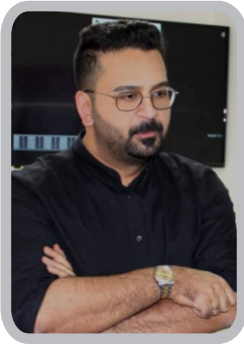




[Calculus]
[10 + 11 + 12]

مبلغی که امروز بابت خرید این کتاب می پردازید! در مقابل هزینه‌هایی که در آینده بابت خواندن آن پرداخت خواهید کرد، بسیار ناچیز است ...



Arian.Heidarii

کارشناس ارشد علمی :

مهندس آریان حیدری

 arianheidarioriginal

سرپرست تیم ویراستاران: مهندس توچید فرمودی

ویراستار علمی

- A.H. Shokri مهندس امیر حسام شکری
- M.H. Mokhtari مهندس محمد حسین مختاری
- M.Kaloei مهندس محمد کلویی
- A.KHavanin Zadeh مهندس امین خوانین زاده
- A.Haghnazar مهندس امیر حق نظر
- M.R.Safavi مهندس سید محمد رضا صفوی
- M. Arbab bahrami مهندس محمد ارباب بهرامی
- Dr.S.Azizi دکتر سعید عزیزی
- M.Mehdi Fadaee مهندس محمد مهدی فدائی
- P.Usaliani مهندس پرویز یوسالیانی

مولف همکار:

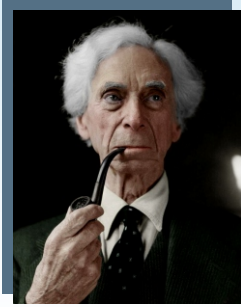
مهندس محمد جواد لطفی



M.G.Lotfi

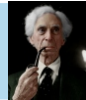
کارشناس علمی

- M. Samadi مهندس میثم صمدی
- A. Selseleh مهندس امین سلسله
- M. A. Karimi مهندس محمد امین کریمی
- S. Roshani مهندس سوگند روشنی
- M. Askari مهندس محمد عسکری
- S. Banihashemi مهندس سعید بنی هاشمی
- B. Golzari مهندس بهروز گلزاری
- S. Amoozadeh مهندس سالار عموزاده
- M. Amin مهندس میثم امین



Set, Pattern & Sequence

Chapter 1



مجموعه را دسته‌ای از اشیای متمایز و خوش تعریف در نظر می‌گیرند. [نوش تعریف به معنی آن است که بدون تردید و به یقین بتوان گفت که شیء معینی در مجموعه هست یا نه].....

• دانش‌آموزان پایه یازدهم تهران یک مجموعه محسوب می‌شود.....

• دانش‌آموزان قد بلند تهران مجموعه نیست. چون قد بلند خوش تعریف نیست. [یعنی به یقین نمی‌توان گفت که از چه قدی به بالا (قد بلند) محسوب می‌شود، چون قد بلند یک چیز سلیقه‌ای است و معیار مشخص ندارد].....

انواع نمایش مجموعه‌ها

نمایش هندسی	نمایش به نماد ریاضی	نمایش به اعضا
اعضای مجموعه را درون یک خم بسته در صفحه مانند مستطیل، دایره و... قرار می‌دهیم که به آن نمودار ون گفته می‌شود.	به جای نوشتن اعضاء، ویژگی مشترک بین آن‌ها را می‌نویسیم.	اعضای مجموعه را به صورت مرتب یا نامرتب درون یک جفت آکولاد نمایش می‌دهیم.
	$A = \{2k - 1 : k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 5\}$	$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

• ترتیب اعضا در مجموعه اهمیتی ندارد. یعنی جابه‌جایی اعضا، مجموعه را تغییر نمی‌دهند. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{2, 3, 1\}$

• عضوهای تکراری در مجموعه شمرده نمی‌شوند. $\{1, 2, 3\} = \{1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3\}$

مجموعه‌های مهم اعداد

اعداد طبیعی	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$		اعداد گویا	$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
اعداد صحیح	$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$		اعداد نرنگ	$\mathbb{Q}' = \{x x \notin \mathbb{Q}\}$
اعداد صحیح	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$		اعداد حقیقی	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

مجموعه اعداد حقیقی را با \mathbb{R} نمایش می‌دهند و شامل همه اعداد گویا و گنگ است. بنابراین روابط زیر برقرار است:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' \quad \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}' \quad \mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$$

• برای یافتن تفاضل دو مجموعه، عضوهای مشترک را حذف کرده و فقط اعضایی که در مجموعه اول باقی می‌ماند را انتخاب می‌کنیم.

Test چه تعداد از رابطه‌های زیر در مجموعه اعداد حقیقی درست است؟

- $(\mathbb{R}-\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Q}'$ (۴۴)
 $(\mathbb{W}-\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Q}$ (۳)
 $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}'$ (۲)
 $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ (۱)

2 به بررسی موارد می‌پردازیم:

- اجتماع \mathbb{Q} و \mathbb{Q}' برابر \mathbb{R} است ✓
- می‌دانیم $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ است، پس \mathbb{Z} نمی‌تواند زیرمجموعه \mathbb{Q}' باشد. ✗
- می‌دانیم $\mathbb{W}-\mathbb{N} = \{0\}$ که زیرمجموعه‌ای از \mathbb{Q} است. ✓
- می‌دانیم $\mathbb{R}-\mathbb{N}$ شامل همه اعداد گویا و گنگ غیر طبیعی است، پس نمی‌تواند زیرمجموعه \mathbb{Q}' باشد. ✗

Set, Pattern & Sequence

انواع بازه

مجموعه، الگو و دنباله

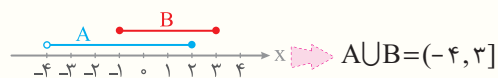
بازه‌ها، زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} هستند که برای نمایش همه اعداد حقیقی بین دو عدد، یا اعداد حقیقی بزرگتر یا کوچکتر از یک عدد، از آن‌ها استفاده می‌کنیم. انواع بازه‌ها عبارت‌اند از:

نمایش مجموعه‌ها	نمایش هندسی	اعضا	نوع بازه	بازه
$\{x \in \mathbb{R} a < x < b\}$		اعداد حقیقی بین a و b	باز	(a, b)
$\{x \in \mathbb{R} a < x \leq b\}$		اعداد حقیقی بین a و b و خود b	نیم‌باز	(a, b]
$\{x \in \mathbb{R} a \leq x < b\}$		اعداد حقیقی بین a و b و خود a	نیم‌باز	[a, b)
$\{x \in \mathbb{R} a \leq x \leq b\}$		اعداد حقیقی بین a و b و خود a و b	بسته	[a, b]
$\{x \in \mathbb{R} x > a\}$		اعداد حقیقی بزرگتر از a	باز	(a, +∞)
$\{x \in \mathbb{R} x \leq b\}$		اعداد حقیقی کوچکتر مساوی با b	نیم‌باز	(-∞, b]
$x \in \mathbb{R}$		تمام اعداد حقیقی (R)	باز	(-∞, +∞)

Test اگر $A = (-4, 2]$ و $B = [-1, 3]$ باشد، حاصل $(A \cup B) \cap \mathbb{N}$ کدام است؟

- (۱) $\{0, 2\}$
 (۲) $\{2, 3\}$
 (۳) $\{0, 1, 2\}$
 (۴) $\{1, 2, 3\}$

4 با کمک نمایش هندسی بازه‌های A و B مجموعه $A \cup B$ را تعیین می‌کنیم:



اشتراک $(-4, 3]$ و مجموعه اعداد طبیعی (\mathbb{N}) به صورت $\{1, 2, 3\}$ است.

Set, Pattern & Sequence

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن با شمردن به دست آید، **مجموعه متناهی** نام دارد؛ حتی اگر شمردن تعداد اعضای آن سخت و زمان‌گیر باشد. به بیان دیگر تعداد اعضای مجموعه متناهی، عددی **حسابی** است.

• مجموعه اعداد طبیعی زوج یک رقمی به صورت $\{2, 4, 6, 8\}$ است. که یک مجموعه متناهی است.

