

فهرست

FILM	پاسخ	درسنامه و سوالات
123 min	۱۲۰	۶ تا ۲۷
130 min	۱۳۵	۲۸ تا ۴۲
74 min	۱۴۷	۴۳ تا ۶۲
136 min	۱۶۰	۶۳ تا ۷۶
83 min	۱۶۹	۷۷ تا ۹۰
113 min	۱۷۷	۹۱ تا ۱۰۷
56 min	۱۸۵	۱۰۸ تا ۱۱۸

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر
فصل دوم: هندسه
فصل سوم: تابع
فصل چهارم: مثلثات
فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی
فصل ششم: حد و پیوستگی
فصل هفتم: آمار و احتمال

بارم‌بندی درس ریاضی ۲

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۶	۲
دوم	۶	۲/۵
سوم	۶	۲/۵
چهارم	۲	۳
	-	
پنجم	-	۳/۵
ششم	-	۳/۵
هفتم	-	۳
جمع	۲۰	۲۰

امتحان نهایی



آزمون ۱ (نوبت اول)	۱۹۲
آزمون ۲ (نوبت دوم)	۱۹۳
آزمون ۳ (نوبت دوم)	۱۹۴
پاسخ‌نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۳	۱۹۶

1

بخش



درستنامه

و سوالات تشریحی

فصل اول

هندسه تحلیلی و جبر

فصل اول کتاب شامل هندسه تحلیلی، معادله درجه دوم، سهمی، معادله گویا و معادله رادیکالی است. از این فصل در امتحان نوبت اول ۶ نمره و در امتحان خرداد، ۲ نمره و در شهریور و دی، ۲/۵ نمره سؤال مطرح می‌شود. این فصل دارای ۵ بسته است.

بسته ۴ و ۵



بسته ۳



بسته ۲



بسته ۱



برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

فیلم شب امتحان

بخش اول هندسه تحلیلی (معادله خط)

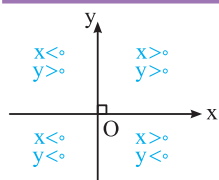
صفحه ۲ تا ۵ کتاب درسی

بسته اول



با معادله خط، رسم خط، نوشتن معادله خط، دو خط متقاطع، دو خط موازی و دو خط عمود آشنایی دارید. در این بسته، مطالب را یادآوری می‌کنیم و مسائلی را حل می‌کنیم.

الف معادله خط



برای تعیین یک نقطه از صفحه، از دستگاه محورهای مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم. این دستگاه از دو محور عمود بر هم $x'Ox$ (محور x ها) و $y'Oy$ (محور y ها) تشکیل شده است و این محورها صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر کدام از آن‌ها را یک ربع می‌نامند و به هر نقطه A از صفحه، یک زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی متناظر می‌شود. x را طول نقطه و y را عرض آن می‌نامند. علامت x و y در چهار ناحیه در شکل مقابل مشخص شده است:

نکته ۱ اگر نقطه‌ای روی محور x ها قرار داشته باشد، عرض آن صفر است، لذا مختصات آن به صورت $(x, 0)$ می‌باشد.

نکته ۲ اگر نقطه‌ای روی محور y ها قرار داشته باشد، طول آن صفر است، لذا مختصات آن به صورت $(0, y)$ می‌باشد.

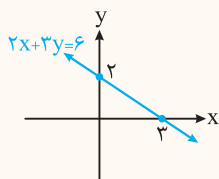
معادله خط: معادله یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به صورت $ax + by + c = 0$ است که در آن a و b هم‌زمان صفر نیستند، یعنی $a^2 + b^2 \neq 0$

ب رسم خط

می‌دانیم از هر دو نقطه متمایز، فقط یک خط می‌گذرد، بنابراین می‌توان با داشتن معادله یک خط و مشخص کردن مختصات ۲ نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم کرد.

سؤال نمودار خط به معادله $2x + 3y = 6$ را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

x	۰	۳
y	۲	۰



پاسخ در معادله به جای x ، دو مقدار دلخواه قرار می‌دهیم تا مقدار y به دست آید و از آن جا با مشخص شدن مختصات دو نقطه، خط را رسم می‌کنیم:

شیب خط

شیب یک خط برابر است با نسبت تفاضل عرض‌های هر دو نقطه دلخواه روی آن به تفاضل طول‌های همان دو نقطه. به عبارت دیگر اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه روی یک خط باشند و $x_A \neq x_B$ باشد، آن‌گاه:

$$\text{شیب خط} = m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-4)}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

مثال شیب خط گذرنده از نقاط $A(1, -4)$ و $B(3, 2)$ برابر است با:

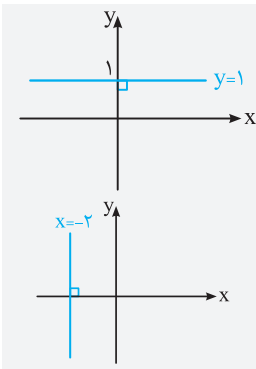
محاسبه شیب خط با داشتن معادله خط

۱ اگر معادله خط به صورت $ax + by + c = 0$ (یا $ax + by = c$) باشد و $b \neq 0$ ، آن‌گاه:

مثال شیب خط به معادله $2x + 3y = 1$ برابر $-\frac{2}{3}$ است. $-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}$

۲ اگر معادله خط به صورت $y = mx + h$ باشد، آن‌گاه شیب خط برابر m (ضریب x) است.

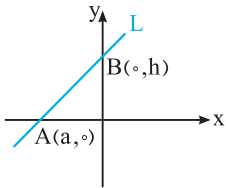
مثال شیب خط به معادله $y = -\frac{1}{4}x + 3$ برابر $m = -\frac{1}{4}$ است.



نکته ۱ اگر خط L موازی محور x ها باشد، در این صورت شیب خط برابر صفر است و اگر خط از نقطه (a, b) بگذرد، معادله آن به صورت $y = b$ است. به عنوان مثال، خط $y = 1$ موازی محور x ها است و شیب آن برابر صفر است.

۲ اگر خط L موازی محور y ها باشد، در این صورت برای خط L شیب تعریف نمی‌شود و اگر خط از نقطه (a, b) بگذرد، معادله آن به صورت $x = a$ است. به عنوان مثال، خط $x = -2$ موازی محور y ها است و این خط شیب ندارد.

طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط راست



با توجه به شکل مقابل، خط L محور x ها را در نقطه $A(a, 0)$ قطع کرده است، a را طول از مبدأ خط L می‌گوییم. هم‌چنین خط L محور y ها را در نقطه $B(0, h)$ قطع کرده است، h را عرض از مبدأ خط L می‌گوییم.

نکته معادله خط با شیب m و عرض از مبدأ h به صورت $y = mx + h$ می‌باشد.

حالا می‌فواهیم معادله خط را بنویسیم. در دو حالت می‌توانیم معادله خط را بنویسیم و باید در تمام مسائل نوشتن معادله خط، شرایط یکی از این دو حالت را در نظر بگیریم.

نوشتن معادله خط

حالت اول اگر شیب خط و نقطه‌ای از خط را داشته باشیم، می‌توانیم معادله آن را بنویسیم. هرگاه شیب خط m باشد و خط از نقطه $A(x_1, y_1)$ بگذرد،

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

آن‌گاه معادله خط از رابطه مقابل به دست می‌آید:

سؤال معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(-1, 3)$ بگذرد و شیب آن برابر ۴ باشد.

پاسخ در رابطه $y - y_1 = m(x - x_1)$ ، به جای x_1 عدد -1 ، به جای y_1 عدد 3 و به جای m ، عدد 4 قرار می‌دهیم. داریم:

$$y - 3 = 4(x + 1) \Rightarrow y - 3 = 4x + 4 \Rightarrow y = 4x + 4 + 3 \Rightarrow y = 4x + 7$$

حالت دوم اگر مختصات دو نقطه از خط را داشته باشیم، می‌توانیم معادله آن را بنویسیم. هرگاه خطی از نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ بگذرد، آن‌گاه

شیب خط از رابطه $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ به دست می‌آید و با در نظر گرفتن یکی از نقاط A یا B روی خط، مانند حالت اول معادله خط را می‌نویسیم و یا می‌توان مستقیماً از رابطه مقابل استفاده کرد:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad x_2 \neq x_1$$

سؤال معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $(2, -5)$ و $(-2, 7)$ بگذرد.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - (-5)}{-2 - 2} = \frac{12}{-4} = -3, A(2, -5) \Rightarrow y - (-5) = -3(x - 2) \Rightarrow y + 5 = -3x + 6 \Rightarrow y = -3x + 1$$

پاسخ

نکته اگر $x_2 = x_1$ ، آن‌گاه معادله خط گذرنده از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) به صورت $x = x_1$ است و اگر $y_2 = y_1$ ، آن‌گاه معادله خط به صورت $y = y_1$ می‌باشد.

ت وضعیت نسبی دو خط در صفحه

دو خط در صفحه یا موازی اند و یا متقاطع.

حالت اول: دو خط موازی

اگر دو خط همدیگر را قطع نکنند و یا برهم منطبق باشند، دو خط موازی اند.

نکته اگر دو خط با هم موازی باشند، آن‌گاه شیب آن‌ها با هم برابر است و برعکس.

سؤال معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(3, -4)$ بگذرد و موازی خط $5x - 3y = 1$ باشد.

پاسخ شیب خط $5x - 3y = 1$ برابر $\frac{5}{3}$ است. از آن جایی که شیب دو خط موازی با هم برابرند، پس باید معادله خطی را بنویسیم که از نقطه $(3, -4)$ می‌گذرد و شیب آن برابر $\frac{5}{3}$ است:

$$y - (-4) = \frac{5}{3}(x - 3) \xrightarrow{\times 3} 3(y + 4) = 5(x - 3) \Rightarrow 3y + 12 = 5x - 15 \Rightarrow 3y - 5x + 27 = 0$$

حالت دوم: دو خط متقاطع

اگر دو خط در صفحه موازی نباشند، دو خط متقاطع اند. در واقع اگر دو خط در صفحه همدیگر را در یک نقطه قطع کنند، آن‌گاه می‌گوییم دو خط متقاطع هستند و اگر $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ معادله دو خط در صفحه باشند، آن‌گاه با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی

محل تلاقی دو خط به دست می‌آید.

سؤال معادله خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط به معادلات $x + 2y = -5$ و $2x - y = 0$ و نقطه $(3, 5)$ می‌گذرد.

پاسخ ابتدا محل تلاقی دو خط را با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x + 2y = -5 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -5 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x = -5 \Rightarrow x = -1 \xrightarrow{2x - y = 0} -2 - y = 0 \Rightarrow y = -2$$

بنابراین نقطه $(-1, -2)$ محل تلاقی دو خط است. برای نوشتن معادله خط داریم:

$$\begin{cases} A(-1, -2) \\ B(3, 5) \end{cases} \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 + 2}{3 + 1} = \frac{7}{4} \Rightarrow y + 2 = \frac{7}{4}(x + 1) \xrightarrow{\times 4} 4(y + 2) = 7(x + 1) \Rightarrow 4y - 7x + 1 = 0$$

دو خط عمود بر هم

یکی از حالت‌های متقاطع بودن دو خط، عمود بودن آن است. با توجه به ویژگی مهم آن، سوالات فوبی مطرح می‌شود.

نکته اگر m و m' شیب دو خط باشند و $mm' = -1$ ، آن‌گاه دو خط برهم عمودند. بنابراین شیب دو خط عمود بر هم، عکس و قرینه هم می‌باشند.

سؤال معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-1, 4)$ بگذرد و بر خط به معادله $y = -2x + 3$ عمود باشد.

