

# فهرست

---

هفت	پیشگفتار
۱	درس اول: آشنایی با گرافها. درجه رأسها
۵	مسئلهها
۸	حل مسئلهها و نکات آموزشی
۱۳	درس دوم: گرافهای دوبخشی. لم دستدادن
۱۶	مسئلهها
۱۸	حل مسئلهها و نکات آموزشی
۲۱	درس سوم: مفاهیم اساسی. دورها
۲۶	مسئلهها
۲۸	حل مسئلهها و نکات آموزشی
۳۱	درس چهارم: درخت
۳۴	مسئلهها
۳۵	حل مسئلهها و نکات آموزشی
۳۹	مسئلههای بیشتر
۴۳	راهنماییها و پاسخها
۴۵	پیوست

## پیشگفتار

اصطلاح «گراف» در برنامه‌درسی مدرسه‌ای وجود ندارد.<sup>۱</sup> از طرف دیگر، این موضوع در بسیاری از شاخه‌های علوم ریاضی، همچنین علوم کامپیوتر، الکترونیک و سایر رشته‌ها (از جمله اقتصاد) کاربرد دارد. بنابراین آشناکردن دانش‌آموزان با این موجودات ریاضی و ویژگی‌های آن‌ها بسیار مهم است. برای همین به آن‌ها یاد می‌دهیم که چگونه این اصطلاحات را درست به کار ببرند و از آن‌ها در حل مسئله‌ها استفاده کنند. نظریهٔ گراف شاخه‌ای نسبتاً جدید در ریاضیات است (اولین نمونه به کار لئونارد اویلر در مورد پل‌های شهر کونیگسبرگ برمی‌گردد که پایه‌های نظریهٔ گراف را در سال ۱۷۳۶ بنیان نهاد. ولی اصطلاح گراف را ۲۰۰ سال بعد برای اولین بار دنش کویینگ، ریاضی‌دان مجار، استفاده کرده است). با این همه، ارائهٔ تمامی نتایج به‌دست آمدهٔ ریاضی‌دان‌ها در این حوزه حتی در کتابی بسیار قطور غیرممکن است. بنابراین معرفی نظریهٔ گراف به دانش‌آموزان باید در چند مرحله صورت گیرد. کلاس‌های مستقل را می‌توان پشت سر هم (مثلاً، در مدرسه‌ای تابستانی) برگزار کرد یا در محافل جدگانه با فاصله‌های زمانی زیاد این کار را کرد.

---

<sup>۱</sup>البته، در برنامهٔ آموزش ریاضی در ایران، دانش‌آموزان در سال دوازدهم با گراف و ویژگی‌های ابتدایی آن آشنا می‌شوند...م.

به نظر ما آشناکردن دانش‌آموزان پایه‌های ششم و هفتم (و حتی شاید پایین‌تر) با مفاهیم ابتدایی گراف‌ها و ادامه دادن همین کار در مقاطع بالاتر، با بررسی مفاهیم و نتایج پیچیده‌تر، مناسب است.

درس‌های این کتاب به قرار زیرند:

درس اول. آشنایی با گراف‌ها. درجه رأس‌ها.

برای دانش‌آموزان پایه‌های ششم و هفتم طراحی شده است. به هیچ دانش‌افزایی نیاز ندارد.

درس دوم. گراف‌های دوبخشی. لم دست‌دادن.

برای دانش‌آموزان پایه‌های ششم و هفتم طراحی شده است. دانش‌آموزان باید با مفهوم زوجیت آشنا باشند.

درس سوم. مفاهیم اساسی. دورها.

برای دانش‌آموزان پایه‌های ششم و هفتم طراحی شده است. دانش‌آموزان باید با مفهوم زوجیت، ترکیبیات مقدماتی و اثبات با برهان خلف آشنا باشند.

درس چهارم. درخت.