مجموعه‌ای که متناهی نباشد، یعنی تعداد اعضای آن حتی با صرف زمان خیلی زیاد و امکانات کافی هم قابل شمردن نباشد، **مجموعه نامتناهی** نام دارد. در واقع تعداد اعضای مجموعه نامتناهی، با یک عدد حسابی قابل بیان نیست و از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگتر است.

• مجموعه مضارب طبیعی عدد ۵، به صورت $\{5, 10, 15, \dots\}$ است. که یک مجموعه نامتناهی است.



اگر نمودار تابع $y = f(x)$ موجود باشد، برای انتقال افقی و عمودی آن به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

<p>نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است.</p>	<p>انتقال نمودار $y = f(x)$</p>
<p>$f(x) + 1$</p>	<p>1 $y = f(x) + k$: نمودار $y = f(x)$ را k واحد در راستای محور y ها انتقال می‌دهیم. اگر $k > 0$ باشد منحنی به سمت بالا و اگر $k < 0$ باشد منحنی به سمت پایین می‌رود.</p>
<p>$f(x) - 1$</p>	<p>2 $y = f(x + k)$: نمودار $y = f(x)$ را k واحد در راستای محور x ها انتقال می‌دهیم. اگر $k > 0$ باشد منحنی به سمت چپ و اگر $k < 0$ باشد، منحنی به سمت راست می‌رود.</p>

Test نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = 1 + f(x - 2)$ محور x ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

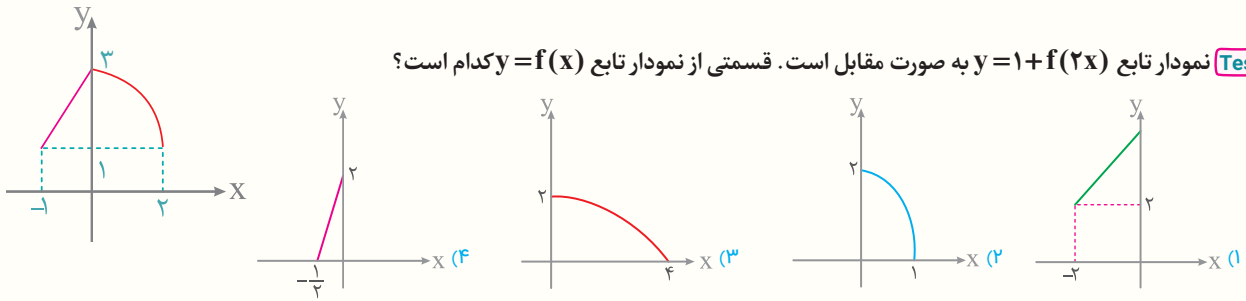
2 نمودار تابع $y = f(x)$ را ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(x - 2)$ به دست آید، سپس آن را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا به نمودار $y = 1 + f(x - 2)$ برسیم:

با توجه به شکل واضح است نمودار تابع $y = 1 + f(x - 2)$ و محور x ها در ۲ نقطه متقاطع اند.

اگر نمودار $y = f(x)$ موجود باشد، برای انبساط و انقباض آن به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

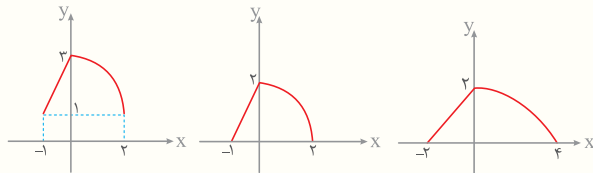
<p>نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است.</p>	<p>انبساط و انقباض نمودار $y = f(x)$</p>
<p>$y = kf(x)$</p>	<p>1 $y = kf(x)$: عرض تمام نقاط نمودار تابع $f(x)$ را k برابر می‌کنیم. اگر $k > 1$ باشد، نمودار در امتداد محور y با ضریب k منبسط (در امتداد محور y بازر) می‌شود و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار در امتداد محور y با ضریب k منقبض (در امتداد محور y، فشرده‌تر) می‌شود.</p>
<p>$y = f(kx)$</p>	<p>2 $y = f(kx)$: طول تمام نقاط نمودار تابع $f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر می‌کنیم. اگر $k > 1$ باشد، نمودار در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض می‌شود و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط می‌شود.</p>

Test نمودار تابع $y = 1 + f(2x)$ به صورت مقابل است. قسمتی از نمودار تابع $y = f(x)$ کدام است؟



3 ابتدا نمودار تابع $y = 1 + f(2x)$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا به نمودار $y = f(2x)$ برسیم و سپس طول تمام نقاط را دو برابر می‌کنیم

(x را به $\frac{x}{2}$ تبدیل می‌کنیم) تا نمودار $y = f(x)$ به دست آید:



Functions & Their Graphs

قرینه نمودار نسبت به محور ها و مبدأ مختصات

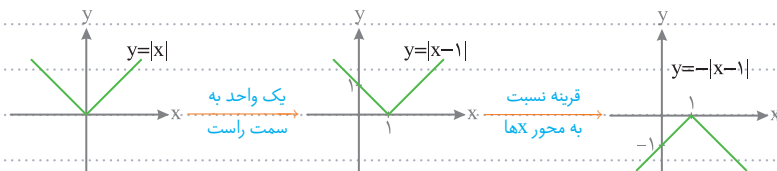
تابع

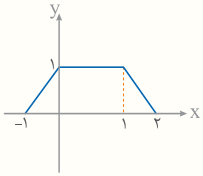
قرینه نمودارها	نمودار تابع به صورت $y = f(x)$ مقابل است.
1 $f(-x)$	نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
2 $-f(x)$	نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
3 $-f(-x)$	نمودار $y = f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم.

🍌 برای رسم نمودار $y = kf(x)$ اگر $k < 0$ باشد، ابتدا نمودار $y = f(x)$ را با فرض مثبت بودن k رسم و سپس آن را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.

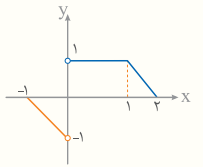
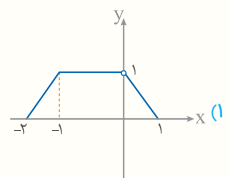
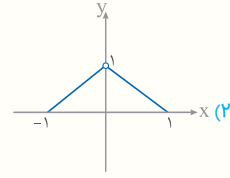
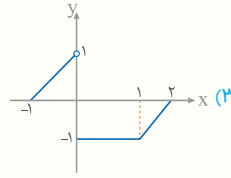
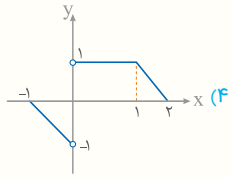
🍌 اگر $k < 0$ باشد، ابتدا نمودار $f(kx)$ را با فرض مثبت بودن k رسم می‌کنیم و سپس آن را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

... برای رسم نمودار تابع $y = -|x-1|$ ، ابتدا نمودار تابع $y = |x|$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = |x-1|$ به وجود آید. سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.





Test نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = \frac{|x|}{x} f(x)$ کدام است؟



4 تابع $y = \frac{|x|}{x} f(x)$ در $x > 0$ برابر $y = f(x)$ و در $x < 0$ برابر $y = -f(x)$ است، بنابراین نمودار آن به صورت مقابل است:

Functions & Their Graphs

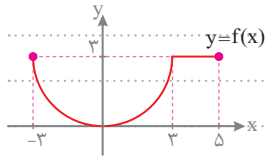
تبدیل نمودارهای $f(x)$ و $f(ax+b)$ به یکدیگر

تابع

🍏 برای رسم نمودار تابع $y = f(ax+b)$ با کمک نمودار تابع $y = f(x)$ ، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

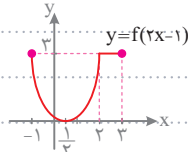
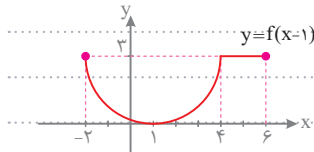
1 با توجه به علامت b ، نمودار $y = f(x)$ را به اندازه b واحد در راستای افقی جابه‌جا می‌کنیم.