پاسخ شیب خط $y = -2x + 3$ برابر $m = -2$ است، پس شیب خط عمود بر این خط برابر $\frac{1}{2}$ است. معادله خطی که از نقطه $(-1, 4)$ بگذرد و شیب آن $\frac{1}{2}$ باشد، به صورت زیر است:

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x + 1) \xrightarrow{\times 2} 2(y - 4) = (x + 1) \Rightarrow 2y - 8 = x + 1 \Rightarrow 2y - x - 9 = 0$$

● در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱. از هر دو نقطه متمایز یک خط عبور می کند.
۲. اگر خط L ، محور x ها را در نقطه با طول a قطع کند، آن گاه a ، خط L نامیده می شود و اگر خط L ، محور y ها را در نقطه با عرض b قطع کند، آن گاه b ، خط L نامیده می شود.
۳. معادله خط گذرنده از نقطه $(7, 0)$ و شیب -2 برابر است.
۴. دو خط موازی دارای برابر هستند.
۵. شیب خط $11 = 2x + 5y$ برابر است.
۶. شیب هر خط موازی با محور x ها برابر است.
۷. نمودار هر یک از خط های زیر را رسم کنید.

(مشابه کاردرکلاس ۲ صفحه ۲ کتاب درسی)

$$y = -2x + 5 \quad \text{ا} \quad 2x - y = 1 \quad \text{ب} \quad 2x + 4y = 12 \quad \text{پ} \quad x = -1 \quad \text{ت} \quad y = 4 \quad \text{ث}$$

۸. در هر یک از قسمت های زیر، معادله خط را بنویسید.

ا) شیب خط -4 و عرض از مبدأ آن برابر 2 باشد. ب) شیب خط 5 باشد و از نقطه $(-3, -2)$ بگذرد.

پ) خط از نقاط $(-1, 2)$ و $(1, 0)$ بگذرد.

(مشابه کاردرکلاس ۶ صفحه ۳ کتاب درسی)

ت) خط از نقطه $(0, 3)$ بگذرد و با خط $2 = 5x + 3y$ موازی باشد.

ث) خط از نقطه $(2, 4)$ بگذرد و عمود بر خط به معادله $4 = 3x + 2y$ باشد.

ج) طول از مبدأ خط 2 و عرض از مبدأ آن 5 باشد.

۹. معادله خط گذرنده از نقطه $(1, -4)$ و موازی خط گذرنده از دو نقطه $(1, 5)$ و $(3, -4)$ را بنویسید.

۱۰. معادله خط گذرنده از نقطه $(2, 3)$ و عمود بر خط گذرنده از دو نقطه $(0, 2)$ و $(6, -1)$ را بنویسید.

۱۱. معادله خط گذرنده از نقطه $(-2, 3)$ و نقطه تلاقی دو خط به معادلات $1 = 4x - y$ و $7 = x + 2y$ را بنویسید.

(مشابه کاردرکلاس ۱ صفحه ۴ کتاب درسی)

۱۲. وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید. (موازی، عمود یا متقاطع غیرعمود)

$$L_1: -3x + 5y = 1, \quad L_2: 3x - y = 1, \quad L_3: 5x + 2y = 7, \quad L_4: 6x = 2y + 5$$

(مشابه کاردرکلاس ۲ صفحه ۴ کتاب درسی)

۱۳. دو خط به معادلات $4 = 3x + (2m + 1)y$ و $11 = mx + 7y$ داده شده است.

ا) مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط با هم موازی باشند.

ب) مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط بر هم عمود باشند.

۱۴. مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط به معادلات $3 = (-m + 4)y + 2x$ و $7 = (m^2 + 4)y + (5 + 3m)x$ با هم موازی باشند.

۱۵. خط گذرنده از دو نقطه $(m, 2m)$ و $(-1, 1)$ بر خط به معادله $7 = 2x - 5y$ عمود است. مقدار m را به دست آورید.

(مشابه کاردرکلاس ۳ صفحه ۴ کتاب درسی)

۱۶. مربع $ABCD$ که $A(4, 1)$ و $B(6, 2)$ دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است.

ا) شیب ضلع AB را بیابید و معادله آن را بنویسید.

ب) شیب ضلع BC را به دست آورید و معادله آن را بنویسید.

پ) اگر $D(-1, 1)$ یک رأس دیگر این مربع باشد، مختصات رأس C را مشخص کنید.

۱۷. مقدار a را طوری به دست آورید که نقاط $(1, 3)$ ، $(-3, 5)$ و $(-1, 2a)$ روی یک خط راست قرار داشته باشند.

۱۸. مقدار m را طوری به دست آورید که سه خط به معادله های $-1 = x + 3y$ ، $8 = 3x - 2y$ و $7 = (m + 1)x + my$ از یک نقطه بگذرند.

۱۹. مربع $ABCD$ که $A(-3, -1)$ و $B(0, 2)$ دو رأس مجاور آن هستند، مفروض است.

ا) معادله ضلع AB را بنویسید.

ب) اگر $C(3, a)$ و $D(0, 2a - 2)$ دو رأس دیگر مربع باشند، مختصات رأس های C و D را بیابید.



در این بسته، مسائلی چون فاصله دو نقطه، ممتصات نقطه وسط پاره خط، قرینه نقطه نسبت به نقطه دیگر، معادله عمود منصف و فاصله نقطه از خط را مطرح و به آن‌ها پاسخ می‌دهیم.

الف فاصله دو نقطه

۱ اگر A و B دو نقطه هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه:

$$AB = |x_B - x_A|$$

۲ اگر C و D دو نقطه هم‌طول باشند، آن‌گاه:

$$CD = |y_D - y_C|$$

مثال فاصله بین دو نقطه هم‌طول A(۵, -۲) و B(۵, ۷) برابر است با:

$$AB = |7 - (-2)| = |7 - (-2)| = 9$$

۳ فاصله دو نقطه A(x_۱, y_۱) و B(x_۲, y_۲) برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

سؤال ۱ فاصله بین دو نقطه (۳, ۲) و (-۱, ۰) را به دست آورید.

۲ اگر نقاط A(-۱, ۴) و B(۳, ۳) دو رأس مجاور یک مربع باشند، محیط و مساحت مربع را به دست آورید.

پاسخ ۱ با فرض A(۳, ۲) و B(-۱, ۰) داریم:

$$\begin{matrix} x_2 & y_2 & x_1 & y_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{matrix}$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

۲ فاصله بین دو نقطه A و B، طول ضلع مربع می‌باشد:

$$a = BA = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

$$a^2 = 17 = \text{مساحت مربع} \quad \text{و} \quad 4a = 4\sqrt{17} = \text{محیط مربع}$$

نکته فاصله نقطه A(x_۱, y_۱) تا مبدأ مختصات برابر $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ است. به عنوان مثال، فاصله نقطه (۶, ۸) تا مبدأ مختصات برابر

$$\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ می‌باشد.}$$

دایره: مجموعه‌ای از نقاط در صفحه که فاصله آن‌ها از نقطه‌ای ثابت در همان صفحه به نام مرکز، مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را شعاع دایره می‌گوییم و با R نشان می‌دهیم.

• اگر مختصات نقطه‌ای روی دایره و مرکز دایره داده شده باشد، فاصله بین این دو نقطه برابر اندازه شعاع دایره است.

سؤال دایره‌ای به مرکز (-۱, ۳) از نقطه (۵, ۲) گذشته است. شعاع این دایره را به دست آورید. آیا نقطه (۶, ۲) بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

پاسخ فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر اندازه شعاع دایره است. پس فاصله نقطه A(۵, ۲) روی دایره از نقطه O'(-۱, ۳) (مرکز دایره) برابر R است:

$$R = O'A = \sqrt{(5 - (-1))^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

اگر فاصله نقطه B(۶, ۲) از نقطه O'(-۱, ۳) برابر $R = \sqrt{13}$ شود، آن‌گاه نقطه B روی این دایره قرار دارد:

$$O'B = \sqrt{(6 - (-1))^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} \neq \sqrt{13} \Rightarrow \text{نقطه B روی این دایره قرار ندارد.}$$

ب مختصات نقطه وسط پاره خط

اگر بفوایم مختصات وسط دو نقطه و یا یک پاره خط را وقتی که مختصات آن‌ها را در اختیار داریم، به دست بیاوریم، از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

۱ اگر A و B دو نقطه دلخواه روی محور x ها و M وسط AB باشد، آن‌گاه:

$$y_N = \frac{y_C + y_D}{2}$$

۲ اگر C و D دو نقطه دلخواه روی محور y ها و N وسط CD باشد، آن‌گاه:

۳ فرض کنیم A و B دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات و M وسط AB باشد. در این صورت:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

سؤال نقاط $A(5, -1)$ ، $B(-1, 3)$ و $C(3, 5)$ رأس‌های مثلث ABC هستند.

۱ مختصات M، نقطه وسط ضلع AB را مشخص کنید.

۲ طول میانه CM را به دست آورید.

۳ معادله میانه CM را بنویسید.

پاسخ ۱ M وسط پاره خط AB است، بنابراین:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{5 - 1}{2}, \frac{-1 + 3}{2} \right) = (2, 1)$$

۲ طول پاره خط CM را با داشتن مختصات دو نقطه C و M به دست می‌آوریم:

$$C(3, 5), M(2, 1) \Rightarrow CM = \sqrt{(2 - 3)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

۳ معادله خط گذرنده از نقاط C و M، معادله میانه CM است:

$$m_{CM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 5}{2 - 3} = \frac{-4}{-1} = 4, C(3, 5)$$

$$CM \text{ معادله: } y - 5 = 4(x - 3) \Rightarrow y - 5 = 4x - 12 \Rightarrow y - 4x + 7 = 0$$

پ قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر

اگر نقطه A را به نقطه M وصل کنیم و به همان اندازه امتداد دهیم تا به نقطه A' برسیم، آن‌گاه A' قرینه نقطه A نسبت به نقطه M است.



نکته ۱ اگر A' قرینه نقطه A (x_A, y_A) نسبت به نقطه $M(x_M, y_M)$ باشد، آن‌گاه M وسط پاره خط AA' است و مختصات نقطه A' از فرمول

$$A'(2x_M - x_A, 2y_M - y_A)$$

مقابل به دست می‌آید:

مثال قرینه نقطه $A(3, -1)$ نسبت به نقطه $M(2, 4)$ ، نقطه A' است که در آن:

$$A'(2x_M - x_A, 2y_M - y_A) = (2 \times 2 - 3, 2 \times 4 - (-1)) = (1, 9)$$

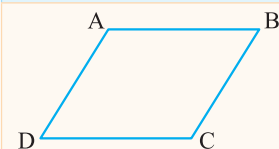
۲ قرینه نقطه $P(\alpha, \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطه $P'(-\alpha, -\beta)$ است.

یکی از مسائلی که در تمرینات کتاب مطرح شده است این است که مختصات سه رأس یک مستطیل داده شده است و می‌فوایم مختصات رأس چهارم را به دست بیاوریم. برای این کار از نکته بعری که برای متوازی‌الاضلاع گفته می‌شود، استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

نکته اگر چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه:

سؤال اگر $A(2, 1)$ ، $B(3, 4)$ و $C(-1, 5)$ سه رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ با قطر AC باشد، مختصات رأس D را به دست آورید.



پاسخ مطابق شکل روبه‌رو، داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 1 = 3 + x_D \\ 1 + 5 = 4 + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = 2 \end{cases} \Rightarrow D(-2, 2)$$

تذکر مربع، مستطیل و لوزی حالت خاصی از متوازی الاضلاع هستند، بنابراین نکته قبل برای آن‌ها نیز صادق است.