برای دانش‌آموزان پایه‌های هفتم و هشتم طراحی شده است. دانش‌آموزان باید در استدلال استقرایی (غیررسمی) متبحر باشند (به استقرای ریاضی نیاز نیست).

مفاد هر درس به سه بخش تقسیم شده است:

– مطالب نظری برای بحث در کلاس: تعریف‌ها، گزاره‌ها با اثبات و نکته‌ها، مثال‌ها؛

– مسائل پیشنهادی هر درس؛

– حل مسائل و نکات آموزشی.

به‌علاوه، در انتهای کتاب فهرستی از مسئله‌های بیشتر و تکمیل‌کننده مباحث کلاس آمده است.

در پیوستی جداگانه تعریف‌های رسمی از مفاهیم که به‌عنوان موضوعات کلاس از آن‌ها استفاده شده بود، گردآوری شده است. نویسندگان از شاپووالف برای بررسی دقیق متن و مسئله‌های پیشنهادی قدردانی می‌کنند.

## درس اول

# آشنایی با گراف‌ها. درجهٔ رأس‌ها

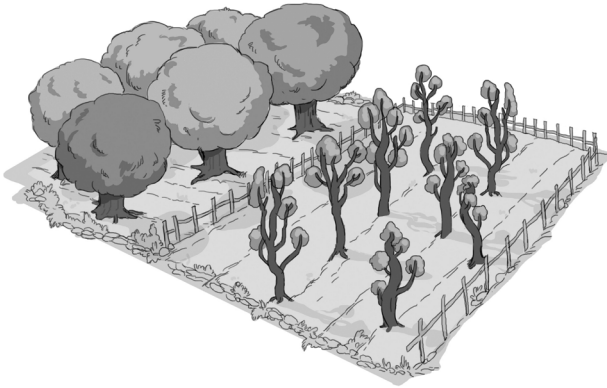
هدف این درس آموزش مفهوم گراف به دانش‌آموزان برای استفاده در مسئله‌هایی است که گراف در راه‌حل آن‌ها به کار می‌آید و در نوشتن راه‌حل و یافتن پاسخ به آن‌ها کمک می‌کند.

این درس از دو بخش تشکیل شده است: در بخش اول مسئله‌هایی مطرح می‌شوند که برای حل آن‌ها فقط لازم است فرض‌های مسئله را به شکل یک گراف بکشید و بر اساس این شکل نتیجه‌گیری کنید. چنین مسئله‌هایی را با عنوان مثال آورده‌ایم.

در بخش دوم مفهوم درجهٔ رأس و ساده‌ترین حکم‌های مربوط به آن را بررسی کرده‌ایم. در این بخش تعریف‌های لازم آورده شده، مثال‌هایی زده شده و چند مسئلهٔ شمارشی مربوط به یال‌ها مطرح شده است.

### شکل گراف‌ها

**مثال ۱.** دهکده‌ای ۹ باغ میوه دارد. باغ‌های انگور و آناناس با باغ پرتقال همسایه‌اند، باغ موز با باغ‌های انگور و سیب همسایه است، باغ زردآلو همسایهٔ باغ‌های کیوی و نارنگی است و باغ گردو با باغ نارنگی همسایه است. همچنین هیچ باغ دیگری در این دهکده وجود ندارد. باغ‌هایی همسایه هستند که دیوار مشترک دارند. آیا با عبور از باغ‌های همسایه می‌توان از باغ پرتقال به باغ نارنگی رفت؟



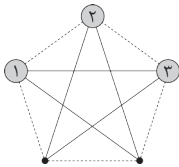
پاسخ. خیر، نمی توان.

راه حل. باغها را فهرست می کنیم، سپس آنهایی را که همسایه هستند با یک خط به هم وصل می کنیم:

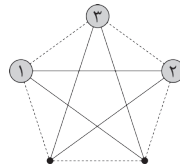
سیب - موز - انگور - پرتقال - آناناس  
 کیوی - زردآلو - نارنگی - گردو

ایده اصلی حل این جور مسئله ها شکل کشیدن است.

