵۲}{۴}=۱۳$ به‌دست می‌آید، پس بیشترین مقدار بین S_nها برابر است با $S_{۱۳}=۳۳۸$.

۷۴ ۱ اگر جملهٔ اول دنباله $a_۱$ و قدرنسبت آن d باشد، آن‌گاه

$$S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(۲a_۱+۹d)=۱۰a_۱+۴۵d$$

اگر ۲ واحد از قدرنسبت کم کنیم و k واحد به جملهٔ اول اضافه کنیم، مجموع ده جملهٔ اول می‌شود

$$S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(۲(a_۱+k)+۹(d-۲))=۱۰a_۱+۱۰k+۴۵d-۹۰$$

چون قرار است مجموع ده جملهٔ اول ثابت بماند، پس باید $۱۰k-۹۰=۰\Rightarrow k=۹$

۷۵ ۳ مجموع سمت چپ معادله، مجموع جملات دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت ۳ است. فرض کنید تعداد عددهای سمت چپ معادله n باشد. در این صورت

$$\frac{n}{۲}(۲+۳(n-۱))=۱۴۵\Rightarrow ۳n^۲-n-۲۹۰=۰$$

$$(n-۱۰)(۳n+۲۹)=۰\Rightarrow n=۱۰,n=-\frac{۲۹}{۳}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین جملهٔ دهم دنباله برابر x است و $x=a_{۱۰}=a_۱+۹d=۱+۲۷=۲۸$.

۷۶ ۱ مجموع n جملهٔ نخست برابر است با

$$S_n=\frac{a_۱(۲^n-۱)}{۲-۱}=a_۱(۲^n-۱)=a_۱۲^n-a_۱=۲(a_۱۲^{n-۱})-a_۱=۲a_n-a_۱$$

۷۷ ۳ توجه کنید که $a_۲=۳\Rightarrow a_۱q=۳\ ,\quad a_۷=۹۶\Rightarrow a_۱q^۶=۹۶$

در نتیجه

$$\frac{a_۱q}{a_۱q^۶}=\frac{۳}{۹۶}\Rightarrow q^۵=۳۲\Rightarrow q=۲$$

بنابراین $a_۱=\frac{۳}{q}=\frac{۳}{۲}$، پس

$$S_{۱۰}=\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}=\frac{۳}{۲}\times\frac{۲^{۱۰}-۱}{۲-۱}=\frac{۳}{۲}(۲^{۱۰}-۱)=\frac{۳۰۶۹}{۲}$$

۷۸ ۲ **راه‌حل اول** مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a,aq,aq^۲,\dots$ برابر است با $S_n=\frac{a(q^n-۱)}{q-۱}$. مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a,\frac{a}{q},\frac{a}{q^۲},\dots$ برابر است با

$$S'_n=\frac{a((\frac{۱}{q})^n-۱)}{\frac{۱}{q}-۱}=\frac{\frac{a(۱-q^n)}{q^n}}{\frac{۱-q}{q}}=\frac{aq(۱-q^n)}{(۱-q)q^n}=\frac{a(q^n-۱)}{q^{n-۱}(q-۱)}$$

بنابراین

$$\frac{S_n}{S'_n}=\frac{\frac{a(q^n-۱)}{q-۱}}{\frac{a(q^n-۱)}{q^{n-۱}(q-۱)}}=q^{n-۱}.$$

راه‌حل دوم کافی است $n=۱$ را در نظر بگیریم و نسبت جملهٔ اول دنبالهٔ اول به جملهٔ اول دنبالهٔ دوم را به‌دست آوریم که ۱ می‌شود. فقط مقدار گزینهٔ (۲) به‌ازای $n=۱$ برابر ۱ است.