2 طول تمام نقاط نمودار را بر a تقسیم می‌کنیم.



🍇 نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f(2x-1)$ را رسم کنید.

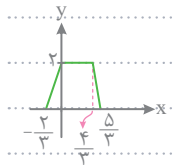
🟩 ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. سپس طول تمام نقاط را بر 2 تقسیم می‌کنیم:



🍏 برای رسم نمودار تابع $y = f(ax+b)$ با کمک نمودار $y = f(x)$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

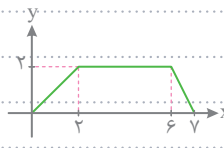
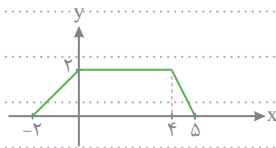
1 طول تمام نقاط نمودار را در a ضرب می‌کنیم تا به نمودار تابع $y = f(x+b)$ برسیم.

2 اگر $b > 0$ باشد، نمودار را به اندازه b واحد به سمت راست و اگر $b < 0$ باشد، نمودار را به اندازه b واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.

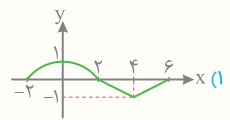
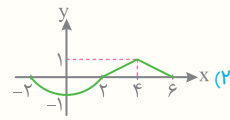
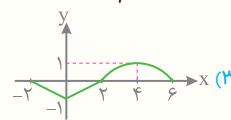
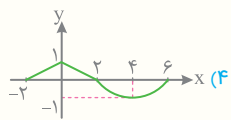
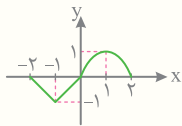


🍇 نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f(3x+2)$ را رسم کنید.

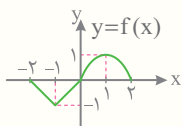
🟩 ابتدا طول تمام نقاط را در 3 ضرب می‌کنیم و سپس نمودار حاصل را 2 واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم:



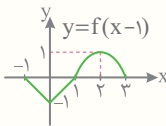
Test نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = -f(\frac{1}{3}x-1)$ کدام است؟



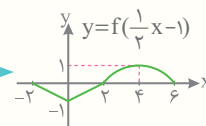
4 تغییرات را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:



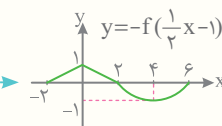
1 واحد به راست
 $x \rightarrow x-1$



انبساط با ضریب 3
در راستای افقی



قرینه نسبت به محور xها



هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن n عددی صحیح و نامنفی و $a_n \neq 0$ و همه ضرایب عدد حقیقی هستند را یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌نامند.

چند ویژگی

1) برای تابع $f(x) = 0$ درجه تعریف نمی‌شود.

2) درجه تابع ثابت $f(x) = c$ برابر صفر است.

3) درجه تابع خطی $f(x) = mx + b$ برابر ۱ است.

4) درجه تابع سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ برابر ۲ است.

دامنه توابع چند جمله‌ای برابر مجموعه اعداد حقیقی یعنی \mathbb{R} است.

Test کدام یک از توابع زیر یک تابع چند جمله‌ای از درجه ۴ است؟

$$y = x^4 + \sqrt{2}x + 1 \quad (۴)$$

$$y = x^4 + \sqrt{2}x + 1 \quad (۳)$$

$$y = x^4 + 2x^5 + 3 \quad (۲)$$

$$y = \sqrt{2}x + 1 \quad (۱)$$

3 به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

1) درجه این تابع برابر ۱ است.

2) بزرگ‌ترین درجه این تابع برابر ۵ است، پس این تابع از درجه ۵ است.

3) بزرگ‌ترین درجه این تابع برابر ۴ است، پس این تابع از درجه ۴ است.

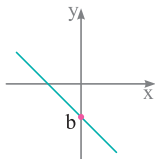
4) در این تابع توان x در عبارت $\sqrt{2}x$ عددی صحیح نیست؛ پس این تابع چند جمله‌ای نیست.

به هر تابع به صورت $f(x) = ax + b$ تابع خطی می‌گویند. می‌دانیم در این تابع a برابر شیب خط و b نشان دهنده عرض از مبدأ است.

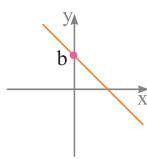
نمودار توابع خطی $y = ax + b$ با توجه به علامت a و b در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند:

نمودار تابع $y = ax + b$ در حالت‌های مختلف

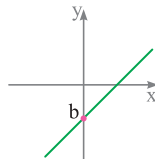
$$a < 0, b < 0$$



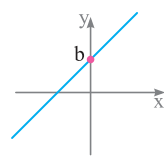
$$a < 0, b > 0$$



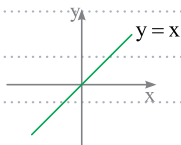
$$a > 0, b < 0$$



$$a > 0, b > 0$$

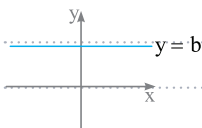


اگر $a = 1$ و $b = 0$ باشد آنگاه تابع خطی $y = ax + b$ به تابع $y = x$ تبدیل می‌شود. به این تابع، تابع همانی می‌گویند.



توجه کنید خط $y = x$ نیمساز ناحیه اول و سوم دستگاه مختصات است.

اگر $a = 0$ باشد آنگاه تابع خطی $y = ax + b$ به تابع $y = b$ تبدیل می‌شود. به این تابع، تابع ثابت می‌گویند.



اگر f تابعی همانی و g تابعی ثابت باشد و بدانیم $f(3) + g(3) = 5$ است، حاصل $f(4) \times g(5)$ را به دست آورید.

چون f تابعی همانی است، پس $f(3) = 3$ است، بنابراین با توجه به صورت سؤال داریم: $f(3) + g(3) = 5 \Rightarrow 3 + g(3) = 5 \Rightarrow g(3) = 2$

حال چون تابع g ثابت است، پس به ازای تمام مقادیر برابر ۲ است. بنابراین: $f(4) \times g(5) = 4 \times 2 = 8$

Test اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

۲ صورت کسر به ازای $x=2$ برابر صفر می‌شود. اما از آن جایی که حاصل حد برابر عدد $\frac{1}{2}$ است، پس کسردارای ابهام $\frac{0}{0}$ است. بنابراین $x=2$ ریشه

$$\text{1) } a(2)+b=0$$

مخرج کسرنیز است:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{a} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

از طرفی پس از رفع ابهام، حاصل حد برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود، پس:

$$2\left(\frac{1}{2}\right) + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

با جایگذاری a در 1 داریم:

Limits & Continuity

متناتی

صورتی

🍏 برای رفع ابهام کسرهای $\frac{0}{0}$ که در صورت و مخرج آن‌ها عبارت مثلثاتی وجود دارد، باید عامل صفر شونده در صورت و مخرج را به کمک اتحادهای جبری یا مثلثاتی، تجزیه یا فاکتورگیری از بین ببریم.

🍇 برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}$ با جایگذاری $x = \frac{\pi}{4}$ در صورت و مخرج به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x)}{\cos x - \sin x} = 1 + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

🍏 اگر در صورت یا مخرج یک کسر، $\tan x$ وجود داشته باشد، به جای آن $\frac{\sin x}{\cos x}$ می‌نویسیم.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{1 + \tan x} \stackrel{\text{رفع ابهام}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \cos x = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

🍏 برای محاسبه حدهای مثلثاتی، وقتی کمان آن‌ها به سمت صفر میل می‌کند،

می‌توانیم از هم‌ارزی مثلثاتی استفاده کنیم:

هم‌ارزی‌های مثلثاتی وقتی $u \rightarrow 0$

$\sin u \sim u$	$\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$	$\tan u \sim u$
$\sin^n u \sim u^n$	$\cos^n u \sim 1 - n \frac{u^2}{2}$	$\tan^n u \sim u^n$

🍇 حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-2\cos 2x}}{\tan x}$ را به دست آورید.