**مثال ۲.** در سه رأس از یک پنج ضلعی (مطابق شکل ۱ (الف)) مهره گذاشته شده است. مجاز هستیم هر مهره را از روی قطرها به رأس های خالی انتقال دهیم. آیا با تکرار این عمل می توان به وضعیتی رسید که (مطابق شکل ۱ (ب)) فقط یکی از مهره ها جایش تغییر نکرده باشد و دو مهره دیگر تغییر جا دادند؟



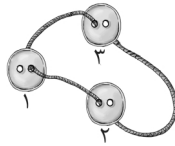
شکل ۱ (ب)



شکل ۱ (الف)

پاسخ. خیر، نمی توان.

راه حل. دقت کنید که قطرهای پنج ضلعی یک دور بسته درست می کنند. مهره ها را مانند دکمه هایی که ریسمان از داخل آن ها رد شده در نظر می گیریم (شکل ۱ (پ) را ببینید). روشن است که اگر دکمه ها را در امتداد ریسمان حرکت دهیم، ممکن نیست که فقط جای دوتا از دکمه ها با هم عوض شود.



شکل ۱ (پ)

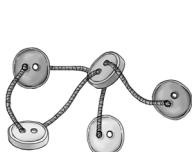
این مثال ایده ای مشابه را تکرار می کند: نشان دادن فرض های مسئله با کشیدن یک شکل، که البته در اینجا استدلال پیچیده تر است.

**تعریف ۱.** گراف مجموعه ای متناهی از نقطه ها است که چندتا از آن ها با خط هایی به هم وصل شده اند. هر یک از نقطه ها را رأس و هر خط وصل کننده را یال گراف می نامند. (هر یال فقط به رأس ها وصل می شود). نقشه راه ها، نقشه متروها، مدارهای الکتریکی، شکل مستطیل و ... نمونه هایی از گراف ها هستند.

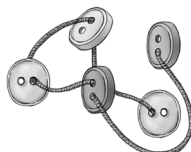
اکنون ارزش این را دارد که چند نمونه از گراف ها را بکشید و به این نکته دقت کنید که گراف ممکن است از چند «بخش» تشکیل شده باشد، که این بخش ها را مؤلفه های همبندی می نامند، حتی ممکن است به رأسی هیچ یالی وصل نشده باشد (رأس تنها).

قرارداد می کنیم گراف هایی را که رأسی از آن ها با یک یال به خودش وصل شود، یا گراف هایی را که دو رأسشان با چند یال به هم وصل شوند در نظر نمی گیریم، هر چند بعضی وقت ها به این جور گراف ها هم نیاز پیدا می کنیم.

همچنین، تجسم گراف به شکل مجموعه‌ای از دکمه‌ها که تعدادی از آن‌ها با ریسمان‌هایی به هم وصل شده‌اند سودمند است. در عین حال، جای دکمه‌ها و چگونگی عبور ریسمان‌ها از آن‌ها اهمیتی ندارد: گراف همان است، فقط اینکه کدام جفت از دکمه‌ها با ریسمان‌ها به هم وصل شده‌اند مهم است (شکل‌های ۲(الف) و ۲(ب) را ببینید).



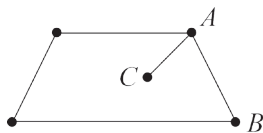
شکل ۲(ب)



شکل ۲(الف)

## درجه رأس

**تعریف ۲.** درجه (یا مرتبه) هر رأس تعداد یال‌هایی است که به آن رأس متصل است. رأس زوج رأسی است که تعداد یال‌های متصل به آن زوج، و رأس فرد رأسی است که تعداد یال‌های متصل به آن فرد باشد. مثلاً، در گراف زیر، درجه رأس  $A$  برابر ۳، درجه رأس  $B$  برابر ۲ و درجه رأس  $C$  برابر ۱ است.