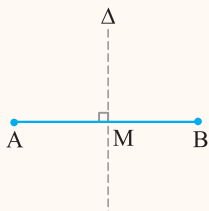
ت عمود منصف یک پاره خط

عمود منصف: عمود منصف پاره خط AB ، خطی است که از وسط پاره خط AB می‌گذرد و بر پاره خط AB عمود است.

نوشتن معادله عمود منصف یک پاره خط

برای نوشتن معادله عمود منصف پاره خط AB ، ابتدا مختصات نقطه M وسط AB را مشخص می‌کنیم و سپس شیب آن را که قرینه و عکس شیب خط گذرنده از نقاط A و B است، به دست می‌آوریم.

سؤال دو نقطه $A(3, 6)$ و $B(1, 2)$ مفروضند. معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.



پاسخ عمود منصف پاره خط AB از وسط آن می‌گذرد و بر آن عمود است:

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{6+2}{2} \right) = (2, 4)$$

شیب خط Δ ، عکس و قرینه شیب خط AB است:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 6}{1 - 3} = 2 \Rightarrow m_{\Delta} = \frac{-1}{m_{AB}} = -\frac{1}{2}$$

معادله خط گذرنده از نقطه $(2, 4)$ با شیب $-\frac{1}{2}$ برابر است با:

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 2) \xrightarrow{\times 2} 2y - 8 = -x + 2 \Rightarrow 2y + x = 10$$

نکته یکی از ویژگی‌های مهم عمود منصف آن است که فاصله هر نقطه روی آن از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

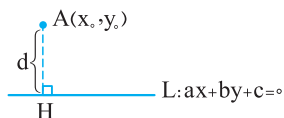
یکی از فرمول‌های فیثاغورس مهم که باید آن را حفظ کنیم، فاصله نقطه از خط است. از این فرمول علاوه بر به دست آوردن فاصله نقطه از خط، برای به دست آوردن فاصله بین دو خط موازی و طول ارتفاع در مثلث استفاده می‌کنیم.

ث فاصله نقطه از خط

● اگر A نقطه‌ای خارج از خط L باشد، فاصله A تا L برابر است با طول پاره خطی که از عمود A بر L رسم می‌شود، یعنی کوتاه‌ترین مسیر از A به L . از فرمول زیر برای محاسبه فاصله نقطه از خط راست استفاده می‌کنیم:

● اگر مختصات نقطه A به صورت (x_0, y_0) و معادله خط L به صورت $ax + by + c = 0$ باشد، آن‌گاه:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



● برای استفاده از فرمول بالا، باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱ همه اجزای معادله خط در یک طرف تساوی باشند.

۲ در معادله خط به جای x ، طول نقطه (x_0) و به جای y ، عرض نقطه (y_0) را قرار می‌دهیم و مساوی صفر را حذف می‌کنیم و حاصل مثبت را در صورت کسر قرار می‌دهیم.

۳ ضرایب x (یعنی a) و y (یعنی b) را به توان ۲ می‌رسانیم و جذر آن را به دست می‌آوریم و حاصل را در مخرج کسر قرار می‌دهیم.

۴ نسبت عدد قسمت (۲) به قسمت (۳) فاصله بین نقطه و خط می‌باشد.

مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۹ کتاب درسی

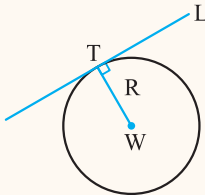
سؤال ۱ فاصله نقطه $A(3, 2)$ از خط به معادله $4x + 3y + 1 = 0$ را به دست آورید.

۲ خط $5x - 12y + 4 = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. اندازه شعاع دایره را بیابید.

در معادله به جای x ، ۳ و به جای y ، ۲ قرار می‌دهیم.

$$d = \frac{|4(3) + 3(2) + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{19}{\sqrt{25}} = \frac{19}{5}$$

ضریب x ضریب y



۲ اگر از مرکز دایره، خطی بر خط مماس رسم کنیم، در نقطه تماس، خط رسم شده بر خط مماس بر دایره عمود است.

پس فاصله W تا خط، برابر اندازه شعاع دایره است.

$$R = \frac{|5(2) - 12(-1) + 4|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{|10 + 12 + 4|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{26}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2$$

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته ۱ فاصله مبدأ مختصات از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

۲ فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $x = a$ برابر $|x_0 - a|$ و از خط $y = b$ برابر $|y_0 - b|$ است.

مثال فاصله نقطه $A(3, 4)$ از خط $x = 2$ برابر $|3 - 2| = 1$ و از خط $y = -5$ برابر $|4 - (-5)| = 9$ می‌باشد.

فاصله بین دو خط موازی

برای به دست آوردن فاصله بین دو خط موازی، یک نقطه دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر به دست آورید.

سؤال فاصله بین دو خط موازی به معادلات $x + y = 5$ و $x + y - 3 = 0$ را به دست آورید.

$$x = 0 \Rightarrow y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(0, 3)$$

پاسخ نقطه دلخواه روی خط $x + y - 3 = 0$ مشخص می‌کنیم:

فاصله نقطه $A(0, 3)$ تا خط به معادله $x + y - 5 = 0$ ، فاصله بین دو خط موازی می‌باشد:

$$d = \frac{|0 + 3 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

نکته ۱ برای به دست آوردن فاصله بین دو خط موازی، ابتدا ضرایب دو خط را یکسان می‌کنیم و داریم:

$$\begin{aligned} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{aligned} \xrightarrow{\substack{a=a' \\ b=b'}} d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

دو خط موازی هستند.

پریش‌های تشریحی

بسته
۲

(مشابه تمرین ۲ کتاب درسی صفحه ۹)

۲۰. اگر $A(3, -2)$ و $B(-1, 6)$ دو نقطه باشند،

آ طول پاره خط AB را به دست آورید.

ب فاصله مبدأ مختصات را از وسط AB به دست آورید.

(مشابه کاردرکلاس ۱ صفحه ۶ کتاب درسی و تمرین ۳ صفحه ۹)

۲۱. نقاط $A(-4, 4)$ ، $B(0, 4)$ و $C(-2, 2)$ را در نظر بگیرید.

آ مثلث ABC را رسم کنید.

ب نشان دهید مثلث ABC مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

پ مساحت مثلث را به دست آورید.

۲۲. نوع مثلث با رأس $(2, 0)$ ، $(-1, 4)$ و $(6, -3)$ را مشخص کنید.

۲۳. اگر نقاط $A(2, 4)$ و $B(5, 8)$ دو رأس مجاور یک مربع باشند، محیط و مساحت مربع را به دست آورید.

۲۴. شخصی برای انجام یک عملیات بانکی نیاز به یک عابربانک دارد. اگر موقعیت این شخص نقطه $(4, -2)$ باشد و سه عابربانک با موقعیت‌های $(2, 5)$ ،

$(1, 4)$ و $(-3, 3)$ وجود داشته باشد، این شخص برای رسیدن هرچه سریع‌تر به عابربانک، کدام یک را باید انتخاب کند؟ (مشابه کاردرکلاس ۲ صفحه ۶ کتاب درسی)

۲۵. دایره‌ای به مرکز $(-1, 2)$ ، از نقطه $(4, 2)$ گذشته است. شعاع دایره را محاسبه کنید. کدام یک از نقاط $(5, -3)$ و $(-1, 4)$ روی این دایره قرار دارند؟ چرا؟

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۹ کتاب درسی)

۲۶. دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(1, -3)$ و $B(5, -1)$ هستند.

آ) اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب) آیا نقطه $(0, 2)$ روی این دایره قرار دارد؟ چرا؟

(مشابه کاردرکلاس ۱ صفحه ۷ کتاب درسی)

۲۷. مثلث با رأس‌های $A(-2, 4)$ ، $B(3, -2)$ و $C(5, 4)$ را در نظر بگیرید.

آ) مختصات M ، نقطه وسط ضلع BC را مشخص کنید.

ب) طول میانه AM را به دست آورید.

پ) معادله میانه AM را بنویسید.

(مشابه کاردرکلاس ۲ صفحه ۷ کتاب درسی)

۲۸. با توجه به مختصات نقاط داده شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

آ) نقطه $M(5, -1)$ وسط پاره خط واصل بین دو نقطه $A(3, 2)$ و B است. مختصات نقطه B را بیابید.

ب) قرینه نقطه $A(-3, 4)$ را نسبت به نقطه $M(-1, 2)$ به دست آورید.

پ) قرینه نقطه B را نسبت به نقطه $(3, 0)$ مشخص کنید.

ت) قرینه نقطه $(-3, 5)$ را نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید.

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۹ کتاب درسی)

۲۹. نقاط $A(-2, -1)$ ، $B(2, 1)$ و $C(-3, 1)$ سه رأس از یک مستطیل هستند.

آ) مختصات رأس چهارم آن را مشخص کنید.

ب) مساحت مستطیل را به دست آورید.

۳۰. دو نقطه $A(3, -4)$ و $B(-1, 0)$ مفروض‌اند. معادله عمودمنصف پاره خط AB را بنویسید.

۳۱. نقاط $(2, 0)$ و $(4, 2)$ دو رأس مقابل یک مربع هستند. معادله قطرهای این مربع را بنویسید.

۳۲. نقاط $A(3, 1)$ ، $B(-1, 3)$ ، $C(-4, -1)$ و $D(4, -1)$ مفروض‌اند. نقطه‌ای مشخص کنید که فاصله آن از هر چهار نقطه به یک اندازه باشد.

(مشابه تمرین ۶ صفحه ۹ کتاب درسی)

۳۳. فاصله نقطه $(4, -6)$ را از دو خط به معادلات $x = -2$ و $y = 5$ به دست آورید.

(مشابه کاردرکلاس صفحه ۹ کتاب درسی)

۳۴. در هر قسمت مختصات یک نقطه و معادله یک خط داده شده است. فاصله نقطه تا خط را به دست آورید.

(مشابه کاردرکلاس صفحه ۹ کتاب درسی)

$$\text{آ) } 2x + 4y + 1 = 0, (2, -1) \quad \text{ب) } 2x = y - 4, (-4, 5)$$

۳۵. یکی از اضلاع مربع روی خط به معادله $2x = y - 3$ واقع است. اگر نقطه $(3, 1)$ یکی از رأس‌های این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

(مشابه تمرین ۷ صفحه ۹ کتاب درسی)

۳۶. اندازه شعاع و مساحت دایره به مرکز $(-1, 2)$ و مماس بر خط به معادله $2y + x = 5$ را به دست آورید.

(مشابه کاردرکلاس ۲ صفحه ۹ کتاب درسی)

۳۷. در هر یک از قسمت‌های زیر، ابتدا نشان دهید دو خط داده شده با هم موازیند و سپس فاصله بین آن‌ها را به دست آورید.

(مشابه تمرین ۸ صفحه ۹ کتاب درسی)

$$\text{آ) } 4x - 2y = 5, 2x - y = 11 \quad \text{ب) } 2x + 2y = 7, x = -y + 4$$

۳۸. مثلث ABC را با رأس‌های $A(2, 0)$ ، $B(-1, 4)$ و $C(-2, 1)$ در نظر بگیرید.

آ) طول ارتفاع AH را به دست آورید.

ب) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

۳۹. اگر مسافت فیزیکی هر درجه طول و عرض جغرافیایی ۱۱۰ کیلومتر و طول و عرض جغرافیایی شهر A به ترتیب 45° و 37° و طول و عرض جغرافیایی شهر B به ترتیب 31° و 37° باشد، فاصله بین دو شهر A و B چند کیلومتر است؟

(مشابه تمرین ۹ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

۴۰. اگر قرینه نقطه $(a + 1, b - 3)$ نسبت به نقطه $(3, 5)$ ، نقطه $(b - 2, -a)$ باشد. مقادیر a و b را به دست آورید.