۷۹ **(۱)** ابتدا توجه کنید که چون دنبالهٔ مورد نظر غیرثابت است، پس $q\neq ۱$ و چون جمله‌های آن مثبت‌اند، پس q مثبت است. از طرف دیگر،

$$S_۶=۲۱S_۲\Rightarrow\frac{a_۱(۱-q^۶)}{۱-q}=۲۱\times\frac{a_۱(۱-q^۲)}{۱-q}\Rightarrow ۱-q^۶=۲۱(۱-q^۲)$$

$$(۱-q^۲)(۱+q^۲+q^۴)=۲۱(۱-q^۲)\Rightarrow q^۴+q^۲-۲۰=۰$$

$$(q^۴-۴)(q^۲+۵)=۰\Rightarrow q^۲=۴\Rightarrow q=۲$$

۸۰ **(۳)** توجه کنید که

$$\begin{cases}S_{۱۰}=\dfrac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}\\ S_۵=\dfrac{a_۱(q^۵-۱)}{q-۱}\end{cases}\Rightarrow\frac{S_{۱۰}}{S_۵}=\frac{\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}}{\frac{a_۱(q^۵-۱)}{q-۱}}=۳۳$$

در نتیجه $۳۳=\dfrac{q^{۱۰}-۱}{q^۵-۱}=q^۵+۱\Rightarrow q^۵=۳۲\Rightarrow q=۲$

بنابراین $\dfrac{a_۵}{a_۱}=\dfrac{a_۱q^۴}{a_۱}=q^۴=۱۶$.

۸۱ **(۱)** **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$a_۷+a_{۱۴}=a_۱+۶d+a_۱+۱۳d=۲a_۱+۱۹d=۶۰$$

بنابراین $S_{۲۰}=\dfrac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d)=\dfrac{۲۰}{۲}\times۶۰=۶۰۰$.

راه‌حل دوم چون $۷+۱۴=۱+۲۰$، پس $a_۷+a_{۱۴}=a_۱+a_{۲۰}$، بنابراین

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(a_۱+a_{۲۰})=۱۰\times۶۰=۶۰۰$$

۸۲ **(۳)** قدرنسبت دنباله برابر ۴ و جملهٔ اول آن ۳ است. پس مجموع n جملهٔ اول آن برابر است با $S_n=\dfrac{n}{۲}(۲\times۳+۴(n-۱))=n(۲n+۱)=۲n^۲+n$

بنابراین $۲n^۲+n>۳۰۰\Rightarrow ۲n^۲+n-۳۰۰>۰$

می‌توان نامعادلهٔ فوق را حل کرد که جواب آن به‌صورت $n>\dfrac{-۱+\sqrt{۲۴۰۱}}{۴}=۱۲$ می‌شود، یعنی $n\geq ۱۳$.

۸۳ **(۴)** **راه‌حل اول** قدرنسبت دنبالهٔ مورد نظر برابر است با $a_۲-a_۱=۴$. از طرف دیگر،

$$S_n-a_n=۵۶\Rightarrow\frac{n}{۲}(-۱۴+۴(n-۱))-(-۷+۴(n-۱))=۵۶$$

$$-۷n+۲n(n-۱)+۷-۴(n-۱)=۵۶$$

$$۲n^۲-۱۳n-۴۵=۰\Rightarrow(۲n+۵)(n-۹)=۰\Rightarrow n=۹$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $d=a_۲-a_۱=۴$، از طرف دیگر، $S_n-a_n=S_{n-۱}=۵۶$.

بنابراین

$$\frac{n-۱}{۲}(۲a_۱+(n-۲)d)=۵۶\Rightarrow\frac{n-۱}{۲}(۲(-۷)+۴(n-۲))=۵۶$$

$$(n-۱)(۲n-۱۱)=۵۶\Rightarrow ۲n^۲-۱۳n-۴۵=۰$$

$$(۲n+۵)(n-۹)=۰\Rightarrow n=۹$$

۸۴ **(۱)** مجموع سه جملهٔ اول و سه جملهٔ آخر را حساب می‌کنیم:

$$a_۱+a_۲+a_۳+a_{n-۲}+a_{n-۱}+a_n=۱۰+۸۰$$

$$(a_۱+a_n)+(a_۲+a_{n-۱})+(a_۳+a_{n-۲})=۹۰$$

با توجه به تساوی $a_{k+۱}+a_{n-k}=a_۱+a_n$ به‌دست می‌آید

$$(a_۱+a_n)+(a_۱+a_n)+(a_۱+a_n)=۹۰\Rightarrow ۳(a_۱+a_n)=۹۰\Rightarrow a_۱+a_n=۳۰$$

