ویژه کنکور ۱۴۰۲

کلاسینو

آریان حیدری.میلاد منصوری.علی منصف شکری

هرکول

Herc U le

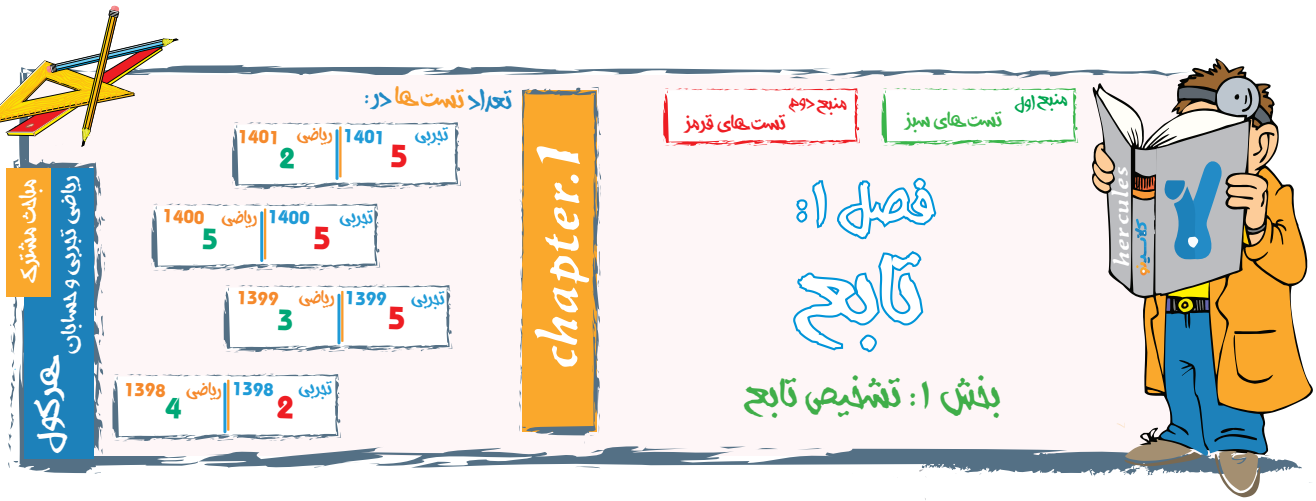
کارشناس علمی :سعید عزیزی

ریاضیات تجربی و حسابان جامع

مباحث مشترک پایهٔ دهم، یازدهم و دوازدهم

بانک تست + پاسخ تشریحی + درسنامه

دستیاران تألیف: امین خوانین‌زاده، حامد علیخانی، احسان غیاثی



۱ تابع f از مجموعه A به مجموعه B تعریف شده است، کدام گزینه درست است؟

۱) تعداد عضوهای برد و هم دامنه، همواره با هم برابر است.

۲) برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم دامنهٔ آن است.

۳) لزومی ندارد که تمام عضوهای مجموعهٔ A در مؤلفه‌های اول تابع f استفاده شوند.

۴) تعداد اعضای برد، همواره بزرگتر یا مساوی تعداد اعضای هم دامنه می‌باشد.

۲ در کدام گزینه مشخصات داده شده نمی‌تواند مربوط به یک تابع باشد؟

۱) $\begin{cases} h:(-\infty,0]\to(-\infty,0] \\ h(x)=-x^2 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} f:[0,\infty)\to\mathbb{R}^+ \\ f(x)=x^2 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} g:(-\infty,0]\to\mathbb{R} \\ g(x)=x^2 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} k:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^- \\ k(x)=-x^2 \end{cases}$

۳ اگر رابطهٔ $f=\{(3,m^2),(2,1),(-2,m),(3,m+2),(m,4)\}$ مربوط به یک تابع باشد، $f(3)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) -1

Ketabchi.com

۴ اگر رابطهٔ $f=\{(1,3),(2,4),(3,5),(m,3)\}$ تابع نباشد، مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) همواره تابع است

۵ با حذف حداقل چند زوج مرتب از رابطهٔ $f=\{(1,2),(2,3),(2,2),(1,4),(2,4),(3,3)\}$ می‌توان آن را به یک تابع تبدیل کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

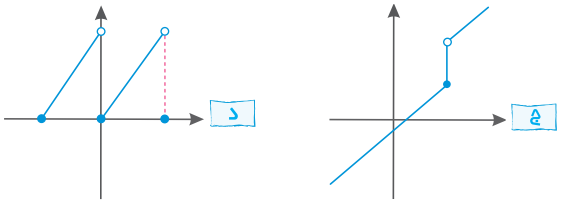
۶ اگر رابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2+4x & ; x\geq a \\ 2x+a+2 & ; x\leq a \end{cases}$ یک تابع باشد، $f(1)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۷

۷ اگر $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & ; x\leq 1 \\ ax+b & ; 1\leq x\leq 2 \\ x^3 & ; x\geq 2 \end{cases}$ ضابطهٔ یک تابع باشد، مقدار ab کدام است؟

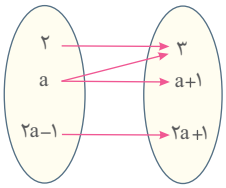
۱) -64 ۲) ۶۴ ۳) ۳۲ ۴) -32

۸ چه تعداد از نمودارهای زیر، مربوط به یک تابع است؟



۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

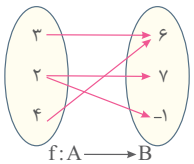
۹ اگر نمودار پیکانی تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، مقدار $f(3)$ کدام است؟



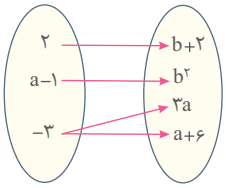
۱) ۶
۲) ۴
۳) ۷
۴) ۵

۱۰ کدام یک از گزینه‌های زیر، یک تابع را معرفی می‌کند؟

۱) $f=\{(۴,۲),(-۱,۲),(۳,۵),(\sqrt{۱۶},۳)\}$
۲) رابطه‌ای که هر عدد مثبت را به ریشه‌های دوم آن نسبت می‌دهد.
۳) رابطه بین افراد و وزن آن‌ها در یک زمان معین.
۴)



۱۱ اگر نمودار پیکانی مقابل یک تابع باشد، آنگاه بیشترین مقدار ممکن برای ab کدام است؟



۱) ۶
۲) -۳
۳) ۳
۴) ۱۲

۱۲ کدام‌یک از موارد زیر معرف یک تابع بر حسب متغیّر مستقل x است؟

۱) $y=\sqrt{x^۲}$
۲) $\sqrt{y^۲}=x$
۳) $x+|y|=۰$
۴) $[y]+[x]=۰$

۱۳ در کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمی‌توان نتیجه گرفت $f(x)$ الزاماً یک تابع است؟

۱) $f(۴x+۳)=۲x+۳$
۲) $f(x^۳+۱)=x^۳+۲$
۳) $f([x])=x$
۴) $f(|x|)=x^۲+۳$

Ketabchi.com

۱۴ چه تعداد از ضابطه‌های زیر، y را به عنوان تابعی از x تعریف می‌کنند؟

الف) $x=\sqrt{y-۲}+\sqrt{۲-y}$

ب) $x=\begin{cases}۲y & ;\ y>۱\\ y+۳ & ;\ y\le ۱\end{cases}$

ج) $y=\begin{cases}x+۱ & ;\ x\ge ۲\\ ۳x & ;\ x\le ۲\end{cases}$

۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) سه

۱۵ در چه تعداد از روابط زیر y تابعی برحسب متغیر مستقل x است؟

الف) $|y-۲|+۳-x=۰$

ب) $f(x^۲)=x$

ج) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-۲$

د) $y^۲-۲y+۱+x^۲=۰$

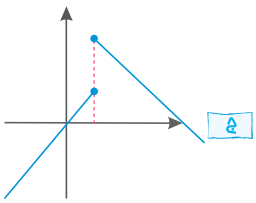
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۶ از بین نمودارها و ضابطه‌های زیر، چه تعداد از آن‌ها با حذف یک نقطه تبدیل به تابع می‌شوند؟

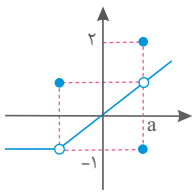
الف) $[x]=[y]$

ب) $|x|=|y|$

ج)



د)



۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) سه

۱۷ اگر A مجموعه‌ای m عضوی و B مجموعه‌ای n عضوی باشند، چند تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B می‌توان تعریف کرد؟

۱) m^n
۲) n^m
۳) $m+n$
۴) $m\times n$

۱۸ اگر $f(x)=x+\frac{1}{x}$ باشد، حاصل $f(2+\sqrt{3})+f(2-\sqrt{3})$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $4\sqrt{3}$

۱۹ اگر $f(x)=\begin{cases}-3x & ; x<-1\\ x^2-2x & ; -1<x<1\\ 2x-1 & ; x>1\end{cases}$ باشد، مقدار $f(-\sqrt{2}+1)+f(-\frac{5}{3})$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۰ اگر $f(3x+2)=\sqrt{2x^3+1}$ باشد، مقدار $f(8)$ برابر با ..... است.

۱) مربع یک عدد طبیعی ۲) مجموع دو عدد فرد متوالی

۳) حاصل‌ضرب دو عدد متوالی ۴) مجموع دو عدد اول

۲۱ اگر $f(x+\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2+1}$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۲ اگر $f(\sqrt{x})=x+2\sqrt{x}$ باشد، مقدار $f(2)-f(1)$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۱

۲۳ اگر $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}+2$، آنگاه مقدار $f(\sqrt{2})$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $1+\sqrt{2}$ ۳) ۵ ۴) $2+\sqrt{2}$

Ketabchi.com

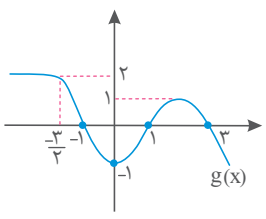
۲۴ اگر $f(x)=\sqrt{x+2|x|}$ باشد، مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟

۱) تعریف نشده ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۲۵ اگر $f(x)=-2x+5-a$، $g(x)=x^2+2x-4$ باشد، به ازای کدام مقدار a رابطهٔ $g(-1)=f(2)$ برقرار است؟

۱) ۶ ۲) -6 ۳) ۳ ۴) -3

۲۶ اگر $f=\{(3,4),(2,-1),(-2,3),(1,-2)\}$ و نمودار تابع g مطابق شکل باشد، حاصل $\frac{f(3)+g(-4)}{f(-2)+g(3)}$ کدام است؟ ($Dg=\mathbb{R}$)



۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{4}$

۲۷ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x-\sqrt{x+4} & ; x>3\\ 2x+3 & ; x\le 3\end{cases}$ مقدار $f(f(1))+f(f(5))$ کدام است؟ (تجربی داخل-۹۰)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۸ به ازای کدام ورودی، خروجی ماشین داده شده برابر ۴ است؟

ورودی → $\frac{2}{2-\sqrt{x-1}}$ → خروجی

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{13}{4}$

۲۹ اگر $f(x)=\frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطهٔ تابع $f(x^2)-2f(x)+1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{1-x^2}$ ۲) $\frac{2x}{x^2-1}$ ۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$ ۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

۳۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2(2-x)^2$ حاصل $f(1+x)-f(1-x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $4x$ ۳) $2x^2$ ۴) $4x^2$

۳۱ اگر $f(\sin x)=\cos^2 x$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$ کدام است؟ $(D_f=[-1,1])$

۱) x^2 ۲) $1-x^2$ ۳) $-x^2$ ۴) $1+x^2$

۳۲ اگر $f(\tan x)=\cos^2 x$ باشد، $f(\frac{1}{x})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{x^2+1}$ ۲) $\frac{x^2}{x^2+1}$ ۳) x^2+1 ۴) x^2

۳۳ اگر $f(xf(x))=3f(x)$ و $f(1)=2$ باشد، مقدار $f(12)$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۳۴ اگر $f(x+2)=g(x-1)=3+\sqrt{x+3}$ باشد، مقدار $g(0)-f(8)$ متعلق به کدام مجموعه است؟

۱) $\mathbb{N}$ ۲) $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$ ۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ ۴) $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$

۳۵ اگر $f(x+1)+f(2)=4x+6$ باشد، آنگاه مقدار $f(3)$ کدام ویژگی را دارد؟

۱) حاصل ضرب دو عدد متوالی ۲) مکعب کامل ۳) مربع کامل ۴) اول

Ketabchi.com

۳۶ اگر $f(x+2)=f(x)+3x+1$ باشد، حاصل $f(7)-f(3)$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۲۶ ۳) ۲۵ ۴) ۲۰

۳۷ اگر $f(x)=x^2+3x+1$ باشد، حاصل $f(\frac{\sqrt{7}-3}{2})+f(\frac{\sqrt{6}-3}{2})-2f(\frac{\sqrt{5}-3}{2})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sqrt{7}-2\sqrt{6}+\sqrt{5}$ ۴) $\frac{\sqrt{7}-2\sqrt{6}+\sqrt{5}}{2}$

۳۸ اگر $f(x+2)=(x+1)^2+2(x+1)+3$ باشد، حاصل $f(\sqrt{7})+f(\sqrt{6})+f(\sqrt{5})$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۹ ۴) ۳۲

۳۹ اگر $2f(x)+xf(4-x)=3x+2$ باشد، مقدار $f(1)$ متعلق به کدام مجموعه است؟

۱) $\mathbb{W}$ ۲) $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$ ۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ ۴) $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$

۴۰ اگر $f(x+2)=2x+3f(3-x)$ باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{6}$

۴۱ اگر $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ و $f(2)=3$ باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۹ ۳) $-\sqrt{3}$ ۴) ۵

۴۲ اگر $f(x)=\{(1,a),(3,5),(5,3a+2)\}$ باشد و $f(x)=f(b-x)$ مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۶۴۰ چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) اگر زاویه‌های زیر ساق مثلث متساوی‌الساقینی ۱ رادیان باشد، ساق بزرگ‌تر از قاعده است.