۴۱. فاصله نقطه $(3, 4)$ از خط $x + 2y = a$ برابر $\frac{3}{\sqrt{10}}$ است. مقدار a را به دست آورید.

۴۲. خطوط $4x + 4y = 1$ و $4x - 3y = 5$ معادلات دو ضلع یک مستطیل و $A(1, 1)$ یک رأس آن است. مساحت مستطیل را به دست آورید.

۴۳. مثلث ABC با سه رأس $A(1, 4)$ ، $B(-2, -2)$ و $C(4, 2)$ مفروض است.

آ) معادله میانه وارد بر ضلع BC را به دست آورید.

ب) طول میانه AM را به دست آورید.

پ) معادله ارتفاع BH را محاسبه کنید.

ت) نقطه تلاقی میانه AM و ارتفاع BH را به دست آورید.

ث) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

معادله درجه دوم

صفحه ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی

بسته سوم



با حل معادله درجه دوم در سال گذشته آشنا شده‌ایم. در این قسمت برای یادآوری هر ۴ روشی را که برای حل معادله استفاده می‌شود بیان می‌کنیم. این بسته شامل روش تغییر متغیر برای حل معادله، روابط بین ریشه‌ها و تشکیل معادله درجه دوم می‌باشد.

معادله درجه دوم

هر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن a, b, c اعداد حقیقی و $a \neq 0$ باشد، یک معادله درجه دوم می‌نامیم.

روش‌های حل معادله درجه دوم

۱. روش تجزیه

ویژگی حاصل ضرب صفر: اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB = 0$ ، آن‌گاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است. به عبارت دیگر:

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

در حل معادله درجه دوم به روش تجزیه، ابتدا معادله درجه دوم را به حاصل ضرب دو عبارت جبری تجزیه کرده و سپس از ویژگی فوق استفاده می‌کنیم.

سؤال معادله $x^2 + 5x + 6 = 0$ را به روش تجزیه حل کنید.

پاسخ عبارت درجه دوم $x^2 + 5x + 6$ را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم. باید دو عدد مشخص کنیم که حاصل ضرب آن‌ها برابر ۶ و حاصل جمع آن‌ها برابر ۵ باشد. این دو عدد، ۲ و ۳ هستند. بنابراین:

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-3 \end{cases}$$

۲. روش ریشه‌گیری

ابتدا نکته زیر را که به قاعده ریشه‌گیری معروف بوده و در حل معادله درجه دوم به کار می‌رود، بیان می‌کنیم:

$$x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

نکته! فرض کنید a یک عدد حقیقی و $a \geq 0$ باشد، در این صورت:

اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، $b = 0$ و اعداد a و c مختلف‌العلامه باشند، برای یافتن ریشه‌های این معادله، می‌توان از این روش استفاده کرد. در واقع داریم:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

توجه کنید که چون طبق فرض a و c مختلف‌العلامه هستند، پس $-\frac{c}{a}$ مثبت بوده و در نتیجه معادله دارای دو جواب قرینه می‌باشد. بدیهی است که اگر a و c هم علامت باشند، معادله در این حالت ریشه نخواهد داشت.

سؤال معادله $(2x-1)^2 = 25$ را به روش ریشه‌گیری حل کنید.

$$(2x-1)^2 = 25 \xrightarrow{\text{روش ریشه‌گیری}} 2x-1 = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

پاسخ هر یک از معادله‌های $2x-1=5$ و $2x-1=-5$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x-1=5 \\ 2x-1=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=5+1 \\ 2x=-5+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=6 \\ 2x=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

۳. روش مربع کامل

مراحل حل یک معادله درجه دوم به روش مربع کامل، به صورت زیر است:

- ۱ جملات شامل مجهول x را در یک طرف نگه داشته و عدد ثابت را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم.
- ۲ اگر ضریب x^2 عددی غیر از یک باشد، طرفین معادله را بر این ضریب تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 برابر یک شود.
- ۳ به طرفین معادله، مربع نصف ضریب x را اضافه می‌کنیم تا یک طرف معادله به مربع کامل تبدیل شود.
- ۴ اگر دو طرف معادله مثبت باشد، به روش ریشه‌گیری ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم.

سؤال معادله $x^2 + 4x = 0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ به دو طرف معادله عدد ۴ را اضافه می‌کنیم ($x^2 = 4$) به توان ۲ $\rightarrow 2 \rightarrow 2 \div 2 = 4$ ضریب (X):

$$x^2 + 4x + 4 = 4 \Rightarrow (x+2)^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} x+2 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x+2=2 \\ x+2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases}$$

نکته در حل معادلات درجه دوم به روش مربع کامل، عبارت $x^2 + Ax = (x + \frac{A}{2})^2 - (\frac{A}{2})^2$ را می‌توان با استفاده از فرمول $x^2 + Ax = (x + \frac{A}{2})^2 - (\frac{A}{2})^2$ به مربع کامل تبدیل کرد.

۴. روش فرمول کلی (مبین یا دلتا)

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، به عبارت $b^2 - 4ac$ که وجود ریشه‌های معادله به علامت آن بستگی دارد، **مبین یا دلتای** معادله می‌گوییم و آن را با حرف Δ نمایش می‌دهیم. در این صورت با توجه به علامت Δ ، داریم:

اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد.

اگر $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ باشد، معادله دارای یک ریشه است که به آن ریشه مضاعف یا مکرر مرتبه دوم می‌گوییم و ریشه مضاعف معادله برابر است با:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

اگر $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است که از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

سؤال ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x + 1 = 0$ را با فرمول کلی به دست آورید.

پاسخ در معادله داده شده، $a = 2$ ، $b = -5$ و $c = 1$ می‌باشد. مقدار Δ را از فرمول $\Delta = b^2 - 4ac$ به دست می‌آوریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(2) = 25 - 8 = 17 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{17}}{2(2)} = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \\ \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{17}}{2(2)} = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

روش تغییر متغیر برای حل معادله

گاهی اوقات با معادلاتی مواجه می‌شویم که درجه دوم نیستند، ولی با یک تغییر متغیر می‌توان آن‌ها را به معادله درجه دوم تبدیل کرد.

سؤال معادله $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ را حل کنید.

پاسخ اگر x^2 را برابر A در نظر بگیریم، آن‌گاه معادله اصلی به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌شود:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 - 5(x^2) + 4 = 0 \xrightarrow{x^2=A} A^2 - 5A + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (A-1)(A-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A-1=0 \Rightarrow A=1 \\ A-4=0 \Rightarrow A=4 \end{cases}$$

به جای A، x^2 قرار می‌دهیم و سپس مقادیر X را به روش ریشه‌گیری به دست می‌آوریم:

$$A=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1, A=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

گاهی اوقات به دست آوردن مقدار دقیق ریشه‌های معادله درجه دوم، اهمیتی ندارد و فقط مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها اهمیت دارد.

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) باشند، آن‌گاه:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad (\text{مجموع دو ریشه}) \quad P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a} \quad (\text{حاصل ضرب دو ریشه})$$

سؤال ۱ بدون حل معادله $3x^2 - 9x + 2 = 0$ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله را به دست آورید.

۲ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 7x + 1 = 0$ باشند، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

۲ $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

پاسخ ۱ در معادله داده شده، $a = 3$ ، $b = -9$ ، $c = 2$ است. جمع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-9}{3} = \frac{9}{3} = 3, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$

۲ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله $x^2 - 7x + 1 = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-7}{1} = 7, \quad P = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{7}{1} = 7$$

۳ عبارت $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ را برابر A در نظر می‌گیریم و حاصل A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} A^2 = (\sqrt{\alpha})^2 + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + (\sqrt{\beta})^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta$$

$$= \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P} = 7 + 2\sqrt{1} = 7 + 2 = 9 \xrightarrow{\text{جذری می‌گیریم}} A = \pm 3$$

چون A عددی مثبت است، پس داریم:

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 3$$

در بعضی از مسائل می‌توانیم دو عددی را مشخص کنیم که مجموع و حاصل ضرب آن‌ها را می‌دانیم. برای این کار باید معادله درجه دومی تشکیل دهیم. با حل معادله، ریشه‌های به دست آمده همان دو عدد مورد نظر هستند.

نوشتن معادله درجه دوم با داشتن S و P

اگر α و β ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، آن‌گاه برای نوشتن معادله، ابتدا S (مجموع ریشه‌ها) و P (حاصل ضرب ریشه‌ها) را به دست می‌آوریم و سپس معادله مقابل را تشکیل می‌دهیم:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

سؤال معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $3 + \sqrt{5}$ و $3 - \sqrt{5}$ باشند.

پاسخ با فرض $\alpha = 3 + \sqrt{5}$ و $\beta = 3 - \sqrt{5}$ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$S = \alpha + \beta = (3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5}) = 6, \quad P = \alpha\beta = (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4$$

$$\text{معادله: } x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$

۴۴. معادله های درجه دوم زیر را از روش خواسته شده حل کنید.

ا) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ (روش کلی)

ب) $-2x^2 + 7x + 1 = 0$ (روش کلی)

پ) $x^2 + 6x = 0$ (مربع کامل)

ت) $16 = (3x - 1)^2$ (روش ریشه گیری)

ث) $x^2 - 4x + 3 = 0$ (تجزیه)

ج) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (تجزیه)

۴۵. هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

ا) $5x^4 - x^2 - 4 = 0$ ب) $4x^4 - 7x^2 - 2 = 0$ پ) $-2x^6 + 11x^3 + 4 = 0$

۴۶. بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله $5x^2 - 11x + 1 = 0$ را به دست آورید.

۴۷. اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 8x + 4 = 0$ باشند، بدون حل معادله، حاصل هر یک از عبارات های زیر را به دست آورید.

ا) $\alpha + \beta$ ب) $\alpha\beta$ پ) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ت) $\alpha^2 + \beta^2$

۴۸. در معادله درجه دوم $x^2 + (m+3)x - 7 + m = 0$ ، مقدار m را طوری به دست آورید که:

ا) مجموع ریشه ها برابر ۴ شود.

ب) حاصل ضرب ریشه ها برابر $-\frac{3}{4}$ شود.

۴۹. در معادله $2x^2 - (2m+1)x + m = 0$ ، مقدار m را طوری به دست آورید که:

ا) یکی از ریشه ها، قرینه ریشه دیگر باشد.

ب) یکی از ریشه ها، عکس ریشه دیگر باشد.

پ) یکی از ریشه ها، یک واحد بیش تر از دو برابر ریشه دیگر باشد.

۵۰. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن:

ا) 5 و 11 ب) $3 + \sqrt{2}$ و $3 - \sqrt{2}$ پ) $\frac{5 - \sqrt{3}}{2}$ و $\frac{5 + \sqrt{3}}{2}$ باشند.

(مشابه کاردرکلاس ۳ صفحه ۱۳ و تمرین ۲ صفحه ۱۸ کتاب درسی)

۵۱. دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن ها $\frac{5}{4}$ و حاصل ضربشان -21 باشد.

(مشابه کاردرکلاس ۱ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۵۲. دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن ها برابر ۴ و حاصل ضرب آن ها برابر یک باشد.

(مشابه کاردرکلاس ۱ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۵۳. طول و عرض مستطیلی را مشخص کنید که مساحت آن ۱۰ و محیط آن ۱۳ باشد.

(مشابه کاردرکلاس ۲ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۵۴. اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، بدون محاسبه ریشه های معادله، حاصل عبارات های زیر را به دست آورید.

ا) $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$ ب) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ پ) $\alpha^3 + \beta^3$

۵۵. اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 3mx + 4 = 0$ باشند، m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم $\alpha\beta^2 = -4$.