از طرف دیگر، $S_n=\dfrac{n}{۲}(a_۱+a_n)=۳۰۰\Rightarrow ۳۰\times\dfrac{n}{۲}=۳۰۰\Rightarrow n=۲۰$

۸۵ **(۴)** **راه‌حل اول** توجه کنید که مجموع $k+۱$ جملهٔ با ردیف فرد برابر است با $\dfrac{(k+۱)(a_۱+a_{۲k+۱})}{۲}$. همچنین مجموع k جملهٔ با ردیف زوج برابر است با $\dfrac{k(a_۲+a_{۲k})}{۲}$. (توجه کنید $\dfrac{a_۲+a_{۲k}}{۲}=\dfrac{a_۱+a_{۲k+۱}}{۲}$)، بنابراین نسبت مورد نظر برابر با $\dfrac{k+۱}{k}$ است.

راه‌حل دوم فرض می‌کنیم دنباله سه‌جمله‌ای باشد $(k=۱)$ و جملات آن به صورت $a_۱,a_۲,a_۳$ باشند. در این صورت نسبت مورد نظر برابر است با $\dfrac{a_۱+a_۳}{a_۲}=\dfrac{۲a_۲}{a_۲}=۲$.

فقط گزینهٔ (۴) به‌ازای $k=۱$ برابر ۲ می‌شود.

۸۶ **(۲)** اگر از مجموع پنج جملهٔ اول دنباله، مجموع چهار جملهٔ اول را کم کنیم، جملهٔ پنجم به‌دست می‌آید:

$$a_۵=S_۵-S_۴=\frac{۴}{۳}(۳^۵-۱)-\frac{۴}{۳}(۳^۴-۱)=\frac{۴}{۳}(۳^۵-۳^۴)=۲۱۶$$

۸۷ **(۳)** ابتدا توجه کنید که $q=\sqrt[۳]{۳}$. مجموع شش جملهٔ دوم برابر اختلاف مجموع دوازده جملهٔ اول و شش جملهٔ اول است. پس

$$\frac{S_{۱۲}-S_۶}{S_۶}=\frac{S_{۱۲}}{S_۶}-۱=\frac{\frac{۱\times(q^{۱۲}-۱)}{q-۱}}{\frac{۱\times(q^۶-۱)}{q-۱}}-۱=\frac{q^{۱۲}-۱}{q^۶-۱}-۱=q^۶=(\sqrt[۳]{۳})^۶=۹$$

۸۸ **(۴)** توجه کنید که

$$a_n=S_n-S_{n-۱}=(۲^n-۱)-(۲^{n-۱}-۱)=۲^{n-۱}$$

در نتیجه $a_n^۲=۲^{۲n-۲}=۴^{n-۱}$. بنابراین

$$a_۱^۲+\cdots+a_n^۲=۴^۰+۴^۱+\cdots+۴^{n-۱}=\frac{۴^n-۱}{۴-۱}=\frac{۴^n-۱}{۳}$$

۸۹ **(۲)** **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم جمله‌های دنباله به‌صورت $a_۱,a_۲,\ldots,a_{۲n}$ باشند. در این صورت مجموع تمام جمله‌ها برابر است با $S_{۲n}=\dfrac{a_۱(q^{۲n}-۱)}{q-۱}$. از طرف دیگر جمله‌های با ردیف زوج به‌صورت $a_۲,a_۴,\ldots,a_{۲n}$ هستند که دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $q^۲$ و جملهٔ اول $a_۲$ تشکیل می‌دهند. بنابراین مجموع آن‌ها برابر با $\dfrac{a_۲(۱-(q^۲)^n)}{۱-q^۲}$ است. پس

$$\frac{a_۱(۱-q^{۲n})}{۱-q}=۳\times\frac{a_۲(۱-q^{۲n})}{(۱-q)(۱+q)}\Rightarrow a_۱=۳\times\frac{a_۱q}{۱+q}\Rightarrow ۳q=۱+q\Rightarrow q=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم فرض می‌کنیم تعداد جمله‌های دنباله ۲تا باشد، یعنی دنباله به صورت $a_۱,a_۲$ باشد. طبق فرض $a_۱+a_۲=۳a_۲$، بنابراین

$$a_۱=۲a_۲\Rightarrow a_۱=۲a_۱q\Rightarrow q=\frac{۱}{۲}$$

۹۰ **(۲)** صورت کسر مجموع دوازده جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت t و مخرج کسر مجموع چهار جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $t^۳$ است. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱\times\frac{۱-t^{۱۲}}{۱-t}}{۱\times\frac{۱-t^{۱۲}}{۱-t^۳}}=\frac{۱-t^۳}{۱-t}=۱+t+t^۲$$