🍇 چون $x \rightarrow 0^-$ می‌توانیم از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-2\cos 2x}}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-2\left(1-\frac{4x^2}{2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{4x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x} = -2$$

🍏 اگر پس از استفاده از هم‌ارزی‌ها، همه عبارت‌های موجود در صورت یا مخرج کسر با هم ساده شوند، حاصل حد قابل اطمینان نیست. برای حل این مسائل باید از فاکتورگیری، اتحادها و گویا کردن استفاده کنیم و سپس حاصل حد را محاسبه کنیم.

(خارج - ۹۸)

Test حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x}$ کدام است؟

۲π (۴)

π (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲ وقتی $x \rightarrow 1^+$ ، مقدار $[x]$ برابر ۱ است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2 \pi x}{1 + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \cos \pi x)(1 + \cos \pi x)}{1 + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - \cos \pi x) = 1 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2$$

اگر در روابط مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ به جای β زاویه 2α قرار دهیم، آنگاه نسبت‌های مثلثاتی زاویه 3α به دست می‌آیند...

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

اگر $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ باشد، آنگاه مقدار $\cos 3\alpha$ کدام است؟

می‌دانیم $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ است، پس:

$$\cos 3\alpha = 4\left(\frac{3}{4}\right)^3 - 3\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{16} - \frac{27}{16} = -\frac{9}{16}$$

Test اگر $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و انتهای کمان θ در ربع اول باشد، حاصل $\frac{\cos 3\theta}{\cos 4\theta}$ چقدر است؟

$$\frac{\sqrt{6}}{5} \quad (1) \qquad -\frac{\sqrt{6}}{5} \quad (2) \qquad -\frac{\sqrt{6}}{7} \quad (3) \qquad \frac{\sqrt{6}}{7} \quad (4)$$

ابتدا مقادیر $\cos\theta$ و $\cos 2\theta$ را به دست می‌آوریم. از آنجایی که θ در ربع اول قرار دارد، $\cos\theta > 0$ است:

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2 \times \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\cos 3\theta}{\cos 4\theta} = \frac{4\cos^3\theta - 3\cos\theta}{2\cos^2\theta - 1} = \frac{4\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}{2\left(\frac{1}{3}\right) - 1} = \frac{\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} - \sqrt{6}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{8\sqrt{6} - 9\sqrt{6}}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{7}$$

برای حل بعضی از معادلات مثلثاتی، لازم است از روابط $\sin(\alpha \pm \beta)$ و $\cos(\alpha \pm \beta)$ استفاده کنیم.

جواب‌های معادله $\cos^3 x \cos x + \sin^3 x \sin x = \sin x$ را در بازه $[0, \pi]$ به دست آورید.

با استفاده از بسط $\cos(\alpha - \beta)$ سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos^3 x \cos x + \sin^3 x \sin x = \sin x \Rightarrow \cos 2x = \sin x$$

حالا با استفاده از تساوی $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ معادله مثلثاتی را به صورت $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad \left. \begin{array}{l} x \in [0, \pi] \\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad \left. \begin{array}{l} x \in [0, \pi] \\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

در حل معادلات مثلثاتی که شامل $\sin x \pm \cos x$ هستند، باید از روابط مثلثاتی زیر استفاده کنیم:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

جواب کلی معادله مثلثاتی $2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x$ کدام است؟

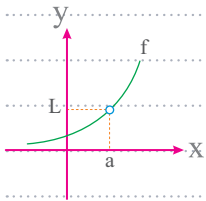
می‌دانیم $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ است، پس:

$$2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x \Rightarrow \sqrt{2} \sin 2x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{4} + x\right) \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{4} + x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

چون جواب $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ کامل‌تر بوده و تمام جواب‌های $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ را نیز شامل می‌شود، پس جواب کلی به صورت $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ است.

توجه کنید اگر طرفین معادله را به توان ۲ برسانید، ممکن است جواب اضافی ایجاد شود!

در بعضی سؤالات، نمودار تابع کسری f داده می‌شود که در نقطه $x = a$ دارای حفره [نقطه تونالی] است.

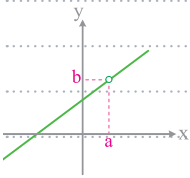


در این سؤالات باید به دو مورد زیر توجه کرد:

1. ریشه مشترک صورت و مخرج کسر تابع f است. $x = a$

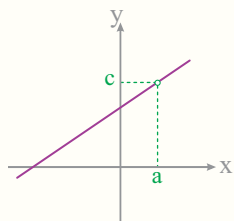
2. حاصل حد تابع f وقتی $x \rightarrow a$ برابر L است.

نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ به صورت مقابل است. مقدار $a + b$ کدام است؟



چون $x = 2$ ریشه مشترک صورت و مخرج کسر تابع f است، پس $a = 2$ است. از طرفی با توجه به نمودار:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a + b = 2 + 4 = 6$$



نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + b}$ است. مقدار $a - b + c$ کدام است؟

- 1) 4
2) 2
3) 3
4) 6

4

با توجه به شکل صورت سؤال، نمودار تابع f در سمت راست محور x ها دارای حفره است، پس $x = a$ ریشه مشترک صورت و مخرج کسر است. از آن جایی که ریشه‌های صورت کسر $x = 1$ و $x = -3$ هستند، پس $a = 1$ بوده و مخرج کسر را نیز صفر می‌کند:

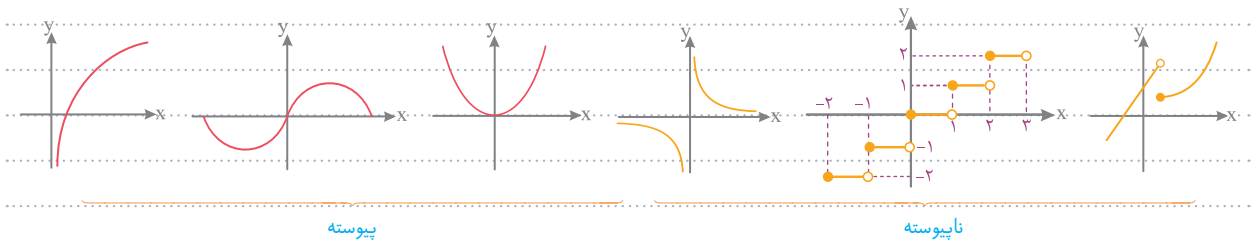
$$c = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4$$

از طرفی داریم:

پس $a - b + c = 1 - (-1) + 4 = 6$ است.



اگر بتوان نمودار تابعی را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد، می‌گوییم آن نمودار مربوط به تابعی پیوسته است. در غیر این صورت، تابع را ناپیوسته می‌گوییم.



تابع f در نقطه $x = a$ از دامنه‌اش پیوسته می‌گوییم، هرگاه حد این تابع در $x = a$ موجود و برابر $f(a)$ باشد؛ به عبارت دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$



Martin Haier

درس سوم

حد و پیوستگی و مجانب

صفحه ۱۴۱ تا ۱۴۴ حسابان ۱
صفحه ۱۶۵ تا ۱۷۰ و ۱۶۷ تا ۱۶۹ حسابان ۲

Lesson 3

اضافات حسابان

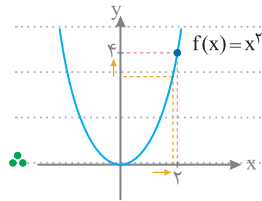
تفاوت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$

Calculus Extra

🍏 اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، در این صورت $[\lim_{x \rightarrow a} f(x)] = [L]$ است.

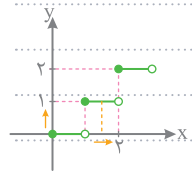
• $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \Rightarrow [\lim_{x \rightarrow 0} f(x)] = [3] = 3$

• $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow [\lim_{x \rightarrow 0} f(x)] = [\frac{3}{2}] = 1$



• $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 \Rightarrow [\lim_{x \rightarrow 2} x^2] = [4] = 4$

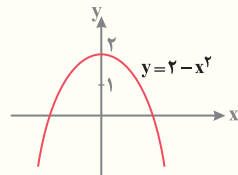
🍏 نمودار تابع $y = [f(x)]$ با نمودار تابع $y = f(x)$ متفاوت است. پس برای یافتن حد تابع $[f(x)]$ در نقطه $x = a$ حتماً باید به رفتار تابع $y = [f(x)]$ در اطراف این نقطه توجه کنیم که مناسب‌ترین راه، رسم نمودار $y = [f(x)]$ است.