ب) در دایره‌ای به شعاع ۱ طول کمان رو به زاویهٔ π رادیان تقریباً برابر ۳/۱۴ است.

پ) زاویه‌های $\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{9}$ ، $\frac{7\pi}{36}$ رادیان زوایای یک مثلث منفرجه‌الزاویه هستند.

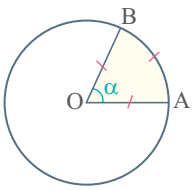
د) به‌طور کلی همواره $\pi = 180$ است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۶۴۱ در دایره‌ای به شعاع ۹، اندازهٔ کمان روبه‌رو به زاویهٔ 10°، چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

۶۴۲ اندازهٔ کمان AB در دایره مقابل با شعاع دایره برابر است. اندازهٔ زاویه $\widehat{AOB}$ تقریباً چند درجه است؟

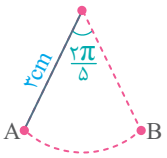


۱) 60° ۲) 57° ۳) 55° ۴) 53°

۶۴۳ طول برف‌پاک‌کن خودرویی ۳۰ سانتی‌متر است، زاویهٔ دوران چند درجه باشد، تا انتهای تیغهٔ برف‌پاک‌کن مسافت ۴۵ سانتی‌متر را طی کند؟

۱) $\frac{280}{\pi}$ ۲) $\frac{240}{\pi}$ ۳) $\frac{180}{\pi}$ ۴) $\frac{270}{\pi}$

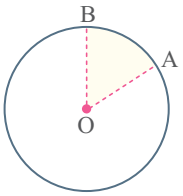
۶۴۴ یک آونگ ساده، حرکتی رفت و برگشتی با زاویهٔ مرکزی $\frac{2\pi}{5}$ رادیان انجام می‌دهد. اگر طول نخ آونگ ۳cm باشد، مقدار کل مسافتی که گلولهٔ انتهای آونگ در سه بار رفت و برگشت کامل طی می‌کند، چند سانتی‌متر است؟



۱) $\frac{18\pi}{5}$ ۲) $\frac{24\pi}{5}$ ۳) 6π ۴) $\frac{36\pi}{5}$

Ketabchi.com

۶۴۵ اندازهٔ کمان AB روبه‌رو به زاویهٔ 15° در دایره‌ای، برابر با $\frac{\pi}{6}$ است. محیط قطاع OAB کدام است؟



۱) $1+\frac{\pi}{6}$ ۲) $2+\frac{\pi}{3}$ ۳) $4+\frac{\pi}{6}$ ۴) $6+\frac{\pi}{3}$

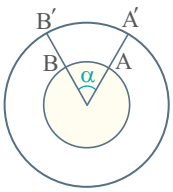
۶۴۶ کمان روبه‌رو به زاویهٔ 15° در دایره‌ای برابر 2cm است. مساحت این دایره چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) 144π ۲) 196π ۳) $\frac{288}{\pi}$ ۴) $\frac{576}{\pi}$

۶۴۷ اگر کمان روبه‌رو به زاویهٔ 20° در دایره‌ای $\frac{\pi}{18}$ باشد، آنگاه کمان روبه‌رو به کدام زاویهٔ مرکزی $\frac{2\pi}{3}$ است؟

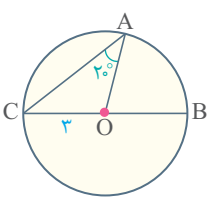
۱) 120° ۲) 140° ۳) 240° ۴) 280°

۶۴۸ در شکل مقابل شعاع دایره‌ها ۶۴۰۰ و ۶۸۰۰ است. اگر طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر 1600π باشد، آنگاه اندازهٔ زاویهٔ α و کمان $\overset{\frown}{A'B'}$ به ترتیب کدام است؟



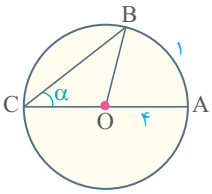
۱) 45° ، 1800π
۲) 30° ، 1800π
۳) 30° ، 1700π
۴) 45° ، 1700π

۶۴۹ در شکل مقابل O مرکز دایره است، اندازهٔ کمان AB کدام است؟



۱) $\frac{2\pi}{9}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{9}$

۶۵۰ در شکل مقابل شعاع دایره ۴ واحد است. اگر اندازهٔ کمان AB برابر ۱ واحد باشد، اندازهٔ زاویهٔ α چند رادیان است؟

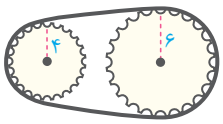


۱) $\frac{۱}{۴\pi}$ ۲) $\frac{۱}{۸\pi}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۶۵۱ شعاع‌های چرخ‌های یک تراکتور ۵۰ و ۱۲۰ سانتی‌متر است، اگر چرخ کوچک‌تر مسیری به طول ۱۸π متر را طی کند، چرخ بزرگ‌تر چند رادیان چرخیده است؟

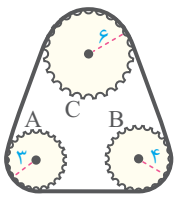
۱) ۷π ۲) $۷/۵\pi$ ۳) ۱۴π ۴) ۱۵π

۶۵۲ دو چرخ به شعاع‌های ۴ و ۶ به وسیلهٔ تسمه‌ای مانند شکل مقابل به هم وصل شده‌اند. وقتی چرخ کوچک‌تر $\frac{۱۵\pi}{۴}$ رادیان بچرخد، چرخ بزرگ‌تر چند رادیان می‌چرخد؟



۱) $\frac{۴۵\pi}{۸}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۳) ۳π ۴) $\frac{۱۵\pi}{۴}$

۶۵۳ سه چرخ مانند شکل مقابل به هم وصل شده‌اند، وقتی دو چرخ کوچک‌تر جمعاً ۲۸ دور می‌چرخند، چرخ بزرگ‌تر چند رادیان چرخیده است؟



۱) ۶π
۲) ۱۲π
۳) ۱۶π
۴) ۱۸π

۶۵۴ ساعت ۲ بعد ازظهر است. زمانی که عقربهٔ ساعت‌شمار $\frac{\pi}{۳۶}$ بچرخد، ساعت چند می‌شود؟

۱) $۲:۳'$ ۲) $۲:۷'$ ۳) $۲:۱۰'$ ۴) $۲:۱۲'$

Ketabchi.com

۶۵۵ رأس ساعت $۱۲:۱۵'$، زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چند رادیان است؟

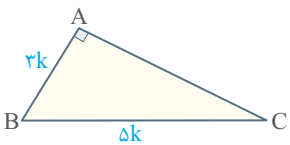
۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۱۱\pi}{۲۴}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۲۴}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۱۲}$

۶۵۶ ساعت ۲:۰۰ است، تقریباً چه مدت طول می‌کشد تا زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار برای دومین بار برابر $\frac{\pi}{۶}$ رادیان شود؟

۱) ۱۲ دقیقه ۲) ۱۳ دقیقه ۳) ۱۴ دقیقه ۴) ۱۶ دقیقه

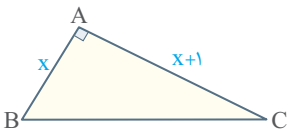
part 2 معرفی سینوس، کسینوس و ...

۶۵۷ در مثلث ABC مطابق شکل حاصل $\sin\hat{B}+\sin\hat{C}$ کدام است؟



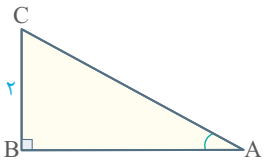
۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) $\frac{۷}{۵}$ ۳) $\frac{۸}{۵}$ ۴) $\frac{۹}{۵}$

۶۵۸ در مثلث ABC مطابق شکل اگر $\tan\hat{C}+\cot\hat{C}=\frac{۲۵}{۱۲}$ باشد، حاصل $\cos\hat{B}$ کدام است؟



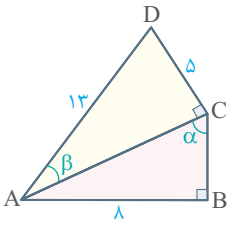
۱) ۰/۸ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

۶۵۹ در شکل مقابل حاصل $[\cos\hat{C}]+[\sin\hat{A}]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)



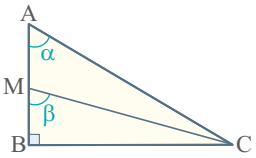
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) قابل محاسبه نیست.

۶۶۰ در شکل مقابل اندازهٔ $\frac{\sin\beta+1}{\cos\alpha+1}$ کدام است؟



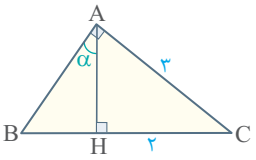
۱) $\frac{۱۷}{\sqrt{۳}+۱}$
۲) $\frac{۲۷}{۵(\sqrt{۵}+۱)}$
۳) $\frac{۵۴}{۱۳(\sqrt{۵}+۳)}$
۴) $\frac{۵۱}{۷(\sqrt{۳}+۱)}$

۶۶۱ در شکل زیر نقطهٔ M وسط AB است، حاصل $\tan\alpha\cot\beta$ کدام است؟



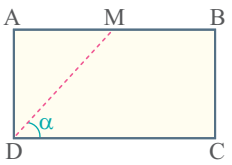
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۶۶۲ در شکل زیر مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟



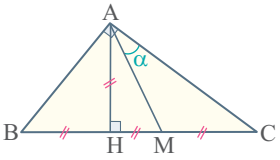
۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۶}$
۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

۶۶۳ در شکل زیر، مستطیلی با طول ۴ و عرض ۳ رسم شده است. اگر نقطهٔ M وسط AB باشد، $\cos^۲\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۴}{۱۳}$
۴) $\frac{۳}{۱۳}$

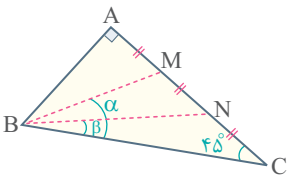
۶۶۴ در شکل مقابل اندازهٔ $\cot(\frac{\pi}{۴}-\alpha)$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) ۲
۴) $\frac{۳}{۴}$

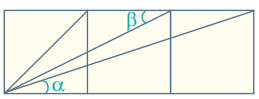
Ketabch.com

۶۶۵ در مثلث قائم‌الزاویه ABC مطابق شکل حاصل $\cot(\frac{\pi}{۴}+\beta)\cot(\frac{\pi}{۴}-\alpha)$ کدام است؟



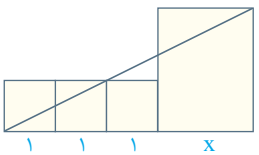
۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

۶۶۶ در شکل زیر، اندازه ضلع هر مربع یک واحد است. مقدار $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$ کدام است؟



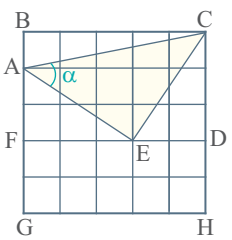
۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۱۰}$
۳) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$
۴) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$

۶۶۷ در شکل مقابل ۳ مربع به ضلع واحد و یک مربع به ضلع x داریم. مساحت مربع بزرگ‌تر کدام است؟



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۹
۴) ۱۲

۶۶۸ در شکل مقابل مقدار α کدام است؟ (مربع‌ها به ضلع واحد هستند.)



۱) ۲۰°
۲) ۳۰°
۳) ۴۵°
۴) ۶۰°

۷۸۹ در پرتاب یک تاس عدد a رو شده است، با کدام احتمال $\sqrt{\sin 2a}$ تعریف شده است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۷۹۰ کدام مورد درست است؟

الف) برای هر عدد حقیقی x همواره $\cos(\cos x) > 0$ ب) برای هر عدد حقیقی x همواره $\sin(\sin x) > 0$

۱) فقط الف ۲) فقط ب ۳) هم الف و هم ب ۴) نه الف و نه ب

۷۹۱ اگر $\cot\alpha = \frac{-7}{24}$ و $\cos\alpha > 0$ باشد، مقدار $\cos\alpha - \sin\alpha$ کدام است؟

۱) ۰/۶۸ ۲) −۰/۶۸ ۳) ۱/۲۴ ۴) −۱/۲۴

۷۹۲ اگر $\sin\alpha\cos\alpha < 0$ و $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ باشد، $\sin\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{17}$ ۲) $-\frac{8}{17}$ ۳) $\frac{8}{15}$ ۴) $-\frac{8}{15}$

part 7 مقایسه نسبت های مثلثاتی روی دایره

۷۹۳ چه تعداد از موارد داده شده درست است؟

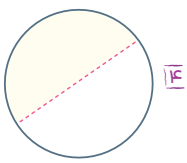
الف) $\cos 2 > \sin 170^\circ$ ب) $|\cos 147^\circ| > |\sin 147^\circ|$

ج) $\tan 5 < \sin 41^\circ$ د) $[\cos 3] + [\sin 200^\circ] = -1$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۹۴ در کدام گزینه، در ناحیهٔ رنگی $\sin x > \cos x$ است؟

۱) ۲) ۳) ۴)



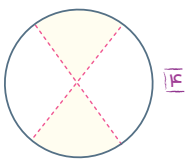
۷۹۵ اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ باشد، انحراف معیار $\log\sin x$ و $\log\cos x$ کدام است؟

۱) $\log\sqrt{\cot x}$ ۲) $\log\sqrt{\tan x}$

۳) $\log\tan x$ ۴) $\log\cot x$

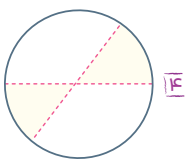
۷۹۶ در کدام گزینه، در ناحیهٔ رنگی $|\sin x| > |\cos x|$ است؟

۱) ۲) ۳) ۴)



۷۹۷ در کدام گزینه در ناحیه رنگی $|\sin x| < \cos x$ است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

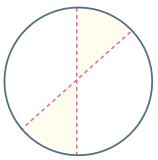
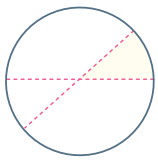
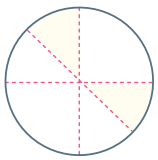
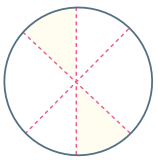


۷۹۸ چه تعداد از روابط زیر صحیح است؟ (زوایه‌ها بر حسب رادیان هستند.)

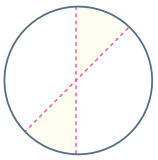
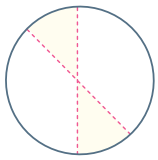
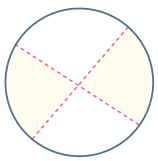
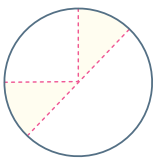
الف) $\tan 4 > \cot 4$ ب) $\cos 3 > \sin 3$ ج) $|\sin 5| > |\cos 5|$ د) $|\tan 2| > |\cot 2|$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۴

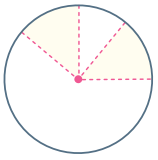
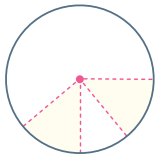
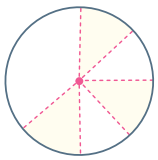
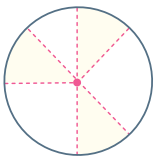
۷۹۹ در کدام گزینه هر دو نامساوی $\sin x + \cos x > 0$ و $\tan x < 0$ در ناحیهٔ رنگ شده برقرار است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

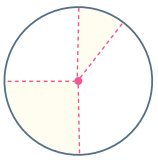
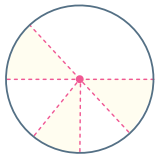
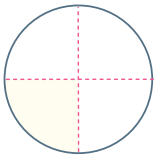
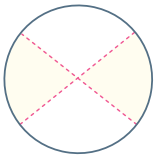
۸۰۰ در کدام ناحیهٔ رنگ شده هر دو نامساوی $\tan x - \cot x > 0$ و $\tan x + \cot x > 0$ برقرار است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

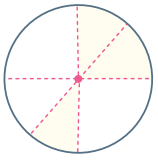
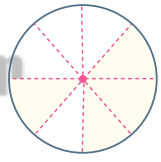
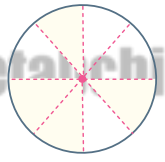
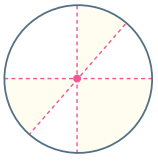
۸۰۱ در کدام گزینه، در ناحیه رنگی $\tan x > \cot x$ و $\sin x < \cos x$ است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۸۰۲ در کدام گزینه در ناحیه رنگی $\tan x + \cot x > 0$ و $\sin x + \cos x < 0$ است؟

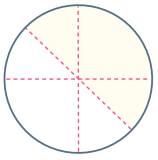
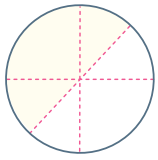
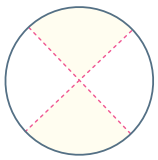
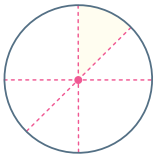
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۸۰۳ در کدام گزینه در ناحیه رنگی $\tan x(\sin x - \cos x) > 0$ است؟

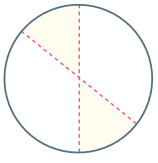
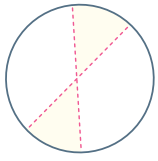
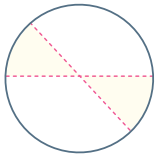
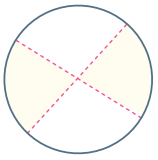
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

Ketabchi.com

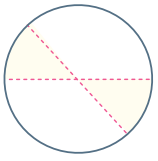
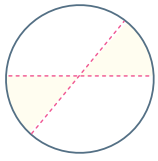
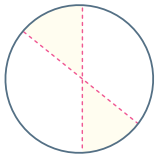
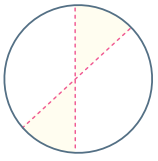
۸۰۴ اگر $\sqrt{1+2\sin x\cos x} = \sin x + \cos x$ باشد، آنگاه x در کدام ناحیه مشخص شده از دایره مثلثاتی قرار دارد؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

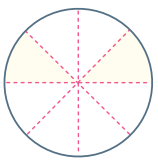
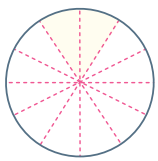
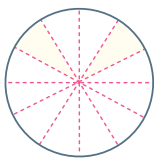
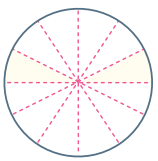
۸۰۵ در کدام گزینه، در ناحیهٔ رنگی $|\cos x| > |\sin x|$ و $\sin 2x < 0$ است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۸۰۶ در کدام ناحیهٔ رنگ شده هر دو نامساوی $\tan 2x < 0$ و $\cos 2x > 0$ برقرار است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۸۰۷ در کدام قسمت رنگ شده از دایرهٔ مثلثاتی $\sin 3x < 0$ برقرار است؟

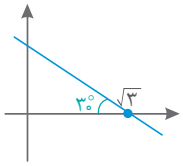
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۸۰۸ مقدار کدام گزینه از بقیه کوچک‌تر است؟ (زاویه‌ها بر حسب رادیان است)

۱) $\cot 1$ ۲) $\cot 2$ ۳) $\cot 3$ ۴) $\cot 4$

part 8 شیب خط

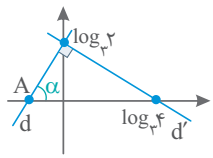
۸۰۹ معادلهٔ خط مقابل کدام است؟



۱) $y=-\sqrt{3}x+1$ ۲) $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}$

۳) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ ۴) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$

۸۱۰ در شکل مقابل حاصل $\sin\alpha.\cos\alpha$ کدام است؟



۱) $\log_{32}4$ ۲) $\log_{16}2$

۳) $\log_{32}8$ ۴) $\log_{16}8$

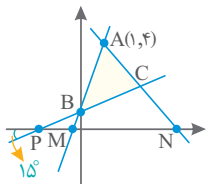
۸۱۱ خط گذرنده از نقاط $A(\sin 10^\circ\ ,\ \cos 10^\circ)$ و $B(\cos 10^\circ\ ,\ \sin 10^\circ)$، چه زاویه‌ای با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد؟

۱) 60° ۲) 120° ۳) 135° ۴) 150°

۸۱۲ عرض از مبدأ خط L که با جهت مثبت محور افقی، زاویه 60° می‌سازد، برابر با $\cot 60^\circ$ است. عرض از مبدأ خطی که بر L در نقطهٔ تلاقی با محور x ها، عمود است، کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ ۳) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۴) $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$

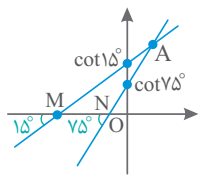
۸۱۳ در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، مساحت مثلث کدام است؟ $(\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3})$



۱) $3+\sqrt{3}$ ۲) $6+\sqrt{3}$

۳) $3+4\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}+3$

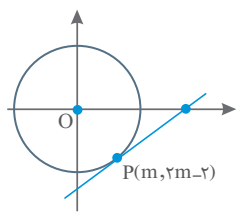
۸۱۴ نقطهٔ تلاقی خط‌های شکل مقابل کدام است؟



۱) $(2\ ,\ 5)$ ۲) $(1\ ,\ \sqrt{3})$

۳) $(1\ ,\ 4)$ ۴) $(2\ ,\ 2\sqrt{3})$

۸۱۵ معادلهٔ خطی که در نقطهٔ $P(m\ ,\ 2m-2)$ بر دایرهٔ مثلثاتی مقابل مماس است، کدام است؟



۱) $4y-3x=-5$

۲) $4x=3y-5$

۳) $4y=3y-5$

۴) $4x=3y+5$

part 9 زاویه‌های $k\pi\pm\alpha$ و $\frac{k\pi}{2}\pm\alpha$

۸۱۶ اگر $\cos(x+\frac{\pi}{8})=\frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\sin^2(\frac{3\pi}{8}-x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

Ketabchi.com

۱۰۹۵ بزرگ‌ترین جواب معادلهٔ $\sin(2x+\frac{\pi}{3})=\cos(\pi-x)$ در بازهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{7\pi}{6}$ ۲) $\frac{15\pi}{18}$ ۳) $\frac{25\pi}{18}$ ۴) $\frac{31\pi}{18}$

۱۰۹۶ مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(x-\frac{3\pi}{8})=1$ در بازه $[0\ ,\ 2\pi]$ برابر کدام است؟ (ریاضی خارج – ۹۵)

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

۱۰۹۷ معادلهٔ $\sin^3 x+\cos^3 x=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ در بازهٔ $(0\ ,\ 2\pi)$ چند ریشه دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۰۹۸ معادلهٔ $\log_{\sin x}\cos x+\frac{1}{2}\log_{\sin x}3=1$ در بازهٔ $(0\ ,\ 2\pi)$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) جواب ندارد.

۱۰۹۹ منحنی‌های $y=\cos 2x$ و $y=|\cos x|$ در بازهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ چند بار یکدیگر را قطع می‌کنند یا بر هم مماس می‌شوند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

part 16 معادلات OPT

۱۱۰۰ تعداد جواب‌های معادلهٔ $7\cos 3x-3\cos 2x=10$ دربازهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) صفر

Ketabchi.com

۱۱۰۱ تعداد جواب‌های معادلهٔ $2\cos^3 2x+3\cos^2 x=-2$ در بازهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۱۰۲ جواب‌های عمومی معادلهٔ $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=3$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{k\pi}{6}$ ۳) $\frac{2k\pi}{3}$ ۴) $2k\pi$

۱۱۰۳ معادلهٔ $3\sin^3 x-2\sin 3x=5$ در بازهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۰۴ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $3\cos x+5\cos 3x=8$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{2k\pi}{3}$ ۲) $k\pi$ ۳) $2k\pi$ ۴) $\frac{3k\pi}{2}$

۱۱۰۵ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $5\sin^2(x)+2\cos(3x)=-2$ در بازهٔ $[-\pi\ ,\ \pi]$ کدام است؟ (تجربی خارج – ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۷

part 17 معادلات 2α

۱۱۰۶ معادلهٔ $\cos 2x-\cos x+1=0$، چند جواب در بازهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۱۰۷ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$، کدام است؟

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۱۱۰۸ اگر $\frac{2\pi}{3}$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $4\sin x \cos x + a = 0$ باشد، انحراف معیار تمام جواب‌های معادله در بازهٔ $[2\pi , 3\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{12}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{5\pi}{6}$ ۴) $\frac{11\pi}{6}$

۱۱۰۹ مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(\pi + x)\sin(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(\frac{5\pi}{6}) = 0$ در بازه $[0 , 7]$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) $\frac{15\pi}{4}$ ۳) 2π ۴) π

۱۱۱۰ معادلهٔ $\log_2 \cos x + \log_2 \sin x = -2$ در بازهٔ $[0 , 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۱۱ اگر $x = \alpha$ یکی از ریشه‌های معادله $1 - \sin\frac{x}{2} = \cos x$ باشد، $\tan 2\alpha$ کدام است؟ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $-\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۱۱۲ چارک اول جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\tan x = \sin 2x$ در بازه $[0 , 4\pi]$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{7\pi}{4}$ ۳) 2π ۴) $\frac{7\pi}{8}$

۱۱۱۳ تعداد جواب‌های معادلهٔ $2\sin 2x = 2(\sin x + \cos x) + 1$ در بازه $[0 , 2\pi]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

Ketabchi.com

۱۱۱۴ انحراف معیار جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\frac{1}{2}\sin(\frac{12\pi}{11}) + \sin(\frac{\pi}{2} - x)\sin x = 0$ در بازهٔ $[0 , \pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{11}$ ۲) $\frac{\pi}{22}$ ۳) $\frac{9\pi}{44}$ ۴) $\frac{9\pi}{22}$

۱۱۱۵ یک تاس را پرتاب کرده و عدد رو شده را به جای a در معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x - a\sin x - \cos x + \frac{a}{2} = 0$ قرار می‌دهیم احتمال آن‌که انتهای کمان‌های جواب‌های معادله فقط روی دو نقطه از دایرهٔ مثلثاتی قرار بگیرند چقدر است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۱۱۱۶ معادلهٔ $\tan x + \cot x = 4$ در بازهٔ $[0 , 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۱۱۷ جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\tan x \cos^2 x = 1$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۱۱۸ معادلهٔ $|\sin 2x| = \cos x$ در بازهٔ $[0 , 2\pi]$، چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۱۱۹ مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ در بازه $[0 , 2\pi]$ کدام است؟ (ریاضی خارج - ۹۸)

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) 4π

پاسخ‌نامه فصل اول

تابع

۱ **۲** برای حل این تست ابتدا به نکتهٔ زیر توجه کنید:

نکته *طبق تعریف تابع، اگر تابع f به صورت $f: A \to B$ تعریف شده باشد، آنگاه مجموعهٔ A دامنهٔ تابع و مجموعهٔ B هم‌دامنهٔ تابع نامیده می‌شود.*

در ضمن وقتی یک تابع از A به B می‌نویسیم باید تمام عضوهای مجموعهٔ A در مؤلفه‌های اول تابع f استفاده شوند $(D_f = A)$ و برد تابع نیز زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه است بنابراین تعداد اعضای بُرد تابع همواره کوچک‌تر یا مساوی تعداد اعضای هم‌دامنه است. $(R_f \subseteq B)$

پس گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ نادرست می‌باشند و فقط گزینه ۲ صحیح است.

۲ **۲** در گزینه ۲ برد تابع [یعنی سایهٔ نمودار روی محور yها] برابر $[0, +\infty)$ است، در صورتی که هم دامنهٔ تابع $\mathbb{R}^+$ است که شامل عدد صفر نمی‌باشد، در حالی که می‌دانیم برد تابع باید زیر مجموعه‌ای از هم‌دامنهٔ تابع باشد. در سایر گزینه‌ها بُرد تابع، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ هم دامنهٔ داده شده می‌باشد.

۳ **۱** با توجه به این‌که دو زوج مرتب $(3, m^2)$, $(3, m+2)$ مؤلفه اول یکسان دارند، باید مؤلفه‌های دوّم آن‌ها نیز با هم برابر باشد، یعنی:

$$m^2 = m+2 \Rightarrow \underbrace{m^2 - m - 2 = 0}_{(m-2)(m+1)=0} \Rightarrow m = 2, -1$$

۱ به‌ازای $m=2$ دو زوج مرتب $(2,1), (2,4)$ به وجود می‌آید که تابع بودن f را رد می‌کند، پس $m=2$ غیرقابل قبول است.

۲ به‌ازای $m=-1$ هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه‌های اول یکسان نیستند، پس تنها به‌ازای $m=-1$ رابطهٔ داده‌شده تابع است، بنابراین:

$$f(3) = m^2 = (-1)^2 = 1$$

نکته *اگر یک رابطه به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داده شود، در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفهٔ اول یکسان نباشد. [یعنی اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفهٔ اول یکسان باشند، باید مؤلفه‌ی دوم آن‌ها نیز یکسان باشند.]*

۴ **۳** برای آن‌که رابطه داده شده تابع نباشد، باید ورودی‌های یکسان، خروجی‌های متفاوتی داشته باشند، پس اگر m یکی از مقادیر ۲ یا ۳ باشد، رابطه داده شده تابع نیست، پس مجموع مقادیر ممکن برای m برابر $3+2=5$ می‌باشد.

توجه داشته باشید که اگر $m=1$ باشد، زوج مرتب تکراری $(1,3)$ به وجود می‌آید که در این حالت رابطهٔ داده شده تابع می‌باشد.

۵ **۳** چون در تابع هیچ دو زوج مرتبی نباید مولفهٔ اول یکسان داشته باشند، پس از بین زوج مرتب‌های $(1,2), (1,4)$ باید یکی را حذف کنیم و از بین زوج مرتب‌های $(2,4), (2,2), (2,3)$ باید دو تا را حذف کنیم. بنابراین با حذف حداقل ۳ زوج مرتب رابطهٔ فوق یک تابع خواهد شد.

۶ **۳** از ضابطهٔ بالا $f(a) = a^2 + 4a$ و از ضابطهٔ پایین $f(a) = 3a + 2$ است، حال برای این‌که $f(x)$ تابع باشد، لازم است که این دو مقدار یکسان باشند:

$$a^2 + 4a = 3a + 2 \Rightarrow \underbrace{a^2 + a - 2}_{(a+2)(a-1)} = 0 \Rightarrow a = -2 \text{ یا } a = 1$$

مثلاً به ازای $a=-2$ داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & ; \ x \geq -2 \\ 2x & ; \ x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 1^2 + 4(1) = 5$$

البته به ازای $a=1$ نیز باز هم به همین نتیجه می‌رسیم.

نکته *تابع چند ضابطه‌ای:*

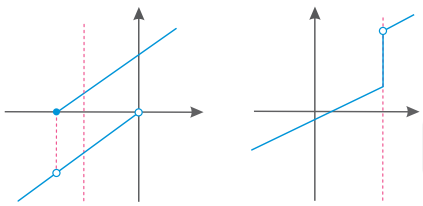
یک رابطه‌ی چندضابطه‌ای مانند $f(x) = \begin{cases} g(x) & ; \ x \geq a \\ h(x) & ; \ x \leq a \end{cases}$ در صورتی تابع است که:

۱ فقط ضابطه‌ها یعنی $g(x), h(x)$ تابع باشند. *۲ $g(a) = f(a)$ باشد.*

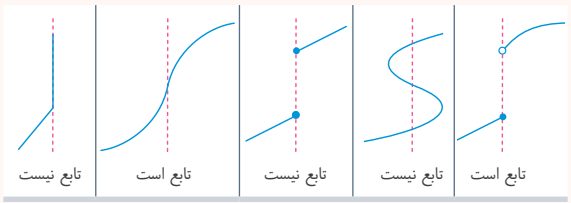
۷ **۱** برای تابع بودن باید مقدار تابع در $x=1, x=2$ با هم برابر باشند، یعنی:

$$\begin{matrix} x=1 \Rightarrow a+b=0 \\ x=2 \Rightarrow 2a+b=8 \end{matrix} \Rightarrow a=8, b=-8 \Rightarrow ab=-64$$

۸ **۳** نمودار الف و د تابع هستند. اما نمودارهای ب و ج تابع نیستند، چون بعضی خط‌های موازی محور yها نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.



نکته *در نمودار تابع هر خط عمودی دلخواه، باید آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.*



۹ **۴** همان‌طور که دیده می‌شود از a دو پیکان خارج شده که برای تابع بودن باید انتهای دو پیکان یکسان باشد. پس باید $a+1=3$ باشد و این یعنی $a=2$ با قرار دادن $a=2$ می‌فهمیم که $f=\{(2,3), (3,5)\}$ پس $f(3)=5$ خواهد بود. [اگر $(a,b) \in f$ باشد، آنگاه می‌نویسیم $f(a)=b$]

نکته *تابع پیکانی:*

۱ اگر یک رابطه به صورت نمودار پیکانی داده شود، در صورتی تابع است که از هر عضو مجموعهٔ اول دقیقاً یک پیکان [نه بیش‌تر نه کم‌تر] خارج شود.

۲ اگر گفته شود یک نمودار پیکانی تابع است ولی از یک عضو مجموعهٔ اول دو پیکان خارج شود و به اعداد ⬭ و Δ وصل شود، الزاماً باید ⬭ $= \Delta$ باشد.

توجه ۱: اگر از یک عضو پیکانی خارج نشود آن رابطه تابع نیست.

توجه ۲: اگر به یک یا چند عضو از مجموعهٔ دوم پیکانی وارد نشود یا چند پیکان به یک عضو وارد شود، خللی در تابع بودن ایجاد نمی‌شود.

Ketabchi.com

۱۰ **۳** به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ دو زوج مرتب $(۳,۴),(۲,۴)$ را داریم و تابع نمی‌باشد. $(\sqrt{۱۶}=۴)$

۲ هر عدد مثبت دارای دو ریشه دوم قرینه است، به عنوان مثال، ریشه‌های دوم عدد ۱۶ اعداد ۴ و -۴ می‌باشند، پس تابع نیست. $(x^۲=۱۶\Rightarrow x=\pm ۴)$

۳ به ازای هر فرد در یک زمان معین یک عدد به عنوان وزن مشخص می‌شود و تابع است.

۴ از عدد ۲ دو پیکان خارج شده، پس تابع نیست.

---

۱۱ **۱** چون از -۳ دو پیکان خارج شده باید داشته باشیم:

اگر $a=۳$ باشد، خواهیم داشت: $۳a=a+۶\Rightarrow ۲a=۶\Rightarrow a=۳$

$$f=\{(۲,b+۲),(۲,b^۲),(-۳,۹)\}\xrightarrow{\text{تابع } f} b^۲=b+۲$$

$$\Rightarrow \underbrace{b^۲-b-۲}_{(b-۲)(b+۱)}=۰\Rightarrow \begin{cases} b=۲ \\ \text{یا} \\ b=-۱ \end{cases}\Rightarrow ab=-۳,۶$$

بنابراین حداکثر مقدار ممکن برای ab عدد ۶ است.

---

۱۲ **۱** به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ $y=\sqrt{x^۲}\Rightarrow y=|x|$

به ازای هر x، برای y فقط و فقط یک مقدار داریم. پس تابع است ✓

۲ $\sqrt{y^۲}=x\Rightarrow x=|y|$

به ازای x دلخواه ۱، برای y دو مقدار ± ۱ به دست می‌آید و تابع نیست ×

۳ به ازای $x=-۱$ داریم: $-۱+|y|=۰\Rightarrow |y|=۱\Rightarrow y=\pm ۱$

پس برای y دو مقدار به دست می‌آید و تابع نیست ×

۴ به ازای $x=-۱$ داریم.

$$[y]+[-۱]=۰\Rightarrow [y]-۱=۰\Rightarrow [y]=۱\Rightarrow ۱\le y<۲$$

به ازای $x=-۱$ برای y بیشمار مقدار به دست می‌آید، پس رابطه داده شده تابع نیست. ×

---

۱۳ **۳** قبل از حل تست به نکتهٔ زیر توجه کنید:

نکته *برای تشخیص تابع بودن رابطه‌هایی که به صورت فرمولی و ضابطه بیان می‌شوند می‌توان از مثال نقض استفاده کرد، یعنی اگر به‌ازای یک x بیش از یک مقدار برای y به دست آمد، آن رابطه تابع نیست.*

درواقع رابطه‌ای تابع است که بتوان y را برحسب x و به صورت $y=f(x)$ نشان داد و منظور از $f(x)$ یک رابطه برحسب ورودی است.

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ اگر $f(۴x+۳)=۲x+۳$ باشد، آنگاه: $۴x+۳=T\Rightarrow x=\frac{T-۳}{۴}$

$$f(T)=۲(\frac{T-۳}{۴})+۳=\frac{T-۳}{۲}+۳=\frac{T+۳}{۲}$$

بنابراین $f(x)=\frac{x+۳}{۲}$ یک تابع خطی است. ✓

نکته *اگر $a\neq ۰$ و $f(ax+b)=a'x+b'$ باشد، آنگاه $f(x)$ یک تابع است و به طور کلی اگر $g(x)$ یک تابع باشد و $f(ax+b)=g(x)$ آنگاه $f(x)$ هم تابع است.*

۲ اگر $f(x^۳+۱)=x^۳+۲=x^۳+۱+۱$ باشد، پس $f(x)=x+۱$ است که می‌دانیم یک تابع است. ✓

آنچه خواهید دید تابع یک به یک

اگر $g(x)$ تابعی یک به یک باشد، آنگاه از $f(g(x))=h(x)$ نتیجه می‌گیریم که $y=f(x)$ تابع است. بد نیست چند مثال معروف توابع یک‌به‌یک را هم بلد باشیم:

۱ $g(x)=ax+b$ با شرط $a\neq ۰$

۲ $g(x)=a\sqrt[n]{a'x+b'}+b$ (با شرط $aa'\neq ۰$)

۳ $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $ad-bc\neq ۰$)

۴ $a(x)=ax^{۲n+۱}+b$ ۵ $g(x)=\log_a x$ ۶ $g(x)=a^x$

۳ باقراردادن $x=۱$ و $x=۱/۲$ می‌فهمیم که $f(۱)=۱, f(۱)=۱/۲$ پس تابع نیست. ×

۴ $f(|x|)=x^۲+۳=|x|^۲+۳\Rightarrow f(x)=x^۲+۳$ ✓

---

۱۴ **۳** ضابطه‌هایی تابع هستند که به ازای هر مقدار x، تنها یک مقدار برای y بدهند. در تشخیص این‌که یک ضابطه تابع باشد یا نه، گاهی بهتر است از رسم کمک بگیریم یا این‌که به نحو خوبی عددگذاری کنیم.

الف $\sqrt{y-۲}+\sqrt{۲-y}=x$: در این‌جا به علت وجود عبارت $\sqrt{y-۲}$ باید $y\ge ۲$ باشد. اما چون $\sqrt{۲-y}$ هم داریم، پس باید $y\le ۲$ از این دو شرط به دست آمده می‌فهمیم که باید $y=۲$ باشد. پس:

$$y=۲\Rightarrow x=\sqrt{۰}+\sqrt{۰}\Rightarrow x=۰\Rightarrow (۰,۲)$$

این ضابطه فقط همین یک نقطه $(۲,۰)$ است. لذا تابع است. ✓

ب با قرار دادن $x=۴$ در این رابطه به دو مقدار می‌رسیم: $y=۲$ از ضابطه بالا و $y=۱$ از ضابطهٔ پایین پس هم $(۴,۲)$ و هم $(۴,۱)$ در این ضابطه صدق می‌کند. لذا این ضابطهٔ یک تابع نیست. ×

ج ضابطه های بالا و پایین تابع هستند. ✓

اما باید نقطهٔ مرزی $x=۲$ را بررسی کنیم:

$f(۲)=۳$: ضابطهٔ پایین $f(۲)=۶\Rightarrow ۳\neq ۶\Rightarrow$ تابع نیست : ضابطهٔ بالا

---

۱۵ **۲** به بررسی موارد می‌پردازیم:

الف به‌ازای x دلخواه ۴ داریم:

$$|y-۲|+۳-۴=۰\Rightarrow |y-۲|=۱\Rightarrow y-۲=\pm ۱\Rightarrow y=۳,۱$$

چون به‌ازای یک مقدار x برای y دو مقدار به دست آمد، این رابطه تابع نیست.

تذکر *معمولاً رابطه‌هایی که در آن y دارای توان زوج یا قدرمطلق یا جزءصحیح باشد، مشکوک به تابع نبودن هستند اما باز هم نیاز به بررسی دارد مثلاً رابطهٔ $x^۲+y^۲=۰$ تابع است چون این رابطه تنها شامل یک نقطه $(۰,۰)$ است.*

ب $x^۲=t\Rightarrow x=\pm\sqrt{t}\Rightarrow f(t)=\pm\sqrt{t}\Rightarrow f(x)=\pm\sqrt{x}$

به‌ازای یک x دلخواه، مثلاً $x=۴$ دو مقدار ± ۲ برای y به دست می‌آید و این یعنی، این رابطه تابع نیست. ×

د $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-۲\Rightarrow \frac{x^۲+y^۲}{xy}=-۲\Rightarrow x^۲+y^۲=-۲xy$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲+۲xy=۰\Rightarrow (x+y)^۲=۰\Rightarrow x+y=۰\Rightarrow y=-x$$

به‌ازای هر x فقط و فقط یک مقدار برای y داریم و این یعنی، y تابعی برحسب متغیر x است.

Ketabeh.com

د با مربع کامل کردن داریم: $(y-1)^2+x^2=0 \Rightarrow y=1\ ,\ x=0$

این رابطه یک نقطه است، پس تابع است. ✓

بنابراین فقط موارد **ج** و **د** تابع می‌باشند.

---

۱۶ | ۳ بررسی موارد:

الف خیلی بیشتر از یک نقطه ایراد دارد. مثلاً $(1,1/6),(1,1/2),(1,1/5),(1,1)$ و ... همهٔ این نقاط در $[x]=[y]$ صدق می‌کند. پس با حذف یک نقطه، این رابطه به تابع تبدیل نمی‌شود. ×

ب مشکل بیشتر از یک نقطه است. نقاط $(2,-2),(2,2),(1,-1),(1,1)$ همه روی نمودار $|x|=|y|$ قرار دارند. تا همین‌جا به حذف حداقل دو نقطه نیاز داریم. ×

ج کافیست یکی از آن دو نقطهٔ توپر را حذف کنیم. [فرقی ندارد کدام یکی]. بعد از آن به نمودار یک تابع می‌رسیم. ✓

د در این نمودار با حذف نقطهٔ $A(a,-1)$ یا $B(a,2)$ نمودار تبدیل به تابع خواهد شد. ✓

---

۱۷ | ۲ باتوجه به تعریف تابع، از هر عضو مجموعه A، فقط و فقط یک پیکان به سمت عضوی از مجموعه B خارج می‌شود، به ازای هر عضو A دقیقاً n انتخاب برای خارج شدن هر پیکان وجود دارد و با توجه به اینکه مجموعه A دارای m عضو است، بنابراین طبق اصل ضرب، کل حالات برابر است با:

$$\underbrace{n\times n\times n\times\ldots\times n}_{m\text{ تا}}=n^m$$

نکته اگر مجموعهٔ A دارای m عضو و مجموعهٔ B دارای n عضو باشند، تعداد n^m تابع از A به B می‌توان تعریف کرد.

---

۱۸ | ۱

$$f(2+\sqrt{3})=2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$$

$$f(2-\sqrt{3})=2-\sqrt{3}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$$

بنابراین حاصل عبارت برابر ۸ است.

---

۱۹ | ۱ باید ببینیم که هر ورودی تابع $f(x)$، مقدار خروجی آن به ازای کدام ضابطه به دست می‌آید، ابتدا $f(x)$ را کمی مرتب می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}-3x & ;\ x<-1\\ (x-1)^2-1 & ;\ -1<x<1\\ 2x-1 & ;\ x>1\end{cases}$$

$$-\frac{5}{3}<-1\Rightarrow f(-\frac{5}{3})=-3(-\frac{5}{3})=5$$

$$-1<-\sqrt{2}+1<1\Rightarrow f(-\sqrt{2}+1)=(-\sqrt{2}+1-1)^2-1=2-1=1$$

$$\Rightarrow f(-\frac{5}{3})+f(-\sqrt{2}+1)=5+1=6$$

---

۲۰ | ۴ لازم نیست $f(x)$ را حساب کنید. فقط کافیست مقدار مناسبی به جای x عددگذاری کنید تا در $f(3x+2)$ به $f(8)$ برسیم. این مقدار مناسب $x=2$ است:

$$3x+2=8\Rightarrow x=2\Rightarrow f(8)=\sqrt{2(2^3)}+1=4+1=5=2+3$$

نکته اگر تابعی به صورت $f(x)=$ ☐ بود برای پیدا کردن $f(u)$ در عبارت ☐ به جای همهٔ x ها u را قرار می‌دهیم:

۱ $f(x)=\sqrt[3]{x^2+3}\Rightarrow f(2)=\sqrt[3]{2^2+3}=\sqrt[3]{7}$

۲ $f(x)=x+\frac{1}{x}\Rightarrow f(x^2-1)=(x^2-1)+\frac{1}{(x^2-1)}$

۳ $f(x)=x^3+2x+1\Rightarrow f(\Delta)=\Delta^3+2\Delta+1$

اما به عنوان مثال اگر $f(2x+3)$ را داشته باشیم و $f(9)$ را بخواهیم باید مقداری از x را پیدا کنیم که به ازای آن $2x+3=9$ شود، یعنی: $2x+3=9\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=3$

حال در طرف دوم هر جا x دیدیم به جای آن ۳ می‌گذاریم.

مثال)

$$f(\frac{x}{2}+1)=\frac{2x-1}{x}\Rightarrow f(5)=?$$

$$\frac{x}{2}+1=5\Rightarrow\frac{x}{2}=4\Rightarrow x=8\Rightarrow f(5)=\frac{2\times8-1}{8}=\frac{15}{8}$$

---

۲۱ | ۴ برای آن که از $f(x+\frac{1}{x})$ به $f(2)$ برسیم، فقط کافیست $x=1$ باشد:

$$x=1\Rightarrow f(1+1)=\frac{1}{(1)^2+1}\Rightarrow f(2)=\frac{1}{2}$$

---

۲۲ | ۳ با جایگذاری $x=1, x=4$ داریم:

$$\begin{cases}x=4\Rightarrow f(\sqrt{4})=4+2\sqrt{4}=8\Rightarrow f(2)=8\\ x=1\Rightarrow f(\sqrt{1})=1+2\sqrt{1}=3\Rightarrow f(1)=3\end{cases}$$

بنابراین داریم: $f(2)-f(1)=8-3=5$

---

۲۳ | ۱ برای محاسبه $f(\sqrt{2})$ باید $\sqrt{x}+1=\sqrt{2}$ باشد، پس داریم:

$$\sqrt{x}+1=\sqrt{2}\xrightarrow{\text{توان ۲}}x+2\sqrt{x}+1=2\Rightarrow x+2\sqrt{x}=1$$

در نتیجه:

$$f(\underbrace{\sqrt{x}+1}_{\sqrt{2}})=\underbrace{x+2\sqrt{x}}_{1}+2\Rightarrow f(\sqrt{2})=1+2=3$$

---

۲۴ | ۲ ابتدا باید مقدار $f(-144)$ را به دست آوریم:

$$f(-144)=\sqrt{-144+2\,|-144|}=\sqrt{-144+2(144)}=\sqrt{144}=12$$

حال باید $f(12)$ را محاسبه کنیم.

$$f(12)=\sqrt{12+2\,|12|}=\sqrt{12+24}=\sqrt{36}=6$$

---

۲۵ | ۱ کافیست $f(2), g(-1)$ را محاسبه کنیم و با هم مساوی قرار دهیم:

$$\begin{cases}f(2)=-4+5-a=1-a\\ g(-1)=1-2-4=-5\end{cases}\xrightarrow{f(2)=g(-1)}1-a=-5\Rightarrow a=6$$

---

۲۶ | ۳ در تابع f داریم $f(-2)=3, f(3)=4$ حال نقاط $(-4,2),(3,0)$ روی نمودار تابع g قرار دارند، پس:

$$g(-4)=2, g(3)=0\Rightarrow\frac{f(3)+g(-4)}{f(-2)+g(3)}=\frac{4+2}{3+0}=\frac{6}{3}=2$$

کانون
Hercules
ریاضی تجربی و همایان بالاتر ۲ و مبتدی هرکول
هندسه مشترک

۶۳۱ | ۲

$$۱۸^\circ = ۱۸\times\frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۱۰}\,rad \qquad ۱۵^\circ = ۱۵\times\frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۱۲}\,rad$$

نکته به طور کلی اگر D اندازهٔ یک زاویه بر حسب درجه و R اندازهٔ زاویه بر حسب رادیان باشد آنگاه همواره داریم:

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$$

با توجه به نکته فوق می‌توان گفت برای تبدیل یک زاویه به رادیان باید آن را π دار کنیم یعنی در $\frac{\pi}{۱۸۰}$ ضرب کنیم و برای تبدیل یک زاویه به درجه، آن را بدون π می‌کنیم؛ یعنی در $\frac{۱۸۰}{\pi}$ ضرب می‌کنیم. [شبیه استوکیومتری در شیمی]

---

۶۳۲ | ۱ هر π رادیان معادل ۱۸۰° است. بنابراین به جای π رادیان معادل آن یعنی ۱۸۰° را قرار می‌دهیم:

$$\frac{۲\pi}{۹}\,rad = (\frac{۲\times۱۸۰}{۹})^\circ = ۴۰^\circ$$

---

۶۳۳ | ۴ $\frac{\pi}{۵}$ رادیان همان $\frac{۱۸۰^\circ}{۵} = ۳۶^\circ$ درجه است. لذا:

$$\begin{cases} x+y = ۶۰^\circ \\ x-y = ۳۶^\circ \end{cases} \Rightarrow x = ۴۸^\circ\ ,\ y = ۱۲^\circ$$

---

۶۳۴ | ۳ زاویه‌های مثلث را A , B , $\frac{\pi}{۳}$ در نظر بگیریم. از آن‌جا که جمع زاویه‌های هر مثلثی ۱۸۰° [یا π رادیان] است داریم:

$$\begin{cases} A+B+\frac{\pi}{۳} = \pi \\ A-B = \frac{\pi}{۱۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B = \frac{۲\pi}{۳} \\ A-B = \frac{\pi}{۱۲} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{۳\pi}{۸}\ ,\ B = \frac{۷\pi}{۲۴}$$

بنابراین زاویه‌ها $\frac{\pi}{۳}$, $\frac{۷\pi}{۲۴}$, $\frac{۳\pi}{۸}$ هستند که نسبت آن‌ها $\frac{۱}{۳}$, $\frac{۷}{۲۴}$, $\frac{۳}{۸}$ است. با ضرب کردن نسبت‌ها در ۲۴ به اعداد ۹ , ۸ , ۷ می رسیم.

---

۶۳۵ | ۳ در واقع قسمتی از محیط دایره را می‌خواهیم که کمانی به طول $۱۵ = ۱۰ - ۲۵$ درجه از دایره جدا می‌کند. اگر محیط کل دایره (یعنی ۳۶۰°) را می‌خواستیم محیط دایره $۲\pi r$ بود، حال که محیط قسمتی از آن را می‌خواهیم از تناسب استفاده می‌کنیم:

۳۶۰°	$۲\pi r$
۱۵°	x

$$\Rightarrow x \Rightarrow \frac{۱۵^\circ\times ۲\pi r}{۳۶۰^\circ} = \frac{۳/۱۴\times۶۴۰۰}{۱۲} \simeq ۱۶۷۵$$

نکته می‌دانیم محیط هر دایره برابر $۲\pi r$ و مساحت آن برابر $\pi r^۲$ است. حال اگر بخواهیم طول کمان α درجه یا مساحت قطاع α درجه یا زمان سپری شده بعد از α° دوران عقربه ساعت‌شمار یا دقیقه‌شمار را پیدا کنیم، می‌توانیم از یک جدول تناسب استفاده کنیم.

۳۶۰°	$۲\pi r$	۳۶۰°	$\pi r^۲$	۳۶۰°	۱۲^h	۳۶۰°	۶۰^{min}
α°	x	α°	x	α°	x	α°	x
طول کمان.		مساحت قطاع		ساعت شمار		دقیقه شمار	

---

۶۳۶ | ۴ $\overset{\frown}{AB}$ قسمتی از محیط دایره‌ای به شعاع $۶۰۰ + ۶۴۰۰$ کیلومتر است.

برای به دست آوردن این قسمت از محیط از تناسب استفاده می‌کنیم:

۳۶۰°	$۲\pi r$
۴۵°	x

$$\Rightarrow x = \frac{۴۵^\circ\times۲\times\pi\times r}{۳۶۰^\circ} = \frac{\pi\times۷۰۰۰}{۴} = ۱۷۵۰\pi$$

در هر ساعت این ماهواره ۱۰π کیلومتر را طی می‌کند، پس برای طی ۱۷۵۰π کیلومتر به ۱۷۵ ساعت زمان نیاز دارد.

---

۶۳۷ | ۳ مساحت قسمتی از دایره را می‌خواهیم، پس از تناسب با یک دایره کامل استفاده می‌کنیم:

۳۶۰°	$\pi r^۲$
۶۰°	x

$$\Rightarrow x = \frac{۶۰\times\pi r^۲}{۳۶۰^\circ} = \frac{\pi}{۶}\times\frac{۳۶}{\pi} = ۶$$

---

۶۳۸ | ۳ می‌دانیم عقربه ساعت‌شمار در ۱۲ ساعت ۲π رادیان دوران می‌کند، پس داریم:

۲π	۱۲
$\frac{۳\pi}{۵}$	x

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{۳\pi}{۵}\times۱۲}{۲\pi} = \frac{۱۸}{۵}h \xrightarrow{\times۶۰} ۲۱۶\,min$$

---

۶۳۹ | ۲ برای حل این تست ابتدا به نکتهٔ زیر توجه کنید:

نکته در دایره به شعاع r، طول کمان رو به زاویه مرکزی θ رادیان از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$L = r.\theta$$

$$L = r.\theta \Rightarrow ۱۵ = \frac{۵}{۴}\times r \Rightarrow r = ۱۲ \Rightarrow S = \pi r^۲ = ۱۴۴\pi$$

---

۶۴۰ | ۴ بررسی موارد:

الف زاویه‌های زیر ساق تقریباً برابر ۵۷° هستند پس زاویه رأس مثلث مذکور برابر $۶۶^\circ = ۲(۵۷^\circ) - ۱۸۰^\circ$ است. می‌دانیم در هر مثلث ضلع رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از ضلع رو به زاویه کوچک‌تر است. پس در این مثلث قاعده از ساق‌ها بزرگ‌تر است. ×

ب با توجه به رابطه $\theta = \frac{L}{R}$ داریم: $\pi = \frac{L}{۱} \Rightarrow L = \pi \simeq ۳/۱۴$ ✓

ج مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه یا π رادیان است، زوایای داده شده اصلاً تشکیل مثلث نمی‌دهند زیرا:

$$\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۹}+\frac{۷\pi}{۳۶} = \frac{۲۴\pi+۴\pi+۷\pi}{۳۶} = \frac{۳۵\pi}{۳۶} \neq \pi$$ ×

د عدد π نسبت محیط دایره به قطر آن است که تقریباً ۳/۱۴ می‌باشد، در واقع π رادیان [تقریباً ۳/۱۴ رادیان] معادل ۱۸۰ درجه است. ×

---

۶۴۱ | ۲ قبل از حل تست به نکته زیر توجه کنید:

نکته اندازهٔ کمان رو به زاویهٔ α درجه در دایره به شعاع r برابر است با:

$$L = \frac{\alpha}{۳۶۰}(۲\pi r)$$

$$L = \frac{۱۰}{۳۶۰}(۲\pi\times۹) = \frac{\pi}{۲}$$

کانون
Kanoonchi.com

۶۴۲ | ۲

$$L=\frac{\alpha}{360}(2\pi r)\Rightarrow r=\frac{\alpha}{360}(2\pi r)\Rightarrow \alpha=\frac{360^\circ}{2\pi}\xrightarrow{\pi=3/14}\alpha=57^\circ$$

۶۴۳ | ۴

$$L=\frac{\alpha}{360}(2\pi r)\Rightarrow 45=\frac{\alpha}{360}(2\pi\times 30)\Rightarrow \alpha=\frac{45\times 360}{60\pi}=\frac{270}{\pi}$$

۶۴۴ | ۴ ابتدا طول مسیر طی شده در یک بار پیمایش مسیر از A تا B را پیدا می‌کنیم، چون زاویه بر حسب رادیان است داریم:

$$L=r.\theta=3\times\frac{2\pi}{5}=\frac{6\pi}{5}$$

حال سه بار رفت و برگشت کامل یعنی ۶ بار پیمایش مسیر A تا B:

$$L'=6L=6\times\frac{6\pi}{5}=\frac{36\pi}{5}$$

۶۴۵ | ۳ ابتدا شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$L=\frac{\alpha}{360}(2\pi r)\Rightarrow\frac{\pi}{6}=\frac{15}{360}(2\pi r)\Rightarrow r=2$$

حال محیط قطاع OAB برابر است با:

$$p=2r+\overset{\frown}{AB}=4+\frac{\pi}{6}$$

۶۴۶ | ۴ فرض کنیم شعاع دایره r باشد، در این صورت داریم:

$$L=(\frac{15}{360})(2\pi r)=2\Rightarrow\frac{\pi r}{12}=2\Rightarrow r=\frac{24}{\pi}$$

بنابراین مساحت این دایره برابر است با:

$$S=\pi r^2=\pi(\frac{24}{\pi})^2=\frac{576}{\pi}$$

۶۴۷ | ۳ می‌دانیم $L=\frac{\alpha}{360}(2\pi r)$ است، بنابراین:

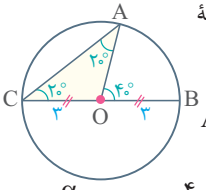
$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\Rightarrow\frac{\frac{\pi}{18}}{\frac{2\pi}{3}}=\frac{20^\circ}{\alpha_2}\Rightarrow\alpha_2=240^\circ$$

۶۴۸ | ۴

۱) $L=\frac{\alpha}{360}(2\pi r)\Rightarrow 1600\pi=\frac{\alpha}{360}(2\pi\times 6400)\Rightarrow\alpha=45^\circ$

۲) $\overset{\frown}{A'B'}=\frac{45}{360}(2\pi\times 6800)=\frac{1}{8}(2\pi\times 6800)=1700\pi$

۶۴۹ | ۳ مثلث OAC متساوی‌الساقین است و زاویهٔ $\hat{AOB}$ زاویهٔ خارجی این مثلث است، پس:



$$\hat{AOB}=20^\circ+20^\circ=40^\circ$$

حال طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر است با: $L=\frac{\alpha}{360}(2\pi r)=\frac{40}{360}(2\pi\times 3)=\frac{2\pi}{3}$

۶۵۰ | ۴ ابتدا زاویهٔ $\theta=\hat{BOA}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\overset{\frown}{AB}=\frac{\theta}{360^\circ}(2\pi r)\Rightarrow 1=\frac{\theta}{360}(2\pi\times 4)\Rightarrow\theta=\frac{45}{\pi}$$

حال θ زاویهٔ خارجی مثلث BCO است، پس داریم:

$$\theta=\alpha+\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}\theta=\frac{45}{2\pi}$$

حال برای تبدیل α به رادیان آن را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب می‌کنیم:

$$\alpha=\frac{45}{2\pi}\times\frac{\pi}{180}=\frac{1}{8}\text{rad}$$

حلینو اندازهٔ کمان $\frac{1}{4}$ شعاع دایره است. پس زاویهٔ $\hat{O}=\frac{1}{4}\text{rad}$ و نظر به این‌که مثلث BCO متساوی‌الساقین است، می‌فهمیم که $\alpha=\frac{\hat{O}}{2}=\frac{1}{8}\text{rad}$

۶۵۱ | ۴ می‌دانیم که مسافت طی شدهٔ هر دو چرخ همواره با هم مساوی است، یعنی در این مسئله چرخ بزرگتر هم 18π متر طی کرده است، بنابراین داریم:

$$L=\frac{\alpha}{360}(2\pi r)\Rightarrow 18\pi=\frac{\alpha}{360}(2\pi\times 1/2)\Rightarrow\alpha=7/5\times 360^\circ$$

حال برای تبدیل درجه به رادیان زاویه را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب می‌کنیم:

$$\alpha=7/5\times 360^\circ\times\frac{\pi}{180}=15\pi$$

۶۵۲ | ۲ نسبت شعاع‌ها $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ است. پس نسبت محیط‌ها هم $\frac{3}{2}$ است. یعنی وقتی چرخ کوچکتر $\frac{15\pi}{4}$ رادیان می‌چرخد، چرخ بزرگتر $\frac{2}{3}$ این مقدار می‌چرخد. یعنی:

$$\frac{2}{3}\times\frac{15\pi}{4}=\frac{5\pi}{2}$$

نکته به طور کلی اگر دو قرقره به شعاع‌های r_A و r_B که توسط تسمه به هم متصل شده باشند و قرقرهٔ A به اندازهٔ θ_A رادیان و قرقرهٔ B به اندازهٔ θ_B رادیان دوران کند آنگاه:

$$r_A\theta_A=r_B\theta_B$$

حلینو

$$4\times\frac{15\pi}{4}=6\times\theta_B\Rightarrow\theta_B=\frac{5\pi}{2}$$

۶۵۳ | ۳ زاویهٔ چرخش چرخ کوچک را θ_A و چرخ متوسط را θ_B و چرخ بزرگ را θ_C فرض می‌کنیم در این صورت داریم:

$$r_A.\theta_A=r_B.\theta_B\Rightarrow\begin{cases}3\theta_A=4\theta_B\\ \theta_A+\theta_B=28\end{cases}\Rightarrow\theta_A+\frac{3}{4}\theta_A=28\Rightarrow\theta_A=16$$

حال رابطه را برای A و C می‌نویسیم:

$$r_A\theta_A=r_C\theta_C\Rightarrow 3\times 16=6\times\theta_C\Rightarrow\theta_C=8$$

بنابراین چرخ بزرگ ۸ دور چرخیده و هر دور معادل با 2π رادیان است پس 16π رادیان چرخیده است.

۶۵۴ | ۳ برای حل این تست ابتدا به نکتهٔ زیر توجه کنید:

نکته در هر دقیقه عقربهٔ ساعت‌شمار $0/5^\circ$ و عقربهٔ دقیقه‌شمار 6° می‌چرخد. یعنی دقیقه‌شمار ۱۲ برابر ساعت‌شمار می‌چرخد.

پس وقتی ساعت‌شمار $\frac{\pi}{36}$ چرخیده، حتماً دقیقه‌شمار $\frac{12\pi}{36}=\frac{\pi}{3}=60^\circ$ چرخیده است. لذا $\frac{60}{6}=10$ دقیقه زمان گذشته و ساعت ۲:۱۰′ است.

۶۵۵ | ۲ برای حل این تست ابتدا به نکتهٔ زیر توجه کنید:

نکته زاویه‌ای که در هر ساعت توسط عقربهٔ ساعت‌شمار طی می‌شود برابر 30° است.

Ketabeh.com

۷۸۳ ۲

آنچه خواهید دید کمان‌های قرینه

نسبت‌های قرینه کمان را از هم اکنون بلد باشید:

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\quad\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$

به قول معروف کسینوس منفی‌خوار(منفی را می‌خورد) بقیه سوراخ‌دار. [منفی را بیرون می‌اندازد]

۴ رادیان تقریباً معادل $۴\times ۵۷^\circ \simeq ۲۲۸^\circ$ است که در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین داریم:

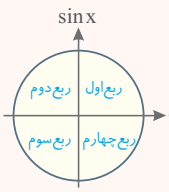
$\sin(-۴)=-\sin(۴)\simeq -\underbrace{\sin(۲۲۸^\circ)}_{\ominus}>۰$

$\cos(-۴)=\cos(۴)\simeq\cos(۲۲۸^\circ)<۰$

نکته تعیین علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر ناحیه:

۱ سینوس بالا و پایین داره [مثل y در دستگاه مختصات]

- اگر بالا باشیم [ربع اول و دوم] سینوس مثبت است.
- اگر پایین باشیم [ربع سوم و چهارم] سینوس منفی است.



۲ کسینوس راست و چپ داره (مثل x ها در دستگاه مختصات)

- اگر راست باشیم [ربع اول و چهارم] کسینوس مثبت است.
- اگر چپ باشیم [ربع دوم و سوم] کسینوس منفی است.

۳ می‌دانیم سینوس چپ بر روی کسینوس نشیند تانژانت پدید آید و برعکس کتانژانت یعنی $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$، پس برای تعیین علامت تانژانت و کتانژانت کافیست علامت سینوس و کسینوس را در هم ضرب کنیم. مشخص است که تانژانت و کتانژانت همواره هم‌علامت هستند.

۷۸۴ ۲ برای این‌که $P(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$ و $Q(\sin\theta\ ,\ \cos\theta)$ در دو ربع مختلف باشند، باید $\sin\theta$ و $\cos\theta$ ناهم‌علامت باشند. دلیل این امر این است اگر $\sin\theta$ و $\cos\theta$ هم‌علامت باشند، آن Q و P هر دو هم‌زمان یا در ربع اول هستند یا ربع سوم. حال برای این‌که $\sin\theta$ و $\cos\theta$ ناهم‌علامت باشند، باید θ در ربع دوم یا چهارم باشد.

۷۸۵ ۱ چون $\sqrt{\sin x}$ داریم، پس $\sin x\geq ۰$ است. حالا داریم:

$\cos x=\underbrace{\sin x}_{\text{مثبت}}+\underbrace{\sqrt{\sin x}}_{\text{همواره مثبت}}>۰\Rightarrow$ x باید در ربع اول باشد.