و حاصل آن به‌ازای $t=\dfrac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ می‌شود

$$۱+\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}+\frac{۶-۲\sqrt{۵}}{۴}=\frac{۴+۲-۲\sqrt{۵}+۶-۲\sqrt{۵}}{۴}=۳-\sqrt{۵}$$

۹۱ **۴** با استفاده از رابطهٔ $a_n=2a_{n-1}+1$ و جملهٔ اول $a_1=1$، جملهٔ هشتم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_2=2\times1+1=3\ ,\quad a_3=2\times3+1=7\ ,\quad a_4=2\times7+1=15$$
$$a_5=2\times15+1=31\ ,\quad a_6=2\times31+1=63$$
$$a_7=2\times63+1=127\ ,\quad a_8=2\times127+1=255$$

تجربی - ۹۵

۹۲ **۱** عدد $4\sqrt{2}$ واسطهٔ هندسی 2^a و 2^b است، پس

$$(4\sqrt{2})^2=2^a\times2^b\Rightarrow2^5=2^{a+b}\Rightarrow a+b=5$$

واسطهٔ حسابی دو عدد a و b برابر $\frac{a+b}{2}$، یعنی $\frac{5}{2}=2/5$ است.

ریاضی - ۸۷

۹۳ **۳** طبق فرض،

$$\begin{cases}a_{12}-a_{10}=5\\a_{12}+a_{10}=25\end{cases}\Rightarrow a_{12}=15, a_{10}=10\Rightarrow d=\frac{a_{12}-a_{10}}{12-10}=\frac{5}{2}$$

از طرف دیگر، $d=\frac{a_{21}-a_{10}}{21-10}\Rightarrow a_{21}=a_{10}+11d=10+11(\frac{5}{2})=\frac{75}{2}=37/5$

خارج از کشور ریاضی - ۸۴

۹۴ **۴** جملات را به‌صورت $a\ ,a+3d\ ,a+10d$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$(a+3d)^2=a(a+10d)\Rightarrow a^2+9d^2+6ad=a^2+10ad$$
$$9d^2=4ad\Rightarrow d=\frac{4}{9}a$$

بنابراین جملات دنبالهٔ هندسی $a\ ,\frac{7}{3}a\ ,\frac{49}{9}a$ هستند و قدرنسبت این دنباله برابر است با $r=\frac{\frac{7}{3}a}{a}=\frac{7}{3}$.

تجربی - ۹۲

۹۵ **۱** جملات a_4، a_6 و a_{12} از دنبالهٔ حسابی، دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس جملهٔ ششم واسطهٔ هندسی جملات چهارم و دوازدهم است:

$$a_6^2=a_4\times a_{12}\Rightarrow(a_1+5d)^2=(a_1+3d)(a_1+11d)$$
$$a_1^2+10a_1d+25d^2=a_1^2+14a_1d+33d^2$$
$$4a_1d=-8d^2\Rightarrow a_1=-2d$$

بنابراین $r=\frac{a_6}{a_4}=\frac{a_1+5d}{a_1+3d}=\frac{-2d+5d}{-2d+3d}=3$.

ریاضی - ۸۱

۹۶ **۳** بنابر فرض‌های مسئله،

$$a_1+a_3=1\Rightarrow a_1+a_1q^2=1\Rightarrow a_1(1+q^2)=1\Rightarrow a_1=\frac{1}{q^2+1}$$
$$S_4=\frac{a_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{q^4-1}{(q^2+1)(q-1)}=\frac{(q^2+1)(q-1)(q+1)}{(q^2+1)(q-1)}=q+1=3$$
$$q=2, a_1=\frac{1}{5}$$

بنابراین $S_6=\frac{a_1(q^6-1)}{q-1}=\frac{\frac{1}{5}(2^6-1)}{2-1}=\frac{63}{5}=12/6$.