۵۶. اگر α و β ریشه های معادله $2x^2 - (2m-1)x + m = 0$ باشند، مقدار m را طوری به دست آورید که:

ا) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{5}{3}$ ب) $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{13}{4}$

۵۷. در معادله $2x^2 - 8x + m = 0$ ، اگر یکی از جواب ها دو برابر جواب دیگر باشد، m و هر دو جواب را پیدا کنید.

۵۸. هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

ا) $x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$ ب) $(x^2 - 4x)^2 - 4(x^2 - 4x) - 5 = 0$

۱ | فقط

۲ | طول از مبدأ - عرض از مبدأ

۳ | $y = -2x + 7$ زیرا:

$$m = -2, A(0, 7) \Rightarrow y - 7 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 7$$

۴ | شیب

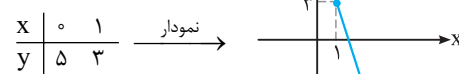
۵ | $-\frac{2}{5}$ زیرا شیب خط $ax + by = c$ برابر $-\frac{a}{b}$ است، پس شیب خط $11 = 2x + 5y$ برابر $-\frac{2}{5}$ است.

۶ | صفر

۷ | با مشخص کردن دو نقطه دلخواه روی خط، خط را رسم می‌کنیم.

آ) برای مشخص کردن دو نقطه دلخواه، به جای x (یا y) دو عدد دلخواه در معادله قرار می‌دهیم و دیگری را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -2(0) + 5 = 5 \\ x = 1 \Rightarrow y = -2(1) + 5 = 3 \end{cases}$$



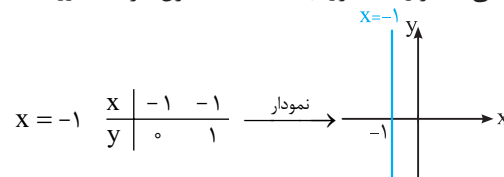
ب) $2x - y = 1$

$$\begin{matrix} x & | & 0 & 1 \\ y & | & -1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{\text{نمودار}}$$

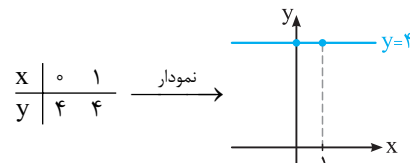
پ) $3x + 4y = 12$

$$\begin{matrix} x & | & 0 & 4 \\ y & | & 3 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{نمودار}}$$

ت) $x = -1$ ، خطی به موازات محور y ها است که طول هر نقطه روی آن برابر -1 است:



ث) عرض تمام نقاط روی خط $y = 4$ برابر 4 است:



۸ | آ) معادله خط با شیب m و عرض از مبدأ h به صورت

$y = mx + h$ می‌باشد، بنابراین معادله خط با شیب $m = -4$ و عرض از مبدأ $h = 2$ برابر $y = -4x + 2$ است.

ب) معادله خط گذرنده از نقطه (x_1, y_1) با شیب m به صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = 5, (-2, -3) \Rightarrow y + 3 = 5(x + 2)$$

$$\Rightarrow y + 3 = 5x + 10 \Rightarrow y = 5x + 7$$

پ) شیب خط گذرنده از نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$A(-1, 2), B(1, 0) \Rightarrow m = \frac{0 - 2}{1 + 1} = -1$$

با داشتن شیب خط (m) و مختصات یک نقطه (مثلاً A)، معادله را می‌نویسیم:

$$m = -1, A(-1, 2) \Rightarrow y - 2 = -1(x + 1) \Rightarrow y = -x + 1$$

ت) شیب دو خط موازی با هم برابر است. شیب خط $5x + 3y = 2$ برابر

$$-\frac{5}{3} \text{ ضریب } x \text{ ضرب } m = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{5}{3} \text{ می‌باشد:}$$

$$m = -\frac{5}{3}, A(3, 0) \Rightarrow y - 0 = -\frac{5}{3}(x - 3)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3y = -5x + 15 \Rightarrow 3y + 5x = 15$$

ث) حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -1 است. شیب

خط $3x + 2y = 4$ برابر $-\frac{3}{2}$ می‌باشد، پس شیب خط مورد نظر برابر

$$m = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \text{ می‌باشد:}$$

$$m = \frac{2}{3}, A(4, 2) \Rightarrow y - 2 = \frac{2}{3}(x - 4)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3(y - 2) = 2(x - 4) \Rightarrow 3y - 6 = 2x - 8 \Rightarrow 3y - 2x = -2$$

ج) طول از مبدأ خط، محل برخورد خط با محور x ها می‌باشد، پس خط

از نقطه $(2, 0)$ می‌گذرد. هم‌چنین عرض از مبدأ خط، محل برخورد خط با محور y ها می‌باشد، پس خط از نقطه $(0, 5)$ نیز می‌گذرد:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 0}{0 - 2} = -\frac{5}{2}$$

$$m = -\frac{5}{2}, A(2, 0) \Rightarrow y - 0 = -\frac{5}{2}(x - 2)$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2y = -5(x - 2) \Rightarrow 2y = -5x + 10 \Rightarrow 2y + 5x = 10$$

۹ | شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(5, 1)$ و $B(-4, 3)$ را به دست

می‌آوریم. این عدد شیب خط مطلوب است:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 3}{5 - (-4)} = -\frac{2}{9}$$

معادله خط گذرنده از نقطه $(-4, 1)$ با شیب $m = -\frac{2}{9}$ به صورت زیر است:

$$y - 1 = -\frac{2}{9}(x + 4) \Rightarrow 9(y - 1) = -2(x + 4)$$

$$\Rightarrow 9y - 9 = -2x - 8 \Rightarrow 9y + 2x = 1$$

۱۰ | شیب خط گذرنده از دو نقطه $(2, 0)$ و $(-1, 6)$ برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 0}{-1 - 2} = \frac{6}{-3} = -2$$

اگر m' شیب خط مطلوب باشد، آن‌گاه $m' = -\frac{1}{m}$ است و در نتیجه، داریم:

$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{1}{2}, A(3, 2)$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2(y - 2) = x - 3 \text{ معادله خط}$$

$$\Rightarrow 2y - 4 = x - 3 \Rightarrow 2y - x = 1$$

۱۴ | با مساوی قرار دادن شیب‌های دو خط، مقدار m را به دست می‌آوریم:

$$2x + (-m + 4)y = 3 \Rightarrow a = -\frac{2}{-m+4}$$

$$(\Delta + 3m)x + (m^2 + 4)y = 7 \Rightarrow a' = -\frac{\Delta + 3m}{m^2 + 4}$$

$$a = a' \Rightarrow \frac{2}{-m+4} = \frac{\Delta + 3m}{m^2 + 4}$$

$$\Rightarrow 2(m^2 + 4) = (\Delta + 3m)(-m + 4)$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 8 = -\Delta m + 20 - 3m^2 + 12m \Rightarrow 5m^2 - 7m - 12 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4(5)(-12) = 289 = 17^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{7+17}{2(5)} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5} \\ m = \frac{7-17}{2(5)} = \frac{-10}{10} = -1 \end{cases}$$

۱۵ | شیب خط گذرنده از دو نقطه $(m, 2m)$ و $(1, -1)$ برابر است با:

$$a = \frac{2m+1}{m-1}$$

از طرفی شیب خط به معادله $2x - 5y = 7$ برابر $a' = -\frac{2}{-5} = \frac{2}{5}$ است. چون دو خط بر هم عمودند، پس باید داشته باشیم:

$$aa' = -1 \Rightarrow \frac{2m+1}{m-1} \times \frac{2}{5} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{2(2m+1)}{5(m-1)} = -1 \Rightarrow 2(2m+1) = -5(m-1)$$

$$\Rightarrow 4m+2 = -5m+5 \Rightarrow 9m = 3 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

۱۶ | ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{6-4} = \frac{1}{2}, \quad A(4, 1)$$

$$AB \text{ معادله خط } y - 1 = \frac{1}{2}(x - 4) \xrightarrow{\times 2} 2(y - 1) = x - 4$$

$$2y - 2 = x - 4 \Rightarrow 2y - x = -2$$

ب) با توجه به شکل فرضی زیر، BC بر AB عمود است، پس:

$$m_{BC} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2, \quad B(6, 2)$$

$$BC \text{ معادله خط } y - 2 = -2(x - 6) \Rightarrow y = -2x + 14$$

پ) معادله خط DC را می‌نویسیم. با داشتن معادله خط BC و قرار دادن آن‌ها در یک دستگاه و حل آن، مختصات نقطه C به دست می‌آید. با توجه به این‌که خط DC موازی AB است، پس شیب خط DC با شیب AB برابر می‌باشد:

$$m_{DC} = m_{AB} = \frac{1}{2}, \quad D(-1, 11)$$

$$DC \text{ معادله خط } y - 11 = \frac{1}{2}(x + 1) \xrightarrow{\times 2} 2y - 22 = x + 1$$

$$\Rightarrow 2y - x = 23$$

$$\begin{cases} y = -2x + 14 \\ 2y - x = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y = 4x - 28 \\ 2y - x = 23 \end{cases} \Rightarrow -x = 4x - 5$$

$$\Rightarrow -5x = -5 \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{y = -2x + 14} y = -2 + 14 = 12$$

$$\Rightarrow C(1, 12)$$

۱۱ | با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ ، نقطه تلاقی دو خط را به دست می‌آوریم:

$$\times 2 \begin{cases} 4x - y = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 2y = 2 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$$

$$\xrightarrow{x+2y=7} 1+2y=7 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow y=3$$

نقطه $A(1, 3)$ ، نقطه تلاقی دو خط است. معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(1, 3)$ و $B(3, -2)$ به صورت زیر است:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-3}{3-1} = -\frac{5}{2}, \quad A(1, 3)$$

$$y - 3 = -\frac{5}{2}(x - 1) \xrightarrow{\times 2} 2(y - 3) = -5(x - 1)$$

$$\Rightarrow 2y - 6 = -5x + 5 \Rightarrow 2y + 5x = 11$$

۱۲ | شیب هریک از خطوط را به دست می‌آوریم. اگر شیب دو خط با هم برابر باشند، آن دو خط موازی، اگر حاصل ضرب شیب‌ها برابر -1 باشد، دو خط بر هم عمود و در غیر این صورت دو خط متقاطع غیرعمودند.

شیب خط $y = ax + b$ برابر a و شیب خط $ax + by + c = 0$ یا $ax + by = c$ برابر $-\frac{a}{b} = -\frac{x \text{ ضریب}}{y \text{ ضریب}}$ است.

$$L_1: -3x + 5y = 1 \Rightarrow m_1 = -\frac{x \text{ ضریب}}{y \text{ ضریب}} = -\frac{-3}{5} = \frac{3}{5}$$

$$L_2: 3x - y = 1 \Rightarrow m_2 = -\frac{3}{-1} = 3$$

$$L_3: 5x + 3y = 7 \Rightarrow m_3 = -\frac{5}{3}$$

$$L_4: 6x = 2y + 5 \Rightarrow 6x - 2y = 5 \Rightarrow m_4 = -\frac{6}{-2} = 3$$

دو خط L_1 و L_3 بر هم عمودند. $m_1 m_3 = -1$

دو خط L_2 و L_4 موازی‌اند. $m_2 = m_4$

L_1 و L_3 با L_2 و L_4 متقاطع غیرعمود می‌باشند.