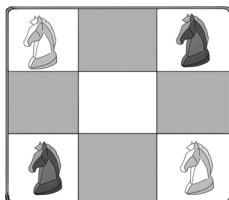
شکل ۳



## مسئله‌ها

**مسئله ۱.** میان نه سیاره منظومه شمسی ارتباط‌های فضایی برقرار شده است. موشک‌ها در این مسیرها حرکت می‌کنند: زمین-عطارد، پلوتون-زهره، زمین-پلوتون، پلوتون-عطارد، عطارد-زهره، اورانوس-نپتون، نپتون-زحل، زحل-مشتری، مشتری-مریخ و مریخ-اورانوس. آیا مسافری می‌تواند از زمین به مریخ برود؟

**مسئله ۲.** چهار اسب، دوتا سفید و دوتا سیاه، در چهار گوشه یک صفحه شطرنجی  $3 \times 3$  مطابق شکل ۴ قرار داده شده‌اند. اسب‌ها می‌توانند بنابر قواعد عادی شطرنج به خانه‌های خالی بروند. آیا می‌توان اسب‌های سفید را به گوشه‌های بالا و اسب‌های سیاه را به گوشه‌های پایین انتقال داد؟

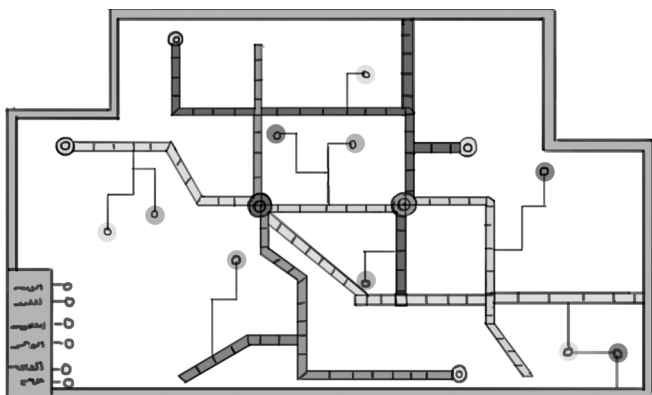


شکل ۴

قبل از اینکه این مسئله را به دانش‌آموزان بدهید، بهتر است چگونگی حرکت اسب را به آن‌ها یادآوری کنید.

**مسئله ۳.** آیا می‌توان رقم‌های ۰ تا ۹ را در یک ردیف طوری نوشت که مجموع هر دو رقم مجاور بر ۵، یا ۷، یا ۱۳ بخش پذیر باشد؟

**مسئله ۴.** الف) در شرکتی ۵۰ کامپیوتر وجود دارد، که جفت‌هایی از آن‌ها باید با کابل به هم وصل شوند. به هر کامپیوتر باید ۸ کابل وصل باشد. در مجموع به چند کابل نیاز پیدا می‌کنید؟



ب) گرافی ۴۰ رأس دارد که درجه هر یک از آن‌ها برابر با ۷ است. این گراف چند یال دارد؟

پ) در کنسرتی هر آهنگ را دو خواننده اجرا کرده‌اند. همچنین هیچ دو نفری بیش از یک‌بار با هم اجرا نداشته‌اند. در کل ۱۵ خواننده حاضر بوده‌اند و هر کدام ۵ هنرنمایی داشته است. چند آهنگ اجرا شده است؟

**مسئله ۵.** کشوری ۱۵ شهر دارد که از هر یک از آن‌ها دست‌کم به ۷ شهر دیگر جاده‌هایی مستقیم کشیده شده است. ثابت کنید می‌توان از هر شهر این کشور به هر شهر دیگرش رفت (می‌توان از شهرهای دیگر عبور کرد).