ریاضی - ۸۸

۹۷ **۲** بنابر فرض مسئله،

$$S_{20}=3S_{12}\Rightarrow\frac{20}{2}(2a_1+19d)=3\times\frac{12}{2}(2a_1+11d)$$
$$20a_1+190d=36a_1+198d\Rightarrow16a_1=-8d\Rightarrow d=-2a_1$$

از طرف دیگر،

$$a_3=6\Rightarrow a_1+2d=6\Rightarrow a_1-4a_1=6\Rightarrow a_1=-2\ ,\ d=4$$

بنابراین $a_{10}=a_1+9d=-2+9\times4=34$.

ریاضی - ۹۰

۹۸ **۳** **راه‌حل اول** مجموع پنج جملهٔ دوم برابر اختلاف مجموع ده جملهٔ اول و مجموع پنج جملهٔ اول است. پس

$$S_5=\frac{1}{3}(S_{10}-S_5)\Rightarrow\frac{4}{3}S_5=\frac{1}{3}S_{10}\Rightarrow S_{10}=4S_5$$
$$\frac{10}{2}(2a_1+9d)=4\times\frac{5}{2}(2a_1+4d)\Rightarrow2a_1+9d=4a_1+8d\Rightarrow d=2a_1$$

بنابراین $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}=\frac{3a_1}{a_1}=3$.

راه‌حل دوم با توجه به فرض مسئله می‌توان نوشت

$$3(a_1+a_2+\cdots+a_5)=a_6+a_7+\cdots+a_{10}$$
$$2(a_1+a_2+\cdots+a_5)=(a_6-a_1)+(a_7-a_2)+\cdots+(a_{10}-a_5)$$
$$2(\frac{5}{2}(2a_1+4d))=5d+5d+5d+5d+5d$$
$$10a_1+20d=25d\Rightarrow5d=10a_1\Rightarrow d=2a_1$$

بنابراین $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}=\frac{3a_1}{a_1}=3$.

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۹۹ **۱** چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته است، برای نوشتن نوزده دستهٔ نخست از $1+2+3+\cdots+19$ عدد استفاده شده است. چون

$$1+2+\cdots+19=\frac{19\times20}{2}=190$$

پس برای نوشتن نوزده دستهٔ نخست، از ۱۹۰ عدد طبیعی نخست استفاده شده است. در نتیجه، جملهٔ نخست دستهٔ بیستم برابر با ۱۹۱ است. بنابراین عددهای دستهٔ بیستم، دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست ۱۹۱ و قدرنسبت ۱ تشکیل می‌دهند و تعداد آن‌ها ۲۰ تا است. به این ترتیب مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{20}{2}(2\times191+(20-1)1)=10\times401=4010$.

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۱۰۰ **۳** صورت کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $-t$ و مخرج کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $-t^3$ است. بنابراین

$$1-t+t^2-t^3+\cdots+t^8=\frac{a_1(q^9-1)}{q-1}=\frac{1-(-t)^9}{1-(-t)}=\frac{1+t^9}{1+t}$$
$$1-t^3+t^6=\frac{1-(-t^3)^3}{1+t^3}=\frac{1+t^9}{1+t^3}$$

در نتیجه

$$\frac{t^8-t^7+t^6-\cdots-t+1}{t^6-t^3+1}=\frac{\frac{1+t^9}{1+t}}{\frac{1+t^9}{1+t^3}}=\frac{1+t^3}{1+t}=\frac{(1+t)(1-t+t^2)}{1+t}=1-t+t^2$$