۱۳ | در دو خط موازی، شیب‌ها با هم برابرند:

$$3x + (2m+1)y = 4 \Rightarrow \text{شیب خط} = a = -\frac{3}{2m+1}$$

$$mx + 7y = 11 \Rightarrow \text{شیب خط} = a' = -\frac{m}{7}$$

$$a = a' \Rightarrow -\frac{3}{2m+1} = -\frac{m}{7} \Rightarrow 3 \times 7 = m(2m+1)$$

$$\Rightarrow 21 = 2m^2 + m \Rightarrow 2m^2 + m - 21 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(-21) = 169 = 13^2$$

$$\Rightarrow m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 13}{2(2)}$$

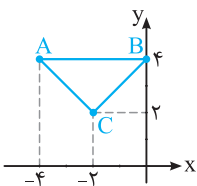
$$\Rightarrow m_1 = \frac{-1+13}{4} = \frac{12}{4} = 3, \quad m_2 = \frac{-1-13}{4} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}$$

ب) اگر حاصل ضرب شیب دو خط برابر -1 شود، آن‌گاه دو خط بر هم عمودند:

$$aa' = -1 \Rightarrow \left(-\frac{3}{2m+1}\right)\left(-\frac{m}{7}\right) = -1 \Rightarrow \frac{3m}{7(2m+1)} = -1$$

$$\Rightarrow 3m = -7(2m+1) \Rightarrow 3m = -14m - 7 \Rightarrow 3m + 14m = -7$$

$$\Rightarrow 17m = -7 \Rightarrow m = -\frac{7}{17}$$



۲۱ | هر یک از نقاط را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم.

ب) طول اضلاع مثلث را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(4-4)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{0+16} = \sqrt{16} = 4$$

$$AC = \sqrt{(2-4)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(2-4)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

چون $AC = BC$ ، پس مثلث متساوی‌الساقین است. از طرفی تساوی $AB^2 = AC^2 + BC^2$ برقرار است، پس مثلث در رأس C قائم‌الزاویه است.

پ) مساحت مثلث، نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده است.

$$S = \frac{1}{2} CA \times CB = \frac{1}{2} \times \sqrt{8} \times \sqrt{8} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

۲۲ | هر یک از رأس‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم:

$$A(2, 0), B(-1, 4), C(6, -3)$$

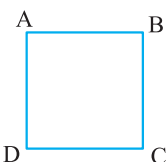
طول اضلاع مثلث را به دست می‌آوریم. فاصله بین دو نقطه، طول ضلع مثلث است:

$$AB = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{(6-2)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(6+1)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2}$$

طول دو ضلع مثلث برابرند و در نتیجه مثلث متساوی‌الساقین است.



۲۳ | فاصله بین دو نقطه A و B، طول ضلع مربع است:

$$AB = \sqrt{(8-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

محیط مربع برابر $4AB = 4 \times 5 = 20$ و مساحت مربع برابر $a^2 = 5^2 = 25$ می‌باشد.

۲۴ | اگر $P(4, -2)$ موقعیت این شخص و نقاط $A(2, 5)$ ، $B(1, 4)$ و $C(-3, 3)$ موقعیت‌های این سه عابرانک باشند، با به دست آوردن فاصله نقطه P تا هر یک از نقاط A، B، و C، کوتاه‌ترین فاصله را انتخاب می‌کنیم.

$$PA = \sqrt{(2-4)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$$

$$PB = \sqrt{(1-4)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

$$PC = \sqrt{(-3-4)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}$$

با توجه به اعداد به دست آمده، کم‌ترین فاصله این شخص تا عابرانک B است.

۱۷ | ابتدا معادله خطی را که از دو نقطه $(3, 1)$ و $(5, -3)$ می‌گذرد، می‌نویسیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-1}{5-3} = \frac{-4}{2} = -2, A(3, 1)$$

$$y - 1 = -2(x - 3) \Rightarrow y - 1 = -2x + 6 \Rightarrow y = -2x + 7$$

چون سه نقطه روی یک خط قرار دارند، پس مختصات نقطه $C(a, 2a - 1)$ نیز باید در معادله $y = -2x + 7$ صدق کند:

$$C(a, 2a - 1), y = -2x + 7 \Rightarrow 2a - 1 = -2a + 7$$

$$\Rightarrow 2a + 2a = 7 + 1 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

۱۸ | محل تلاقی دو خط به معادله‌های $x + 3y = -1$ و $3x - 2y = 8$

از حل دستگاه $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 6y = -2 \\ 9x - 6y = 24 \end{cases} \Rightarrow 11x = 22 \Rightarrow x = 2$$

$$\xrightarrow{x+3y=-1} 2+3y=-1 \Rightarrow 3y=-3 \Rightarrow y=-1$$

نقطه $(2, -1)$ محل تلاقی دو خط است. خط $(m+1)x + my = 7$ از نقطه

$(2, -1)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله $(m+1)x + my = 7$

صدق می‌کند:

$$2(m+1) - m = 7 \Rightarrow 2m + 2 - m = 7 \Rightarrow m = 5$$

۱۹ | شیب ضلع AB برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2+1}{0+3} = 1, A(-3, -1)$$

$$AB \text{ معادله ضلع: } y - (-1) = 1(x - (-3))$$

$$\Rightarrow y + 1 = x + 3 \Rightarrow y = x + 2$$

ب) ضلع CD موازی ضلع AB است، پس شیب دو خط با هم برابرند:

$$m_{AB} = m_{CD}, m_{AB} = 1, m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{(2a-2) - a}{0-3} = \frac{a-2}{-3} = 1 \Rightarrow a-2 = -3 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow C(3, -1), D(0, -4)$$

۲۰ | اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ باشند، آنگاه طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$A(3, -2), B(-1, 6) \Rightarrow AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (6-(-2))^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$$

ب) اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ باشد، آنگاه مختصات نقطه M وسط

AB به صورت $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ است. بنابراین:

$$M = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{-2+6}{2} \right) = (1, 2), O(0, 0)$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

۲۸ | آ) اگر $M(5, -1)$ ، $A(3, 2)$ و $B(x_B, y_B)$ ، آن‌گاه:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 5 = \frac{3 + x_B}{2} \Rightarrow 3 + x_B = 10 \Rightarrow x_B = 7 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{2 + y_B}{2} \Rightarrow y_B + 2 = -2 \Rightarrow y_B = -4 \end{cases}$$

پس مختصات نقطه B ، به صورت $B(7, -4)$ است.

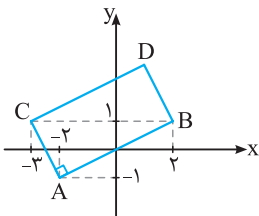
ب) اگر A' قرینه نقطه $A(-3, 4)$ نسبت به نقطه $M(-1, 2)$ باشد، آن‌گاه:

$$A' = (2x_M - x_A, 2y_M - y_A) = (2(-1) - (-3), 2(2) - 4) = (-2 + 3, 4 - 4) = (1, 0)$$

پ) مختصات نقطه B از قسمت (آ) به صورت $B(7, -4)$ است. قرینه نقطه B نسبت به نقطه $M(3, 0)$ به صورت زیر است:

$$B' = (2x_M - x_B, 2y_M - y_B) = (2 \times 3 - 7, 2 \times 0 + 4) = (-1, 4)$$

ت) قرینه نقطه (x, y) نسبت به مبدأ مختصات، نقطه $(-x, -y)$ است، پس قرینه نقطه $A(-3, 5)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطه $A'(3, -5)$ می‌باشد.



۲۹ | ب) مشخص کردن نقاط A ، B و C در دستگاه محورهای مختصات، رأس‌های روبه‌رو را مشخص می‌کنیم:

آ) نقاط B و C روبه‌روی هم و نقاط A و D روبه‌روی هم قرار دارند. در مستطیل (هر متوازی‌الاضلاع) داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_D = x_B + x_C \\ y_A + y_D = y_B + y_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 + x_D = 2 - 3 \\ -1 + y_D = 1 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 3 \end{cases} \Rightarrow D(1, 3)$$

ب) مساحت مستطیل $ABDC$ برابر حاصل ضرب AB در AC است:

$$AB = \sqrt{(2+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$AC = \sqrt{(-3+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow S = AB \times AC = \sqrt{20} \times \sqrt{5} = \sqrt{100} = 10$$

۳۰ | عمود منصف پاره خط AB از وسط AB می‌گذرد و بر آن عمود است. مختصات M وسط AB و هم‌چنین شیب خط گذرنده از A و B را به دست می‌آوریم:

$$M = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{-4+0}{2} \right) = (1, -2)$$

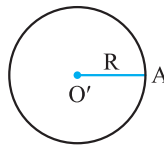
شیب خط Δ ، قرینه عکس شیب خط AB است:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0+4}{-1-3} = -1 \Rightarrow m_{\Delta} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

معادله خط گذرنده از نقطه $(1, -2)$ با شیب ۱ برابر است با:

$$y - (-2) = 1(x - 1) \Rightarrow y + 2 = x - 1 \Rightarrow y = x - 3$$

۲۵ | مطابق شکل فاصله نقطه $A(4, 2)$ تا مرکز دایره، یعنی $O'(2, -1)$ برابر اندازه شعاع دایره است:



$$R = O'A = \sqrt{(4-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

هر نقطه‌ای روی دایره باشد، باید فاصله آن تا O' برابر $\sqrt{13}$ شود.

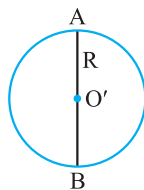
فاصله هر یک از نقاط $B(5, -3)$ و $C(-1, 4)$ را تا نقطه O' به دست می‌آوریم، هر کدام برابر $\sqrt{13}$ شود، روی این دایره قرار دارد:

$$O'B = \sqrt{(5-2)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

پس B روی این دایره قرار دارد.

$$O'C = \sqrt{(-1-2)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

بنابراین C روی این دایره قرار ندارد.



۲۶ | آ) نقطه وسط پاره خط AB ، مرکز دایره است:

$$O' = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{5+1}{2}, \frac{-1-3}{2} \right) = (3, -2)$$

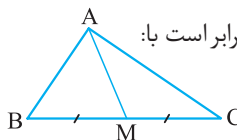
فاصله دو نقطه A و O' برابر اندازه شعاع دایره است:

$$R = O'A = \sqrt{(3-1)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

ب) اگر فاصله نقطه $M(0, 2)$ تا O' (مرکز دایره) برابر $\sqrt{5}$ باشد، آن‌گاه نقطه M روی این دایره قرار دارد. فاصله O' تا M را به دست می‌آوریم:

$$O'M = \sqrt{(0-3)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

پس نقطه M روی محیط این دایره قرار ندارد.



۲۷ | آ) مختصات M وسط پاره خط BC برابر است با:

$$M = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+4}{2} \right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{2}{2} \right) = (4, 1)$$

ب) با داشتن مختصات دو نقطه A و M ، طول پاره خط AM را به دست می‌آوریم:

$$A(-2, 4), M(4, 1) \Rightarrow AM = \sqrt{(4+2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

پ) مختصات نقطه A و M را داریم. معادله خطی که از این دو نقطه می‌گذرد را می‌نویسیم.

$$m = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{1-4}{4-(-2)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$m = -\frac{1}{2}, A(-2, 4) \Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 2)$$

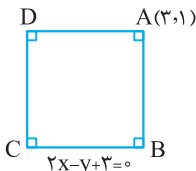
$$\xrightarrow{-x} 2(y - 4) = -(x + 2) \Rightarrow 2y - 8 = -x - 2 \Rightarrow 2y + x = 6$$

$$2x = y - 4 \Rightarrow 2x - y + 4 = 0, A(-4, 5)$$

$$\Rightarrow d = \frac{|2(-4) - 5 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

نقطه $A(3, 1)$ روی خط $2x = y - 3$ قرار ندارد، زیرا مختصات

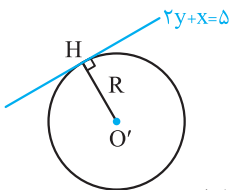
نقطه A در معادله $2x - y + 3 = 0$ صدق نمی‌کند. اگر شکل فرضی زیر را در نظر بگیریم، آن‌گاه $2x - y + 3 = 0$ معادله ضلع BC است. چون AB بر BC عمود است، پس فاصله نقطه A تا خط $2x - y + 3 = 0$ طول ضلع مربع است:



$$BC \text{ فاصله رأس } A \text{ تا ضلع } BC = \frac{|2(3) - 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{64}{5}$$

مطابق شکل زیر، فاصله O' (مرکز دایره) تا خط $x + 2y - 5 = 0$ برابر اندازه شعاع دایره است:



$$R = \frac{|-1 + 2(2) - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

مساحت دایره به شعاع R برابر πR^2 است، بنابراین:

$$S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \pi \times \frac{4}{5} = \frac{4\pi}{5}$$

اگر شیب دو خط داده شده با هم برابر باشند، آن‌گاه دو خط با هم موازی اند:

$$2x - y = 11 \Rightarrow m_1 = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{2}{-1} = 2$$

$$4x - 2y = 5 \Rightarrow m_2 = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{4}{-2} = 2$$

دو خط با هم موازی اند. $m_1 = m_2 \Rightarrow$

برای به دست آوردن فاصله بین دو خط موازی داده شده، نقطه دلخواهی روی یکی از خط‌ها، مثلاً $2x - y = 11$ مشخص می‌کنیم، سپس فاصله این نقطه را تا خط دیگر، یعنی خط به معادله $4x - 2y - 5 = 0$ به دست می‌آوریم. نقطه $A(5, -1)$ روی خط $2x - y = 11$ قرار دارد. فاصله A تا خط $4x - 2y - 5 = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|4(5) - 2(-1) - 5|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{17}{\sqrt{20}} = \frac{17}{\sqrt{4 \times 5}} = \frac{17}{2\sqrt{5}}$$

نکته می‌توانیم ضرایب x و y را در دو خط موازی یکسان کنیم و از فرمول زیر برای فاصله دو خط استفاده کنیم:

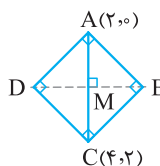
$$ax + by + c = 0 \Rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$x = -y + 4 \Rightarrow x + y - 4 = 0$$

$$2x + 2y = 7 \Rightarrow 2x + 2y - 7 = 0$$

با توجه به شکل فرضی زیر، مختصات دو نقطه A و C مشخص

است. برای نوشتن معادله قطر AC ، داریم:



$$m_{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$A(2, 0), m = 1$$

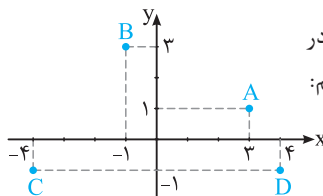
$$AC \text{ معادله: } y - 0 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 2$$

قطر BD ، عمودمنصف قطر AC است، پس شیب آن برابر $m' = -\frac{1}{m_{AC}} = -1$ است. هم‌چنین قطر BD از نقطه وسط پاره خط AC می‌گذرد:

$$M = \frac{A+C}{2} = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (3, 1), m' = -1$$

$$BD \text{ معادله قطر: } y - 1 = -1(x - 3) \Rightarrow y - 1 = -x + 3 \Rightarrow y = -x + 4$$

نقاط A, B, C, D را در



دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم:

فاصله تمام نقاط روی عمودمنصف CD از نقاط D و C به یک اندازه است. معادله عمودمنصف CD به صورت زیر است:

$$M = \left(\frac{-4+4}{2}, \frac{-1-1}{2}\right) = (0, -1)$$

بنابراین $x = 0$ عمودمنصف CD است.

فاصله تمام نقاط روی عمودمنصف AB از نقاط A و B به یک اندازه است. معادله عمودمنصف AB به صورت زیر است:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{-1 - 2} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow AB \text{ شیب عمودمنصف} = \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$N = \left(\frac{-1+2}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (0.5, 2)$$

$$AB \text{ معادله عمودمنصف: } y - 2 = \frac{3}{2}(x - 0.5) \Rightarrow y - 2 = 1.5x - 0.75 \Rightarrow y = 1.5x + 1.25$$

محل تلاقی دو خط به معادلات $x = 0$ و $y = 1.5x + 1.25$ ، از چهار نقطه A, B, C و D به یک فاصله است:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1.5x + 1.25 \end{cases} \Rightarrow y = 1.25 \Rightarrow O(0, 1.25)$$

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $x = a$ برابر $d = |x_0 - a|$ و از خط

$y = b$ برابر $d = |y_0 - b|$ است، بنابراین فاصله نقطه $A(4, -6)$ از خط $x = -2$ برابر $d = |-6 - (-2)| = 4$ و از خط $y = 5$ برابر $d = |4 - 5| = 1$ می‌باشد.

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$3x + 4y + 1 = 0, A(2, -1)$$

$$\Rightarrow d = \frac{|3(2) + 4(-1) + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

۴۱ | فاصله نقطه (۳، ۴) را از خط $x + 3y - a = 0$ به دست می‌آوریم و آن را برابر $\frac{3}{\sqrt{10}}$ قرار می‌دهیم:

$$d = \frac{|3 + 3(4) - a|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|15 - a|}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow |15 - a| = 3$$

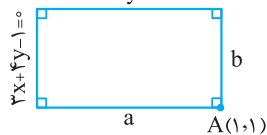
$$\Rightarrow \begin{cases} 15 - a = 3 \\ 15 - a = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15 - 3 = a \\ 15 + 3 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ a = 18 \end{cases}$$

۴۲ | دو خط $3x + 4y = 1$ و $4x - 3y = 5$ بر هم عمودند، زیرا:

$$3x + 4y = 1 \Rightarrow m = -\frac{3}{4} \Rightarrow mm' = -1$$

$$4x - 3y = 5 \Rightarrow m' = \frac{4}{3}$$

مختصات نقطه $A(1, 1)$ در هیچ یک از معادلات $3x + 4y = 1$ و $4x - 3y = 5$ صدق نمی‌کنند، پس نقطه A روی هیچ یک از این دو خط قرار ندارند.



طبق شکل، فاصله نقطه A از دو خط، طول و عرض مستطیل خواهند بود:

$$a = \frac{|3(1) + 4(1) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{6}{5}, \quad b = \frac{|4(1) - 3(1) - 5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow S = ab = \frac{6}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

۴۳ | برای قسمت‌های (آ) و (ب)، مختصات M وسط پاره خط BC را به دست می‌آوریم:

$$M = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-2+2}{2} \right) = (1, 0)$$

آ | $M(1, 0), A(1, 4) \xrightarrow{x_A = x_M} x = 1$ (معادله میانه AM)

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (0-4)^2} = 4 \quad \text{ب}$$

پ | برای نوشتن معادله ارتفاع BH ، شیب ارتفاع را به دست می‌آوریم:



$$m_{BH} = \frac{-1}{m_{AC}}, \quad m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2-4}{4-1} = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow m_{BH} = \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}, \quad B(-2, -2) \Rightarrow y + 2 = \frac{3}{2}(x + 2)$$

$$\Rightarrow 2y - 3x - 2 = 0$$

ت | معادله دو خط را در یک دستگاه قرار می‌دهیم و با حل دستگاه محل تلاقی دو خط را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2y - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y - 3(1) - 2 = 0 \Rightarrow 2y = 5$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{نقطه تلاقی} = \left(1, \frac{5}{2}\right)$$

ث | مساحت مثلث ABC برابر است با: $S = \frac{1}{2} BH \times AC$

فاصله بین دو نقطه A و C است. داریم:

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

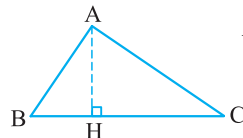
$$= \sqrt{(4-1)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

شیب خط به معادله $x + y - 4 = 0$ برابر $m_1 = -\frac{1}{1} = -1$ و شیب خط به معادله $2x + 2y - 7 = 0$ برابر $m_2 = -\frac{2}{2} = -1$ می‌باشد:

دو خط با هم موازیند. $m_1 = m_2 \Rightarrow$

نقطه $A(2, 2)$ روی خط $x + y - 4 = 0$ قرار دارد. فاصله نقطه A را تا خط به معادله $2x + 2y - 7 = 0$ به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{|2(2) + 2(2) - 7|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



۳۸ | مطابق شکل مقابل، فاصله نقطه A

تا ضلع BC برابر طول ارتفاع AH است:

معادله BC را با داشتن مختصات دو نقطه B و C می‌نویسیم:

$$B(-1, 4), C(-2, 1) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{-1-2} = 3$$

معادله BC : $y - 4 = 3(x + 1) \Rightarrow y - 3x - 7 = 0$

فاصله نقطه $A(2, 0)$ تا خط به معادله $y - 3x - 7 = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|0 - 3(2) - 7|}{\sqrt{(-3)^2 + (1)^2}} = \frac{13}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{10}}{10}$$

ب | مساحت مثلث ABC برابر است با: $S = \frac{1}{2} AH \times BC$

طول پاره خط BC برابر است با:

$$BC = \sqrt{(-2+1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{13\sqrt{10}}{10} \times \sqrt{10} = \frac{13}{2}$$

۳۹ | موقعیت شهر A به صورت $(45, 37)$ و موقعیت شهر B به صورت $(37, 31)$ می‌باشد:

$$x_2 - x_1 = 45^\circ - 37^\circ = 8^\circ \xrightarrow{\times 110 \text{ km}} x_2 - x_1 = 880 \text{ km}$$

$$y_2 - y_1 = 37^\circ - 31^\circ = 6^\circ \xrightarrow{\times 110 \text{ km}} y_2 - y_1 = 660 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله بین دو شهر} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(8 \times 110)^2 + (6 \times 110)^2} = \sqrt{8^2 \times 110^2 + 6^2 \times 110^2}$$

$$= \sqrt{110^2 (8^2 + 6^2)} = \sqrt{110^2 \times 100} = 110 \times 10 = 1100 \text{ km}$$

۴۰ | با فرض $M(3, 5), A(a+1, b-3)$ و $A'(b-2, -a)$ ، داریم:

$$\begin{cases} 3 = \frac{(a+1) + (b-2)}{2} \\ 5 = \frac{(b-3) - a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b-1}{2} = 3 \\ \frac{b-a-3}{2} = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b-1=6 \\ b-a-3=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ b-a=13 \end{cases} \Rightarrow 2b=7+13=20 \Rightarrow b=10$$

$$\xrightarrow{a+b=7} a+10=7 \Rightarrow a=-3$$

ب) با تغییر متغیر $x^2 = A$ ، داریم:

$$4x^4 - 7x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 4(x^2)^2 - 7(x^2) - 2 = 0 \Rightarrow 4A^2 - 7A - 2 = 0$$

معادله درجه دوم $4A^2 - 7A - 2 = 0$ را با روش کلی حل می‌کنیم:

$$a = 4, b = -7, c = -2 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(4)(-2) = 81$$

$$\begin{cases} A = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 + \sqrt{81}}{2(4)} = \frac{7+9}{8} = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} \\ A = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{81}}{2(4)} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{4} \text{ غیرممکن} \end{cases}$$

بنابراین معادله فقط دو ریشه حقیقی $\pm\sqrt{2}$ دارد.

پ) با تغییر متغیر $x^2 = t$ ، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$-2(x^2)^2 + 11x^2 + 4 = 0 \Rightarrow -2t^2 + 11t + 4 = 0$$

$$\Delta = 11^2 - 4(-2)(4) = 121 + 32 = 153 = 3^2 \cdot 17$$

$$\Rightarrow t = \frac{-11 \pm 3\sqrt{17}}{2(-2)} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2} \Rightarrow x^2 = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = \sqrt{-\frac{5}{2}} \\ t = \frac{-32}{-4} = 8 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

۴۶ | مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$5x^2 - 11x + 1 = 0 \Rightarrow a = 5, b = -11, c = 1$$

$$\Rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-11}{5} = \frac{11}{5}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{5}$$

۴۷ | در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ است. پس:

$$x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-8}{1} = 8$$

ب) در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ می‌باشد. پس:

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

پ) عبارت $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ را به صورت یک کسر می‌نویسیم و سپس از S و P استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{8}{4} = 2$$

ت) از اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ استفاده می‌کنیم و مقدار $\alpha^2 + \beta^2$ را به دست می‌آوریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 8^2 - 2(4) = 56$$

۴۸ | مجموع ریشه‌ها در معادله درجه دوم، برابر $-\frac{b}{a}$ می‌باشد. پس:

$$a = 1, b = m + 3 \Rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{m+3}{1} = 4$$

$$\Rightarrow m + 3 = -4 \Rightarrow m = -7$$

با جایگذاری m در معادله، داریم:

$$x^2 - 4x - 14 = 0$$

در معادله اخیر، Δ عددی مثبت است، پس معادله دارای دو ریشه حقیقی می‌باشد و در نتیجه m به دست آمده قابل قبول است.

BH، فاصله نقطه B تا خط AC است. ابتدا معادله خط AC را می‌نویسیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 4}{4 - 1} = -\frac{2}{3}, A(1, 4)$$

$$AC \text{ معادله خط: } y - 4 = -\frac{2}{3}(x - 1) \xrightarrow{\times 3} 3y - 12 = -2(x - 1) \Rightarrow 3y + 2x - 14 = 0$$

فاصله نقطه $B(-2, -2)$ از خط به معادله $2x + 3y - 14 = 0$ برابر است با:

$$BH = \frac{|2(-2) + 3(-2) - 14|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{24}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}BH \times AC = \frac{1}{2} \times \frac{24}{\sqrt{13}} \times \sqrt{13} = 12$$

۴۴ |

$$a = 3, b = 5, c = -2 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4(3)(-2) = 49 \quad \text{آ}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 7}{6} = -2 \end{cases}$$

$$a = -2, b = 7, c = 1 \quad \text{ب)}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4(-2)(1) = 49 + 8 = 57$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{57}}{-4}$$

$$x \text{ ضریب } x \rightarrow \text{به توان } 2 \rightarrow 3 \rightarrow 9 \text{ ضریب } x \quad \text{پ)}$$

۹ را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم:

$$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 9 \Rightarrow (x+3)^2 = (\pm 3)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0 \\ x + 3 = -3 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

$$(3x-1)^2 = 16 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} 3x-1 = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \quad \text{ت)}$$

هر یک از معادلات $3x - 1 = 4$ و $3x - 1 = -4$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3x - 1 = 4 \Rightarrow 3x = 4 + 1 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ 3x - 1 = -4 \Rightarrow 3x = -4 + 1 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} = -1 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \quad \text{ث)}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases} \quad \text{ج)}$$

۴۵ | با تغییر متغیر $x^2 = t$ ، معادله درجه ۴ بر حسب x را به یک معادله درجه ۲ بر حسب t تبدیل می‌کنیم:

$$5(x^2)^2 - x^2 - 4 = 0, x^2 = t \Rightarrow 5t^2 - t - 4 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(5)(-4) = 81 \Rightarrow t = \frac{-(-1) \pm 9}{2(5)} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{10}{10} = 1 \\ t = \frac{-10}{10} = -1 \end{cases}$$

$$t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{غیرممکن}$$

$$S = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} + \frac{5 - \sqrt{3}}{2} = \frac{5 + \sqrt{3} + 5 - \sqrt{3}}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{پ}$$

$$P = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \times \frac{5 - \sqrt{3}}{2} = \frac{(5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3})}{4}$$

$$= \frac{5^2 - (\sqrt{3})^2}{4} = \frac{25 - 3}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$$

$$\text{معادله: } x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + \frac{11}{2} = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 10x + 11 = 0$$

۵۱ | فرض کنیم α و β دو عدد حقیقی مطلوب باشند. داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2}, \alpha\beta = -\frac{11}{2}$$

α و β ریشه‌های معادله $x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{11}{2} = 0$ می‌باشند:

$$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{11}{2} = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 5x - 11 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(-11) = 25 + 88 = 113$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{113}}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha = \frac{5 + \sqrt{113}}{4} = 6 \\ x = \beta = \frac{5 - \sqrt{113}}{4} = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

۵۲ | فرض کنیم دو عدد حقیقی مورد نظر α و β باشند، در این صورت

$$S = \alpha + \beta = 4, P = \alpha\beta = 1$$

طبق فرض داریم:

معادله‌ای که ریشه‌های آن α و β باشند، به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ معادله است.

برای حل معادله از روش کلی استفاده می‌کنیم:

$$a = 1, b = -4, c = 1 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(1) = 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{1} \\ \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1} \end{cases}$$

۵۳ | اگر α و β طول و عرض مستطیل باشند، آن‌گاه:

$$\text{مساحت} = \alpha\beta = 10$$

$$\text{محیط} = 2(\alpha + \beta) = 13 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{13}{2}$$

α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - \frac{13}{2}x + 10 = 0$ می‌باشند،

داریم:

$$x^2 - \frac{13}{2}x + 10 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 13x + 20 = 0$$

$$\Delta = (-13)^2 - 4(2)(20) = 169 - 160 = 9$$

$$\Rightarrow x = \frac{13 \pm 3}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha = 4 \\ y = \beta = \frac{5}{2} \end{cases}$$

پ) چون حاصل ضرب ریشه‌ها، یعنی $\frac{c}{a}$ عددی منفی است، پس معادله حتماً دو ریشه حقیقی دارد و در نتیجه m ای که به دست می‌آید، قابل قبول است:

$$a = 1, c = -7 + m \Rightarrow \frac{c}{a} = -\frac{7 + m}{1} = -\frac{7 + m}{1}$$

$$\Rightarrow 2(-7 + m) = -3$$

$$\Rightarrow -14 + 2m = -3 \Rightarrow 2m = 11 \Rightarrow m = \frac{11}{2}$$

۴۹ | آ) اگر دو ریشه معادله، قرینه یکدیگر باشند، آن‌گاه جمع آن‌ها برابر

صفر است و می‌دانیم جمع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ است:

$$\text{ریشه‌ها: } \alpha, \beta = -\alpha \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha - \alpha = 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow 2m + 1 = 0 \Rightarrow 2m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

پ) اگر یکی از ریشه‌های معادله α باشد، آن‌گاه ریشه دیگر معادله $\beta = \frac{1}{\alpha}$ است. داریم:

$$\alpha\beta = \alpha \times \frac{1}{\alpha} = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow c = a \Rightarrow 2 = m$$

پ) اگر α یکی از ریشه‌های معادله باشد، آن‌گاه ریشه دیگر معادله

$\beta = 2\alpha + 1$ می‌باشد. داریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{2m + 1}{2} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m}{2} \end{cases} \xrightarrow{\beta = 2\alpha + 1} \begin{cases} \alpha + (2\alpha + 1) = \frac{2m + 1}{2} \\ \alpha(2\alpha + 1) = \frac{m}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = \frac{2m + 1}{2} - 1 = \frac{2m - 1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2m - 1}{6} \quad (1) \\ 2\alpha^2 + \alpha = \frac{m}{2} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \cdot (2) \Rightarrow 2\left(\frac{2m - 1}{6}\right)^2 + \frac{2m - 1}{6} = \frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{(2m - 1)^2}{36} + \frac{2m - 1}{6} = \frac{m}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 18} (2m - 1)^2 + 3(2m - 1) = 9m$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 4m + 1 + 6m - 3 = 9m$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 7m - 2 = 0, \Delta = 49 - 4(4)(-2) = 81$$

$$m = \frac{7 + \sqrt{81}}{2(4)} = \frac{7 + 9}{8} = 2, m = \frac{7 - \sqrt{81}}{8} = \frac{7 - 9}{8} = -\frac{1}{4}$$

۵۰ | اگر مجموع دو ریشه و حاصل ضرب آن‌ها به ترتیب S و P باشند،

آن‌گاه ریشه‌ها از معادله $x^2 - Sx + P = 0$ به دست می‌آیند.

$$\text{آ) } -5, 11 \Rightarrow \begin{cases} S = -5 + 11 = 6 \\ P = -5 \times 11 = -55 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x - 55 = 0$$

$$S = (3 - \sqrt{4}) + (3 + \sqrt{4}) = 6 \quad \text{پ}$$

$$P = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0$$

۵۴ |

اگر α یکی از ریشه‌های معادله باشد، آن‌گاه ریشه دیگر معادله $\beta = 2\alpha$ است، داریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha + 2\alpha = \frac{3}{2} \\ \beta = 2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 2\alpha = 1$$

برای به دست آوردن مقدار m ، داریم:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 1 = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 1$$

$$x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -3, c = -5 \Rightarrow \begin{cases} S = -\frac{b}{a} = 3 \\ P = \frac{c}{a} = -5 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{(\beta+1) + (\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$

$$= \frac{S+2}{P+S+1} = \frac{3+2}{-5+3+1} = \frac{5}{-1} = -5$$

۵۸ | x را می‌توان به صورت $(\sqrt{x})^2$ نوشت. پس معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$(\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} + 3 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=A} A^2 - 4A + 3 = 0$$

معادله درجه دوم $A^2 - 4A + 3 = 0$ را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$A^2 - 4A + 3 = (A-1)(A-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A-1=0 \\ A-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ A=3 \end{cases}$$

یا $\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ A=3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} x = 1 \\ \sqrt{x} = 3 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} x = 9 \end{cases}$$

۵۵ | حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$x^2 - 3mx + 4 = 0 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} = 4 \quad (*)$$

$$\alpha\beta^2 = -4 \Rightarrow (\alpha\beta)\beta = -4 \xrightarrow{(*)} 4\beta = -4 \Rightarrow \beta = -1$$

عدد ۱- یک ریشه این معادله است. با قرار دادن عدد ۱- به جای x ، مقدار m را به دست می‌آوریم:

$$(-1)^2 - 3m(-1) + 4 = 0 \Rightarrow 1 + 3m + 4 = 0 \Rightarrow 3m = -5 \Rightarrow m = -\frac{5}{3}$$

۵۶ | در معادله $2x^2 - (2m-1)x + m = 0$ ، با شرط $\Delta > 0$ ، داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{2m-1}{2}, \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{2m-1}{2}}{\frac{m}{2}} = \frac{2m-1}{m} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 5m = 3(2m-1) \Rightarrow 5m = 6m-3 \Rightarrow m = 3$$

با قرار دادن عدد ۳ به جای m در معادله، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0, \Delta = 25 - 4(2)(3) = 1 > 0$$

پس m به دست آمده قابل قبول است.

۶۰ | ۸

مقدار ماکزیمم سهمی به ازای $x = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2(-1)} = -3$ به دست می‌آید:

$$x = -3 \Rightarrow y = -(-3)^2 + 6(-3) - 1 = -18$$

۶۱ | ۱ و ۳

با حل معادله $f(x) = 0$ ، صفرهای تابع f به دست می‌آید:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

۶۲ | درست

ضرب x^2 منفی است و در نتیجه سهمی دارای ماکزیمم است.

۶۳ | نادرست

حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a} = 1 > 0$ است و در نتیجه دو ریشه هم‌علامتند اما جمع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a} = -7$ است و در نتیجه دو ریشه منفی‌اند.

هر دو مقدار m قابل قبول است:

$$m = 3 \xrightarrow{\text{معادله}} 2x^2 - 5x + 3 = 0, \Delta = 1 > 0$$

$$m = -1 \xrightarrow{\text{معادله}} 2x^2 + 3x - 1 = 0, \Delta = 17 > 0$$