• $\lim_{x \rightarrow 2} [x] = 1$

• می‌خواهیم حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ را به دست آوریم. باید نمودار تابع $[x]$ را در اطراف $x = 2$ رسم و بررسی کنیم.

Test نمودار تابع $f(x) = 2 - x^2$ به صورت زیر است. حاصل $[\lim_{x \rightarrow 0} f(x)] + [\lim_{x \rightarrow 0} f(x)]$ کدام است؟



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

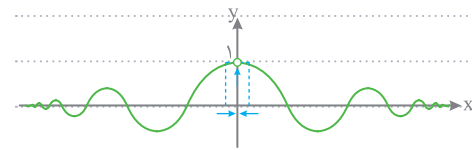
3 با توجه به نمودار، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ ؛ پس $[\lim_{x \rightarrow 0} f(x)] = [2] = 2$ است. از طرفی وقتی $x \rightarrow 0$ ، آن‌گاه f با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود؛ یعنی $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = [2^-] = 1$. بنابراین مجموع این دو حد برابر ۳ است.

اضافات حسابان

حدهای جبری - مثلثاتی

Calculus Extra

🍏 نمودار تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ به صورت مقابل است:



با توجه به این نمودار دو نتیجه مهم زیر به دست می‌آید:

۱) با توجه به نمودار، واضح است که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

۲) وقتی $x \rightarrow 0$ ، نمودار تابع $\frac{\sin x}{x}$ با مقادیر کم‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود.

• $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{\sin x}{x}] = [1^-] = 0$

به طور کلی وقتی $u \rightarrow 0$ خواهیم داشت:

$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$	$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1$	$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = 1$	$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\tan u} = 1$
---	---	---	---

برای محاسبه حدهای کسری که در آن‌ها هر دو تابع مثلثاتی و جبری وجود دارد، اگر کمان نسبت‌های مثلثاتی به سمت صفر میل کند، می‌توانیم از هم‌ارزی‌های زیر استفاده کنیم:

هم‌ارزی‌های مثلثاتی با شرط $u \rightarrow 0$		
$\sin^n u \sim u^n$	$\tan^n u \sim u^n$	$\cos^n u \sim 1 - n \frac{u^2}{2}$

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \tan^3 x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$ کدام است؟

چون $x \rightarrow 0^+$ می‌توانیم از هم‌ارزی استفاده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \tan^3 x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 3x}{\sqrt{(2x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\sqrt{2} \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\sqrt{2} |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\sqrt{2} x} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

اگر پس از استفاده از هم‌ارزی‌های مثلثاتی فوق، همه عبارت‌های موجود در صورت یا مخرج کسر با هم ساده شوند، می‌توانیم از هم‌ارزی‌های قوی زیر استفاده کنیم:

هم‌ارزی‌های قوی‌تر مثلثاتی وقتی $u \rightarrow 0$		
$\sin u \sim u - \frac{u^3}{6}$	$\tan u \sim u + \frac{u^3}{3}$	$\tan u - \sin u \sim \frac{u^3}{2}$

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ کدام است؟

به جای $\tan x$ می‌نویسیم $\frac{\sin x}{\cos x}$ و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{x^3} = \frac{1}{2}$$

(ریاضی خارج - ۹۹)

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ کدام است؟

۲ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

$-\sqrt{2}$ (۲)

-۲ (۱)

۱ می‌دانیم اگر $u \rightarrow 0$ هم‌ارزی $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$ برقرار است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\frac{1}{\sqrt{2}} |x|}$$

حال با جایگذاری $x = 0$ در کسر حاصل، به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، پس با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{-\frac{1}{\sqrt{2}} x} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{3}{2\sqrt{2+3x}} - \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{4}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -2$$

برای رفع ابهام کسرهای $\frac{\circ}{\circ}$ ، که در صورت یا مخرج آن‌ها عبارت مثلثاتی وجود دارد، در صورتی که زاویه بر حسب π باشد یا x به سمت π میل کند، می‌توانیم از تغییر متغیر کمک بگیریم.

بهترین روش استفاده از تغییر متغیر، این است که وقتی $x \rightarrow a$ ، آن را به صورت $(x-a) \rightarrow 0$ بنویسیم و فرض کنیم $x-a=t$ است. حال با قرار دادن $t+a$ به جای x در تابع، کسر را بر حسب t نوشته و حاصل حد را وقتی $t \rightarrow 0$ به دست می‌آوریم.

حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$ کدام است؟

با جایگذاری $x=\pi$ در صورت و مخرج کسر داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = \frac{\sin \pi}{\pi-\pi} = \frac{0}{0}$$

حال $x \rightarrow \pi$ را به صورت $x-\pi \rightarrow 0$ می‌نویسیم و فرض می‌کنیم $x-\pi=t$ ، $\pi+t$ را در عبارت به جای x قرار داده و حاصل حد را وقتی $t \rightarrow 0$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi+t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = -1$$

Test حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{|x-1|}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $-\frac{\pi}{2}$ (۴)

3 با جایگذاری $x=1$ به $\frac{\circ}{\circ}$ می‌رسیم. برای رفع ابهام $\frac{\circ}{\circ}$ ، فرض می‌کنیم $x-1=t$ (یعنی $x=1+t$)، بنابراین $x \rightarrow 1^-$ را به صورت $t \rightarrow 0^-$ می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{|x-1|} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\cos \frac{\pi}{2} (1+t)}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} t)}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-\sin \frac{\pi}{2} t}{-t} = \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{\frac{\pi}{2} t} = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$$

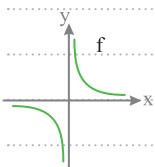
خط $x=a$ را **مجانب قائم** تابع f می‌گوییم، هرگاه حاصل حد راست یا چپ تابع f در $x=a$ نامتناهی شود.

در نمودار تابع f ، اگر با میل کردن x به سمت a ، حداقل یکی از شاخه‌های منحنی به سمت بی‌نهایت بروند، خط $x=a$ مجانب قائم تابع f خواهد بود.

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

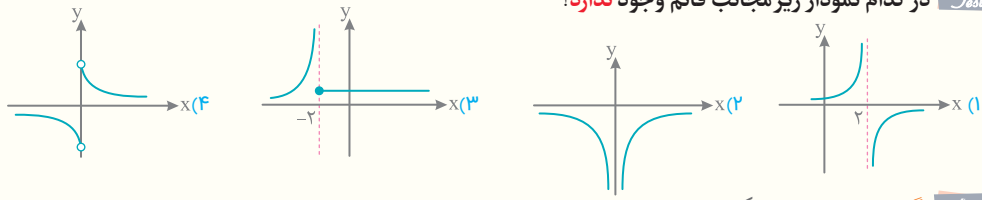
به زبان ساده، مجانب قائم خطی است عمودی که نمودار تابع در بی‌نهایت، بسیار به آن نزدیک می‌شود.

با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ ، واضح است که $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ، بنابراین خط $x=0$ مجانب قائم تابع f است.



نمودار یک تابع می‌تواند هر کدام از مجانب‌های قائم خود را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند.

Test در کدام نمودار زیر مجانب قائم وجود ندارد؟



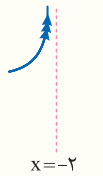
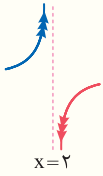
4 گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

1 وقتی x از سمت چپ و راست به 2 نزدیک می‌شود، شاخه‌های منحنی به سمت $+\infty$ و $-\infty$ می‌روند، پس $x=2$ مجانب قائم تابع است.

2 وقتی x از سمت چپ و راست به صفر نزدیک می‌شود، شاخه‌های منحنی به سمت $-\infty$ می‌روند، پس $x=0$ مجانب قائم تابع است.

3 وقتی x از سمت چپ به -2 نزدیک می‌شود، شاخه منحنی به سمت $+\infty$ می‌رود؛ یعنی $x=-2$ مجانب قائم تابع است.