پس حاصل عبارت مورد نظر به‌ازای $t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ برابر است با

$$1-\frac{1+\sqrt{17}}{2}+\frac{1+2\sqrt{17}+17}{4}=\frac{4-2-2\sqrt{17}+18+2\sqrt{17}}{4}=\frac{20}{4}=5$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱۰۱ **۴** در این دنباله، هر جمله از دو برابر جملهٔ قبل، دو واحد کمتر است، پس هشت جملهٔ اول برابر است با

$$a_1=3,\quad a_2=2\times3-2=4,\quad a_3=2\times4-2=6$$
$$a_4=2\times6-2=10,\quad a_5=2\times10-2=18,\quad a_6=2\times18-2=34$$
$$a_7=2\times34-2=66,\quad a_8=2\times66-2=130$$

بنابراین $a_8-a_7=130-66=64$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱۰۲ **۴** شرط اینکه سه عدد a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند این است که $2b=a+c$. بنابراین $2(3p+4)=(2p+3)+(5p-1)\Rightarrow p=6$

$$d=3p+4-2p-3=p+1\xrightarrow{p=6}d=7$$

ریاضی - ۸۴

۱۰۳ **۲** سه جمله را به‌صورت $\frac{a}{r},a,ar$ فرض می‌کنیم، در این صورت

$$\frac{a}{r}\times a\times ar=216\Rightarrow a^3=216\Rightarrow a=6$$

$$\frac{a}{r}+a+ar=19\Rightarrow\frac{6}{r}+6+6r=19\Rightarrow 6r^2-13r+6=0$$

$$(3r-2)(2r-3)=0\Rightarrow\begin{cases}r=\frac{2}{3}\Rightarrow\text{سه جملهٔ متوالی: }9,6,4\\ r=\frac{3}{2}\Rightarrow\text{سه جملهٔ متوالی: }4,6,9\end{cases}$$

در هر دو صورت تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله برابر ۵ است.

تجربی - ۹۰

۱۰۴ **۴** توجه کنید که

$$a_5^2=a_1a_{11}\Rightarrow(a_1+4d)^2=a_1(a_1+10d)$$

$$a_1^2+8a_1d+16d^2=a_1^2+10a_1d\Rightarrow 16d^2=2a_1d\Rightarrow a_1=8d$$

$$a_5=a_1+4d=12d,a_{11}=a_1+10d=18d\Rightarrow r=\frac{a_{11}}{a_5}=\frac{18d}{12d}=\frac{3}{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۰۵ **۲** فرض کنید t_3، t_7 و t_9 جملات دنبالهٔ حسابی a_1، a_2 و a_3 جملات متوالی دنبالهٔ هندسی باشند. در این صورت

$$a_2^2=a_1a_3\Rightarrow t_7^2=t_3t_9\Rightarrow(t_1+6d)^2=(t_1+2d)(t_1+8d)$$

$$t_1^2+12t_1d+36d^2=t_1^2+8dt_1+2t_1d+16d^2$$

$$2t_1d+20d^2=0\Rightarrow 2d(t_1+10d)=0\xrightarrow{d\neq 0}t_1+10d=0$$

بنابراین جملهٔ یازدهم دنبالهٔ حسابی برابر صفر است.

تجربی - ۸۸

۱۰۶ **۴** بنابر فرض مسئله،

$$\frac{S_6}{S_3}=\frac{153}{136}\Rightarrow 136S_6=153S_3$$

$$136a_1\left(\frac{q^6-1}{q-1}\right)=153a_1\left(\frac{q^3-1}{q-1}\right)\Rightarrow 136(q^3-1)(q^3+1)=153(q^3-1)$$

$$136(q^3+1)=153\Rightarrow q^3=\frac{153}{136}-1=\frac{17}{136}=\frac{1}{8}\Rightarrow q=\frac{1}{2}$$

بنابراین $a_5=a_1q^4=\frac{1}{16}a_1\Rightarrow a_1=16a_5$

ریاضی - ۸۹

۱۰۷ **۱** **راه‌حل اول** به بیست جملهٔ اول دنباله توجه کنید:

$$a_1,a_1+d,a_1+2d,a_1+3d,\ldots,a_1+18d,a_1+19d$$

جملات ردیف فرد یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت $2d$ تشکیل می‌دهند و جملات ردیف زوج یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1+d و قدرنسبت $2d$ تشکیل می‌دهند. پس

$$\begin{cases}\text{فردها } S=\frac{10}{2}(a_1+a_1+18d)=135\\ \text{زوج‌ها } S=\frac{10}{2}(a_1+d+a_1+19d)=150\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a_1+18d=27\\ a_1+10d=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=0\\ d=\frac{3}{2}\end{cases}$$

راه‌حل دوم طبق فرض،

$$\begin{cases}a_2+a_4+\cdots+a_{20}=150\\ a_1+a_3+\cdots+a_{19}=135\end{cases}$$

اگر طرفین معادلات فوق را از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{20}-a_{19})=15\Rightarrow 10d=15\Rightarrow d=\frac{3}{2}$$

اگر طرفین معادلات فوق را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{19}+a_{20}=285$$

$$\frac{20}{2}(2a_1+19d)=285\Rightarrow 10(2a_1+\frac{57}{2})=285\Rightarrow a_1=0$$

خارج از کشور تجربی - ۸۵

۱۰۸ **۳** چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته است، برای نوشتن ۲۹ دستهٔ نخست از $1+2+3+\cdots+29$ عدد استفاده شده است. چون

$$1+2+3+\cdots+29=\frac{29\times 30}{2}=435$$

پس برای نوشتن ۲۹ دستهٔ نخست، از نخستین ۴۳۵ عدد فرد استفاده شده است. پس جملهٔ اول دستهٔ سی‌اُم، ۴۳۶ اُمین عدد فرد و جملهٔ آخر آن $(29+436)$ اُمین عدد فرد است. از طرف دیگر، جملهٔ عمومی عددهای فرد به‌صورت $a_n=2n-1$ است، پس

$$a_{465}+a_{436}=2(465)-1+2(436)-1=2(465+436-1)=2(900)=1800$$

تجربی - ۹۴

۱۰۹ **۳** فرض می‌کنیم جمله‌های دنباله به‌صورت $a_1,a_2,\ldots,a_{2n}$ باشند، در این صورت مجموع تمام جمله‌ها برابر است با $S_{2n}=\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$. از طرف دیگر جمله‌های با ردیف فرد به‌صورت $a_1,a_3,\ldots,a_{2n-1}$ هستند که دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q^2 و جملهٔ اول a_1 است. بنابراین مجموع آن‌ها برابر با $\frac{a_1(1-(q^2)^n)}{1-q^2}$ است. بنابراین

$$\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}=3\times\frac{a_1(1-q^{2n})}{(1-q)(1+q)}\Rightarrow\frac{3}{1+q}=1\Rightarrow q=2$$

ریاضی - ۹۴

۱۱۰ **۱** صورت کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت t و مخرج کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت t^3 است. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{1\times\frac{1-t^{12}}{1-t}}{1\times\frac{1-t^{12}}{1-t^3}}=\frac{1-t^3}{1-t}=\frac{(1-t)(1+t+t^2)}{1-t}=1+t+t^2$$

و حاصل آن به ازای $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ می‌شود

$$1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{4-2+2\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}}{4}=2$$

ریاضی - ۹۳

۱۱۱ **۳** **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $x<0$.

$$\sqrt[4]{-x^5}=\sqrt[4]{(-x)x^4}=\sqrt[4]{-x}\times\sqrt[4]{x^4}=\sqrt[4]{-x}\times|x|=-x\sqrt[4]{-x}$$

راه‌حل دوم چون $x<0$، حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x=-1$ می‌یابیم:

$$\sqrt[4]{-x^5}=\sqrt[4]{1}=1$$

فقط مقدار گزینهٔ (۳) به ازای $x=-1$ برابر ۱ است.

۱۱۲ **۳** توجه کنید که

$$\sqrt[4]{\sqrt[5]{81}}=\sqrt[4\times 5]{81}=\sqrt[5]{\sqrt[4]{81}}=\sqrt[5]{3}$$

$$\sqrt[5]{96}=\sqrt[5]{2^5\times 3}=\sqrt[5]{2^5}\times\sqrt[5]{3}=2\sqrt[5]{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt[5]{81}}=\frac{3}{\sqrt[5]{3^4}}\times\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3}}=\frac{3\times\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{3\sqrt[5]{3}}{3}=\sqrt[5]{3}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[5]{3}-2\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{3}=-2\sqrt[5]{3}$.