۷۸۶ ۲ چون $\sin\alpha\cos\alpha<۰$، پس سینوس و کسینوس مختلف‌العلامت هستند. یعنی α در ناحیه دوم یا چهارم است. چون $\sqrt{\sin\alpha}$ تعریف می‌شود، پس $\sin\alpha>۰$ است، در نتیجه α در ربع دوم مثلثاتی قرار دارد.

۷۸۷ ۳ چون $\sin\alpha\cos\alpha>۰$ است پس سینوس و کسینوس هم‌علامت هستند. یعنی α یا در ناحیه اول است یا در ناحیه سوم. از طرفی $\sin\alpha+\cos\alpha<۰$ است، یعنی جمع دو عبارت هم‌علامت منفی شده است. پس هر دوی آن‌ها منفی بوده‌اند. با توجه به توضیحات فوق، α در ناحیه سوم قرار دارد.

۷۸۸ ۲ برای حل این تست ابتدا به نکتهٔ زیر توجه کنید:

نکته عبارات $\sin ۲x\ ,\ \tan x\ ,\ \cot x$ همواره هم‌علامت هستند.

بررسی موارد:

الف) چون x در ربع سوم است پس $\tan x>۰$ و در نتیجه $\sin ۲x>۰$. ×

ب) چون در ربع سوم $\tan x\ ,\ \cot x$ مثبت هستند پس مجموع آن‌ها نیز مثبت است. ×

ج) عبارات داده شده را باز می‌کنیم:

$\cot x+\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}+\cos x=\frac{\cos(۱+\sin x)}{\sin x}=\underbrace{\cot x}_{+}\ \underbrace{(۱+\sin x)}_{+}>۰$ ✓

۷۸۹ ۲ برای آنکه $\sqrt{\sin ۲a}$ تعریف شود باید $\sin ۲a\geq ۰$ باشد، می‌دانیم $\sin ۲a$ همواره با $\tan\theta$ هم‌علامت است، پس بررسی می‌کنیم به ازای a های ۱,۲,...,۶ چند مقدار $\tan a$ مثبت است [دقت کنید a برحسب رادیان است]

$a=۱\simeq ۵۷^\circ \xrightarrow{\text{ربع اول}} \tan a>۰$ ✓ $\quad a=۲\simeq ۲\times ۵۷^\circ \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \tan a<۰$ ×

$a=۳\simeq ۳\times ۵۷^\circ \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \tan<۰$ × $\quad a=۴\simeq ۴\times ۵۷^\circ \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \tan a>۰$ ✓

$a=۵\simeq ۵\times ۵۷^\circ \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} \tan<۰$ × $\quad a=۶\simeq ۶\times ۵۷^\circ \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} \tan a<۰$ ×

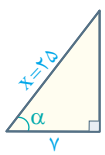
در نتیجه داریم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

۷۹۰ ۱ $\cos x$ و $\sin x$ همواره بین ۱− و ۱ قرار دارند، یعنی ۱− رادیان و ۱ رادیان. پس کمان‌های نسبت‌های مثلثاتی بیرونی همواره زاویه‌ای بین -۵۷° و ۵۷° است. یعنی یا در ناحیه چهارم است یا ناحیه اول، بنابراین:

الف) در ناحیه اول و چهارم، کسینوس همواره مثبت است. ✓

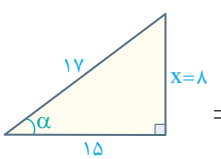
ب) در ناحیه اول سینوس مثبت و در ناحیه چهارم سینوس منفی است. ×

۷۹۱ ۳ برای تعیین مقدار $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ از مثلث کمکی استفاده می‌کنیم، اما باید حواسمان باشد چون α در ناحیه چهارم مثلثاتی قرار دارد، در آخر علامت سینوس و کسینوس را لحاظ کنیم.

$\cot\alpha=-\frac{۷}{۲۴}\Rightarrow$  ربع چهارم $\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=-\frac{۲۴}{۲۵}\\ \cos\alpha=\frac{۷}{۲۵}\end{cases}$

در نتیجه داریم: $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{۷}{۲۵}-(-\frac{۲۴}{۲۵})=\frac{۳۱}{۲۵}=۱/۲۴$

۷۹۲ ۲ از آن‌جایی که $\sin\alpha\cos\alpha<۰$ است پس سینوس و کسینوس مختلف‌العلامت هستند. با توجه به مثبت بودن کسینوس، پس سینوس منفی است، در نتیجه α در ربع چهارم دایره مثلثاتی قرار دارد. حال برای تعیین مقدار سینوس می‌توان از مثلث کمکی استفاده کرد اما در آخر باید علامت سینوس را لحاظ کنیم.

$\cos\alpha=\frac{۱۵}{۱۷}\Rightarrow$  $\Rightarrow\sin\alpha=\underbrace{-\frac{۸}{۱۷}}_{\text{ربع چهارم}}$

۷۹۳ | ۲

الف) $\cos ۲ = \cos(۲\times ۵۷^\circ) > \sin ۱۷۰^\circ \Rightarrow \ominus > \oplus$ ×

(ربع دوم — ربع دوم)

ب) در $\alpha = ۱۳۵^\circ$ داریم $|\sin\alpha| = |\cos\alpha| = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$، اما هرچه به سمت π در دایره مثلثاتی حرکت کنیم $\cos\alpha$ به -۱ نزدیک‌تر و $\sin\alpha$ به صفر نزدیک‌تر می‌شود، در نتیجه اندازه کسینوس (نه مقدار آن) بزرگ‌تر و اندازه سینوس (حتی مقدار آن) کم‌تر می‌شود و در نتیجه: $|\cos ۱۴۷^\circ| > |\sin ۱۴۷^\circ|$ ✓

ج) ۵ رادیان تقریباً معادل $۲۸۵^\circ = ۵\times ۵۷^\circ$ است. هرچه از $\alpha = -۴۵^\circ$ [یا هر زاویه‌ای با همان جایگاه در دایره مثلثاتی] به $-\frac{\pi}{۲}$ نزدیک‌تر می‌شویم از مقدار $\tan\alpha$ کم می‌شود و به $-\infty$ میل می‌کند. پس $\tan ۵ < -۱$ است و همواره سینوس هر زاویه‌ای از -۱ بزرگ‌تر است.

$\tan ۵ < \sin ۴۱$ ✓

(بیشتر از -۱ — کمتر از -۱)

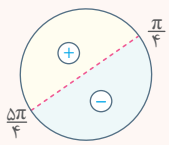
د) ۳ رادیان در ناحیه دوم مثلثاتی، جایی که کسینوس منفی است قرار دارد و ۲۰۰° در ناحیه سوم مثلثاتی جایی که سینوس منفی است قرار دارد و در نتیجه داریم:

$[\cos ۳^\circ] + [\sin ۲۰۰^\circ] = [-۰/\cdots] + [-۰/\cdots] = -۱ + (-۱) = -۲$ ×

۷۹۴ | ۴ برای حل این تست ابتدا به نکتهٔ زیر توجه کنید:

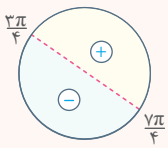
نکته علامت چند عبارت پرکاربرد:

۱) علامت $\sin x - \cos x$ را مطابق شکل روبه‌رو از روی دایره تشخیص بدهید.



● در واقع بالای نیمساز ربع ۱ و ۳ عبارت فوق مثبت است.

۲) علامت $\sin x + \cos x$ را مطابق شکل روبه‌رو از روی دایره تشخیص بدهید.

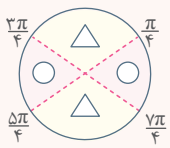


● در واقع بالای نیمساز ربع ۲ و ۴ عبارت فوق مثبت است.

۳) اگر هر دو خط را بکشید خواهیم داشت:

I) در Δها (بالا و پایین): $|\sin x| > |\cos x|$ و همچنین $|\tan x| > |\cot x|$

II) در $\bigcirc$ها (چپ و راست): $|\cos x| > |\sin x|$ و همچنین $|\cot x| > |\tan x|$



در این مسئله $\sin x > \cos x$ معادل است با $\sin x - \cos x > ۰$ که جواب آن گزینهٔ ۴ است.

۷۹۵ | ۱ چون $-\frac{\pi}{۴} < x < ۰$ است، پس $\sin x > \cos x > ۰$ است، بنابراین $\log\sin x > \log\cos x$ است، حال داریم:

$$\sigma = \left|\frac{\log\sin x - \log\cos x}{۲}\right| = \frac{۱}{۲}(\log\cos x - \log\sin x)$$

$$= \frac{۱}{۲}\log\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{۱}{۲}\log\cot x = \log\sqrt{\cot x}$$

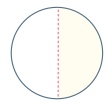
نکته انحراف معیار دو دادهٔ آماری a و b برابر است با:

$$\sigma = \left|\frac{a-b}{۲}\right|$$

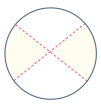
۷۹۶ | ۴ قدر مطلق سینوس در بالا و پایین بیشتر از قدر مطلق کسینوس است.

۷۹۷ | ۱

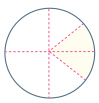
۱) از $|\sin x| < \cos x$ می‌فهمیم $\cos x$ از یک مقدار مثبت بزرگ‌تر است، پس خود $\cos x$ هم مثبت است.



۲) از طرفی چون $\cos x > ۰$ پس می‌توان نامعادله $|\sin x| < \cos x$ را به صورت $|\sin x| < |\cos x|$ نوشت:



در نتیجه از اشتراک ۱ و ۲ داریم:



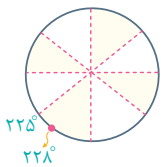
۷۹۸ | ۲ ابتدا برای راحت‌تر شدن کار رادیان‌ها را به درجه تبدیل می‌کنیم:

$۲\text{rad} = ۲\times ۵۷^\circ = ۱۱۴^\circ$ $\quad ۳\text{rad} = ۳\times ۵۷^\circ = ۱۷۱^\circ$

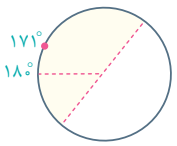
$۴\text{rad} = ۴\times ۵۷^\circ = ۲۲۸^\circ$ $\quad ۵\text{rad} = ۵\times ۵۷^\circ = ۲۸۵^\circ$

حال به بررسی موارد می‌پردازیم:

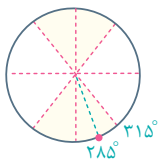
الف) در ناحیه‌های رنگی همواره $\tan x - \cot x > ۰$ است، یعنی مقدار تانژانت از کتانژانت بیشتر است بنابراین $\tan ۲۲۸^\circ > \cot ۲۲۸^\circ$ ✓



ب) در ناحیهٔ رنگ شده $\sin x - \cos x > ۰$ است یعنی مقدار سینوس از کسینوس بیشتر است پس $\sin ۱۷۱^\circ > \cos ۱۷۱^\circ$ است. [البته ۱۷۱° در ناحیهٔ دوم است، جایی که سینوس مثبت و کسینوس منفی است پس قطعاً سینوس از کسینوس بزرگ‌تر است.] ×



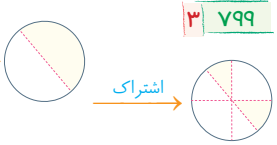
ج) در ناحیه رنگ شده $|\sin x| > |\cos x|$ است. پس $|\sin ۲۸۵| > |\cos ۲۸۵|$ ✓



د) همچنین در ناحیه رنگی شکل قسمت ج همواره $|\tan x| > |\cot x|$ است که ۱۱۴° در ناحیه رنگی است در نتیجه $|\tan ۱۱۴| > |\cot ۱۱۴|$ است. ✓

۷۹۹ | ۳

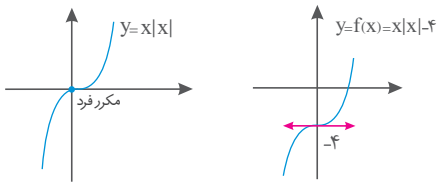
۱) $\sin x + \cos x > ۰$ ← بالای نیمساز ربع ۴،۲ ← اشتراک



۲) $\tan x < ۰$ ← ربع ۴،۲

بنابراین در گزینهٔ ۳ همواره روابط فوق برقرار است چون زیرمجموعه ناحیهٔ به دست آمده است.

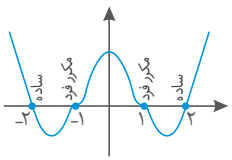
۲۲۵۹ | ۴ | توجه کنید $y=x|x|$ به صورت شکل سمت چپ است، حال کافیست نمودار را ۴ واحد به پایین انتقال دهیم تا به شکل راست برسیم:



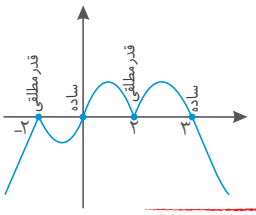
۲۲۶۰ | ۲ | در ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را تجزیه می‌کنیم:

$$f(x)=(|x|-2)(|x|-1)|x-1||x+1|$$

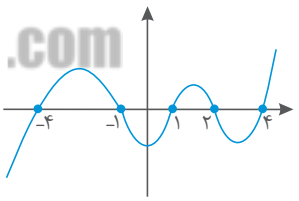
دقت کنید که $(|x|-1)$ دارای دو ریشهٔ سادهٔ $x=1$ و $x=-1$ است که در کنار عوامل $|x-1|$ و $|x+1|$ ریشهٔ مکرر مرتبهٔ فرد روی نمودار ایجاد می‌کنند. با توجه به این نکات و ساده بودن ریشه‌های $x=\pm 2$ و مثبت بودن اعتبار داریم:



۲۲۶۱ | ۴ | عامل $|x|-2$ دارای دو ریشهٔ سادهٔ $x=\pm 2$ می‌باشد. ولی ما در این مسئله با عامل $||x|-2|$ مواجه هستیم که دو ریشهٔ قدر مطلقی $x=\pm 2$ دارد. دو ریشهٔ ساده ۳ و $x=0$ و اعتبار منفی داریم:

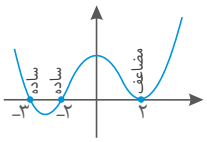


۲۲۶۲ | ۳ | عبارت دوم را تجزیه می‌کنیم: $y=(x-2)(|x|-4)(|x|-1)$. پس اعتبار مثبت و ریشه‌های سادهٔ ± 1 و ± 4 و ۲ را داریم:



۲۲۶۳ | ۱ | ضابطهٔ $f(x)$ را به صورت $f(x)=(3+|x|)(2-|x|)(3+x)(2-x)$ تجزیه می‌کنیم، $x=2$ هم برای $(2-x)$ و هم برای $(2-|x|)$ ریشهٔ ساده است.

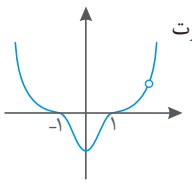
لذابرای $(2-|x|)(2-x)$ ریشهٔ $x=2$ مکرر ازمرتبهٔ ۲ است. ریشه‌های $x=-2$ و $x=3$ ساده هستند. $(3+|x|)$ هم ریشه ندارد. اعتبار نیز مثبت است.



نکته اگر $x=\alpha$ ریشهٔ مرتبهٔ m تابع $g(x)$ و ریشهٔ مرتبهٔ n تابع $h(x)$ باشد، آنگاه همین $x=\alpha$ ریشهٔ مرتبهٔ $m+n$ تابع $f(x)=g(x)h(x)$ است.

۲۲۶۴ | ۴ | عامل $(x-2)^5$ را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم:

$$y=(x^2-1)^3 \Rightarrow$$

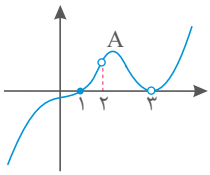


نکته اگر عامل $(x-\alpha)^n$ به طور کامل از صورت و مخرج ساده شود، در رسم نمودار انگار که عامل $(x-\alpha)^n$ هرگز نداشتیم، فقط روی نمودار در $x=\alpha$، باید نقطهٔ تو خالی قرار دهیم.

۲۲۶۵ | ۳ | برای حل این تست ابتدا به نکتهٔ زیر توجه کنید:

نکته در رسم نمودار، تابع را تا می‌توانید ساده کنید ولی به آخرین مرحله که رسیدید و نمودار را رسم کردید، با توجه به دامنهٔ تابع اولیه (که ساده نشده) نقاط تو خالی نمودار را مشخص کنید.

به راحتی می‌توان ضابطه را به صورت $y=(x-1)^3(x-3)^2$ ساده کرد و نمودار زیر را بدست آورد. اما برای نقاط تو خالی باید به ضابطهٔ اولیه تابع، یعنی $y=\frac{(x-1)^3(x-2)^2(x-3)^4}{(x^2-5x+6)^2}$ توجه کنیم و به همین خاطر $x=2,3$ که از صورت و مخرج ساده شدند را تو خالی رسم کردیم.

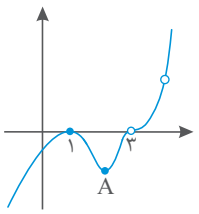


نکته کلیدی که در حل این سوال مهم است، پیدا کردن نقطهٔ A، است. که برای تشخیص جایگاه A به نکته زیر توجه کنید.

نکته در تابع $f(x)=(x-\alpha)^m(x-\beta)^n$ طول نقطهٔ A (ماکزیمم یا مینیمم) از فرمول $x_A=\frac{m\beta+n\alpha}{m+n}$ به دست می‌آید.

در این تست $\frac{11}{5}>2$ $x_A=\frac{3\times 3+2\times 1}{3+2}=\frac{11}{5}>2$. به همین خاطر نقطهٔ تو خالی در $x=2$ قبل از A است.

۲۲۶۶ | ۴ | اگر این تابع را ساده کنیم به تابع $y=(x-1)^4(x-3)^3$ می‌رسیم، نقاط تو خالی با توجه به ضابطهٔ تابع قبل از ساده شدن انتخاب شده‌اند $(x=3,4)$ و البته: $x_A=\frac{12+3}{7}=\frac{15}{7}$

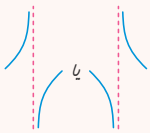


۲۲۶۷ | ۳ | برای حل این تست ابتدا به نکتهٔ زیر توجه کنید:

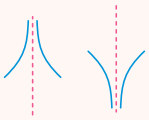
نکته اگر ریشهٔ مفرج ساده نشد، تابع دو ویژگی مهم پیدا می‌کند.

۱ مجانب قائم ۲ خاصیت کشسانی نمودار

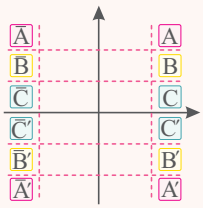
۱ مجانب قائم در حقیقت همان ریشهٔ مفرج است که بر دو نوع است. نوع اول مربوط به ریشه‌های سادهٔ مفرج، یا ریشه‌های مکرر مرتبهٔ فرد، یعنی $\frac{g(x)}{(x-\alpha)^{2n+1}}$ هستند که ویژگی آن‌ها وجود شاخه‌های نا هم علامت از نمودار در اطراف مجانب است.



نوع دیگری از مجانب قائم داریم که از ریشه‌های $(x-\alpha)^{2n}$ یا $|x-\alpha|$ در مفرج به وجود می‌آیند. این مجانب‌ها یا آتشفشانی مانند شکل سمت چپ هستند یا باتلاقی مانند شکل سمت راست.



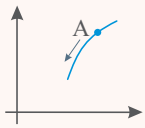
۲ خاصیت کشسانی نمودار $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ به کمک اعتبار و درجهٔ صورت [یعنی $g(x)$] و درجهٔ مفرج [یعنی $h(x)$] مشخص می‌شود. به این صورت که دستگاه مختصات را به ۶ ناحیه در سمت راست و ۶ ناحیه در سمت چپ تقسیم‌بندی می‌کنیم:



Ketabchi.com

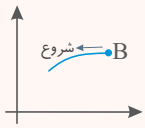
۱ کنشان گرید A: اگر درجه صورت بیشتر از درجهٔ مخرج باشد و اعتبار مثبت باشد، شروع رسم از A و اگر اعتبار منفی باشد از A' است.

مثلاً: $y=\frac{(x-1)^5(x+2)^3}{(x-2)^6}$، با توجه به اینکه درجه صورت ۸ و درجهٔ مخرج ۶ است و اعتبار مثبت است نقطهٔ شروع رسم این نمودار از A است:

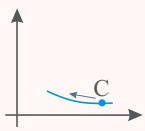


۲ کنشان گرید B: اگر درجه‌های صورت و مخرج برابر باشد و اعتبار مثبت باشد شروع از B و اگر اعتبار منفی باشد شروع از B' است.

مثلاً در رسم تابع $y=\frac{(x-1)^3 x}{(x+2)^4}$ درجهٔ صورت و مخرج هر دو ۴ است و اعتبار مثبت است پس شروع از B است.



۳ کنشان گرید C: اگر درجهٔ صورت کمتر از مخرج باشد از C (وقتی اعتبار مثبت است) یا از C' (وقتی اعتبار منفی است) شروع به رسم می‌کنیم، مثلاً در رسم تابع $y=\frac{x}{(x-1)^3}$ اعتبار مثبت و درجهٔ مخرج بیشتر از صورت است پس شروع از C است.



حال چند مثال دقیق‌تر را با هم مرور کنیم:

مثال ۱:

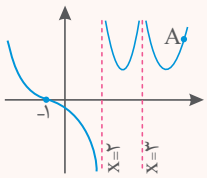
$$y=\frac{(x+1)^7}{(x-2)^3(x-3)^2}$$

۱ اعتبار مثبت و درجه صورت بیشتر از مخرج است پس شروع از A می‌باشد.

۲ $x=3$ مجانب قائم آتشفشانی یا باتلاقی

۳ $x=2$ مجانب قائم معمولی

۴ $x=-1$ ریشه مکرر با تکرار فرد



توجه! دقت کنید که شروع نمودار از محور x ها دور است، پس سمت چپ هم نمودار از محور x ها دور می‌شود. یعنی نموداری که با A یا A' شروع می‌شود، باید با $\bar{A}$ یا $\bar{A}'$ تمام شود. همین هم برای B, C برقرار است.

مثال ۲:

$$y=\frac{(x+1)^2(1-x)}{(x+2)^3|x-2|}$$

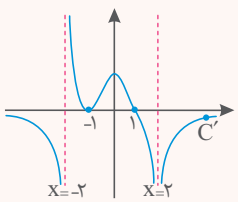
۱ اعتبار منفی و درجه مخرج بیشتر، شروع از C'

۲ $x=2$ مجانب آتشفشانی یا باتلاقی

۳ $x=1$ ریشهٔ ساده

۴ $x=-1$ ریشه مکرر با تکرار زوج

۵ $x=-2$ مجانب قائم معمولی



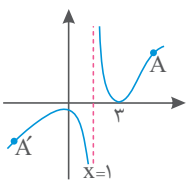
در تابع $f(x)=\frac{(x-3)^2}{(x-1)}$ درجهٔ صورت بیشتر است.

۱ اعتبار مثبت شروع از A

۲ $x=3$ ریشهٔ مضاعف

۳ $x=1$ مجانب معمولی

۴ اتمام نمودار A' است.



۳ ۲۲۶۸ اول ضابطهٔ $f(x)$ را تجزیه می‌کنیم:

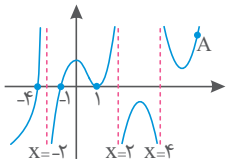
$$f(x)=\frac{(x-1)^2(x+4)(x+1)}{(|x|-2)(x-4)}$$

۱ اعتبار مثبت و درجهٔ صورت بیشتر از مخرج پس شروع از A

۲ $x=1$ ریشهٔ مضاعف

۳ $x=-1$ ریشهٔ سادهٔ صورت

۴ $x=2$, -2 , 4 مجانب قائم معمولی



۳ ۲۲۶۹ با ساده کردن ضابطهٔ $f(x)$ داریم:

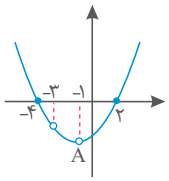
$$f(x)=\frac{(x+4)(x+1)(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+1)}=(x+4)(x-2)$$

۱ اعتبار مثبت

۲ $x=-4, 2$ ریشه ساده

۳ $x=-1$, -3 تو خالی

۴ $x_A=\frac{(-4)+2}{2}=-1$



۴ ۲۲۷۰ با توجه به اینکه $|x|^2=x^2$ است، با فاکتورگیری از $|x|$ در صورت $f(x)$ داریم:

$$f(x)=\frac{|x|(|x|-4)}{(x+3)|x+2|(x-1)^5}$$

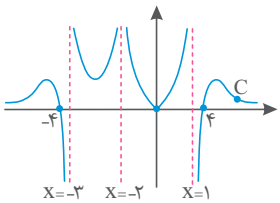
۱ اعتبار مثبت و درجهٔ مخرج بیشتر از صورت شروع از C

۲ $x=0$ ریشهٔ قدر مطلقی

۳ $x=4$, -4 ریشه‌های ساده

۴ $x=-3$, 1 مجانب معمولی

۵ $x=-2$ مجانب آتشفشانی یا باتلاقی



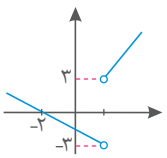
۱ ۲۲۷۱ برای حل این تست ابتدا به نکتهٔ زیر توجه کنید:

نکته اگر $f(x)$ عاملی به صورت $\frac{x-\alpha}{|x-\alpha|}$ داشته باشد، آنگاه در $x=\alpha$ ناپیوستگی دارد. در این نوع مسائل باید $f(x)$ را طبق ریشه بازه‌بندی کنیم.

در این تست $f(x)=\begin{cases}1 & ;\ x>3\\ -1 & ;\ x<3\end{cases}$ و نمودار آن شبیه به گزینهٔ ۱ است.

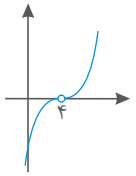
۲ ۲۲۷۲ تابع $f(x)$ عامل $\frac{x-1}{|x-1|}$ دارد و لذا باید بازه‌بندی شود بنابراین نمودار این تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & ;x>1\\ -(x+2) & ;x<1\end{cases}\Rightarrow$$



۴ ۲۲۷۳ به علت وجود $(x-4)^3$ در صورت و $|x-4|$ در مخرج، باید تابع را بازه‌بندی کنیم، در نتیجه نمودار این تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}(x-4)^2 & ;\ x>4\\ -(x-4)^2 & ;\ x<4\end{cases}\Rightarrow$$



حسابان جامع کنکور
هرکول
Hercule
کلاسینو
ریاضیات تجربی
و حسابان جامع
مباحث مشترک
دهم
یازدهم
دوازدهم
آریان خیدری
میلاد منصوری
علی منصف شاکری

ریاضیات تجربی جامع کنکور
حسابان جامع کنکور
هرکول
Hercule
کلاندینو