4 با توجه به نمودار، برد تابع محدود می‌باشد، بنابراین تابع نمی‌تواند مجانب قائم داشته باشد.



Calculus Extra

تعیین مجانب قائم توابع کسری (I)

اشفایات حسابان

🍏 برای تعیین مجانب قائم در توابع کسری، باید ریشه‌های مخرج را به دست آوریم. اگر $x=a$ ریشه مخرج تابع کسری f باشد، آنگاه خط $x=a$ به شرطی مجانب قائم است که:

1 حداقل یکی از همسایگی‌های راست یا چپ $x=a$ در دامنه تعریف تابع باشد. بنابراین باید ابتدا دامنه تابع را تعیین کنیم.

2 حاصل حد تابع وقتی $x \rightarrow a$ بی‌نهایت شود.

🍀 می‌خواهیم مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{x}{x-2}$ را تعیین کنیم. از آنجایی که $x=2$ ریشه مخرج است و دامنه تابع $\mathbb{R} - \{2\}$ می‌باشد، پس تابع در همسایگی نقطه $x=2$ تعریف شده است. حال حد تابع را وقتی $x \rightarrow 2$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

خط $x=2$ مجانب قائم تابع است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

🍀 می‌خواهیم مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$ را پیدا کنیم. ریشه مخرج $x=-2$ است، اما از آنجایی که دامنه این تابع برابر $[0, +\infty)$ است، هیچ همسایگی از ریشه مخرج در دامنه تابع نیست، در نتیجه خط $x=-2$ مجانب قائم تابع f نیست.

Test کدام تابع زیر دو مجانب قائم دارد؟

$f(x) = \frac{|x|}{x^2-1}$ (4)

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ (3)

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ (2)

$f(x) = \frac{x}{x-1}$ (1)

4 برای بررسی مجانب قائم، حد تابع را در ریشه‌های مخرج محاسبه می‌کنیم:

1 $x=1$ ریشه مخرج است. با توجه به این که دامنه تابع $\mathbb{R} - \{1\}$ می‌باشد، پس تابع در همسایگی نقطه $x=1$ تعریف شده است، بنابراین:

خط $x=1$ مجانب قائم است. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} = \infty$

۲ در این تابع نیز $x=1$ ریشهٔ مخرج کسراست، از طرفی دامنهٔ تابع به صورت $(1, +\infty)$ است. بنابراین فقط می‌توانیم حد تابع را وقتی $x \rightarrow 1^+$ بررسی کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{خط } x=1 \text{ مجانب قائم است.}$$

۳ ریشه‌های مخرج کسر $x=1$ و $x=-1$ هستند. از طرفی دامنهٔ تابع به صورت $\{1\} - [0, +\infty)$ است. با توجه به این‌که تابع در همسایگی چپ و راست $x=-1$ تعریف نشده، نمی‌توان حد تابع را در $x=-1$ بررسی کرد. بنابراین شرط وجود مجانب قائم را فقط در $x=1$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{خط } x=1 \text{ مجانب قائم است.}$$

۴ ریشه‌های مخرج $x=1$ و $x=-1$ هستند و تابع در همسایگی چپ و راست هر دو نقطه تعریف شده است، پس شرط مجانب قائم را در این دو نقطه بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|}{x^2-1} = \frac{1}{0} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|-1|}{x^2-1} = \frac{1}{0} = \infty \end{cases} \quad \text{خط‌های } x=1 \text{ و } x=-1 \text{ هر دو مجانب قائم هستند.}$$

Calculus Extra

تعیین مجانب قائم توابع کسری (II)

اشفایات شبان

🍏 هنگام تعیین مجانب قائم تابع کسری f ، اگر $x=a$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج کسر باشد، در محاسبهٔ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ حالت مبهم $\frac{0}{0}$ ایجاد می‌شود. در این صورت باید تابع را تا حد امکان ساده کنیم. سپس با دو حالت کلی زیر مواجه می‌شویم:

۱ اگر پس از ساده کردن کسر $x=a$ ریشهٔ مخرج کسر باشد، آنگاه خط $x=a$ مجانب قائم تابع است.

🍎 مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2}$ را تعیین کنید.

🟩 از آن جایی که $x=1$ ریشهٔ مخرج کسر بوده و دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R} - \{1\}$ است، پس تابع در همسایگی نقطهٔ $x=1$ تعریف شده است. حال حد تابع را وقتی $x \rightarrow 1$ به دست می‌آوریم، چون به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برخوردیم، عامل $(x-1)$ را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم و آن را به صورت $f(x) = \frac{1}{x-1}$ می‌نویسیم. حال حد تابع را وقتی $x \rightarrow 1$ به دست می‌آوریم:

خط $x=1$ مجانب قائم تابع است. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

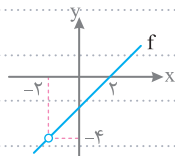
۲ اگر پس از ساده کردن، $x=a$ ریشهٔ مخرج کسر نباشد، آنگاه نمودار تابع f در $x=a$ توخالی خواهد بود.

🍎 مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ را تعیین کنید.

🟩 از آن جایی که $x=-2$ ریشهٔ مخرج کسر بوده و دامنهٔ آن برابر $\mathbb{R} - \{-2\}$ است، پس تابع در همسایگی $x=-2$ تعریف شده است، اما هنگام محاسبهٔ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2}$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برمی‌خوریم، عامل $(x+2)$ را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x-2; x \neq -2$$

واضح است حد تابع f وقتی $x \rightarrow -2$ برابر -4 است. پس خط $x=-2$ مجانب قائم تابع f نیست و باعث ایجاد نقطهٔ توخالی در نمودار آن می‌شود:



Test توابع $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+1}$ و $g(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$ را در نظر بگیرید. کدام تابع در $x=1$ مجانب قائم دارد؟

۴ هیچ‌کدام

۳ هر دو

۲ فقط g

۱ فقط f

1 در هر دو تابع، $x=1$ ریشه مشترک صورت و مخرج است، پس ابتدا هر دو تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+1} = \frac{x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} \rightarrow \text{خط } x=1 \text{ مجانب قائم است.}$$

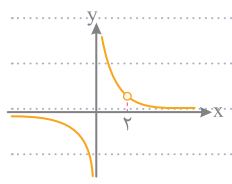
$$g(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} \rightarrow \text{خط } x=2 \text{ مجانب قائم است.}$$

در تابع $g(x)$ خط $x=1$ نقطه تو خالی خواهد بود.

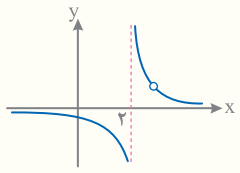
اشاقات حسابان تعیین مقدار پارامتر در سه‌الات مجانب قائم

🍏 در توابع کسری، اگر نمودار تابع f را داشته باشیم، برای مشخص کردن مقادیر پارامترهای ضابطه f ، باید به دو مورد زیر توجه کنیم:
 1 طول مجانب قائم تابع f ، ریشه مخرج کسر است.
 2 طول نقطه تو خالی، ریشه مشترک صورت و مخرج کسر است.

♣ در تابع $f(x) = \frac{x-2}{x(x-2)}$ به ازای هر $x \neq 2$ داریم: $f(x) = \frac{x-2}{x(x-2)} = \frac{1}{x}$



بنابراین $x=2$ نقطه ای تو خالی روی نمودار تابع f است و خط $x=0$ مجانب قائم آن است. [به نمودار تابع f توجه کنید:]



Test نمودار تابع $f(x) = \frac{x-3}{x^2+ax+b}$ به صورت مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- 1) 2
- 2) -2
- 3) 1
- 4) -1

3 با توجه به نمودار تابع، خط $x=2$ مجانب قائم تابع f است؛ پس $x=2$ ریشه مخرج کسر است:

$$x=2 \rightarrow 2^2+a(2)+b=0 \rightarrow 2a+b=-4 \quad 1$$

از طرفی در نمودار، نقطه تو خالی وجود دارد، پس ریشه صورت یعنی $x=3$ ، ریشه مخرج نیز هست:

$$x=3 \rightarrow 3^2+a(3)+b=0 \rightarrow 3a+b=-9 \quad 2$$

حال با حل دستگاه زیر مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

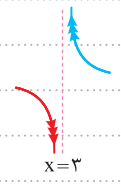
$$\begin{cases} 2a+b=-4 \\ 3a+b=-9 \end{cases} \Rightarrow a=-5, b=6 \rightarrow a+b=1$$

اشاقات حسابان نمودار تابع در اطراف مجانب قائم

🍏 برای رسم نمودار تابع f در اطراف مجانب قائم $x=a$ باید حد تابع f را وقتی $x \rightarrow a^+$ و $x \rightarrow a^-$ محاسبه کنیم تا نامتناهی بودن حد تابع و همچنین علامت $(+\infty)$ یا $(-\infty)$ را در اطراف a مشخص کنیم.

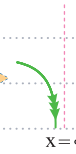
♣ می‌خواهیم نمودار تابع $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ را در اطراف مجانب قائم $x=3$ رسم کنیم. بدین منظور، باید حد تابع f را وقتی $x \rightarrow 3^+$ و $x \rightarrow 3^-$ مشخص کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3} &= \frac{6}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3} &= \frac{6}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\}$$

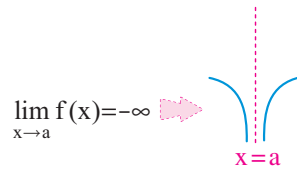
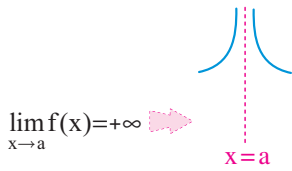


می خواهیم نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$ را در اطراف مجانب قائم آن رسم کنیم. از آن جایی که مخرج کسره ازای $x=0$ و اعداد حقیقی مثبت، صفر می شود، پس دامنه تابع $(-\infty, 0)$ است. با توجه به دامنه تابع، باید وجود مجانب قائم را فقط در $x=0$ بررسی کنیم. برای این منظور حد چپ تابع را در $x=0$ محاسبه می کنیم:

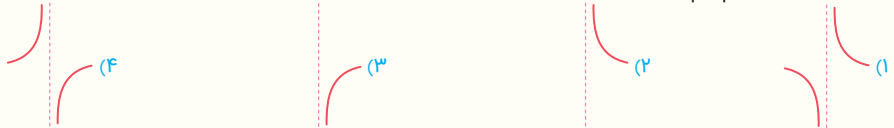
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x-|x|} = \frac{1}{0^- - 0} = -\infty$$



اگر خط $x=a$ مجانب قائم تابع f باشد و حد راست و چپ تابع f در $x=a$ هم علامت باشند، آنگاه نمودار تابع f در اطراف خط مجانب قائم $x=a$ به صورت زیر خواهد بود [تابع f در $x=a$ اتصال مضاعف دارد]:



Test نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x+|x|}$ در اطراف مجانب قائم $x=0$ چگونه است؟



2 دامنه تابع به صورت $(0, +\infty)$ است، چون به ازای $x=0$ مقادیر منفی، مخرج تابع برابر صفر است. بنابراین برای بررسی رفتار تابع f در اطراف مجانب قائم، فقط می توانیم حد راست تابع را در نقطه $x=0$ به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+|x|} = \frac{1}{0^+ + 0} = +\infty$$

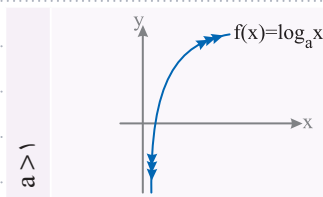


Calculus Extra

مجانِب قائم توابع لگاریتمی

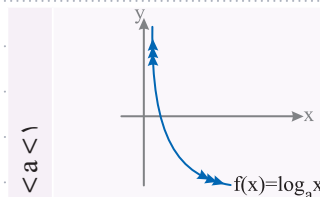
اضافات سابان

به نمودار تابع لگاریتمی $y=f(x)=\log_a x$ دقت کنید:



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

با توجه به نمودار این توابع، می توان گفت که خط $x=0$ مجانب قائم تابع $f(x)=\log_a x$ است.

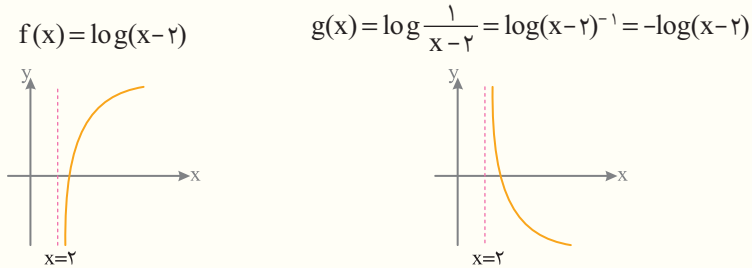
با توجه به این که لگاریتم برای مقادیر منفی تعریف نشده است نمی توان حد آن را وقتی $x \rightarrow 0^-$ محاسبه کرد.

خط $x=a$ ، مجانب قائم هر دو تابع $f(x)=\log(x-a)$ و $g(x)=\log \frac{1}{x-a}$ است.

Test توابع $f(x) = \log(x-2)$ و $g(x) = \log \frac{1}{x-2}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از این توابع مجانب قائم دارند؟
 ۱) فقط f ۲) فقط g ۳) هر دو ۴) هیچ کدام

3 در هر دو تابع f و g، خط $x=2$ مجانب قائم محسوب می‌شود، چون حاصل حد هر دو تابع وقتی $x \rightarrow 2^+$ ، برابر ∞ می‌شود:

• $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \log(x-2) = \log 0^+ = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \log \frac{1}{x-2} = \log \frac{1}{0^+} = \log(+\infty) = +\infty$
 به نمودار این دو تابع نیز توجه کنید:

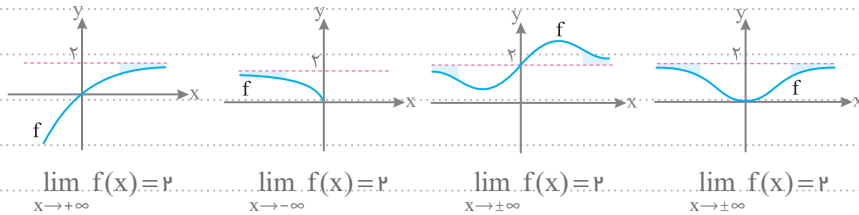


Calculus Extra

آشنایی با مجانب افقی

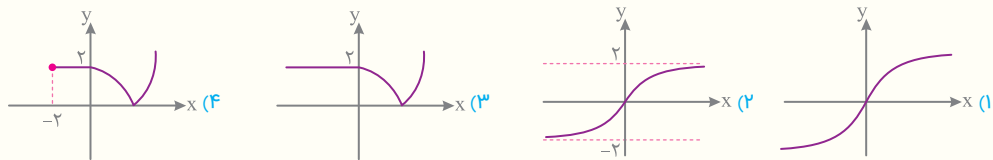
اشانات حسابان

🍏 خط $y=L$ را **مجانب افقی** $y=f(x)$ می‌نامیم، هرگاه حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ برقرار باشد.
 ... در نمودارهای زیر، خط $y=2$ مجانب افقی تابع f است.



🍏 هر تابع خطی موازی محور xها، **مجانب افقی خودش** می‌باشد.
 ... در نمودار مقابل، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ، بنابراین خط $y=2$ مجانب افقی تابع f می‌باشد.

Test کدام تابع فقط یک مجانب افقی دارد؟



3 بررسی گزینه‌ها:

- ۱) وقتی $x \rightarrow \infty$ ، مقادیر تابع به هیچ عدد حقیقی نزدیک نمی‌شوند، پس این تابع مجانب افقی ندارد.
- ۲) وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر تابع به سمت ۲ و وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر تابع به سمت -۲ میل می‌کند، پس خط‌های $y=2$ و $y=-2$ مجانب‌های افقی تابع هستند.
- ۳) وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، مقدار حد تابع برابر ۲ است و وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر تابع به سمت $+\infty$ می‌روند، پس تنها مجانب افقی این تابع خط $y=2$ است.
- ۴) در این گزینه X نمی‌تواند به سمت $-\infty$ میل کند، چون دامنه تابع به صورت $[-2, +\infty)$ است. از طرفی وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر تابع به سمت $+\infty$ می‌روند، پس این تابع مجانب افقی ندارد.