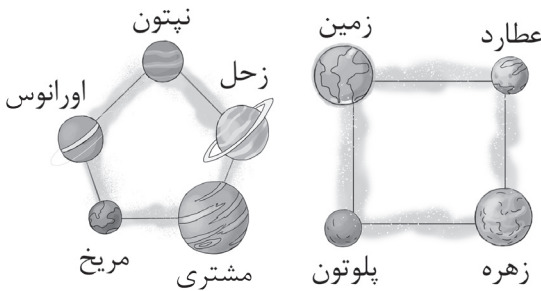
**مسئله ۶.** در باشگاه کشتی، هر نوآموز درست با ده مربی کشتی گرفته و هر مربی درست با نه نوآموز کشتی گرفته است. تعداد کدام بیشتر بوده است: نوآموزان یا مربی‌ها؟

## حل مسئله‌ها و نکات آموزشی

### شکل گراف‌ها

مسئله ۱. پاسخ. خیر، نمی‌تواند.

می‌توانیم نموداری بکشیم (یک گراف درست کنید، شکل ۵ را ببینید): سیاره‌ها را با نقطه‌ها و مسیرهای ارتباطی بین آن‌ها را با پاره‌خط نشان می‌دهیم.

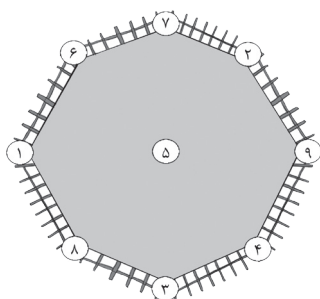


شکل ۵

به چه نتیجه‌ای رسیدید؟ از روی این نمودار روشن است که نمی‌توان از زمین به مریخ رفت.

مسئله ۲. پاسخ. خیر، نمی‌توان.

خانه‌های صفحه شطرنج را مطابق شکل ۶ (الف) شماره‌گذاری می‌کنیم. یک گراف درست می‌کنیم (شکل ۶ (ب) را ببینید): رأس‌های این گراف با خانه‌های صفحه شطرنج و یال‌های گراف با اتصال خانه‌هایی که به اندازه یک اسب از هم فاصله دارند، متناظر است (یعنی، می‌توان با یک حرکت اسب از یکی به دیگری رفت).

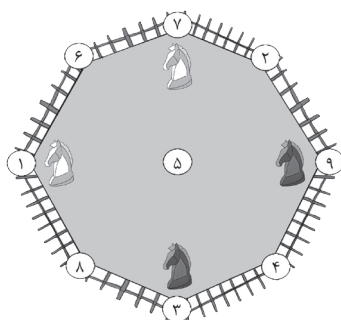
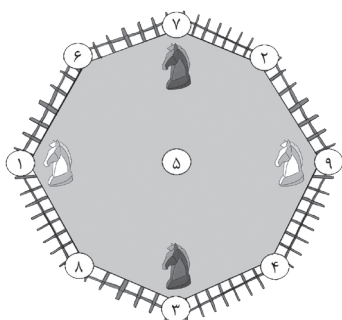


شکل ۶ (ب)

۱	۴	۷
۲	۵	۸
۳	۶	۹

شکل ۶ (الف)

در ابتدا اسب‌ها به این صورت قرار می‌گیرند: در خانه‌های ۱ و ۹ اسب‌های سفید و در خانه‌های ۳ و ۷ اسب‌های سیاه. برای حل این مسئله باید اسب‌ها را طوری جابه‌جا کنیم که با رفتن به رأس‌های گراف، هر دو اسب هم‌رنگ روبه‌روی هم قرار بگیرند. یعنی از وضعیت شکل سمت چپ در زیر، به شکل سمت راست برسیم. چون ترتیب اسب‌ها را نمی‌توان تغییر داد، این کار ممکن نیست.



مسئله ۳. پاسخ. بله، می‌توان.

عددها را به عنوان رأس‌های ۰، ۱، ۲، ... و ۹ در نظر می‌گیریم. اگر مجموع دو عدد کنار هم بر ۵، یا بر ۷، یا بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد، آن وقت رأس‌های متناظرشان را با یالی به هم وصل می‌کنیم. در این صورت به گراف زیر می‌رسیم: