

فهرست مطالب

فصل اول: مجموعه‌ها

| | | | | | |
|---|-------------------------|-----|---|------------------------------------|----|
| ۴ | مجموعه‌ها و احتمال | ۲۵ | ۱ | معرفی مجموعه‌ها | ۱۰ |
| * | آزمون جمع‌بندی فصل | ۳۱ | ۲ | مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها | ۱۳ |
| ✓ | پاسخ‌های تشریحی فصل اول | ۱۷۰ | ۳ | اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها | ۱۹ |

فصل دوم: عددهای حقیقی

| | | | | | |
|---|-------------------------|-----|---|--------------------------|----|
| * | آزمون جمع‌بندی فصل | ۵۱ | ۱ | عددهای گویا | ۳۳ |
| ✓ | پاسخ‌های تشریحی فصل دوم | ۱۷۹ | ۲ | عددهای حقیقی | ۴۱ |
| | | | ۳ | قدر مطلق و محاسبه تقریبی | ۴۵ |

فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه

| | | | | | |
|---|-------------------------|-----|---|--------------------------|----|
| ۵ | شکل‌های متشابه | ۶۹ | ۱ | استدلال | ۵۳ |
| * | آزمون جمع‌بندی فصل | ۷۴ | ۲ | آشنایی با اثبات در هندسه | ۵۶ |
| ✓ | پاسخ‌های تشریحی فصل سوم | ۱۸۶ | ۳ | هم‌نهشتی مثلث‌ها | ۶۰ |
| | | | ۴ | حل مسئله در هندسه | ۶۵ |

فصل چهارم: توان و ریشه

| | | | | | |
|---|---------------------------|-----|---|-----------|----|
| ۴ | جمع و تفریق رادیکال‌ها | ۹۰ | ۱ | توان صحیح | ۷۷ |
| * | آزمون جمع‌بندی فصل | ۹۴ | ۲ | نماد علمی | ۸۱ |
| ✓ | پاسخ‌های تشریحی فصل چهارم | ۱۹۶ | ۳ | ریشه‌گیری | ۸۵ |

فصل پنجم: عبارات‌های جبری

۱۱۵ آزمون جمع‌بندی فصل *

۲۰۴ پاسخ‌های تشریحی فصل پنجم

۹۶ عبارات‌های جبری و مفهوم اتحاد ۱

۱۰۵ چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها ۲

۱۱۰ نابرابری‌ها و نامعادله ۳

فصل ششم: خط و معادله‌های خطی

۱۳۷ آزمون جمع‌بندی فصل *

۲۱۱ پاسخ‌های تشریحی فصل ششم

۱۱۷ معادله خط ۱

۱۲۳ شیب خط و عرض از مبدأ ۲

۱۳۱ دستگاه معادله‌های خطی ۳

فصل هفتم: عبارات‌های گویا

۱۵۳ آزمون جمع‌بندی فصل *

۲۱۹ پاسخ‌های تشریحی فصل هفتم

۱۳۹ معرفی و ساده کردن عبارات‌های گویا ۱

۱۴۳ محاسبات عبارات‌های گویا ۲

۱۴۸ تقسیم چندجمله‌ای‌ها ۳

فصل هشتم: حجم و مساحت

۱۶۷ آزمون جمع‌بندی فصل *

۲۲۸ پاسخ‌های تشریحی فصل هشتم

۱۵۵ حجم و مساحت کره ۱

۱۵۸ حجم هرم و مخروط ۲

۱۶۳ سطح و حجم ۳

۲۴۴ آزمون پایان نوبت دوم (۳) *

۲۴۶ آزمون پایان نوبت دوم (۴) *

۲۴۸ پاسخ‌های تشریحی آزمون‌های پایان نوبت

۲۳۶ آزمون پایان نوبت اول (۱) *

۲۳۸ آزمون پایان نوبت اول (۲) *

۲۴۰ آزمون پایان نوبت دوم (۱) *

۲۴۲ آزمون پایان نوبت دوم (۲) *

بخش اول

درستنامه & پرسش‌ها

www.gajmarket.com

فصل سوم:
استدلال و اثبات در هندسه

۵۳

فصل دوم:
عددهای حقیقی

۳۳

فصل اول:
مجموعه‌ها

۱۰

فصل ششم:
خط و معادله‌های خطی

۱۱۷

فصل پنجم:
عبارت‌های جبری

۹۶

فصل چهارم:
توان و ریشه

۷۷

فصل هشتم:
حجم و مساحت

۱۵۵

فصل هفتم:
عبارت‌های گویا

۱۳۹

فصل اول

مجموعه‌ها

درس اول: معرفی مجموعه



● **مجموعه:** اگر تعدادی شیء (عدد، حرف، شکل و...) را مشخص کنیم و آن‌ها را در یک منحنی بسته یا در داخل دو آکولاد قرار دهیم، می‌گوییم مجموعه‌ای از آن اشیاء را ساخته‌ایم. به عنوان نمونه، مجموعه اعداد اول یک رقمی را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{array} \quad \text{یا} \quad \{2, 3, 5, 7\}$$

برای نام‌گذاری مجموعه‌ها معمولاً از حروف انگلیسی بزرگ A، B، C و... استفاده می‌شود و اگر از آکلاد برای نمایش مجموعه استفاده کنیم، اشیاء را با «،» از هم جدا می‌کنیم. مانند:

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

به هریک از اشیاء درون یک مجموعه، عضو آن مجموعه گفته می‌شود. مثلاً مجموعه $B = \{2, 1, 4\}$ دارای سه عضو است که عبارت‌اند از عددهای ۱، ۲ و ۴. همچنین توجه کنید که عضوهای مجموعه باید به طور مشخص و معین، قابل تعیین شدن باشند.

مثال مجموعه C شامل تمام اعداد طبیعی یک رقمی زوج است. مجموعه C را با اعضایش نمایش دهید.

پاسخ

$$C = \{2, 4, 6, 8\} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{array}$$

نکته در نمایش مجموعه‌ها:

- الف** با تکرار عضوهای مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود. (عضوهای تکراری را نمی‌نویسیم).
- ب** با جابه‌جایی عضوهای مجموعه، مجموعه جدیدی به دست نمی‌آید. (ترتیب نوشتن اعضا، مهم نیست).

مثال با ذکر دلیل، مشخص کنید که هر مورد، آیا توصیف‌کننده یک مجموعه است یا خیر.

- الف** سه شمارنده زوج ۶۰ **پ** سه شاعر معروف ایرانی
- ب** اعداد اول زوج **پ**

پاسخ

الف مجموعه‌ای را توصیف نمی‌کند، زیرا اعضای آن به طور مشخص، قابل تعیین نیستند. مثلاً:

$$\dots \text{یا } \{2, 6, 30\} \text{ یا } \{2, 4, 12\} \text{ یا } \{2, 4, 6\}$$

ب مجموعه‌ای را توصیف نمی‌کند، زیرا اعضای آن به طور مشخص، قابل تعیین نیستند. مثلاً:

$$\dots \text{یا } \{\text{خیام, مولوی, فردوسی}\} \text{ یا } \{\text{سعیدی, حافظ, فردوسی}\}$$

پ یک مجموعه را توصیف می‌کند که برابر با $\{2\}$ است.

مثال مجموعه $A = \{2, \sqrt{4}, (-1)^2, 1\}$ دارای چند عضو است؟

$$A = \{2, \sqrt{4}, (-1)^2, 1\} \Rightarrow A = \{2, \cancel{\sqrt{4}}, 1, \cancel{(-1)^2}\} \Rightarrow A = \{2, 1\}$$

تکراری تکراری

پاسخ

بنابراین مجموعه A دارای ۲ عضو است.

بنابراین می‌توان گفت:

در ریاضی، از مجموعه، برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص و متمایز استفاده می‌کنیم.

● **عضویت در مجموعه:** برای اینکه نشان دهیم a عضوی از مجموعه A است، می‌نویسیم $a \in A$ و می‌خوانیم « a عضو A است.»؛ همچنین برای اینکه نشان دهیم a عضوی از مجموعه A نیست، می‌نویسیم $a \notin A$ و می‌خوانیم « a عضو A نیست.» مثلاً:

$$A = \{2, 3, 7, 8\} \Rightarrow \begin{cases} 2 \in A \Rightarrow 2 \text{ عضو } A \text{ است.} \\ 9 \notin A \Rightarrow 9 \text{ عضو } A \text{ نیست.} \end{cases}$$

مثال با توجه به مجموعه $A = \{3, 4, 2, 7, 5\}$ ، جاهای خالی را با علامت‌های \in یا \notin کامل کنید.

الف $2 \square A$

ب $6 \square A$

پ $-1 \square A$

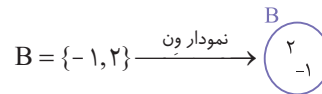
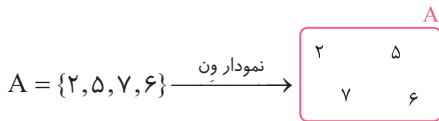
الف $2 \in A$

ب $6 \notin A$

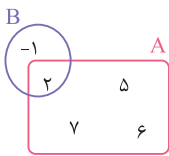
پ $-1 \notin A$

پاسخ

● **نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون:** مجموعه‌ها را می‌توان با استفاده از منحنی‌ها یا خط‌های شکسته بسته نمایش داد. در چنین حالتی می‌گوییم مجموعه را با استفاده از نمودار ون نمایش داده‌ایم. مثلاً:



می‌توانیم دو مجموعه A و B را که در بالا داریم، با هم به صورت مقابل نمایش دهیم:

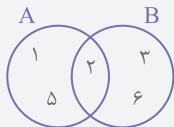


مثال با عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ دو مجموعه A و B را با شرایط زیر، می‌سازیم.

$$1 \in A, 1 \notin B, 2 \in A, 2 \in B, 3 \notin A, 3 \in B, 4 \notin A, 4 \notin B, 5 \in A, 5 \notin B, 6 \notin A, 6 \in B$$

نمودار ون را طوری رسم کنید که مجموعه‌های A و B را نمایش دهد.

پاسخ



● **مجموعه تهی:** اگر در مجموعه‌ای عضوی وجود نداشته باشد، آن را مجموعه «تهی» می‌نامیم و با نماد \emptyset یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم.

مثال کدام یک از عبارات‌های زیر، یک مجموعه تهی را توصیف می‌کند؟

الف عددهای صحیح بین -4 و -6 .

ب اعدادی که از قرینه خود کوچک‌ترند.

پ اعدادی که جذر آن‌ها منفی می‌شود.

الف $\{-5\}$

ب مجموعه تمام اعداد منفی

پ $\{\}$

پاسخ

بنابراین عبارت «اعدادی که جذر آن‌ها منفی می‌شود»، مجموعه‌ای تهی را توصیف می‌کند.

نکته عضوهای مجموعه، هر چیزی می‌توانند باشند، حتی از جنس مجموعه؛ در واقع می‌توانیم مجموعه‌ای داشته باشیم که اعضای آن خودشان مجموعه باشند. مانند:

$$A = \{ \underbrace{\{1, 2, 3\}}_{\text{مجموعه } B}, \underbrace{\{1, 4\}}_{\text{مجموعه } C}, \sqrt{2} \} \Rightarrow A = \{B, C, \sqrt{2}\}$$

یعنی مجموعه A ، یک مجموعه سه عضوی است. حالا مجموعه زیر را در نظر بگیرید:

$$B = \{\emptyset\}$$

می‌دانیم \emptyset خودش یک مجموعه است، اگر آن را با C نشان دهیم، داریم:

$$B = \{ \underbrace{\emptyset}_{\text{مجموعه } C} \} \Rightarrow B = \{C\} \Rightarrow B \Rightarrow \text{تهی نیست} \Rightarrow \text{مجموعه‌ای یک عضوی است.}$$

در نتیجه مجموعه $\{\emptyset\}$ مجموعه تهی نیست، زیرا دارای یک عضو است.

مثال مجموعه $A = \{\{\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ چند عضوی است؟

پاسخ

$$A = \{ \cancel{\{\}}, \emptyset, \{\emptyset\} \} \Rightarrow A = \{ \emptyset, \{\emptyset\} \}$$

تکراری
تهی است
تهی نیست

بنابراین مجموعه A مجموعه‌ای دو عضوی است.

پرسش‌های درس اول



درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

(هماهنگ ایلام-۱۴۰۱)

(هماهنگ زنجان-۱۴۰۰)

(هماهنگ کرمانشاه-۱۴۰۲)

- ۱ هر مجموعه حداقل یک عضو دارد.
- ۲ عبارت «نام دو شاعر ایرانی» یک مجموعه را مشخص می‌کند.
- ۳ مجموعه $\{0\}$ یک مجموعه تهی است.
- ۴ مجموعه $\{1, 2, 5, 1\}$ دارای ۴ عضو است.
- ۵ تعداد اعضای دو مجموعه $A = \{0, \emptyset\}$ و $B = \{1, 2\}$ با هم برابرند.

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

(هماهنگ خوزستان-۱۴۰۱)

(هماهنگ آذربایجان غربی-۱۴۰۰)

- ۶ اگر مجموعه‌ای هیچ عضوی نداشته باشد، آن را می‌نامند و با نماد یا نمایش می‌دهند.
- ۷ مجموعه شماره‌های اول عدد ۳۶ دارای عضو است.
- ۸ مجموعه $\{2, 3, 4, \dots, 9\}$ دارای عضو است.
- ۹ مجموعه $\{(-1)^{20}, (-1)^{19}, \dots, (-1)^2, (-1)^1, -1\}$ دارای عضو است.

گزینه درست را مشخص کنید.

۱۰ مجموعه $A = \{15, 5^\circ, 5^1, \sqrt{\frac{8}{2}}, \sqrt{4}, \frac{15}{15}\}$ چند عضو دارد؟

۳

۴

۵

۶

$$A = \{\{\}, \{\emptyset\}, \{0\}, \{\{0\}\}\}$$

الف $\emptyset \in A$

ب $0 \in A$

سه

دو

پ $\{\{\emptyset\}\} \notin A$

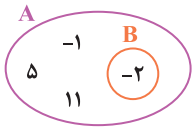
یک

صفر

۱۱ با توجه به مجموعه A ، چه تعداد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

۱۲ کدام عبارت، مشخص‌کننده مجموعه تهی است؟

- ۱ شماره‌های اول عدد ۷
- ۲ عددهای صحیح بین ۲- و ۲
- ۳ عددهای طبیعی بین ۵ و ۶
- ۴ عددهای صحیح منفی و بزرگ‌تر از ۳-



(هماهنگ خوزستان - ۱۴۰۰)

۱۳ با توجه به نمودار مقابل، کدام عدد عضو مجموعه B است؟

- ۱ | ۱۱
۲ | -۱
۳ | ۵
۴ | -۲

به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

(هماهنگ گلستان - ۱۴۰۲)

۱۴ عبارتی بنویسید که نشان دهنده مجموعه تهی باشد.

۱۵ اگر حروف کلمه «ریاضیات» را در یک مجموعه بنویسیم، این مجموعه چند عضو دارد؟ چرا؟

۱۶ در هر مورد در صورتی که عبارت داده شده مجموعه‌ای را مشخص می‌کند، آن را بنویسید و در غیر این صورت علت را توضیح دهید.

- الف) سه شهر پر جمعیت ایران
ب) اعداد اول بین ۵۰ و ۷۰
ج) اعداد زوج پنج رقمی
د) پنج اسم دخترانه

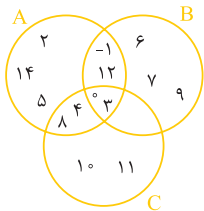
۱۷ مجموعه‌های زیر را با اعضا نمایش دهید.

- الف) حروف الفبای فارسی که سه نقطه دارند
ب) تمام شمارنده‌های طبیعی ۲۴
ج) اعداد سه رقمی‌ای که مجموع ارقامشان ۵ است
د) اعداد فرد بین ۲۲ و ۳۷
ه) اعداد مربع کامل دو رقمی
و) مضارب زوج عدد ۷ که بین ۱۰ و ۶۰ قرار دارند

۱۸ هر مجموعه را با یک عبارت کلامی توصیف کنید.

- الف) $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$
ب) $B = \{\}$
ج) $C = \{-2, -3, -5, -7\}$
د) $D = \{-3, -2, -1, 0\}$
ه) $E = \{1, 3, 5, 15\}$
و) $F = \{8, 27, 64, 125\}$

۱۹ با توجه به نمودار ون مقابل:



الف) مجموعه‌های A، B، C را با نوشتن اعضا نمایش دهید.

ب) کدام اعضا هم در مجموعه A و هم در مجموعه B قرار دارند؟

ج) کدام اعضا تنها در مجموعه A قرار دارند؟

۲۰ با توجه به مجموعه داده شده درستی یا نادرستی هر عبارت را تعیین کنید.

- $P = \{\{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$
الف) $\emptyset \in P$
ب) $\{\emptyset\} \notin P$
ج) $\{\{0\}\} \in P$
د) $\{\{\{\{\{\}\}\}\}\} \in A$

۲۱ کدام موارد از عبارت‌های زیر، مجموعه‌ای تهی را توصیف می‌کنند؟

- الف) مجموعه اعداد مربع کامل فرد
ب) مجموعه اعداد طبیعی بین -۶ و ۱
ج) مجموعه اعداد گویای بین $\frac{1}{1000}$ و $\frac{1}{1001}$
د) مجموعه اعداد اول بین ۵۵ و ۵۹

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

• دو مجموعه برابر: اگر A و B دو مجموعه باشند، به طوری که هر عضوی از A، عضوی از B باشد و برعکس، در این صورت، دو مجموعه A و B برابرند و

می‌نویسیم $A = B$. اگر عضوی از A در B نباشد یا برعکس، آنگاه A و B برابر نیستند و می‌نویسیم $A \neq B$.

مثلاً دو مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 1, 4\}$ برابر نیستند؛ زیرا $3 \in A$ ولی $3 \notin B$ یا به طور مشابه $4 \in B$ ولی $4 \notin A$. پس می‌نویسیم $A \neq B$ ؛ اما دو

مجموعه $C = \{1, 4, 7\}$ و $D = \{7, 1, 4\}$ برابرند؛ زیرا هر عضوی از مجموعه C، در D هم هست و برعکس. پس می‌نویسیم $C = D$.

مثال در جاهای خالی، علامت $=$ یا \neq قرار دهید.

الف) $\{2, 3, 6, 7\} \square \{2, 3, 6\}$ ب) $\{5\} \square \emptyset$ ج) $\{\sqrt{4}, (-1)^2, 1\} \square \{2, 1\}$

الف) $7 \notin \{2, 3, 6\} \Rightarrow \square$ ب) $0 \notin \emptyset \Rightarrow \square$ ج) $\{\sqrt{4}, (-1)^2, 1\} = \{2, 1, 1\} \Rightarrow \square$ د) $\{2, 1\} = \{1, 2\} \Rightarrow \square$

تکراری

نکته اگر تعداد عضوهای دو مجموعه A و B نابرابر باشد، آنگاه حتماً $A \neq B$ است. مثلاً:

$$\left. \begin{array}{l} \{\emptyset\} \Rightarrow \text{مجموعه‌ای یک عضوی است.} \\ \{\} \Rightarrow \text{مجموعه‌ای صفر عضوی است.} \end{array} \right\} \Rightarrow \{\emptyset\} \neq \{\}$$

مثال در هر مورد، می‌دانیم دو مجموعه مساوی‌اند. مقادیر x و y را بیابید. ($x \neq y$)

الف $\{3, x, 2\} = \{3, y\}$

ب $\{x + y, 1\} = \{y\}$

پاسخ $2 \in \{3, x, 2\} \Rightarrow 2 \in \{3, y\} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \underbrace{\{3, x, 2\}}_{\text{عضوی ۳}} = \underbrace{\{3, 2\}}_{\text{عضوی ۲}}$

برای اینکه مجموعه ۳ عضوی، تبدیل به یک مجموعه ۲ عضوی شود، باید عضوی تکراری داشته باشد، پس:

$$x = 2 \Rightarrow \{3, 2, \cancel{2}\} = \{3, 2\} \quad \text{یا} \quad x = 3 \Rightarrow \{\cancel{3}, 3, 2\} = \{3, 2\}$$

تکراری تکراری

بنابراین برای x ، دو مقدار به دست می‌آید. اما چون طبق فرض سؤال $x \neq y$ و $y = 2$ است، فقط $x = 3$ قابل قبول است. در نتیجه: $x = 3, y = 2$

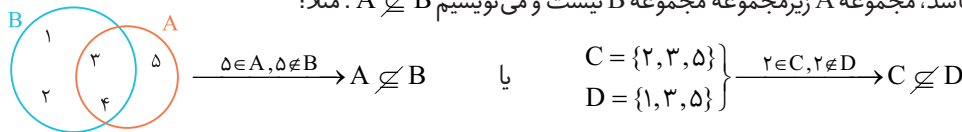
ب $1 \in \{x + y, 1\} \Rightarrow 1 \in \{y\} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \underbrace{\{x + 1, 1\}}_{\text{عضوی ۲}} = \underbrace{\{1\}}_{\text{عضوی ۱}}$

برای اینکه مجموعه ۲ عضوی، تبدیل به یک مجموعه ۱ عضوی شود، باید عضوی تکراری داشته باشد، پس: $x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$ بنابراین $x = 0$ و $y = 1$ است.

● **زیرمجموعه:** دو مجموعه A و B را در نظر بگیرید. اگر عضوهای مجموعه A ، همگی در مجموعه B باشند (یعنی هر عضو A ، عضو B باشد)، در این صورت مجموعه A زیرمجموعه مجموعه B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$. مثلاً:



اگر عضوی در مجموعه A باشد اما در B نباشد، مجموعه A زیرمجموعه مجموعه B نیست و می‌نویسیم $A \not\subseteq B$. مثلاً:

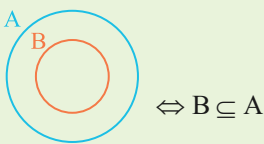


نکته اگر A یک مجموعه دلخواه باشد:

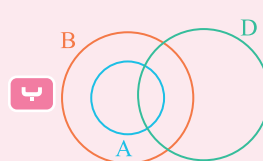
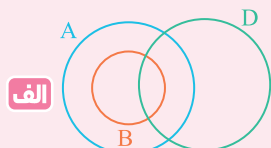
الف $A \subseteq A$ (هر مجموعه، زیرمجموعه خودش است.)

ب $\emptyset \subseteq A$ (تهی، زیرمجموعه هر مجموعه دلخواهی است.)

پ اگر B زیرمجموعه A باشد، آن را با نمودار ون به صورت مقابل نشان می‌دهیم:



مثال در کدام شکل، $A \subseteq B$ و $A \not\subseteq D$ برقرار است؟



پاسخ در شکل (ب).

$B \subseteq A, B \not\subseteq D, A \not\subseteq D$

دقت کنید که در شکل (الف) داریم:

دقت کنید که ابتدا باید از شرط (سمت راست «|») شروع کنیم و مقادیر قابل قبول را برای n پیدا کنیم، سپس با جای‌گذاری آن مقادیر در سمت چپ «|»، اعضای مجموعه را به دست آوریم. مثلاً:

$$A = \left\{ \frac{2n+1}{3} \mid n \in \mathbb{W}, n < 5 \right\}$$

$n = 0, 1, 2, 3, 4 \Rightarrow$ شرط

حال مقادیر n به دست آمده از شرط را در سمت چپ «|»، جای‌گذاری می‌کنیم تا اعضای مجموعه A به دست آیند:

$$A = \left\{ \frac{2(0)+1}{3}, \frac{2(1)+1}{3}, \frac{2(2)+1}{3}, \frac{2(3)+1}{3}, \frac{2(4)+1}{3} \right\} \Rightarrow A = \left\{ \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3 \right\}$$

مثال مجموعه $D = \{x^2 - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 < 7\}$ را با عضوهایش نمایش دهید.

$$D = \{x^2 - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 < 7\} \Rightarrow D = \{(-2)^2 - 1, (-1)^2 - 1, (0)^2 - 1, (1)^2 - 1, (2)^2 - 1\}$$

$x = -2, -1, 0, 1, 2 \Rightarrow$ شرط

$$\Rightarrow D = \{3, 0, -1, \cancel{4}, \cancel{3}\} \Rightarrow D = \{3, 0, -1\}$$

تکراری تکراری

پاسخ

نکته الف مجموعه اعداد گویا را با نمادهای ریاضی به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

دقت کنید که \mathbb{Q} را با نمادهای ریاضی، به صورت‌های دیگر نیز می‌توان نوشت، مانند:

ب مجموعه عددهای گویا را نمی‌توان با نوشتن اعضا نمایش داد؛ چون اولین عدد گویای قبل یا بعد از هر عدد گویا را نمی‌توان مشخص کرد.

پرسش‌های درس دوم



درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

(هماهنگ اردیبه‌ل - ۱۴۰۲)

۲۲ هر مجموعه، زیرمجموعه خودش است.

۲۳ هر مجموعه، حداقل دو زیرمجموعه دارد؛ یکی خودش و دیگری \emptyset .

۲۴ اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ باشد آنگاه $A \subseteq C$ است.

(هماهنگ البرز - ۱۴۰۲)

۲۵ مجموعه‌ای که ۳ عضو داشته باشد ۹ زیرمجموعه دارد.

(هماهنگ بوشهر - ۱۴۰۲)

۲۶ مجموعه «شمارنده‌های عدد ۸» دارای ۴ زیرمجموعه است.

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

(هماهنگ آذربایجان شرقی - ۱۴۰۱)

۲۷ یک مجموعه سه عضوی زیرمجموعه دارد.

۲۸ اگر تمام عضوهای مجموعه در مجموعه باشند، می‌گوییم $N \subseteq M$.

۲۹ مجموعه $\{x \in \mathbb{N} \mid -3 < x \leq 2\}$ ، دارای زیرمجموعه است.

۳۰ مجموعه $\{a, b, 0, \emptyset\}$ دارای زیرمجموعه دو عضوی است.

گزینه درست را مشخص کنید.

(هماهنگ خراسان جنوبی - ۱۴۰۱)

۳۱ مجموعه $\{a, b\}$ دارای چند زیرمجموعه است؟

۴

۳

۲

۱

(هماهنگ اردبیل-۱۴۰۲)

۳۲ اگر دو مجموعه $A = \{2, x-1\}$ و $B = \{4y, 3\}$ مساوی باشند مقدار x برابر است با:

- ۱ $x = 2$ ۲ $x = 3$ ۳ $x = 4$ ۴ $x = 5$

۳۳ نمایش عددی مجموعه $A = \{x^2 - 2x \mid x \in \mathbb{W}, x < 4\}$ کدام است؟

- ۱ $\{0, -1, 3\}$ ۲ $\{0, -1, 3, 8\}$ ۳ $\{0, 1, 3, 8\}$ ۴ $\{0, 1, 3\}$

۳۴ نمایش مجموعه $F = \{-4, -9, -16, -25\}$ با نمادهای ریاضی کدام است؟

- ۱ $\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}, -5 \leq n \leq -2\}$ ۲ $\{(-n)^2 \mid n \in \mathbb{Z}, 2 \leq n \leq 5\}$
 ۳ $\{-n \mid n \in \mathbb{N}, 4 \leq n \leq 25\}$ ۴ $\{-n^2 \mid n \in \mathbb{N}, 1 < n < 6\}$

۳۵ مجموعه $A = \{x^2 - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 2\}$ به ترتیب چند عضو و چند زیرمجموعه دارد؟

- ۱ $64, 6$ ۲ $64, 4$ ۳ $16, 6$ ۴ $16, 4$

به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

۳۶ اگر مجموعه‌های $A = \{\frac{\sqrt{25}}{2}, 9, -\frac{3}{5}, y\}$ و $B = \{3^2, -\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}, x, 1\}$ با هم برابر باشند، مقادیرهای x و y را به دست آورید.

۳۷ در هر مورد، مجموعه‌ها با هم برابرند. آن‌ها را با عددهای مناسب کامل کنید.

- الف $\{-7, 11, \dots, -\sqrt{25}\} = \{-5, 11, \dots, 2\}$ (هماهنگ خوزستان-۱۴۰۲)
 ب $\{-\sqrt{25}, -\frac{24}{3}\} = \{-8, \dots\}$ (هماهنگ همدان-۱۴۰۲)
 پ $\{-0/5, \dots, -0/4, \frac{3}{5}\} = \{-\sqrt{0/16}, -\frac{1}{4}, \dots, 7\}$ (هماهنگ کرمان-۱۴۰۱)
 ت $\{\sqrt{25}, -\frac{1}{4}, \dots, -4\} = \{5, \dots, -0/25, 6\}$ (هماهنگ قم-۱۴۰۱)

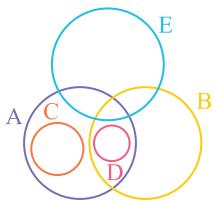
۳۸ مجموعه‌های R و P با هم برابرند؛ مقادیر a و b را به دست آورید.

$$R = \{-5^\circ, 3a-1, \frac{\sqrt{169}}{4}, 2^3, 2\frac{1}{5}\}, \quad P = \{\sqrt{\frac{121}{25}}, 3b, 2, -1, 3\frac{1}{4}\}$$

(هماهنگ اصفهان-۱۴۰۲)

۳۹ اگر $A = \{a, b, c\}$ و B زیرمجموعه‌ای از A باشد، حداقل تعداد اعضای B چندتا است؟

۴۰ با توجه به نمودار و مقابل، درستی یا نادرستی هریک از روابط زیر را تعیین کنید.



- الف $D \subseteq B$ ب $C = D$
 پ $C \not\subseteq B$ ت $B \not\subseteq C$
 ث $C \not\subseteq A$ ج $E \subseteq A$
 چ $A \subseteq \emptyset$ ح $\emptyset \subseteq A$

۴۱ اگر A ، مجموعه اعداد طبیعی زوج یک‌رقمی، B مجموعه اعداد اول یک‌رقمی، C مجموعه اعداد طبیعی بین ۱ و ۴ و در نهایت D مجموعه

شمارنده‌های اول ۲۱ باشند، درستی یا نادرستی هریک از روابط زیر را بررسی کنید.

- الف $D \subseteq A$ ب $C \subseteq B$ پ $A \neq B$ ت $D \not\subseteq B$

۴۲ همه زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

- الف $A = \{-1, 0, 2\}$ ب $B = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ پ مجموعه اعداد اول بین ۱۵ و ۳۰

۴۳ هریک از مجموعه‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

- الف $A = \{-7, -4, -1, \dots, 38\}$ ب $B = \{\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}\}$
 پ $C = \{\frac{5}{2}, \frac{9}{4}, \frac{13}{6}, \frac{17}{8}, \dots, \frac{45}{22}\}$ ت $D = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
 ث $E = \{1, 10, 100, 1000, \dots, 100000\}$ ج $F = \{2, 4, 6, 8, \dots, 50\}$

(هماهنگ لرستان-۱۴۰۲)

۴۴ مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

الف) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\}$

(همه‌نگ قم - ۱۴۰۱)

ب) $B = \{2x - 3 \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x < 2\}$

(همه‌نگ آذربایجان شرقی - ۱۴۰۲)

پ) $C = \{-2x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x < 1\}$

(همه‌نگ قزوین - ۱۴۰۱)

ت) $D = \{4x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x \leq 3\}$

(همه‌نگ سمنان - ۱۴۰۲)

ث) $E = \{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{N}, 5 < x < 8\}$

(همه‌نگ مازندران - ۱۴۰۰)

۴۵ هریک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

الف) $A = \{5x - 3 \mid x \in \mathbb{W}, x < 4\}$

ب) $B = \{x^3 \mid x \in \mathbb{Z}, -4 \leq x < 3\}$

پ) $C = \left\{ \frac{x^2}{x+1} \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5 \right\}$

ت) $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 4x - 2 = -18\}$

۴۶ هریک از مجموعه‌های زیر را ابتدا به زبان ریاضی بنویسید و سپس در صورت امکان با اعضا نمایش دهید.

الف) مجموعه مضارب صحیح عدد ۷

ب) مجموعه اعداد حسابی بخش پذیر بر ۳

پ) مجموعه اعداد گویای مثبت

۴۷ با توجه به $A = \{0, 2, 5, 7\}$ ، مجموعه‌های زیر را با اعضایشان نمایش دهید.

الف) $B = \left\{ \frac{x}{3} + 2 \mid x \in A \right\}$

ب) $C = \left\{ \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} \mid x \in A \right\}$

۴۸ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

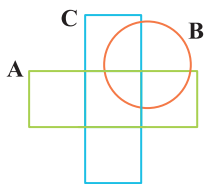
الف) هر عدد گویا یک عدد حسابی است.

الف) هر عدد صحیح یک عدد طبیعی است.

ب) هیچ عدد صحیحی، گویا نیست.

ب) برخی از اعداد گویا، طبیعی هستند.

۴۹ با توجه به مجموعه‌های داده شده نمودار ون مقابل را کامل کنید.



$A = \{8, 2, 1, 7, 6\}$

$B = \{1, 4, 2, 3\}$

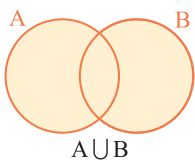
$C = \{1, 6, 9, 5, 3\}$

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها



● **اجتماع دو مجموعه:** اجتماع دو مجموعه A و B ، مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشند. اجتماع

دو مجموعه A و B را به صورت « $A \cup B$ » یا « $B \cup A$ » می‌نویسیم و با نمودار ون، به صورت زیر نشان می‌دهیم:



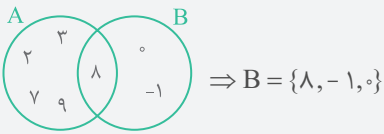
کل مجموعه‌های A و B رنگی می‌شوند. \Rightarrow

اگر دو مجموعه A و B را با عضوهایشان داشته باشیم، کافی است همهٔ عضوهای آن‌ها را در یک مجموعه بنویسیم و تکراری‌ها را حذف کنیم تا مجموعه $A \cup B$ به دست آید. مثلاً:

$A = \{2, -1, 0, 1, 3\}$, $B = \{0, 3, 4, 5, 7\}$

$$A \cup B = \underbrace{\{2, -1, 0, 1, 3\}}_A \cup \underbrace{\{0, 3, 4, 5, 7\}}_B = \{2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 7\}$$

مثال اگر $A = \{2, 3, 7, 8, 9\}$ و $A \cup B = \{2, 3, 0, -1, 7, 8, 9\}$ باشد، مجموعه B را مشخص کنید. (می دانیم از اعضای مجموعه A ، فقط 8 ، عضو B هم است.)



پاسخ از نمودار و ن، کمک می گیریم.

مثال اگر $A = \{x+1 | x \in \mathbb{N}, x < 3\}$ و $B = \{x-1 | x \in \mathbb{W}, 2 < x < 6\}$ باشد، مجموعه $A \cup B$ را با عضوهای مشخص کنید.

پاسخ ابتدا مجموعه های A و B را با عضوهایشان نمایش می دهیم:

$$A = \{x+1 | x \in \mathbb{N}, x < 3\} = \{1+1, 2+1\} \Rightarrow A = \{2, 3\}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{شرط } \Rightarrow x=1, 2}$

$$B = \{x-1 | x \in \mathbb{W}, 2 < x < 6\} = \{3-1, 4-1, 5-1\} \Rightarrow B = \{2, 3, 4\}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{شرط } \Rightarrow x=3, 4, 5}$

$$\Rightarrow A \cup B = \underbrace{\{2, 3\}}_A \cup \underbrace{\{2, 3, 4\}}_B = \{2, 3, 4\}$$

تکراری تکراری

نکته اجتماع دو مجموعه A و B را با نمادهای ریاضی به صورت مقابل نشان می دهیم:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

در واقع در مجموعه ها هرگاه حرف «یا» را دیدیم، باید از اجتماع استفاده کنیم.

مثال اگر $A = \{2x | x \in \mathbb{E}, x < 5\}$ و $B = \{-1, 0, 2, 3\}$ باشد، مجموعه ای را بنویسید که اعضای آن عضو A یا عضو B هستند.

پاسخ ابتدا مجموعه A را با عضوهایش نمایش می دهیم.

اعداد طبیعی زوج
↑

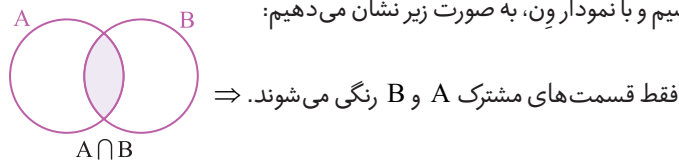
$$A = \{2x | x \in \mathbb{E}, x < 5\} \Rightarrow A = \{2(2), 2(4)\} \Rightarrow A = \{4, 8\}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{شرط } \Rightarrow x=2, 4}$

$$A \cup B = \underbrace{\{4, 8\}}_A \cup \underbrace{\{-1, 0, 2, 3\}}_B \Rightarrow A \cup B = \{4, 8, -1, 0, 2, 3\}$$

● **اشتراک دو مجموعه:** اشتراک مجموعه های A و B ، مجموعه ای است شامل همه اعضایی که هم در مجموعه A و هم در مجموعه B هستند.

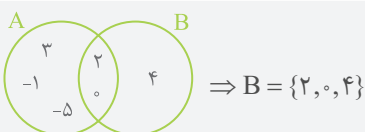
اشتراک دو مجموعه A و B را به صورت « $A \cap B$ » یا « $B \cap A$ » می نویسیم و با نمودار و ن، به صورت زیر نشان می دهیم:



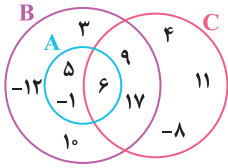
اگر دو مجموعه A و B را با عضوهایشان داشته باشیم، کافی است عضوهای مشترک آن ها را در یک مجموعه بنویسیم تا $A \cap B$ به دست آید. مثلاً:

$$A = \{2, 4, 3, -1, 0\}, B = \{4, 5, 3, 2, 6\} \Rightarrow A \cap B = \{2, 4, 3\}$$

مثال اگر $A = \{3, 2, -1, 0, -5\}$ و $A \cap B = \{2, 0\}$ و $4 \in B$ باشد، در صورتی که مجموعه B سه عضوی باشد، آن را با نمایش اعضا نشان دهید.



پاسخ از نمودار و ن کمک می گیریم:

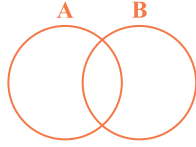


۷۴ با توجه به نمودار ون مقابل، مجموعه‌های خواسته شده را با اعضا مشخص کنید.

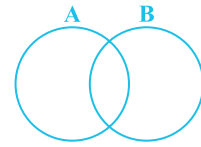
- الف) $B - C = ?$
- ب) $(A \cap B) \cap (C - B) = ?$
- پ) $(C \cap A) - (B - A) = ?$
- ت) $(B \cap C) - A = ?$

۷۵ با توجه به مجموعه‌های داده شده، در هر نمودار قسمت مورد نظر را مشخص کنید.

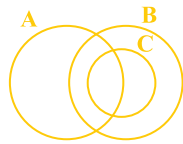
الف) $(A - B) \cup (B - A)$



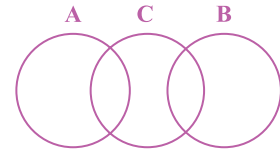
ب) $(A - B) \cup (A \cap B)$



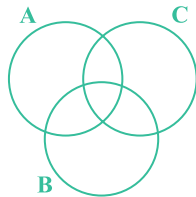
پ) $(B \cap A) - C$



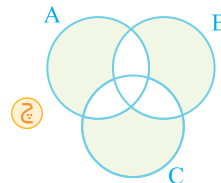
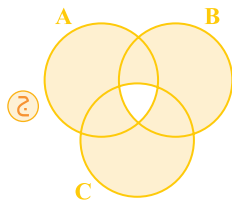
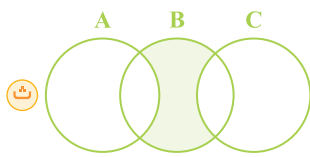
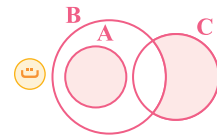
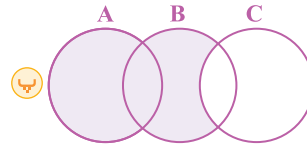
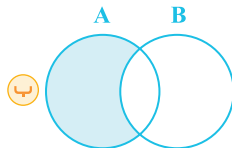
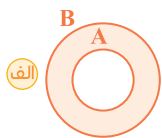
ت) $(A \cup B) - C$



ث) $(A \cup B) - (B \cap C)$



۷۶ با توجه به قسمت‌های رنگی در نمودارهای ون، مجموعه متناظر با هر نمودار را بنویسید.



۷۷ اگر $A = \{x^2 - 1 \mid x \in \mathbb{W}, x \leq 3\}$ ، $B = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, x < 5\}$ و $C = \{3x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x \leq 3\}$ باشد، مجموعه‌های A، B، و C را با اعضا نوشته و روی نمودار ون نمایش دهید، سپس مجموعه‌های زیر را با اعضا نمایش دهید.

- الف) $(A \cap B) \cup C = ?$
- ب) $(B - C) \cap A = ?$
- پ) $(A \cup C) - B = ?$
- ت) $(A - B) \cup (B - C) = ?$

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال



● **احتمال:** می‌دانیم احتمال هر پیشامد، از رابطه مقابل محاسبه می‌شود:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$$

حالا اگر مجموعه همه حالت‌های ممکن را با S نشان دهیم، آنگاه تعداد همه حالت‌های ممکن، برابر با $n(S)$ خواهد بود. همچنین اگر مجموعه حالت‌های مطلوب را با A نشان دهیم، تعداد حالت‌های مطلوب برابر با $n(A)$ خواهد بود. در نهایت اگر احتمال رخ دادن پیشامد A را با $P(A)$ نمایش دهیم،

رابطه بالا به زبان ریاضی، به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

این رابطه می‌گوید که در مسائل مربوط به احتمال، باید دو چیز را کاملاً مشخص کنیم؛ اول، مجموعه S که شامل تمام حالت‌های ممکن است؛ دوم، مجموعه A که شامل حالت‌های مطلوب است.

مثال در هر مورد احتمال خواسته شده را محاسبه کنید.

الف احتمال اینکه در پرتاب یک تاس، عددی کمتر از ۵ ظاهر شود.

ب احتمال اینکه در پرتاب دو سکه، حداقل یکی از سکه‌ها «رو» بیاید.

پ از کیسه‌ای شامل سه مهره سیاه و چهار مهره سفید، مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد.

ت از جعبه‌ای شامل ۲ مهره سیاه، ۳ مهره قرمز و ۴ مهره سبز، مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال اینکه مهره سبز نباشد.

الف پاسخ

$$\left. \begin{array}{l} \text{مجموعه کل حالت‌های ممکن در پرتاب تاس} \\ S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{مجموعه حالت‌های مطلوب} : A = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(A) = 4$$

ب برای نوشتن تمام حالت‌های ممکن، از نمودار درختی کمک می‌گیریم:

سکه اول سکه دوم

رو → (رو، رو)
پشت → (رو، پشت)
رو → (پشت، رو)
پشت → (پشت، پشت)

$$S = \{(رو، رو), (پشت، رو), (رو، پشت), (پشت، پشت)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

$$A = \{(رو، رو), (پشت، رو), (رو، پشت)\}$$

پ

$$S = \{\text{مهره سفید ۱}, \text{مهره سفید ۲}, \text{مهره سفید ۳}, \text{مهره سفید ۴}, \text{مهره سفید ۱}, \text{مهره سفید ۲}, \text{مهره سفید ۳}, \text{مهره سفید ۴}, \text{مهره سیاه ۱}, \text{مهره سیاه ۲}, \text{مهره سیاه ۳}, \text{مهره سیاه ۴}\}$$

$$A = \{\text{مهره سفید ۱}, \text{مهره سفید ۲}, \text{مهره سفید ۳}, \text{مهره سفید ۴}\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{7}$$

ت

$$S = \{\text{مهره سبز ۱}, \text{مهره سبز ۲}, \text{مهره سبز ۳}, \text{مهره سبز ۴}, \text{مهره سبز ۱}, \text{مهره سبز ۲}, \text{مهره سبز ۳}, \text{مهره سبز ۴}, \text{مهره قرمز ۱}, \text{مهره قرمز ۲}, \text{مهره قرمز ۳}, \text{مهره قرمز ۴}, \text{مهره سیاه ۱}, \text{مهره سیاه ۲}, \text{مهره سیاه ۳}, \text{مهره سیاه ۴}\}$$

$$A = \{\text{مهره قرمز ۱}, \text{مهره قرمز ۲}, \text{مهره قرمز ۳}, \text{مهره قرمز ۴}\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{9}$$

نکته گاهی اوقات نوشتن تمام اعضای S کمی طولانی و خسته‌کننده است. اما اگر تصور خوبی از تمام حالت‌های ممکن و حالت‌های مطلوب داشته باشید، می‌توانید تعداد اعضای S یعنی n(S) را به صورت زیر، راحت‌تر حساب کنید (بدون نوشتن عضوهای آن).

الف پرتاب دو تاس : $\frac{6}{\text{تاس دوم}} \times \frac{6}{\text{تاس اول}} \Rightarrow n(S) = 36$

ب پرتاب دو سکه : $\frac{2}{\text{سکه دوم}} \times \frac{2}{\text{سکه اول}} \Rightarrow n(S) = 4$

پ پرتاب یک سکه و یک تاس : $\frac{2}{\text{تاس}} \times \frac{6}{\text{سکه}} \Rightarrow n(S) = 12$

ت پرتاب سه سکه : $\frac{2}{\text{سکه سوم}} \times \frac{2}{\text{سکه دوم}} \times \frac{2}{\text{سکه اول}} \Rightarrow n(S) = 8$

مثال در پرتاب دو تاس، چقدر احتمال دارد که مجموع دو عدد رو شده کمتر از ۵ باشد؟

پاسخ

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

دقت کنید که منظور از (۲ ، ۱) این است که تاس اول عدد ۲ و تاس دوم عدد ۱ را نشان می‌دهند.

پرسش‌های درس چهارم



درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

۷۸ همواره احتمال رخ دادن یک پیشامد حتمی، یک و احتمال رخ دادن یک پیشامد غیرحتمی، صفر است.

۷۹ همواره برای پیشامد تصادفی A داریم $0 \leq P(A) \leq 1$.

(همهانگ ایلام-۱۴۰۲)

۸۰ تعداد کل حالات در پرتاب همزمان یک سکه و یک تاس ۸ حالت است.

۸۱ اگر یک چرخنده دارای سه ناحیه مساوی را دوبار بچرخانیم، تعداد کل حالت‌های ممکن، $3 \times 3 = 9$ است.

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

(همهانگ کرمان-۱۴۰۲)

۸۲ احتمال رو شدن عدد ۳ در پرتاب یک تاس، برابر است.

۸۳ احتمال آنکه حداقل ۳ فرزند خانواده‌ای چهار فرزندی، پسر باشد، است.

(همهانگ فارس-۱۴۰۲)

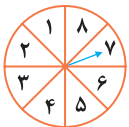
۸۴ در پرتاب دو سکه احتمال اینکه هر دو سکه «رو» بیاید، است.

۸۵ یک سکه را دوبار می‌اندازیم. احتمال اینکه یکی رو و یکی پشت بیاید، است.

۸۶ یک سکه را دوبار می‌اندازیم. احتمال اینکه اولی رو و دومی پشت بیاید، است.

گزینه درست را مشخص کنید.

۸۷ چرخنده مقابل را می‌چرخانیم. احتمال آنکه عقربه روی یک عدد اول قرار بگیرد چقدر است؟



(همهانگ بوشهر-۱۴۰۲)

۱ $\frac{5}{8}$ ۲ $\frac{3}{4}$ ۳ $\frac{3}{8}$ ۴ $\frac{1}{2}$

۸۸ اگر تاسی را بیندازیم احتمال اینکه عدد روشده مرکب باشد چقدر است؟

۱ $\frac{1}{6}$ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{2}{3}$

۸۹ یک تاس و یک سکه را با هم می‌اندازیم. احتمال اینکه تاس عددی کمتر از ۳ و سکه «رو» بیاید چقدر است؟

۱ $\frac{1}{3}$ ۲ $\frac{1}{4}$ ۳ $\frac{1}{6}$ ۴ $\frac{1}{12}$

(همهانگ گیلان-۱۴۰۲)

۹۰ اگر تاس سالمی را دو بار بیندازیم، چقدر احتمال دارد هر دو بار عدد اول رو شود؟

۱ $\frac{1}{6}$ ۲ $\frac{1}{9}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{1}{4}$

۹۱ دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال اینکه مجموع عددهای روشده ۱۰ باشد، چقدر است؟

۱ $\frac{1}{6}$ ۲ $\frac{1}{9}$ ۳ $\frac{1}{12}$ ۴ $\frac{1}{18}$

(همهانگ قم-۱۴۰۲)

۹۲ در خانواده‌ای با سه فرزند، چقدر احتمال دارد که هر سه فرزند، پسر باشد؟

۱ $\frac{3}{8}$ ۲ $\frac{1}{8}$ ۳ $\frac{2}{8}$ ۴ $\frac{7}{8}$

به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

(همهانگ اردبیل-۱۴۰۲)

۹۳ خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است. احتمال اینکه فرزند دوم دختر باشد چقدر است؟

(همهانگ قزوین-۱۴۰۱)

۹۴ سه سکه را همزمان پرتاب می‌کنیم، احتمال اینکه هر سه، مثل هم ظاهر شوند چقدر است؟



| ردیف | آزمون فصل ۱ | مجموعه‌ها | مدت زمان: ۷۵ دقیقه | بارم |
|------|--|--|--|------|
| ۱۰۵ | درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. | <p>الف) عبارت «عددهای طبیعی بین ۵ و ۶» یک مجموعه تهی است. <input type="radio"/></p> <p>ب) مجموعه $\{\emptyset\}$ هیچ عضوی ندارد. <input type="radio"/></p> <p>پ) اگر \mathbb{Z} و \mathbb{Q} مجموعه اعداد صحیح و گویا باشند، آنگاه $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}$. <input type="radio"/></p> <p>ت) اگر $n(A) = n(B)$، دو مجموعه A و B برابرند. <input type="radio"/></p> | <p>(هماهنگ خوزستان-۱۴۰۲)</p> <p>(هماهنگ سمنان-۱۴۰۲)</p> <p>(هماهنگ مازندران-۱۴۰۱)</p> | ۱ |
| ۱۰۶ | جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. | <p>الف) مجموعه زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.</p> <p>ب) اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه $A \cap B$ برابر با مجموعه است.</p> <p>پ) اجتماع دو مجموعه $(A - B)$ و $(A \cap B)$ با مجموعه مساوی است.</p> <p>ت) در پرتاب یک تاس احتمال اینکه عدد رو شده زوج باشد، است.</p> | <p>(هماهنگ کردستان-۱۴۰۱)</p> <p>(هماهنگ سمنان-۱۴۰۱)</p> <p>(هماهنگ آذربایجان شرقی-۱۴۰۰)</p> <p>(هماهنگ خراسان رضوی-۱۴۰۲)</p> | ۱ |
| ۱۰۷ | گزینه درست را مشخص کنید. | <p>الف) حاصل عبارت $\mathbb{N} - \mathbb{Z}$ برابر است با:</p> <p>۱) \mathbb{Z} ۲) \mathbb{N} ۳) \emptyset ۴) $\{0\}$</p> <p>ب) اگر دو مجموعه $\{3, \sqrt{25}\}$ و $\{x, 5\}$ با هم مساوی باشند، مقدار x کدام است؟</p> <p>۱) ۵ ۲) -۳ ۳) -۵ ۴) ۳</p> <p>پ) یک تاس و یک سکه را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد رو شده عدد اول و سکه پشت بیاید، چقدر است؟</p> <p>۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{5}{12}$</p> <p>ت) در کیسه‌ای ۵ مهره سفید، ۸ مهره قرمز و ۷ مهره آبی وجود دارد. اگر مهره‌ای را به طور تصادفی از این کیسه خارج کنیم احتمال آنکه قرمز نباشد، برابر است با:</p> <p>۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{1}{5}$</p> | <p>(هماهنگ کرمان-۱۴۰۱)</p> <p>(هماهنگ خوزستان-۱۴۰۱)</p> <p>(هماهنگ اصفهان-۱۴۰۱)</p> <p>(هماهنگ آذربایجان غربی-۱۴۰۱)</p> | ۱ |
| ۱۰۸ | به پرسش‌های زیر پاسخ دهید. | <p>با توجه به مجموعه $A = \{2, 3, 4\}$ در مربع نماد مناسب بگذارید. ($\in, \notin, \subseteq, \subset$)</p> <p>الف) $2 \in A$ ب) $5 \in A$</p> | <p>(هماهنگ بوشهر-۱۴۰۱)</p> | ۰/۵ |
| ۱۰۹ | هریک از مجموعه‌های زیر را با نمایش اعضا نشان دهید. | <p>الف) $A = \{2^x \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\}$ (هماهنگ چهارمحال و بختیاری-۱۴۰۲)</p> <p>ب) $B = \{3x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x < 3\}$ (هماهنگ خراسان شمالی-۱۴۰۲)</p> | | ۱ |
| ۱۱۰ | در مجموعه‌های زیر جاهای خالی را طوری کامل کنید که دو مجموعه با هم برابر باشند. | <p>الف) $\{2, \dots, \sqrt{9}, 5\} = \{2, 3, \dots, 7\}$ (هماهنگ هرمزگان-۱۴۰۱)</p> <p>ب) $\{-\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{4}{9}}, \dots, 7\} = \{\frac{2}{3}, \dots, -\frac{0}{5}, 5^2\}$ (هماهنگ یزد-۱۴۰۱)</p> | | ۱ |

فصل پنجم

عبارت‌های جبری

۵

درس اول: عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد



● **یک جمله‌ای:** هر عبارت جبری را که به صورت حاصل ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر باشد، «یک جمله‌ای» می‌نامیم. مثلاً هر کدام از عبارت‌های مقابل، یک جمله‌ای‌اند:

$$7x^2z, \sqrt{2}y^3, 5, -\frac{1}{\pi}xy^2z^3$$

نکته الف

در یک جمله‌ای‌ها به عددی که در متغیرها ضرب می‌شود، ضریب عددی گفته می‌شود. مثلاً:

$$\underbrace{7}_{\text{ضریب عددی}} x^2 z, \underbrace{-\frac{5}{3}}_{\text{ضریب عددی}} y^2 x, \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{ضریب عددی}} x, \underbrace{-\sqrt{2}}_{\text{ضریب عددی}} x$$

ب هر یک جمله‌ای، فقط یک ضریب عددی دارد. یعنی، ضریب عددی یک جمله‌ای نمی‌تواند دو یا چند عدد متفاوت باشد.

پ یک جمله‌ای می‌تواند هیچ متغیری نداشته باشد و فقط ضریب عددی داشته باشد؛ زیرا ممکن است تمام متغیرهای آن صفر باشد. بنابراین تمام اعداد ثابت، یک جمله‌ای محسوب می‌شوند.

ت اگر در یک جمله‌ای، هیچ عددی در کنار متغیرها وجود نداشته باشد، ضریب عددی آن، یک است؛ مثلاً:

$$xy^2 \rightarrow \underbrace{1}_{\text{ضریب عددی}} xy^2$$

توجه کنید در حالتی که فقط یک علامت منفی در کنار متغیرها وجود داشته باشد، ضریب عددی، -۱ است. مثلاً:

$$-x^2yz^5 \rightarrow \underbrace{-1}_{\text{ضریب عددی}} x^2yz^5$$

بر اساس تعریف یک جمله‌ای، هیچ‌کدام از عبارت‌های زیر یک جمله‌ای نیستند:

الف 4^x → زیرا 4^x در یک جمله‌ای‌ها، متغیر نمی‌تواند در توان باشد.

ب $2x + y^2$ → زیرا «+» استفاده شده است. بین متغیرها از علامت «+» استفاده شده است.

پ $|x|$ → زیرا $|x| = \pm x$ و در عبارت $\pm x$ ضریب عددی مشخص نیست (ممکن است +۱ یا -۱ باشد).

ت \sqrt{y} → زیرا \sqrt{y} در یک جمله‌ای‌ها، متغیر نمی‌تواند زیر رادیکال باشد.

ث $\frac{1}{x}$ → زیرا $\frac{1}{x} = x^{-1}$ و توان x ، عددی منفی است.

مثال عبارت‌هایی را که یک جمله‌ای هستند با علامت «✓» و عبارت‌هایی را که یک جمله‌ای نیستند، با علامت «✗» مشخص کنید.

الف $5x^2 - 6x$

ب $\sqrt{x^2}$

پ $\sqrt{7xy}$

الف ✗

ب $\sqrt{x^2} = |x|$ ✗

پ ✓

پاسخ

● **یک جمله‌ای‌های متشابه و غیرمتشابه:** هرگاه قسمت‌های حرفی تعدادی یک جمله‌ای، دقیقاً مثل هم باشد، به آن‌ها یک جمله‌ای‌های «متشابه» و در غیر این صورت به آن‌ها یک جمله‌ای‌های «غیرمتشابه» می‌گویند. مثلاً:

$$\underbrace{7xy}_{\text{قسمت حرفی}}, \underbrace{-3yx}_{\text{قسمت حرفی}} \xrightarrow{xy=yx} \text{متشابهند.} \quad \underbrace{\sqrt{3}xy^2z}_{\text{قسمت حرفی}}, \underbrace{-\frac{1}{2}zxy^2}_{\text{قسمت حرفی}} \xrightarrow{xy^2z=zy^2x} \text{متشابهند.}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}x^2y}_{\text{قسمت حرفی}}, \underbrace{\sqrt{3}xy^2}_{\text{قسمت حرفی}} \xrightarrow{x^2y \neq xy^2} \text{غیرمتشابهند.}$$

● **جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها:** فقط یک جمله‌ای‌های متشابه را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد. برای این کار، از قسمت حرفی آن‌ها فاکتور می‌گیریم. مثلاً:

$$\underbrace{4x^2y - 12x^2y}_{\text{متشابه‌اند}} = (4-12)x^2y = -8x^2y$$

دقت کنید که اگر یک جمله‌ای‌های غیرمتشابه داشته باشیم، نمی‌توانیم آن‌ها را با هم جمع یا تفریق کنیم. مثلاً:

$$4x^2 - 2x \xrightarrow{\text{متشابه نیستند}} \text{تفریق نمی‌شوند.}$$

● **ضرب یک جمله‌ای‌ها:** همواره یک جمله‌ای‌ها را می‌توان در هم ضرب کرد (چه متشابه باشند، چه غیرمتشابه). برای این کار، کافی است ضریب‌های عددی را در هم و متغیرهای مثل هم را با توجه به قانون «ضرب اعداد توان دار با پایه‌های مساوی» در هم ضرب کرد. حاصل ضرب یک جمله‌ای‌ها، مجدداً یک جمله‌ای می‌شود. مثلاً:

$$(4x^2y) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}xy^3z\right) = 4 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) (x^2 \cdot x)(y \cdot y^3)z = \frac{-4}{\sqrt{3}}x^3y^4z$$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف $(4x^2 - y)(2y - x^2) = ?$

ب $(3x^2 + y)(3x^2 + 2y) = ?$

الف $(4x^2 - y)(2y - x^2) = 8x^2y - 4x^4 - 2y^2 + yx^2 = 9x^2y - 4x^4 - 2y^2$

ب $(3x^2 + y)(3x^2 + 2y) = 9x^4 + 6x^2y + 3yx^2 + 2y^2 = 9x^4 + 9x^2y + 2y^2$

● **چند جمله‌ای‌ها:** از جمع یا تفریق یک جمله‌ای‌های غیرمتشابه، چند جمله‌ای به دست می‌آید. مثلاً:

الف سه جمله‌ای \Rightarrow سه تا یک جمله‌ای غیرمتشابه داریم. $4x^2 - y^2 + 3 \Rightarrow$

ب دو جمله‌ای \Rightarrow دو تا یک جمله‌ای غیرمتشابه داریم. $5xy^2 - 3x - 6xy^2 \Rightarrow -xy^2 - 3x \Rightarrow$

● **درجه یک جمله‌ای‌ها:** درجه یک جمله‌ای نسبت به یک متغیر، توان آن متغیر در ساده‌شده آن یک جمله‌ای است. مثلاً:

$$8x^2yz \Rightarrow \begin{cases} 2 = \text{درجه نسبت به } x \\ 1 = \text{درجه نسبت به } y \\ 1 = \text{درجه نسبت به } z \\ \text{دقت کنید که در } 8x^2yz, \text{ متغیر } z \text{ نداریم} \Rightarrow \text{درجه نسبت به } z = 0 \end{cases}$$

همچنین درجه یک جمله‌ای نسبت به چند متغیر، برابر با مجموع توان‌های آن متغیرها در ساده‌شده آن یک جمله‌ای است. مثلاً:

$$8x^2yz \Rightarrow \begin{cases} 3 = 2 + 1 = \text{درجه نسبت به } x \text{ و } y \\ 2 = 1 + 1 = \text{درجه نسبت به } y \text{ و } z \\ 4 = 2 + 1 + 1 = \text{درجه نسبت به همه متغیرها} \end{cases}$$

درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها



● **اتحاد مربع سه جمله‌ای:** اتحاد مربع سه جمله‌ای به صورت زیر است:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

اثبات جبری

$$\text{طرف چپ} = (a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2$$

روش اول:

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = \text{طرف راست}$$

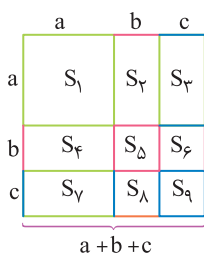
روش دوم:

$$\text{طرف چپ} = (a + b + c)^2 = ((a + b) + c)^2 = (A + c)^2 = A^2 + 2Ac + c^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(ac + bc) + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = \text{طرف راست}$$

اثبات هندسی: یک مربع به ضلع $a + b + c$ رسم می‌کنیم. مساحت این مربع برابر با $(a + b + c)^2$ است. حال، همین

مساحت را از روی شکل به طریق دیگری حساب می‌کنیم:



$$\begin{aligned} \text{مساحت مربع} &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9 \\ &= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \end{aligned}$$

ون در هر دو حالت، مساحت یک مربع را حساب کردیم، داریم:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

مثال حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحاد مربع سه جمله‌ای به دست آورید.

الف $(2x - 1 - y)^2 = ?$

ب $(x - y + 3)^2 = ?$

پاسخ

الف $(2x - 1 - y)^2 = (2x + (-1) + (-y))^2 = (2x)^2 + (-1)^2 + (-y)^2 + 2(2x)(-1) + 2(2x)(-y) + 2(-1)(-y)$
 $= 4x^2 + 1 + y^2 - 4x - 4xy + 2y$

ب $(x - y + 3)^2 = (x + (-y) + 3)^2 = x^2 + (-y)^2 + 3^2 + 2(x)(-y) + 2(x)(3) + 2(-y)(3) = x^2 + y^2 + 9 - 2xy + 6x - 6y$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

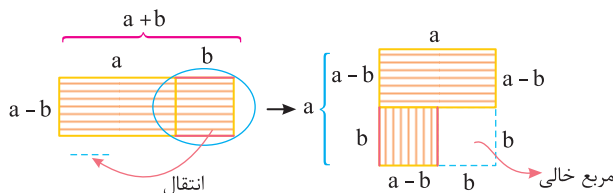
● **اتحاد مزدوج:** اتحاد مزدوج به صورت مقابل است:

اثبات جبری:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ba} - b^2 = a^2 - b^2$$

اثبات هندسی: مستطیلی به طول $a + b$ و عرض $a - b$ در نظر می‌گیریم. مساحت این مستطیل $(a - b)(a + b)$ است. حالا مساحت این مستطیل را

به گونه‌ای دیگر حساب می‌کنیم:



$$\Rightarrow a^2 - b^2 = \text{مساحت مربع خالی} - \text{مساحت مربع بزرگ} = \text{مساحت مستطیل اولیه}$$

چون در هر دو حالت مساحت یک مستطیل را حساب کردیم، داریم:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج را هم می‌توان به صورت کلامی به خاطر سپرد:

(دومی به توان ۲) - (اولی به توان ۲) = (اولی به علاوه دومی) × (اولی منهای دومی)

۴۸۳ حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

- الف) $۱۰۲ \times ۹۸ = ?$ ب) $۱۰۰۵ \times ۱۰۰۱ = ?$
 پ) $۳۱۲ \times ۲۸۸ = ?$ (هماهنگ خراسان جنوبی-۱۴۰۲) ت) $۵۰۲ \times ۴۹۵ = ?$

۴۸۴ چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

- الف) $x^2 + 8x + 15 = ?$ (هماهنگ البرز-۱۴۰۱) ب) $y^2 + 13y + 36 = ?$ (هماهنگ اصفهان-۱۴۰۱)
 پ) $x^2 - 10x - 24 = ?$ (هماهنگ بوشهر-۱۴۰۲) ت) $x^2 + 7x - 18 = ?$ (هماهنگ اردبیل-۱۴۰۰)
 ث) $a^2 - 8a + 12 = ?$ (هماهنگ اردبیل-۱۴۰۱) ج) $x^2 + 8x + 15 = ?$ (هماهنگ خراسان رضوی-۱۴۰۲)
 ح) $x^2 - 25 = ?$ (هماهنگ ایلام-۱۴۰۱) ز) $9x^2 - 4y^2 = ?$ (هماهنگ کرمانشاه-۱۴۰۱)
 خ) $25x^2 - 49 = ?$ (هماهنگ یزد-۱۴۰۱) د) $(x+y)^2 - 25 = ?$ (هماهنگ مازندران-۱۴۰۰)
 ذ) $2x^3 - 18x = ?$ (هماهنگ کرمان-۱۴۰۲) ر) $x^2 - 25x = ?$ (هماهنگ کرمان-۱۴۰۱)
 ز) $x^3 - 16x^2 + 64x = ?$ (هماهنگ کرمانشاه-۱۴۰۱) ج) $2ab^2 - 6a^2b = ?$ (هماهنگ هرمزگان-۱۴۰۲)

۴۸۵ چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

- الف) $36a^3 - 49a = ?$ ب) $9 - (2a - 4)^2 = ?$ پ) $1\frac{11}{25}x^2 - y^2 = ?$
 ت) $(5x - 2)^2 - (2x + 3)^2 = ?$ ث) $a^2b^2 - 3ab + 2 = ?$ ح) $3x^3 + x^2 - 6x - 2 = ?$

درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله


نامعادله: اگر در یک عبارت جبری یکی از علامت‌های $>$ ، $<$ ، \geq یا \leq وجود داشته باشد، به آن نابرابری (نامعادله) می‌گوییم. مثلاً:

$$4x \leq 2y + 1 \quad \text{یا} \quad x + 1 \neq 4 \quad \text{یا} \quad x + 7 > y$$

گاهی اوقات از تساوی‌های جبری، می‌توان نامعادله‌هایی را نتیجه گرفت. برای این منظور، به نکات زیر، توجه کنید:

نکته الف) اگر p یک عدد ثابت و x و y دو متغیر باشند، آنگاه:

$$x + p = y \Rightarrow \begin{cases} p > 0 \Rightarrow x < y \xrightarrow{\text{مانند}} x + 2 = y \Rightarrow x < y \\ p < 0 \Rightarrow x > y \xrightarrow{\text{مانند}} x - 5 = y \Rightarrow x > y \end{cases}$$

ب) اگر p و q دو عدد ثابت باشند که $0 < p < q$ و x و y دو متغیر باشند، آنگاه:

$$px = qy \Rightarrow \begin{cases} x \text{ و } y \text{ مثبت باشند} \Rightarrow x > y \xrightarrow{\text{مانند}} 2x = 3y \Rightarrow x > y \\ x \text{ و } y \text{ منفی باشند} \Rightarrow x < y \xrightarrow{\text{مانند}} 2x = 3y \Rightarrow x < y \end{cases}$$

مثال در هر مورد، با توجه به شرایط داده‌شده، x و y را مقایسه کنید.

- الف) $x - 2 = y + 3$ ب) $a \neq 0, x + a^2 = y$ پ) $x, y > 0, 5x = 3y$
 ت) $x, y < 0, -3x = -4y$ ث) $xy > 0, x + y < 0, 3x = 2y$

پاسخ

- الف) $x - 2 = y + 3 \Rightarrow x - 2 - 3 = y \Rightarrow x - 5 = y \Rightarrow x > y$ ب) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0 \xrightarrow{x+a^2=y} x < y$
 پ) $x, y > 0 \xrightarrow{5x=3y} x < y$ ت) $-3x = -4y \Rightarrow 3x = 4y \xrightarrow{x, y < 0} x < y$
 ث) $\left. \begin{matrix} xy > 0 \\ x + y < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{هر دو منفی اند.} \xrightarrow{3x=2y} x > y$

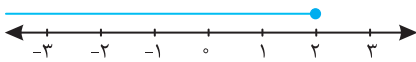
● **مفهوم نمادهای > ، < ، ≤ و ≥**: در سال‌های گذشته با مفهوم نمادهای < و > آشنا شدیم. حالا وقتی می‌نویسیم $a \geq b$ ، منظورمان این است که «a» بزرگ‌تر از «b» یا «a مساوی با b» است؛ به عبارتی، a از b کوچک‌تر نیست. به زبان ریاضی داریم:

$$a \geq b \Rightarrow \begin{cases} a > b \\ \text{یا} \\ a = b \end{cases}$$

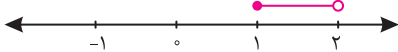
به طور مشابه وقتی می‌نویسیم $a \leq b$ منظورمان این است که «a کوچک‌تر از b» یا «a مساوی با b» است؛ به عبارت دیگر، a از b بزرگ‌تر نیست. به زبان ریاضی داریم:

$$a \leq b \Rightarrow \begin{cases} a < b \\ \text{یا} \\ a = b \end{cases}$$

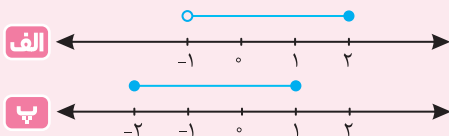
مثلاً وقتی می‌نویسیم $x \leq 2$ ، یعنی x یک عدد حقیقی است به طوری که «کوچک‌تر از 2» یا «مساوی با 2» است و روی محور به صورت زیر نشان می‌دهیم:



به طور مشابه وقتی می‌نویسیم $1 \leq x < 2$ ، یعنی x یک عدد حقیقی است که «بزرگ‌تر از 1» یا «مساوی با 1» است و همزمان «کوچک‌تر از 2» است. این مقادیر را روی محور، به صورت مقابل نشان می‌دهیم:



مثال برای هریک از ناحیه‌های مشخص شده روی محور، یک نامساوی مناسب بنویسید.



الف $-1 < x \leq 2$

ب $x < 1$

پ $-2 \leq x \leq 1$

ت $x \geq -3$

پاسخ

مثال هریک از عبارتهای کلامی زیر را به صورت یک نامعادله بنویسید.

الف ثلث عددی، از قرینه آن عدد کمتر نیست.

ب هفت برابر عددی منهای 3، از دو برابر آن عدد بیشتر است.

پ قرینه عددی به علاوه یک سوم، کوچک‌تر یا مساوی با نصف آن عدد است.

الف $\frac{x}{3} \geq -x$

ب $7x - 3 > 2x$

پ $-x + \frac{1}{3} \leq \frac{x}{2}$

پاسخ

نکته روابط مهم زیر را در مورد نامعادله‌ها به خاطر بسپارید:

الف $a^2 < b^2, a, b > 0 \Rightarrow a < b$

ب $a^2 < b^2, a, b < 0 \Rightarrow a > b$

● **نامعادله درجه اول**: اگر در یک نامعادله فقط یک مجهول داشته باشیم به طوری که درجه نسبت به آن متغیر برابر با یک باشد، به آن «نامعادله یک مجهولی درجه اول» می‌گوییم. مثلاً همه نامعادله‌های زیر، یک مجهولی و از درجه اول هستند:

$$2x - 1 \leq 7, \quad \frac{x-1}{2} + 3 < x, \quad \frac{x+1}{3} - \frac{x}{2} \geq 2$$

به مجموعه مقادیری از x (مجهول نامعادله) که به ازای آن‌ها نامعادله برقرار است، «مجموعه جواب» نامعادله گفته می‌شود. منظور از حل یک نامعادله، پیدا کردن مجموعه جواب آن است.

پرسش‌های درس سوم



درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

(هماهنگ بوشهر-۱۴۰۲)

۴۸۶ اگر $x^2 y < 0$ باشد، آنگاه $y < 0$.

(هماهنگ بوشهر-۱۴۰۰)

۴۸۷ اگر $x = y + 2$ باشد، آنگاه $x > y$ است.

(هماهنگ زنجان-۱۴۰۱)

۴۸۸ اگر $ba > 0$ ، آنگاه a و b هم علامت نیستند.

۴۸۹ اگر $a > b$ باشد، $a^2 > b^2$ است.

۴۹۰ اگر $x, y > 0$ باشد، از $x = 3y$ نتیجه می‌گیریم $x > y$ است.

۴۹۱ اگر $x, y < 0$ باشد، از $x = 3y$ نتیجه می‌گیریم $x < y$ است.

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

(هماهنگ خراسان شمالی-۱۴۰۰)

۴۹۲ با قرینه کردن طرفین یک نابرابری، جهت نابرابری عوض است.

(هماهنگ اصفهان-۱۴۰۰)

۴۹۳ اگر $a - b = 4$ ، در این صورت a b است.

(هماهنگ قم-۱۴۰۲)

۴۹۴ اگر $a + 3 = b - 4$ باشد، آنگاه a از b است. (بزرگ‌تر - کوچک‌تر)

۴۹۵ در عبارت $\frac{b}{a^2 c} < 0$ ، علامت‌های b و c هستند.

۴۹۶ اگر $p - \frac{2}{3}q = 0$ باشد و بدانیم $p, q < 0$ ، آنگاه p از q است.

گزینه درست را مشخص کنید.

(هماهنگ خوزستان-۱۴۰۱)

۴۹۷ اگر $x + 2 = y$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱ $x > y$ ۲ $x < y$ ۳ $x = y$ ۴ هیچ‌کدام

(هماهنگ کهگیلویه و بویراحمد-۱۴۰۱)

۴۹۸ اگر $a < 0$ و $b > 0$ کدام عبارت جبری زیر همواره مثبت است؟

۱ ab ۲ ab^2 ۳ a^2b ۴ $a + b$

(هماهنگ خراسان شمالی-۱۴۰۲)

۴۹۹ کدام عبارت معادل ریاضی عبارت «عدد a مثبت و b نامثبت است.» است؟

۱ $a > 0$ و $b > 0$ ۲ $a \geq 0$ و $b < 0$
 ۳ $a > 0$ و $b \leq 0$ ۴ $a < 0$ و $b \geq 0$

۵۰۰ عبارت «اگر از سه برابر عددی ۴ واحد کم کنیم، حاصل حداکثر ۲۴ می‌شود.» به زبان ریاضی کدام است؟

۱ $3x - 4 \leq 24$ ۲ $3x - 4 < 24$
 ۳ $3x - 4 \geq 24$ ۴ $3x - 4 > 24$

۵۰۱ مجموعه جواب نامعادله $4x + 5 \geq 7x + 17$ کدام است؟

۱ $x \leq 4$ ۲ $x \geq 4$ ۳ $x \geq -4$ ۴ $x \leq -4$

به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.
۵۰۲ عبارت‌های کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) اگر عددی را دو برابر کنیم، حداکثر ۲۰ واحد بیشتر از ۵ برابر آن می‌شود.

ب) اگر از قرینه عددی ۳ واحد کم کنیم، حداقل به ثلث آن عدد می‌رسیم.

پ) سن شخصی حداکثر ۲۲ سال از نصف سنش بیشتر است.

 ت) سه برابر عددی از $\frac{2}{3}$ آن حداقل ۱۵ واحد بیشتر است.

ث) اگر از ۲ برابر عددی ۵ واحد کم کنیم حداقل ۳ واحد بیشتر از ۳ برابر آن می‌شود.

 ج) اگر $\frac{2}{3}$ عدد x را با $\frac{1}{4}$ عدد y جمع کنیم حداکثر به ۳۸ می‌رسیم.

۵۰۳ با توجه به عبارت‌های زیر، در جاهای خالی علامت $>$ یا $<$ قرار دهید.

الف) $a + 3 = b + 4 \Rightarrow a \square b$

ب) $-x - y = -4 - 2y \Rightarrow x \square y$

پ) $2x = 3y$ و $x, y < 0 \Rightarrow x \square y$

ت) $-\frac{a}{4} + \frac{b}{3} = \frac{b}{12} - 2 \Rightarrow a \square b$

ث) $\frac{-a+b}{2} = 3 \Rightarrow a \square b$

۵۰۴ نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $5(x-1) \geq 3(x+3)$

(هماهنگ آذربایجان شرقی-۱۴۰۲)

ب) $3x - 12 < 7x + 4$

(هماهنگ سمنان-۱۴۰۲)

پ) $2x - 1 \geq \frac{3}{2}$

(هماهنگ فارس-۱۴۰۲)

ت) $3(x+2) \leq 5x - 4$

(هماهنگ کرمان-۱۴۰۲)

۵۰۵ نامعادله‌های زیر را حل کرده و مجموعه جواب هر کدام را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) $6x - 7 \geq 4x + 1$

(هماهنگ بوشهر-۱۴۰۱)

ب) $\frac{7x}{6} \leq \frac{x+1}{3} + \frac{x-1}{2}$

(هماهنگ شهر تهران-۹۸)

پ) $2x - 1 \geq 4 - 3x$

(هماهنگ کرمان-۱۴۰۲)

ت) $3(x-1) \geq 2x+1$

(هماهنگ آذربایجان غربی-۱۴۰۱)

ث) $4x - 5 < 7x + 10$

(هماهنگ اصفهان-۱۴۰۱)

ج) $4x - 7 \geq 2x + 1$

(هماهنگ سیستان و بلوچستان-۱۴۰۱)

ج) $\frac{9x+1}{3} \geq \frac{4x-5}{2} + \frac{1}{3}$

۵۰۶ با توجه به اینکه $x > 0$ ، $y < 0$ و $z < 0$ است، علامت هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\frac{x^2}{y}$

ب) xy^3z

پ) $x\sqrt{yz}$

ت) y^2xz^3

۵۰۷ علامت عددهای حقیقی a ، b و c را طوری تعیین کنید که نابرابری‌های زیر برقرار باشند. (همه حالت‌های ممکن را بنویسید.)

الف) $\frac{a^2b}{c^3} > 0$

ب) $-ab^2c^2 < 0$

پ) $\frac{a|b|}{c} \leq 0$

ت) $abc^2 \leq 0$

ث) $a^2b^2c < 0$

ج) $-\frac{2}{3}abc^3 \geq 0$

۵۰۸ مجموع دو مضرب طبیعی و متوالی عدد ۳ حداکثر ۳۰ است. تمام حالت‌های ممکن برای این دو عدد را بنویسید.

۵۰۹ قیمت ۳ بیسکویت از قیمت نصف هر بیسکویت حداقل ۱۵۰۰۰ تومان بیشتر است. قیمت هر بیسکویت حداقل چقدر است؟ (بیسکویت‌ها از یک نوع و هم قیمت هستند.)



آزمون جمع‌بندی

| بارم | مدت زمان: ۷۵ دقیقه | عبارت‌های جبری | آزمون فصل ۵ | ردیف |
|------|---|---|-------------|------|
| ۱/۲۵ | (هماهنگ خوزستان-۱۴۰۲) (هماهنگ بوشهر-۱۴۰۰) (هماهنگ آذربایجان غربی-۱۴۰۲) (هماهنگ خراسان شمالی-۱۴۰۰) | <p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>(الف) عبارت $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ یک اتحاد است. <input type="radio"/></p> <p>(ب) درجه چندجمله‌ای $8x^y - 2xy^2$ نسبت به دو متغیر x و y عدد 7 است. <input type="radio"/></p> <p>(پ) اگر $ab < 0$، آنگاه a و b هم علامت هستند. <input type="radio"/></p> <p>(ت) اگر $m = n + 3$ آنگاه $n > m$ است. <input type="radio"/></p> <p>(ث) عبارت x یک جمله‌ای است. <input type="radio"/></p> | ۵۱۰ | |
| ۱/۲۵ | (هماهنگ بوشهر-۱۴۰۱) (هماهنگ خراسان جنوبی-۱۴۰۲) (هماهنگ زنجان-۱۴۰۰) (هماهنگ مرکزی-۱۴۰۰) (هماهنگ مازندران-۱۴۰۰) | <p>جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>(الف) درجه چندجمله‌ای $x^2 + x + 2$ مساوی است.</p> <p>(ب) درجه چندجمله‌ای $3x^2y - 4x^4 - 5xy^2$ نسبت به x مساوی است.</p> <p>(پ) عبارت $2xyz$، \sqrt{x} و $\frac{4}{x}$ به ترتیب یک جمله‌ای جبری و</p> <p>(ت) تساوی $5 - 4x - 2 = 0$ یک اتحاد</p> <p>(ث) اگر $a < 0$ و $a^2b > 0$ باشد، آنگاه b عددی است.</p> | ۵۱۱ | |
| ۱ | (هماهنگ آذربایجان شرقی-۱۴۰۲) (هماهنگ مازندران-۱۴۰۱) (هماهنگ کرمانشاه-۱۴۰۲) | <p>گزینه درست را مشخص کنید.</p> <p>(الف) کدام یک از عبارت‌های زیر یک جمله‌ای نیست؟ <input type="checkbox"/> $\sqrt{3}$ <input type="checkbox"/> $2 x$ <input type="checkbox"/> x^3y <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}a$</p> <p>(ب) سه وزنه a، b و p کیلوگرمی داریم که می‌توانیم در دو کفه ترازو طوری قرار دهیم که دو کفه ترازو مقابل هم بایستند. با توجه به تصویر زیر، کدام گزینه درست است؟</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p><input type="checkbox"/> $b - p = a$</p> <p><input type="checkbox"/> $a + p = b$</p> <p><input type="checkbox"/> $b + p = a$</p> <p><input type="checkbox"/> $a + b = p$</p> </div> </div> <p>(پ) کدام یک از تساوی‌های زیر اتحاد است؟</p> <p><input type="checkbox"/> $a(a+b) = a^2 + ab$</p> <p><input type="checkbox"/> $\sqrt{a^2} = a$</p> <p>(ت) اگر $a - b > 0$ باشد آنگاه کدام گزینه درباره a و b همواره درست است.</p> <p><input type="checkbox"/> $a > b$ <input type="checkbox"/> $a < b$ <input type="checkbox"/> $a \leq b$ <input type="checkbox"/> $a \geq b$</p> <p><input type="checkbox"/> $a + a + b = 2(a+b)$</p> <p><input type="checkbox"/> $2a - 4 = 7$</p> | ۵۱۲ | |
| ۱ | (هماهنگ گلستان-۱۴۰۱) | <p>به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.</p> <p>حاصل عبارت زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.</p> <p>$101 \times 99 = ?$</p> | ۵۱۳ | |

۲

بخش دوم

پاسخ‌نامه تشریحی

www.gajmarket.com

فصل سوم:
استدلال و اثبات در هندسه
۱۸۶

فصل دوم:
عددهای حقیقی
۱۷۹

فصل اول:
مجموعه‌ها
۱۷۰

فصل ششم:
خط و معادله‌های خطی
۲۱۱

فصل پنجم:
عبارت‌های جبری
۲۰۴

فصل چهارم:
توان و ریشه
۱۹۶

فصل هشتم:
حجم و مساحت
۲۲۸

فصل هفتم:
عبارت‌های گویا
۲۱۹

فصل اول
درس اول: معرفی مجموعه
۱

مجموعه تهی هیچ عضوی ندارد.

۲

اعضای این مجموعه را نمی‌توان به صورت یکتا، مشخص کرد.

۳

این مجموعه یک عضو دارد که عدد صفر است.

۴

$$\{1, 2, 5, \cancel{1}\} = \{1, 2, 5\} \Rightarrow \text{۳ عضو}$$

تکراری

۵

هر کدام، دو عضو دارند.

۶

 مجموعه تهی، \emptyset ، $\{\}$
۷

$$3^6 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

دو

$$A = \{2, \cancel{2}, 3, \cancel{3}\} = \{2, 3\}$$

تکراری تکراری

۸

۸

۹

دو

 همه اعضای مجموعه یا مساوی ۱ هستند یا -۱ که با حذف تکراری‌ها، مجموعه به صورت $\{1, -1\}$ در می‌آید.

۱۰

$$A = \{\cancel{1}, \cancel{1}, \cancel{5}, \sqrt{\cancel{2}}, \sqrt{\cancel{4}}, \frac{1}{\cancel{5}}\} \Rightarrow A = \{\cancel{1}, \cancel{5}, \cancel{2}, \cancel{1}\}$$

$$\Rightarrow A = \{1, 5, 2\} \Rightarrow \text{مجموعه‌ای سه عضوی است.}$$

۱۱
الف \emptyset همان $\{\}$ است که یکی از اعضای مجموعه A است. ✓

ب توجه کنید که عدد صفر، خودش عضو A نیست، بلکه صفر عضو یک مجموعه است که آن مجموعه عضو A است. ✗

پ در مجموعه A عضوی به صورت $\{\emptyset\}$ مشاهده نمی‌شود، پس این مورد درست است. ✓

 توجه کنید که $\{\emptyset\}$ با $\{\emptyset\}$ متفاوت است.

۱۲

عبارت گزینۀ «۳» به یک مجموعه صفر عضوی (مجموعه تهی) اشاره دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها

۱ گزینۀ $\{-1, 0, 1\}$

۲ گزینۀ $\{7\}$

۴ گزینۀ $\{-2, -1\}$

۱۳
۱۴

این پرسش می‌تواند پاسخ‌های مختلفی داشته باشد. مثلاً «مجموعه عددهای طبیعی کوچک‌تر از یک» یا «مجموعه حروف فارسی دارای بیش از سه نقطه» و ...

۱۵

 این مجموعه به صورت $\{ت, ا, ی, ض, و, ر\}$ خواهد بود که اگر اعضای تکراری را خط بزیم، به صورت $\{ت, ض, و, ر\}$ در می‌آید. مشاهده می‌شود که این مجموعه دارای ۵ عضو است.

۱۶
الف یک مجموعه را مشخص نمی‌کند، چون اعضا، دقیقاً مشخص نیستند، مثلاً:

$$A = \{0, \dots, تبریز, رشت, تهران\} \text{ یا } B = \{اصفهان, مشهد, تهران\}$$

همچنین کلمه «پرجمعیت» ممکن است از نظر افراد مختلف، متفاوت باشد.

ب یک مجموعه را مشخص می‌کند.

$$C = \{10000, 10002, 10004, \dots, 99996, 99998\}$$

پ یک مجموعه را مشخص می‌کند. $D = \{53, 59, 61, 67\}$

ت یک مجموعه را مشخص نمی‌کند، چون اعضا، دقیقاً مشخص نیستند.

۱۷

الف $A = \{ش, ژ, چ, ث, پ\}$

ب $B = \{23, 25, 27, 29, 31, 33, 35\}$

پ $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

ت $D = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$

ث $E = \{104, 113, 122, 131, 140, 203, 212, 221, 230, 302,$

$$, 311, 320, 401, 410, 500\}$$

توجه کنید که در این مورد، برای پیدا کردن اعضای مجموعه، از روش الگوسازی استفاده کردیم.

ج $F = \{14, 28, 42, 56\}$

۱۸
الف مضارب طبیعی و کوچک‌تر از ۳۱ عدد ۵

ب مجموعه اعداد اول مضرب ۶ (یا هر عبارتی که معادل مجموعه تهی باشد)

پ مجموعه قرینۀ اعداد اول یک رقمی

ت مجموعه اعداد صحیح نامثبت بزرگ‌تر از -۴

ث مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۵

ج مجموعه اعداد مکعب کامل بین ۱ تا ۲۰

۱۹

الف $A = \{-1, 12, 0, 3, 4, 8, 5, 2, 14\}$, $B = \{-1, 12, 0, 3, 6, 7, 9\}$,

$$C = \{0, 3, 4, 8, 10, 11\}$$

ب $\{-1, 12, 0, 3\}$

پ $\{2, 14, 5\}$

۷۷

$$A = \{x^2 - 1 \mid x \in \mathbb{W}, x \leq 3\} \Rightarrow A = \{0^2 - 1, 1^2 - 1, 2^2 - 1, 3^2 - 1\}$$

$x=0, 1, 2, 3$

$$\Rightarrow A = \{-1, 0, 3, 8\}$$

$$B = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, x < 5\}$$

$x=1, 2, 3, 4$

$$\Rightarrow B = \{2(1)+1, 2(2)+1, 2(3)+1, 2(4)+1\}$$

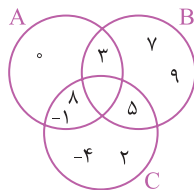
$$\Rightarrow B = \{3, 5, 7, 9\}$$

$$C = \{3x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x \leq 3\}$$

$x=-1, 0, 1, 2, 3$

$$\Rightarrow C = \{3(-1)-1, 3(0)-1, 3(1)-1, 3(2)-1, 3(3)-1\}$$

$$\Rightarrow C = \{-4, -1, 2, 5, 8\}$$



حال با توجه به نمودار و ن، داریم:

الف $(A \cap B) \cup C = \{3, -1, 8, 5, -4, 2\}$

ب $(B - C) \cap A = \{3\}$

پ $(A \cup C) - B = \{0, -1, 8, -4, 2\}$

ت $(A - B) \cup (B - C) = \{0, -1, 8, 3, 7, 9\}$

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

فصل اول

۷۸

احتمال رخ دادن یک پیشامد غیرممکن، صفر است.

۷۹

۸۰

$$\text{تعداد کل حالات} = \underset{\text{تاس}}{2} \times \underset{\text{سکه}}{6} = 12$$

۸۱

اگر ناحیه‌ها را با ۱، ۲، و ۳ نام‌گذاری کنیم، داریم:

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2),$$

$$(3,3)\} \Rightarrow n(S) = 9$$

۸۲

$\frac{1}{6}$

در پرتاب یک تاس سالم، احتمال روشن شدن هریک از عددها برابر با $\frac{1}{6}$ است.

۷۴

الف $B - C = \{-12, 3, 5, -1, 10\}$

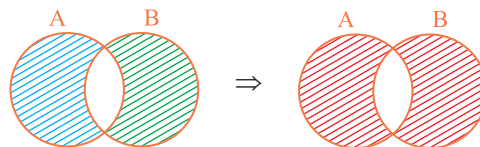
ب $(A \cap B) \cap (C - B) = \{5, -1, 6\} \cap \{4, 11, -8\} = \{\}$

پ $(C \cap A) - (B - A) = \{6\} - \{3, 9, 17, 10, -12\} = \{6\}$

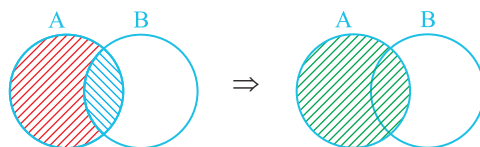
ت $(B \cap C) - A = \{9, 17, 6\} - \{5, -1, 6\} = \{9, 17\}$

۷۵

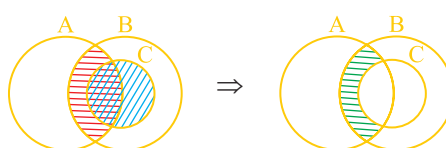
الف $(A - B) \cup (B - A)$



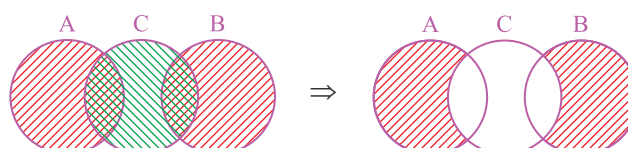
ب $(A - B) \cup (A \cap B)$



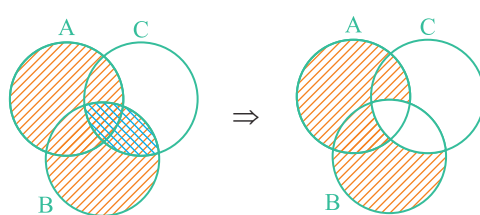
پ $(B \cap A) - C$



ت $(A \cup B) - C$



ث $(A \cup B) - (B \cap C)$



۷۶

الف $B - A$

ب $A - B$

پ $(A \cup B) - C$

ت $(A \cap B) \cup (C - B)$ یا $A \cup (C - B)$

ث $B - (A \cup C)$

ج $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

چ $(A \cup B \cup C) - ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$

۸۳

$$\frac{5}{16}$$

$$n(S) = 2^4 = 16$$

$$A = \{(پ, پ, پ, د), (پ, پ, د, پ), (پ, د, پ, پ), (د, پ, پ, پ), (پ, پ, پ, پ)\} \Rightarrow n(A) = 5$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{16}$$

۸۴

$$\frac{1}{4}$$

$$\text{کل حالت‌ها} \{ (ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ) \}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالت‌ها} = 4$$

$$1 = \text{تعداد حالت‌های مطلوب} \{ (ر, ر) \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{احتمال} = \frac{1}{4}$$

۸۵

$$\frac{1}{2}$$

$$n(S) = 2 \times 2 = 4$$

$$A = \{(ر, پ), (پ, ر)\} \Rightarrow n(A) = 2$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۸۶

$$\frac{1}{4}$$

$$n(S) = 2 \times 2 = 4$$

$$A = \{(ر, پ)\} \Rightarrow n(A) = 1$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

۸۷

$$\{S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \Rightarrow n(S) = 8$$

$$\{A = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(A) = 4$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

۸۸

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = 6$$

$$2 = \text{تعداد حالت‌های مطلوب} \Rightarrow \{4, 6\} \text{ : حالت‌های مطلوب}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۸۹

$$n(S) = 6 \times 2 = 12$$

$$A = \{(1, ر), (2, ر)\} \Rightarrow n(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

۹۰

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = 6 \times 6 = 36$$

$$\text{حالت‌های مطلوب} \{ (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3),$$

$$(3, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5) \}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌های مطلوب} = 9$$

$$\Rightarrow \text{احتمال} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

۹۱

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$A = \{(6, 4), (5, 5), (4, 6)\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

۹۲

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$1 = \text{تعداد} \{ (پ, پ, پ) \} \Rightarrow \text{حالت مطلوب}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال} = \frac{1}{8}$$

۹۳

هر فرزند، با احتمال $\frac{1}{4}$ ممکن است دختر باشد و با احتمال $\frac{1}{4}$ ممکن است پسر باشد و این موضوع ارتباطی به تعداد یا جنسیت فرزندان دیگر ندارد.

۹۴

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$A = \{(ر, ر, ر), (پ, پ, پ)\} \Rightarrow n(A) = 2$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۹۵

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$\text{الف} \quad A = \{(پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ), (پ, پ, پ)\}$$

$$\Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(توجه کنید که حداقل دو پسر، یعنی دو پسر یا سه پسر داشته باشد.)

$$\text{ب} \quad B = \{(د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, پ), (پ, پ, پ)\}$$

$$\Rightarrow n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(همان‌طور که مشاهده می‌شود، دو پیشامد A و B هم‌شانس هستند.)

$$\text{پ} \quad C = \{(د, پ, د), (پ, د, د)\} \Rightarrow n(C) = 2$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۹۶

$$S = \{21, 22, 23, \dots, 39, 40\} \Rightarrow n(S) = 20$$

$$\text{الف} \quad A = \{25, 30, 35, 40\} \Rightarrow n(A) = 4$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\text{ب} \quad B = \{24, 27, 30, 33, 36, 39\} \Rightarrow n(B) = 6$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

پ $C = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (2, 1), (3, 1), (5, 1), (2, 4), (3, 4), (5, 4)\} \Rightarrow n(C) = 12$
 $\Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

الف $n(S) = 6 \times 6 = 36$

ب حالت‌های مطلوب $\{(6, 4), (5, 5), (4, 6)\}$

\Rightarrow احتمال = $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ = تعداد حالت‌های مطلوب

پ در این حالت مجموع عددها می‌تواند ۱۰، ۱۱، یا ۱۲ باشد:

حالت‌های مطلوب $\{(6, 4), (5, 5), (4, 6), (6, 5), (5, 6), (6, 6)\}$

\Rightarrow احتمال = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ = تعداد حالت‌های مطلوب

$n(S) = 2 \times 6 = 12$

الف $A = \{(r, 2), (r, 3), (r, 5)\} \Rightarrow n(A) = 3$

$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

ب $B = \{(p, 2), (p, 3), (p, 4), (p, 5), (p, 6)\} \Rightarrow n(B) = 5$

$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{12}$

تعداد کل حالت‌ها $= 2 \times 6 = 12$

الف \Rightarrow احتمال = $\frac{1}{12}$ = تعداد $\{(r, 5)\}$ حالت‌های مطلوب

ب $\{(p, 2), (p, 3), (p, 5)\}$ حالت‌های مطلوب

\Rightarrow تعداد حالت‌های مطلوب = ۳

\Rightarrow احتمال = $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$n(S) = 3 + 4 + 5 = 12$, $n(A) = 12 - 5 = 7$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{12}$

آزمون جمع‌بندی فصل

فصل اول

۱۰۵

الف بین هر دو عدد طبیعی متوالی، هیچ عدد طبیعی دیگری وجود ندارد.

ب این مجموعه یک عضو دارد که آن عضو، مجموعه تهی است.

پ

ت

از برابر بودن تعداد اعضای دو مجموعه، نمی‌توان برابری آن دو مجموعه را نتیجه گرفت؛ مثلاً:

$A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\} \Rightarrow n(A) = n(B) = 2, A \neq B$

پ اگر مجموعه مضارب ۴ از ۲۱ تا ۴۰ را C بنامیم، داریم:

$C = \{24, 28, 32, 36, 40\} \Rightarrow n(C) = 5 \Rightarrow P(C) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ = احتمال اینکه مضرب ۴ نباشد

ت $D = \{23, 29, 31, 37\} \Rightarrow n(D) = 4$

$\Rightarrow P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

۹۷

$S = \{1, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\} \Rightarrow n(S) = 10$

$A = \{1, 13, 14, 16, 17, 19, 20\} \Rightarrow n(A) = 7$

$\Rightarrow P(A) = \frac{7}{10} = 0.7$

۹۸

$n(S) = 6^2 = 36$

$A = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\} \Rightarrow n(A) = 6$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

۹۹

$n(S) = 6^2 = 36$

$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$\Rightarrow n(A) = 6$

$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

۱۰۰

در پرتاب دو تاس، مجموعه شامل کل حالت‌ها، به صورت زیر است:

کل حالت‌ها $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)$

$, (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)$

$, (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$

$, (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)$

$, (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)$

$, (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

\Rightarrow تعداد کل حالت‌ها = ۳۶

الف $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\} \Rightarrow n(A) = 5$

$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$

ب $B = \{(1, 1), (1, 4), (1, 6), (4, 1), (4, 4), (4, 6),$

$(6, 1), (6, 4), (6, 6)\} \Rightarrow n(B) = 9$

$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

112 $C - B = \{3\}$
 $(A \cap B) \cup C = \{4\} \cup \{3, 5\} = \{3, 4, 5\}$

113 الف $B - (A \cap C) = \{2, 1, 5\} - \{2, 7\} = \{1, 5\}$

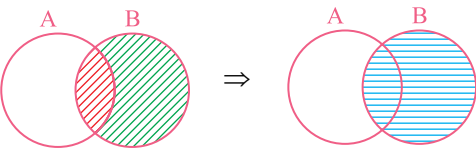
ب $A \cup B = \{1, 2, 5, 7\}$

ب خیر، زیرا تمام اعضای مجموعه A در مجموعه B نیست:

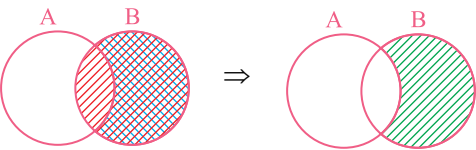
$\forall \gamma \in A, \gamma \notin B$

(اما توجه کنید که $B \subseteq A$ است.)

114 $(B - A) \cup (A \cap B) = B$



الف $(B - A) \cap B$



ب $F = \{3x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 2\}$

$x=1, 2$

$\Rightarrow F = \{3(1) + 1, 3(2) + 1\} = \{4, 7\}$

116 $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{4, 6, 8, 10\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

117 $A \cup B = \{3, 5\} \cup \{2, 4, 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$

$(A \cup B) - C = \{2, 3, 4, 5\} - \{3, 4, 6\} = \{2, 5\}$

118 الف چهار عضو $S = \{(قرمز 1), (قرمز 2), (آبی), (سبز)\} \Rightarrow$

ب $A = \{(قرمز 1), (قرمز 2)\} \Rightarrow n(A) = 2$

$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

119 $n(S) = 6 \times 6 = 36, A = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}$

$\Rightarrow n(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$

120 $n(S) = 6, A = \{3, 5\} \Rightarrow n(A) = 2$

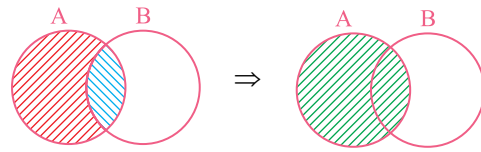
$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

106 الف تهی

ب A

پ A

$\Rightarrow (A \cap B) \cup (A - B) = A$



ت $\frac{1}{2}$

تعداد کل حالتها = 6

تعداد حالت‌های مطلوب = 3 \Rightarrow $\{2, 4, 6\}$ = حالت‌های مطلوب

\Rightarrow احتمال = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

107 الف گزینه «3»

ب گزینه «4»

پ گزینه «1»

ت گزینه «3»

115 $\{x, 5\} = \{\sqrt{25}, 3\} \Rightarrow \{x, 5\} = \{5, 3\} \Rightarrow x = 3$

$n(S) = 6 \times 2 = 12, A = \{(2, ب), (3, ب), (5, ب)\} \Rightarrow n(A) = 3$

$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$n(S) = 5 + 8 + 7 = 20, n(A) = 5 + 7 = 12$

$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

108 الف $2 \in A$

ب $5 \notin A$

109 الف $A = \{2^x \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\} \Rightarrow A = \{2^1, 2^2\} = \{2, 4\}$

$x=1, 2$

ب $B = \{3x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x < 3\}$

$x=1, 2$

$\Rightarrow B = \{3(1), 3(2)\} = \{3, 6\}$

110 الف $\{2, \dots, \sqrt{9}, 5\} = \{2, 3, \dots, 7\}$

$\Rightarrow \{2, 7, 3, 5\} = \{2, 3, 5, 7\}$

ب $\{-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{4}{9}}, \dots, 7\} = \{-\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{5}, 5^2\}$

$\Rightarrow \{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 25, 7\} = \{\frac{2}{3}, 7, -\frac{1}{2}, 25\}$

111 الف $A \cap B = \{2\}$

$B - A = \{3, 7\}$

ب $\{1, 2, 3\} \not\subseteq \{2, 3, 1\}$ *

$a \in \{a, b, c\}$ ✓

درس اول: عبارتهای جبری و مفهوم اتحاد

فصل پنجم



✓ ۴۴۰

بزرگ‌ترین توان x ، برابر با ۵ است.

✓ ۴۴۱

✗ ۴۴۲

✗ ۴۴۳

یک جمله‌ای نیست چون متغیر در زیر رادیکال است.

✓ ۴۴۴

توجه کنید که متغیر نباید زیر رادیکال باشد؛ ولی ضرب عددی می‌تواند زیر رادیکال باشد.

✗ ۴۴۵

۴۴۶

۳

۴۴۷

سه

$$\left. \begin{aligned} \text{درجه نسبت به } x &= 2 \\ \text{درجه نسبت به } y &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2+1=3$$

۴۴۸

۵

۴۴۹

اتحاد جبری

۴ ۴۵۰

در تک جمله‌ای متغیر نباید زیر رادیکال، در مخرج یا در توان باشد.

۳ ۴۵۱

هر عدد حقیقی، یک تک جمله‌ای محسوب می‌شود.

۳ ۴۵۲

۴ ۴۵۳

بررسی گزینه‌ها

۱ گزینه) اتحاد است. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2 \rightarrow$

۲ گزینه) اتحاد است. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow$

۳ گزینه) می‌دانیم $\square^2 = (-\square)^2 \Rightarrow (a+b)^2 = (-(a+b))^2$

$= (-a-b)^2$. اتحاد است.

۴ گزینه) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(-b-a)^2 = (-(a+b))^2$

$= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow (a-b)^2 \neq (-b-a)^2$. ✗ اتحاد نیست.

۱ ۴۵۴

$= 2$ درجه نسبت به x

$= 3$ درجه نسبت به y

$= 2+3=5$ درجه نسبت به x و y

$= -3$ ضرب عددی

$$\text{ج} \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \times 8^{-2} = \left(\frac{3}{4} \times \sqrt[2]{8}\right)^{-2} = 6^{-2} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

$$\text{ج} \frac{14^{-3} \times 14^7}{2^4} = \frac{14^4}{2^4} = \left(\frac{14}{2}\right)^4 = 7^4$$

$$\text{ج} \frac{3^7 \times 2^{-4}}{2^{-11}} = 3^7 \times 2^{-4-(-11)} = 3^7 \times 2^7 = 6^7$$

۴۳۴

$$0.000375 = 3/75 \times 10^{-4}$$

۴۳۵

$$\text{الف} 251/2 = 2/512 \times 10^2$$

$$\text{ب} 695000 = 6/95 \times 10^5$$

$$\text{ب} 0.00000034 = 3/4 \times 10^{-7}$$

$$\text{ت} 4040000 = 4/04 \times 10^6$$

۴۳۶

$$1/93 \times 10^3 = 1/9300 \times 10^3 = 1930$$

۴۳۷

$$\text{الف} \sqrt{50} - \sqrt{18} = \sqrt{25 \times 2} - \sqrt{9 \times 2} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{ب} \sqrt{45} - 7\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \times 5} - 7\sqrt{5} = 3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = -4\sqrt{5}$$

$$\text{ب} 3^2\sqrt{54} - 2^2\sqrt{2} = 3^2\sqrt{27 \times 2} - 2^2\sqrt{2} = 3 \times 3^2\sqrt{2} - 2^2\sqrt{2} = 7^2\sqrt{2}$$

$$\text{ت} \sqrt[3]{-64} - 2\sqrt{5} + \sqrt{45} - 4 = \sqrt[3]{(-4)^3} - 2\sqrt{5} + \sqrt{3^2 \times 5} - 4 = -4 - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 4 = -8 + \sqrt{5}$$

$$\text{ت} \sqrt{75} - \sqrt{27} = \sqrt{5^2 \times 3} - \sqrt{3^2 \times 3} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{ج} \frac{\sqrt{-54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{-54}{2}} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

۴۳۸

$$\text{الف} \frac{3}{2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2 \times 5} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$$\text{ب} \frac{8}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{ب} \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$\text{ت} \frac{4}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$$

۴۳۹

$$\frac{y}{\sqrt[3]{a^2}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{y\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{y\sqrt[3]{a}}{a}$$

$$\text{ت } x^2 + 7x - 18 \xrightarrow{\text{ضرب} = -18, \text{جمع} = 7} (x+9)(x-2)$$

$$\text{ث } a^2 - 8a + 12 \xrightarrow{\text{ضرب} = 12, \text{جمع} = -8} (a-2)(a-6)$$

$$\text{ج } x^2 + 8x + 15 = (x+5)(x+3)$$

$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \delta+3 & \delta \times 3 \end{array}$

$$\text{ح } x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$$

$$\text{ط } 9x^2 - 4y^2 = (3x-2y)(3x+2y)$$

$$\text{ظ } 25x^2 - 49 = (\delta x - 7)(\delta x + 7)$$

$$\text{د } (x+y)^2 - 25 = (x+y)^2 - 5^2 = (x+y-5)(x+y+5)$$

$$\text{ذ } 2x^3 - 18x = 2x(x^2 - 9) = 2x(x-3)(x+3)$$

$$\text{ر } x^3 - 25x = x(x^2 - 25) = x(x-5)(x+5)$$

$$\text{ز } x^3 - 16x^2 + 64x = x(x^2 - 16x + 64) = x(x-8)^2$$

$$\text{ژ } 2ab^2 - 6a^2b = 2ab(b-3a)$$

۴۸۵

$$\text{الف } 36a^3 - 49a = a(36a^2 - 49) = a(6a-7)(6a+7)$$

$$\text{ب } 9 - (2a-4)^2 = 3^2 - (2a-4)^2 = (3-(2a-4))(3+(2a-4))$$

$$= (3-2a+4)(3+2a-4) = (7-2a)(-1+2a)$$

$$\text{پ } 1\frac{1}{25}x^2 - y^2 = \frac{36}{25}x^2 - y^2 = (\frac{6}{5}x - y)(\frac{6}{5}x + y)$$

$$\text{ت } (\delta x - 2)^2 - (2x + 3)^2 = (\delta x - 2 - (2x + 3))(\delta x - 2 + (2x + 3))$$

$$= (\delta x - 2 - 2x - 3)(\delta x - 2 + 2x + 3) = (3x - 5)(7x + 1)$$

$$\text{ث } a^2b^2 - 3ab + 2 = (ab-1)(ab-2)$$

$$\text{ج } 3x^3 + x^2 - 6x - 2 = 3x^3 - 6x + x^2 - 2$$

$$= 3x(x^2 - 2) + (x^2 - 2) = (x^2 - 2)(3x + 1)$$

$$= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(3x + 1)$$

درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها

فصل پنجم



۴۸۶

وقتی حاصل ضرب دو عبارت منفی است، باید یکی مثبت و دیگری منفی باشد. در اینجا x^2 نمی‌تواند منفی باشد. پس x^2 مثبت و y منفی است.

۴۸۷

۴۸۸

در صورتی که حاصل ضرب دو عدد مثبت باشد، آن دو عدد غیر صفر و هم علامت هستند.

۴۸۹

این عبارت تنها در صورتی درست است که $|a|$ بزرگ‌تر از $|b|$ باشد.

۴۹۰

در این‌گونه تساوی‌ها (با ضریب‌های مثبت) اگر $x, y > 0$ باشد، متغیری بزرگ‌تر است که ضریبش کوچک‌تر باشد.

$$\text{ع } (\sqrt{5} - \sqrt{7})^8 (\sqrt{5} + \sqrt{7})^8 = ((\sqrt{5} - \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{7}))^8$$

$$= (\sqrt{5}^2 - \sqrt{7}^2)^8 = (5 - 7)^8 = (-2)^8 = 2^8 = 256$$

$$\text{ح } (x+6)(x-2) = x^2 + (6-2)x + (6) \times (-2) = x^2 + 4x - 12$$

$$\text{د } (x-7)(x+5) = (x)^2 + ((-7)+5)x + ((-7) \times 5)$$

$$= x^2 - 2x - 35$$

$$\text{ذ } (2x+3)(2x-4) = (2x)^2 + (3-4)(2x) + (3 \times (-4))$$

$$= 4x^2 - 2x - 12$$

$$\text{ر } (x^2 - 3x)(x^2 + 5x) = x^4 + (-3x + 5x)(x^2) - 3x(5x)$$

$$= x^4 + 2x^3 - 15x^2$$

$$\text{ز } (x - 2\sqrt{3})(x + 3\sqrt{3})$$

$$= x^2 + (3\sqrt{3} - 2\sqrt{3})(x) + (-2\sqrt{3}) \times (3\sqrt{3}) = x^2 + \sqrt{3}x - 18$$

$$\text{ژ } (x-4)(x+4)(x^2-10) = (x^2-16)(x^2-10)$$

$$= (x^2)^2 + (-10-16)x^2 + (-16)(-10) = x^4 - 26x^2 + 160$$

۴۸۲

$$\text{الف } (x+3)(x-3)(x^2+9) = (x^2-9)(x^2+9) = x^4 - 81$$

$$\text{ب } (3a+2)(3a-2) = 9a^2 - 4$$

$$\text{پ } (\frac{1}{2}x + \sqrt{7})(\frac{1}{2}x - \sqrt{7}) = \frac{1}{4}x^2 - 7$$

$$\text{ت } a^2 + 7a + 10 = (a+2)(a+5)$$

$$\text{ث } (x+7)(x-2) = x^2 + 5x - 14$$

$$\text{ج } (2x+2)(2x-5) = 4x^2 - 6x - 10$$

$$\text{ح } (3x-2y)(3x+2y) = 9x^2 - 4y^2$$

$$\text{ط } (2a+b+3c)^2 = 4a^2 + b^2 + 9c^2 + 4ab + 12ac + 6bc$$

۴۸۳

$$\text{الف } 102 \times 98 = (100+2)(100-2) = 100^2 - 2^2$$

$$= 10000 - 4 = 9996$$

$$\text{ب } 1005 \times 1001 = (1000+5)(1000+1) = 1000^2 + 6 \times 1000 + 5$$

$$= 1000000 + 6000 + 5 = 1006005$$

$$\text{ج } 312 \times 288 = (300+12)(300-12) = 300^2 - 12^2$$

$$= 90000 - 144 = 89856$$

$$\text{د } 502 \times 498 = (500+2)(500-2) = 500^2 - 2^2$$

$$= 250000 - 4 = 249996$$

۴۸۴

$$\text{الف } x^2 + 8x + 15 \xrightarrow{\text{ضرب} = 15, \text{جمع} = 8} (x+3)(x+5)$$

$$\text{ب } y^2 + 13y + 36 \xrightarrow{\text{ضرب} = 36, \text{جمع} = 13} (y+4)(y+9)$$

$$\text{پ } x^2 - 10x - 24 = (x-12)(x+2)$$

$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ -12+2 & -12 \times 2 \end{array}$

۵۰۸

با توجه به اینکه دو مضرب متوالی هستند، اگر مضرب کوچک‌تر را $۳x$ در نظر بگیریم، مضرب بزرگ‌تر $۳x + ۳$ خواهد بود، پس:

$$۳x + (۳x + ۳) \leq ۳۰ \Rightarrow ۶x + ۳ \leq ۳۰ \Rightarrow ۶x \leq ۳۰ - ۳ \Rightarrow ۶x \leq ۲۷$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{۲۷}{۶} \Rightarrow x \leq \frac{۹}{۲} \Rightarrow x = ۱, ۲, ۳, ۴$$

پس این اعداد عبارت‌اند از:

$$x = 1 \Rightarrow ۳x = ۳, ۳x + ۳ = ۶$$

$$x = 2 \Rightarrow ۳x = ۶, ۳x + ۳ = ۹$$

$$x = 3 \Rightarrow ۳x = ۹, ۳x + ۳ = ۱۲$$

$$x = 4 \Rightarrow ۳x = ۱۲, ۳x + ۳ = ۱۵$$

۵۰۹

$$۳x - \frac{x}{۲} \geq ۱۵ \dots$$

$$\xrightarrow{\times 2} ۶x - x \geq ۳۰ \dots \Rightarrow ۵x \geq ۳۰ \dots$$

$$\xrightarrow{\div 5} x \geq ۶ \dots$$

پس قیمت هر بیسکویت، حداقل ۶۰۰۰ تومان است.

آزمون جمع‌بندی فصل

فصل پنجم

۵۱۰

الف

یک تساوی جبری در صورتی اتحاد است که به ازای همه مقادیر برای متغیر، برقرار باشد. این تساوی فقط به ازای x های غیرصفر برقرار است؛ پس اتحاد نیست.

ب

پ

اگر حاصل ضرب دو عدد منفی باشد، یکی از آن دو عدد مثبت و دیگری منفی است.

ت

ث

۵۱۱

الف ۲

ب ۴

پ است، نیست، نیست

ت نیست

ث مثبت

$$a^2 b > 0$$

باید مثبت باشد.

۵۱۲

الف گزینه «۲»

ب گزینه «۳»

وزنه a سنگین‌تر از b است، پس وزنه p را در کنار b قرار می‌دهیم:

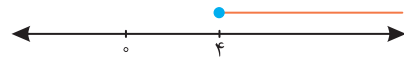
$$a = b + p$$

توجه کنید که گزینه «۴» نیز می‌تواند درست باشد، اما از این تصویر نتیجه گرفته نمی‌شود.

ث $4x - 5 < 7x + 10 \Rightarrow -5 - 10 < 7x - 4x$
 $\Rightarrow -15 < 3x \Rightarrow -5 < x$



ج $4x - 7 \geq 2x + 1 \Rightarrow 4x - 2x \geq 1 + 7 \Rightarrow 2x \geq 8 \Rightarrow x \geq 4$



ج $\frac{9x+1}{3} \geq \frac{4x-5}{2} + \frac{1}{3}$

$$\xrightarrow{\times 6} \frac{2}{6} \times (9x+1) \geq \frac{3}{6} \times (4x-5) + \frac{2}{6} \times (\frac{1}{3})$$

$[2, 2] = 6$

$$\Rightarrow 18x + 2 \geq 12x - 15 + 2$$

$$\Rightarrow 18x - 12x \geq -15 \Rightarrow 6x \geq -15 \Rightarrow x \geq \frac{-15}{6} \Rightarrow x \geq -2.5$$



۵۰۶

الف $\frac{x^2}{y} \Rightarrow \frac{x^2}{y} < 0$

ب $x y^3 z \Rightarrow x y^3 z > 0$

پ $x \sqrt{yz} \Rightarrow x \sqrt{yz} > 0$

ث $y^2 x z^3 \Rightarrow y^2 x z^3 < 0$

۵۰۷

الف $\frac{a^2 b}{c^3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0, b > 0, c > 0 \\ \text{یا} \\ a \neq 0, b < 0, c < 0 \end{cases}$

ب $-ab^2 c^2 < 0 \Rightarrow b, c \neq 0, a > 0$

پ $\frac{a|b|}{c} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} b \in \mathbb{R}, a \leq 0, c > 0 \\ \text{یا} \\ b \in \mathbb{R}, a \geq 0, c < 0 \end{cases}$

ت $abc^2 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} c \in \mathbb{R}, a \leq 0, b \geq 0 \\ \text{یا} \\ c \in \mathbb{R}, a \geq 0, b \leq 0 \end{cases}$

ث $a^2 b^2 c < 0 \Rightarrow a, b \neq 0, c < 0$

ج $-\frac{2}{3} abc^3 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0, b \geq 0, c \leq 0 \\ \text{یا} \\ a \geq 0, b \leq 0, c \geq 0 \\ \text{یا} \\ a \leq 0, b \geq 0, c \geq 0 \end{cases}$

۳

بخش سوم

آزمون‌های پایان نوبت

www.gajmarket.com

آزمون پایان نوبت دوم:
خرداد ماه (۱)

۲۴۰

پاسخ‌نامه آزمون پایان نوبت
دوم: خرداد ماه (۱)

۲۵۱

آزمون پایان نوبت دوم:
خرداد ماه (۴)

۲۴۶

پاسخ‌نامه آزمون پایان نوبت
دوم: خرداد ماه (۴)

۲۵۵

آزمون پایان نوبت اول:
دی ماه (۲)

۲۳۸

پاسخ‌نامه آزمون پایان نوبت
اول: دی ماه (۲)

۲۴۹

آزمون پایان نوبت دوم:
خرداد ماه (۳)

۲۴۴

پاسخ‌نامه آزمون پایان نوبت
دوم: خرداد ماه (۳)

۲۵۳

آزمون پایان نوبت اول:
دی ماه (۱)

۲۳۶

پاسخ‌نامه آزمون پایان نوبت
اول: دی ماه (۱)


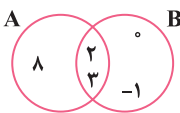
۲۴۸

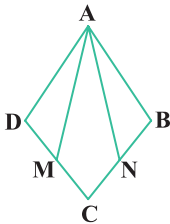
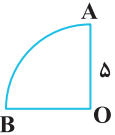
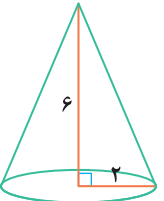
آزمون پایان نوبت دوم:
خرداد ماه (۲)

۲۴۲

پاسخ‌نامه آزمون پایان نوبت
دوم: خرداد ماه (۲)

۲۵۲

| بارم | مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه | هماهنگ شهر تهران - ۱۴۰۲ | آزمون پایان نوبت دوم (۳) | ردیف |
|-------------|---------------------|--|--|------|
| ۱ | | | <p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر $A = \{۵, ۶\}$ و $B = \{۵, ۷\}$ باشد، آنگاه $n(A \cup B) = ۴$ است. <input type="radio"/></p> <p>ب) کسر $\frac{۳}{۵}$ نمایش اعشاری مختوم دارد. <input type="radio"/></p> <p>پ) اگر $ab > ۰$ باشد، آنگاه a و b هم علامت هستند. <input type="radio"/></p> <p>ت) خط $y = x$ از مبدأ مختصات می‌گذرد. <input type="radio"/></p> | ۱ |
| ۱ | |  | <p>جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>الف) حاصل عبارت $۳\sqrt{۲} + ۵\sqrt{۲}$ برابر است.</p> <p>ب) درجه چندجمله‌ای $۶x^۳ + ۲x$ نسبت به x برابر با عدد است.</p> <p>پ) عرض از مبدأ خط $y = ۴x + ۷$ برابر با عدد است.</p> <p>ت) تعداد وجه‌های جانبی هرم منتظم مقابل برابر است.</p> | ۲ |
| ۱ | | | <p>گزینه درست را مشخص کنید.</p> <p>الف) کدام گزینه، عبارت گویا است؟</p> <p>۱ $\frac{۱}{\sqrt{x}}$ ۲ $x - y$ ۳ $\frac{۷}{x+۱}$ ۴ \sqrt{xy}</p> <p>ب) نمایش اعشاری عدد $۵/۲ \times ۱۰^{-۳}$ کدام است؟</p> <p>۱ $۰/۰۰۵۲$ ۲ ۵۲۰۰ ۳ $۰/۰۰۰۵۲$ ۴ ۵۲۰۰۰</p> <p>پ) عبارت $\frac{a+۲}{a+۵}$ با کدام عبارت مساوی است؟</p> <p>۱ $\frac{a-۲}{a-۵}$ ۲ $\frac{-a-۲}{-a-۵}$ ۳ $\frac{a+۲}{-a-۵}$ ۴ $\frac{-a-۲}{a+۵}$</p> <p>ت) عدد $۱ + \sqrt{۵}$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟</p> <p>۱ ۱ و ۲ ۲ ۲ و ۳ ۳ ۳ و ۴ ۴ ۴ و ۵</p> | ۳ |
| ۰/۷۵ | |  <p>الف) $A \cap B = \{ \quad \}$</p> <p>ب) $A - B = \{ \quad \}$</p> | <p>به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>با توجه به نمودار مقابل، اعضای مجموعه‌های زیر را بنویسید.</p> | ۴ |
| ۰/۵ | | | <p>با توجه به دو مجموعه برابر زیر، جاهای خالی را پر کنید.</p> <p>$\{۵, \dots, ۳, -۱\} = \{۲, \sqrt{۲۵}, \dots, ۳\}$</p> | ۵ |
| ۰/۵ | | | <p>۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و به طور تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد عدد روی کارت خارج شده از ۵ کمتر باشد.</p> | ۶ |
| ۰/۵ ۰/۷۵ | | | <p>الف) بین دو عدد ۳ و $\sqrt{۶}$، دو عدد گنگ بنویسید.</p> <p>ب) اگر $a = -۵$ و $b = ۱۰$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.</p> <p>$۳a + b = ?$</p> | ۷ |

| | | | |
|------|---|---|----|
| ۱ |  | در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه‌های M و N وسط‌های اضلاع CD و CB هستند. دلیل هم‌نهشتی دو مثلث ADM و ABN را با ذکر حالت بیان کنید. | ۸ |
| ۰/۵ | | آیا هر دو مستطیل دلخواه متشابهند؟ چرا؟ | ۹ |
| ۰/۵ | $3^{-1} + \frac{5}{6} = ?$ | الف) حاصل عبارت مقابل را به ساده‌ترین صورت بنویسید. | ۱۰ |
| ۰/۵ | $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ | ب) عدد ۰۰۰۰۸۳ را با نماد علمی نمایش دهید. | |
| ۰/۷۵ | | پ) مخرج کسر مقابل را گویا کنید. | |
| ۰/۷۵ | $(x+3)(x+7) = ?$ | الف) حاصل عبارت زیر را با استفاده از اتحاد به دست آورید. | ۱۱ |
| ۰/۷۵ | $25a^2 - 9b^2 = ?$ | ب) عبارت زیر را به کمک اتحاد، تجزیه کنید. | |
| ۱ | $4x - 7 \leq 2x + 5$ | مجموعه جواب نامعادله مقابل را روی محور نشان دهید. | ۱۲ |
| ۰/۷۵ | | الف) نمودار خط با معادله $y = 5x - 2$ را در دستگاه مختصات رسم کنید. | ۱۳ |
| ۰/۷۵ | | ب) معادله خطی را بنویسید که با خط $y = 4x$ موازی بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ بگذرد. | |
| ۱ | $\begin{cases} x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$ | دستگاه معادله‌های خطی مقابل را حل کنید. | ۱۴ |
| ۰/۲۵ | $\frac{x-2}{x+6}$ | الف) عبارت گویای مقابل به‌ازای کدام مقدار x تعریف نشده است؟ | ۱۵ |
| ۰/۷۵ | $\frac{m^2 - 16}{m + 4} = ?$ | ب) عبارت گویای روبه‌رو را ساده کنید. | |
| ۱ | $\frac{3}{x+1} + \frac{5}{x+2} = ?$ | پ) حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. | |
| ۱/۲۵ | $6x^2 + 21x + 1 \mid x + 3$ | تقسیم مقابل را انجام دهید. | ۱۶ |
| ۱/۲۵ |  | در سؤالات زیر، نوشتن دستور محاسبه حجم الزامی است. الف) حجم حاصل از دوران ربع دایره مقابل به شعاع ۵cm را حول شعاع OA به دست آورید. ($\pi = 3$) | ۱۷ |
| ۱/۲۵ |  | ب) حجم مخروطی به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۶ را به دست آورید. ($\pi = 3$) | |

۱۱

الف

$$\begin{cases} 3y - 5x = -3 \\ -3y + 6x = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 15x = -9 \\ -3y + 6x = -9 \end{cases}$$

$$-9x = -18 \Rightarrow x = 2$$

$$y - 5x = -3 \xrightarrow{x=2} y - 10 = -3 \Rightarrow y = +7$$

ب $y = ax + b \xrightarrow{\substack{a=2 \\ b=-5}} y = 2x - 5$

الف $\frac{x+1}{5x-20} \Rightarrow 5x-20=0 \Rightarrow 5x=20 \Rightarrow x=4$

ب $\frac{1}{(x-y)} + \frac{2}{(x+y)} = \frac{1(x+y)}{(x-y)(x+y)} + \frac{2(x-y)}{(x-y)(x+y)}$

$$= \frac{x+y+2x-2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{3x-y}{(x-y)(x+y)} = \frac{3x-y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{6x^2}{5xy} \div \frac{10x}{y^3} = \frac{6x^2}{5xy} \times \frac{y^3}{10x} = \frac{6y^2}{50} = \frac{3y^2}{25}$$

ب $3x^3 + 2x^2 - 4x - 1 \mid x - 1$

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 - 4x - 1 \\ - (3x^3 - 3x^2) \\ \hline 5x^2 - 4x - 1 \\ - (5x^2 - 5x) \\ \hline x - 1 \\ - (x - 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

خارج قسمت $\rightarrow 3x^2 + 5x + 1$

باقی مانده $\rightarrow 0$

۱۳

برای یک نیم کره توپر داریم:

$$S = 3\pi r^2 = 3 \times \pi \times 1^2 = 3\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 1^3 = \frac{2}{3}\pi \text{ cm}^3$$

آزمون پایان نوبت دوم، خرداد ماه (۳)

پاسخنامه

۱

الف

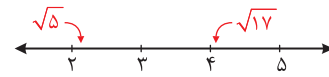
$$A = \{5, 6\}, B = \{5, 7\}$$

$$\Rightarrow A \cup B = \{5, 6, 7\} \Rightarrow n(A \cup B) = 3$$

ب

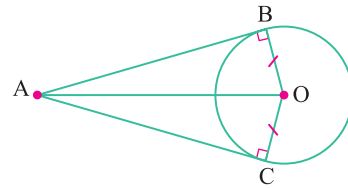
این کسر تا حد امکان ساده شده و مخرج آن فقط عامل اول ۲ یا ۵ دارد؛ پس نمایش اعشاری آن مختوم است.

حال اگر این اعداد را روی محور نشان دهیم، به صورت زیر خواهند بود:



بنابراین دو عدد گویای مورد نظر می‌توانند ۳ و ۴ باشند.

۷



مطابق شکل، از نقطه A خارج از دایره به مرکز O، دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم و نقاط تماس را B و C می‌نامیم. همچنین پاره خط OA و شعاع‌های OB و OC را رسم می‌کنیم. حال جدول فرض و حکم به صورت زیر خواهد بود:

| | |
|-----|---|
| فرض | $OB = OC = R, \hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$ (نقطه تماس) |
| حکم | $AB = AC$ |

اثبات: در دو مثلث قائم‌الزاویه AOB و AOC داریم:

$$\left. \begin{array}{l} OB = OC \text{ (فرض)} \\ OA = OA \text{ (مشترک)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(وض)}} \Delta AOB \cong \Delta AOC$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} AB = AC$$

۸

الف $5\sqrt{2} + 3\sqrt{54} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{27 \times 2} = 5\sqrt{2} + 9\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$

ب $\frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

ب $\frac{2x^{\frac{x}{2}} y^{\frac{y}{4}} z}{x^{\frac{x}{2}} y^{\frac{y}{4}} z^{\frac{z}{3}}} = 2xy$

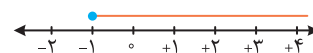
۹

الف $25x^2 - 30x + 9 = (5x)^2 - 2 \times (5x) \times (3) + (3)^2 = (5x - 3)^2$

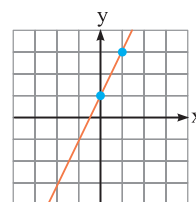
ب $(3x + 7)(3x - 4) = (3x)^2 + (7 - 4)(3x) + (7)(-4)$

$$= 9x^2 + 9x - 28$$

ب $2(x+2) \geq x+3 \Rightarrow 2x+4 \geq x+3 \Rightarrow 2x-x \geq -4+3 \Rightarrow x \geq -1$



۱۰



$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 3 \\ \hline \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$