بسمت مخصوص رشته ریاضی • مدرسه پسرانه و دخترانه

برای یافتن مجانب افقی تابع f ، باید حاصل حد تابع f را در $+\infty$ یا $-\infty$ به دست آوریم.

••• مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{4x+3}{x-5}$ خط $y=4$ است؛ چون:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+3}{x-5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x} = 4$$

••• مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$ خط $y=0$ است؛ چون:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

🍏 در تابع گویای $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر درجه صورت از درجه مخرج بیشتر باشد، حد تابع وقتی $x \rightarrow \infty$ ، عددی حقیقی نیست. بنابراین در این حالت تابع مجانب افقی ندارد.

••• تابع $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3}$ مجانب افقی ندارد؛ چون:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

🍏 اگر دامنه تابع f محدود به دو عدد حقیقی باشد، تابع مجانب افقی ندارد؛ چون x نمی‌تواند به $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند.

••• دامنه تابع $f(x) = \sqrt{3-|x|}$ به صورت $D_f = [-3, 3]$ است که از هر دو طرف محدود است، پس x نمی‌تواند به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند، بنابراین تابع f مجانب افقی ندارد.

🍏 هنگام یافتن مجانب افقی توابع شامل قدر مطلق، باید حد تابع را هم برای $x \rightarrow +\infty$ و هم برای $x \rightarrow -\infty$ به دست آوریم.

••• می‌خواهیم مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{|x|+2}{x-3}$ را به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|+2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

بنابراین خط‌های $y=1$ و $y=-1$ مجانب‌های افقی تابع f هستند.

Test در کدام تابع خط $y=2$ مجانب افقی است؟

(۴) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+x}$

(۳) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$

(۲) $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$

(۱) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

4 برای بررسی مجانب افقی، باید حد تابع را در $+\infty$ یا $-\infty$ بررسی کنیم:

❑ دامنه این تابع به صورت $[-1, 1]$ محدود است، پس x نمی‌تواند به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند.

❑ چون درجه صورت از مخرج بیشتر است، تابع مجانب افقی ندارد:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x = \pm\infty$$

❑ مجانب افقی این تابع، خط $y=0$ است:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\pm\infty} = 0$$

❑ مجانب افقی این تابع خط $y=2$ است:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

گاهی اوقات تابعی با چند پارامتر را به همراه مجانب آن به ما می دهند و مقادیر پارامترها را می خواهند. در حل این سوال ها کافی است معادله مجانب را بر حسب پارامترها به دست آورده و برابر با معادله مجانب داده شده در سوال قرار دهیم.

فرض کنید خط $y=2$ معادله مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{ax+4}{3x-5}$ باشد. مقدار پارامتر a را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+4}{3x-5} = 2 \Rightarrow \frac{a}{3} = 2 \Rightarrow a = 6$$

خط $y = \frac{3}{2}$ مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{ax^3}{(a-1)x^3 + 16}$ است. معادله مجانب قائم این تابع کدام است؟

$x = -4$ (۴) $x = 4$ (۳) $x = -2$ (۲) $x = 2$ (۱)

خط $y = \frac{3}{2}$ مجانب افقی تابع f است، پس حد تابع وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر $\frac{3}{2}$ است. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3}{(a-1)x^3 + 16} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3}{(a-1)x^3} = \frac{a}{a-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 3$$

در نتیجه تابع f به صورت $f(x) = \frac{3x^3}{2x^3 + 16}$ است. حال برای به دست آوردن مجانب قائم، ریشه های مخرج کسرا را به دست می آوریم:

$$2x^3 + 16 = 0 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$$

تابع در همسایگی نقطه $x = -2$ تعریف شده است، حد تابع را وقتی $x \rightarrow -2$ محاسبه می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{3x^3}{2x^3 + 16} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{3x^3}{2(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{12}{2(0^+)(12)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{3x^3}{2x^3 + 16} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{3x^3}{2(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{12}{2(0^-)(12)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

بنابراین خط $x = -2$ مجانب قائم تابع f است.

دانش تخصصی رشته ریاضی • مدرسه پسرانه و دخترانه

نمودار یک تابع ممکن است مجانب های افقی خود را قطع کند.



تابع f مجانب خود را قطع نکرده. تابع g مجانب خود را قطع کرده.

اگر خط $y = L$ مجانب افقی تابع f باشد، برای یافتن نقطه برخورد تابع f با خط $y = L$ باید معادله $f(x) = L$ را حل کنیم.

می خواهیم بینیم تابع $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+3x}$ مجانب افقی خود را قطع می کند یا نه. از آن جایی که معادله مجانب افقی این تابع $y=1$ است، بنابراین معادله $f(x)=1$ را حل می کنیم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2+3x} = 1 \Rightarrow x^2+1 = x^2+3x \Rightarrow 1 = 3x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

پس تابع f ، مجانب افقی خود را در نقطه ای به طول $x = \frac{1}{3}$ قطع می کند.

Test نمودار تابع $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{(x-1)^2}$ مجانب افقی خود را در نقطه A قطع می‌کند. فاصله نقطه A از خط مجانب قائم کدام است؟

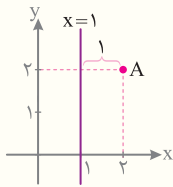
$\frac{1}{2}$ (۱) 1 (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) 2 (۴)

2 برای پیدا کردن مجانب افقی، باید حد تابع را در ∞ به دست آوریم. پس با انتخاب جمله‌های پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \Rightarrow \text{خط } y=2, \text{ مجانب افقی تابع است.}$$

حال برای پیدا کردن نقطه A که محل تلاقی تابع f و خط $y=2$ می‌باشد، معادله $f(x)=2$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{2x^2 - 3x}{(x-1)^2} = 2 \Rightarrow 2x^2 - 3x = 2(x-1)^2 \Rightarrow 2x^2 - 3x = 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow x = 2$$



پس مختصات نقطه A به صورت (2, 2) است. از آن جایی که $x=1$ ریشه مخرج کسر است و صورت کسر را نیز صفر نمی‌کند، خط $x=1$ مجانب قائم تابع f است.

با توجه به نمودار، واضح است فاصله نقطه A از خط $x=1$ برابر 1 است.

Calculus Extra

رفتار تابع در اطراف مجانب افقی

اشکافات سبانی

🍏 فرض کنید خط $y=L$ مجانب افقی تابع f باشد؛ یعنی $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ یا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

بنابراین $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - L) = 0$ یا $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - L) = 0$. با توجه به مقادیر $f(x) - L$ در $+\infty$ یا $-\infty$ ، رفتار تابع در اطراف خط $y=L$ به صورت زیر است:

<p style="text-align: center;">$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$</p>	<p>1 اگر $f(x) - L$ در $+\infty$ یا $-\infty$ با مقادیر مثبت به صفر نزدیک شود، آنگاه نمودار تابع f بالای خط $y=L$ قرار می‌گیرد.</p>
<p style="text-align: center;">$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$</p>	<p>2 اگر $f(x) - L$ در $+\infty$ یا $-\infty$ با مقادیر منفی به صفر نزدیک شود، آنگاه نمودار تابع f پایین خط $y=L$ قرار می‌گیرد.</p>

🍀 می‌خواهیم رفتار تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ را در اطراف مجانب افقی خود، یعنی $y=1$ بررسی کنیم. با به دست آوردن $f(x) - L$ خواهیم داشت:

$$\square f(x) - L = \frac{x}{x-1} - 1 = \frac{x - x + 1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

عبارت $\frac{1}{x-1}$ به ازای مقادیر مثبت بسیار بزرگ x ، مثبت و به ازای مقادیر منفی بسیار کوچک x ، منفی است، بنابراین رفتار تابع در اطراف خط مجانب افقی $y=1$ به صورت مقابل است:

