بسم الله

برگی از درخت المپیاد ریاضی

(۱ + ۵) فصل در نابرابری‌ها

مؤلف

سینا رضایی زارعی

انتشارات خوشخوان

درخت المپیاد درختی است که توسط
انتشارات خوشخوان کاشته شده و هریک
ازکتاب های این پروژه برگی ازآن است.
وظیفه ما نگهداری وآبیاری این درخت است.امیدواریم
باعنایات حضرت حق این درخت، تنومند شده
وبه بارواقعی بنشیند.فراموش نکنید که بار ومیوه ی
این درخت شما
عزیزان می باشید.
التماس دعا

پروژه‌ی درخت المپیاد

- اعتقاد بر این است که شروع فعالیت‌های المپیاد به صورت حرفه‌ای، باید از ابتدای دوره‌ی دبیرستان شروع شود. اکثر المپیادهای علمی در زمستان سال سوم دبیرستان تعیین تکلیف می‌شوند. بنابراین از شروع دبیرستان تا اواسط سال سوم حدوداً ۸ ترم تحصیلی می‌شود (با احتساب فصل و ترم تابستان) که لازم است برنامه‌ریزی دقیقی برای این چند ترم انجام شود.
- انتشارات خوشخوان این برنامه‌ریزی را در قالب پروژه‌ی درخت المپیاد انجام داده است که هر شاخه از درخت، مبحثی از آن المپیاد و هر برگ از آن شاخه شماره‌ای از آن مبحث می‌باشد.
- به عنوان مثال اپتیک (۱) کتابی است که در یک ترم تحصیلی در یک کلاس ممتاز می‌توان برای داوطلبان المپیاد فیزیک تدریس کرد.

با عنایات حضرت حق و با کمک تنی چند از همکاران گرامی کتب مربوط به این درخت در هر رشته‌ای از المپیاد معرفی خواهد شد.

- منتظر پیشنهادات و نظرات شما سروران هستیم.

گروه المپیاد

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

مسابقه ها، کنکورها و المپیادهای علمی همایش هایی هستند که کم وبیش در سرتاسر دنیای پهناور به صورت داخلی وبین المللی برگزارمی شود وسال به سال به تنوع، جذبه وعظمت آن ها افزوده می‌شود. یکی ازاین همایش های باشکوه که هرسال درچندین رشته درسطح دانش آموزان سنوات آخر دوره متوسطه برگزارمی‌شود المپیادهای علمی‌می باشد که قدیمی ترین آن المپیاد ریاضی بوده و ازسال ۱۹۵۹ آغاز و تا به حال ادامه داشته است.

در حال حاضر نتیجه ی کسب شده در المپیادهای علمی برای هر کشوری یکی از شاخص های قدرت علمی آن کشورمحسوب شده و نفرات ممتاز این المپیادها به راحتی جذب دانشگاه ها وآکادمی های ممتاز جهان شده وپس ازگذشت سنواتی چند به موفقیت های چشم‌گیری نایل می شوند چنانچه بسیاری از دانشمندان حال حاضر در رشته های مختلف از جمله شیمی، فیزیک، IT و ... در سال های نه چندان دور از مدال آوران این المپیادها بوده اند.

جمهوری اسلامی ایران برای اولین باردر سال ۱۳٦٦ در المپیاد ریاضی جهان که در کشور کوبا برگزار می شد شرکت کرده و باکسب یک مدال برنز به مقام ۲٦ جهان نائل آمد که تعجب همگان را برانگیخت چراکه درآن سال ایران درگیرجنگ تحمیلی بوده و جهانیان به غیر از جنگ و درگیری چیزی از ایران سراغ نداشتند و درخشش دانش آموزان ایران در آن سال و سنوات بعد نگاه ها را به سمت ایران معطوف کرده وچشم خفته آن ها را تا حدود زیادی بیدار کرد. همانطور که از رسانه های گروهی مطلع شده اید درتمام المپیادهای علمی تیم اعزامی کشورعزیزمان درسنوات گذشته جزء کشورهای برتر بوده وضمن کسب مدال های رنگارنگ رتبه های بسیار درخشانی ازجمله رتبه اول را حائز شده اند.

نحوه گزینش نفرات اعزامی به المپیادهای جهانی تا حدود زیادی مشابه یکدیگرند به این صورت که درابتدا درمسابقه ای سراسری تحت عنوان مرحله اول که معمولاً به صورت پرسش های چندگزینه ای مطرح می شود حدوداً هزارنفر پذیرفته شده و در رقابتی معمولاً تشریحی که مرحله ی دوم نامیده می شود شرکت می کنند. دراین مرحله در هر رشته حدوداً چهل نفر پذیرفته شده و دردوره ی تابستانی درباشگاه دانش پژوهان جوان که متولی برگزاری تمام المپیاد های علمی می باشد شرکت کرده و پس ازگذراندن این دوره مرحله ی سوم آزمون برگزار شده و عده ای (در حدود ده نفر) مدال طلا، عده ای مدال نقره و عده ای دیگر مدال برنز

کسب می کنند(در این مرحله معمولاً همه‌ی افراد شرکت کننده در دوره مدال کسب می کنند) دارندگان مدال طلا حدود یک سال در آن باشگاه آموزش دیده و پس از آن اعضاء تیم اعزامی شناسایی می شوند. دارندگان مدال طلا همگی بدون کنکور و در رشته و دانشگاه دلخواه خود پذیرفته شده و ادامه ی تحصیل می دهند اما دارندگان مدال های نقره و برنز همانند سایر داوطلبان در کنکور سراسری شرکت کرده و برای کسب رتبه دلخواه جهت پذیرفته شدن در رشته ودانشگاه مورد علاقه خود درقابت می کنند با این تفاوت که این افراد سهمیه‌ی ویژه ای در پذیرفته شدن در رشته ودانشگاه مورد علاقه ی خود دارند که جزئیات آن در سایت باشگاه دانش پژوهان جوان تشریح شده است.

متأسفانه درسال های اخیر در بعضی از مدارس افرادی مثلاً لباس کارشناسی به تن کرده و علیه فعالیت های المپیاد جبهه می گیرند و ادعا می کنند فعالیت برای المپیادهای علمی مانع موفقیت درکنکور سراسری بوده و هرچه دانش آموز به سمت المپیاد سوق پیدا کند ازکنکورفاصله گرفته و در صورت عدم کسب مدال طلا (که بسیار محتمل است) آینده ی خود را تباه کرده است درحالی که با تحقیقی که درسال های گذشته انجام شده است فعالیت درزمینه المپیادهای علمی نه تنها مانع فعالیت برای کنکور نیست بلکه مسیرفعالیت برای کسب رتبه مناسب درکنکور را بسیار هموارتر می سازد به عنوان مثال می توانید تمام مدال آوران نقره و برنز ویا حتی آن هایی که در مرحله اول پذیرفته شده ولی به دوره تابستانی راه پیدا نکرده اند را دریک رشته شناسایی کرده و موفقیت های تحصیلی آن ها را در دانشگاه ها جویا شوید که نگارنده ی این متن بارها این تحقیق را انجام داده و به مثبت بودن آن یقین پیدا کرده است.

به هرحال ادعا این است که فعالیت دانش آموز دریک رشته از رشته های المپیاد فواید بسیاری دارد که به تعدادی ازآن ها به صورت گذرا اشاره می شود:

۱. همان طور که خداوند به بشرتن سالم داده و انتظار می رود با ورزش ها و نرمش های مناسب ازاین نعمت خدادادی محافظت شود به هردانش آموزی نیزاستعدادی داده است که باید شکوفا وبهره ور شود. اغلب باشگاه های کشور اعم ازخصوصی و دولتی داوطلب زیادی در رشته های متفاوت ورزشی دارند که مشغول فعالیت دریکی از رشته های ورزشی مانند کشتی، تکواندو، بدن سازی و ... می باشند که وقتی ازآن افراد راجع به اهدافشان ازاین فعالیت سوءال می شود سالم نگه داشتن بدن را عنوان داشته وانتخاب شدن درتیم ملی را درنهایت عنوان می کنند. چه بسا افرادی که در این رشته ها فعالیت می کنندو هرگز به تیم ملی راه پیدا

نمی کنند که وقتی ازاین افراد راجع به موفقیت هایشان سؤال می شود هرگزخود را ناموفق معرفی نمی کنند و همین که توانسته اند از بدن سالم خود به روش مناسب محافظت کنند را پیروزی بزرگی می‌دانند بنابرین فعالیت دریکی اززمینه های المپیاد چه در نهایت به کسب مدال منجر شود و یا نشود همین که استعداد خدادادی پرورش می یابد موفقیتی است بس بزرگ.

۲. کتب درسی به اذعان اکثر کارشناس ها و اساتید سال به سال ساده تر شده و برای عموم دانش آموزان دلچسب هستند ولی برای دانش آموزان ممتاز و تیزهوش به هیچ عنوان اغنا کننده نمی باشند لذا لازم است این سری ازدانش آموزان فعالیت ویژه ای را در رشته‌ی مورد علاقه‌ی خود داشته باشند تا احساس کنند این فعالیت ها برای آن ها اغنا کننده است.

۳. فعالیت های المپیادی که درنهایت به حل سؤالات پیچیده و عمیق در رشته ی مربوطه می شود باعث می شود تا فرد به تمام مسائل جامعه و پیش آمده درزندگی به دید یک مسأله ی المپیاد نگاه کرده و درحل آن نسبت به سایر رقبا موفق تر باشند. تحقیقات نشان می دهد افرادی که با علاقه و اشتیاق حداقل یکی ازشاخه های المپیاد را دنبال می کنند (نه به نیت کسب مدال بلکه به نیت پرورش ذهن) نسبت به سایر افراد در زندگی موفق ترند.

٤. زیربنای اکثر دروس پیش دانشگاهی در دروس المپیاد بنا نهاده می شود بنابرین افرادی که به سبک المپیادی دروس خود را مطالعه می کنند در دوره پیش دانشگاهی با پایه ی بسیار قوی تری با دروس مواجه می شوند و نسبت به رقبای خود راحت تر ازعهده آن ها برمی آیند.

٥. با توجه به مصوبه های موجود، کسب مدال دریکی ازالمپیاد های علمی(حتی مدال برتر) باعث اعطای امتیازهای ویژه ای برای داوطلبان کنکور در ورود به دانشگاه های سراسری می شود که جزئیات آن درسایت های معتبرمخصوصاً سایت باشگاه دانش پژوهان جوان موجود است.

٦. همچنین با توجه به مصوبه های موجود اکثر داوطلبان المپیادها به عضویت نهادهای مختلف ازجمله بنیاد ملی نخبگان درمی آیند که با رجوع به سایت های مرتبط با این نهادها و بنیادها امتیازات تعلق یافته به اعضاء را مشاهده خواهید کرد.

انتشارات خوشخوان مفتخراست از بدو تأسیس به فکر تدوین و تألیف منابعی مناسب برای دانش آموزان ممتاز و داوطلبان المپیاد بوده است که خوشبختانه با یاری خداوند متعال وبا بهره گیری ازاساتید مجربی که خود درسنواتی نه چندان دورمدال آوریکی ازالمپیادهای علمی بوده اند، کتب متعددی به بازار عرضه شده است که مورد توجه داوطلبان قرار گرفته است. بعد ازکسب تجربیات لازم به این نتیجه رسیده ایم که لازم است کتبی به صورت کار تدوین وتألیف شود که درآن هرکتاب مخصوص یک ترم تحصیلی باشد. این پروژه به نام درخت المپیاد نام گرفته است و هرکتاب ازاین پروژه که دراختیار دارید برگی از آن درخت خواهد بود.

بدیهی است انجام چنین پروژه ی عظیمی نظر و همت دسته جمعی می طلبد لذا لازم است ازتمام دوستان و همکارانی که ما را در انجام این پروژه یاری نموده اند، تشکر و قدردانی می نمایم و درنهایت نیز ازعوامل زحمت کش انتشارات اعم ازمشاورین، حروف چین ها، طراحان وکارمندان وکارگران عزیزکمال امتنان را دارم.

با تشکر
رسول حاجی زاده مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مولفین

منّت خدای را عز و جل که طاعتش موجب قربتست و به شکر اندرش مزید نعمت هر نفسی که فرو می‌رود ممدّ حیاتست و چون بر می‌آید مفرّح ذات. پس در هر نفسی دو نعمت موجودست و بر هر نعمت شکری واجب

از دست و زبان که برآید   کز عهده‌ی شکرش به در آید

(گلستان سعدی)

بعد از چند سال تدریس المپیاد، به پیشنهاد چند تن از دوستان تصمیم به نوشتن کتاب حاضر گرفتم. این کتاب، جلد اول از کتاب دو جلدی برای آموزش نابرابری‌هاست. در این کتاب سعی شده است تا همه‌ی آن‌چه برای نابرابری‌ها در المپیاد ریاضی نیاز دارید پوشانده شود. مطالب این کتاب برای آمادگی در مبحث نابرابری‌ها در المپیاد ریاضی تا مرحله‌ی دوم و حتی کمی فراتر از آن کافی است و مباحث تکمیلی این درس در جلد دوم ارائه و جمع‌بندی خواهند شد. می‌توان به طور دقیق‌تر گفت که در واقع ۴ فصل اول کتاب هم برای آمادگی در مرحله دوم المپیاد ریاضی کافی است و فصل‌های ۵ و ۶ برای آمادگی در این مرحله چندان ضروری نیستند.

آنچه در این کتاب می بینید:

در این کتاب، ۱ + ۵ مبحث در نابرابری‌ها بررسی شده است.

هر فصل دارای تعدادی بخش است که در انتهای هر بخش، تمرین‌هایی برای حل آورده شده است که راه‌حل اغلب آن‌ها در انتهای همان بخش در دست‌رس است. در پایان هر فصل نیز مسائل بیش‌تری برای تمرین و تسلط از کشورهای مختلف به دانش‌آموزان عرضه شده است. در انتهای کتاب نیز، تمرین‌های تکمیلی با راه‌حل و تمرین‌های متفرقه بدون راه‌حل برای تمرین بیش‌تر آورده شده‌اند. بخش‌های کتاب به گونه‌ای طراحی شده‌اند که هر بخش را در یک جلسه‌ی کلاسی می‌توان آموزش داد و قاعدتا همراهی یک معلم با دانش‌آموز می‌تواند یادگیری دانش‌آموز را سریع‌تر و عمیق‌تر کند.

در فصل نخست کتاب، خواص ابتدایی نابرابری‌ها را که اساس حل مسائل نامساوی هستند به صورت اجمالی معرفی و بررسی کرده‌ایم.

فصل دوم به نابرابری‌های واسطه اختصاص دارد. در این فصل برای تسلط بیش‌تر، ابتدا حالت‌های خاص آن را معرفی کرده و سپس به حالت کلی پرداخته‌ایم و مسائل گوناگونی را که با استفاده از آن قابل حل هستند آورده شده‌اند.

در فصل سوم، مشابه فصل دوم ابتدا نامساوی کوشی شوارتز و سپس نامساوی هولدر را که تعمیمی از آن است بررسی کرده‌ایم.

در فصل چهارم و پنجم به ترتیب به نابرابری‌های جایگشتی و چبیشف و نابرابری شور پرداخته‌ایم که

در عین سادگی، بعضی از مسائل را به زیبایی حل می‌کنند.

در فصل ششم تحت عنوان نابرابری‌ها در هندسه توجه خود را به استفاده از ساختارهای هندسی در حل مسئله‌های نابرابری و همین طور نابرابری‌هایی که در مورد اجزای یک شکل هندسی مطرح می‌شوند، معطوف کرده‌ایم.

در انتها نیز همان‌گونه که در بالا اشاره شد، مسائل بیش‌تری را برای تمرین ارائه کرده‌ایم.

روش پیشنهادی مطالعه کتاب:

برای استفاده‌ی بهتر از کتاب، پیشنهاد می‌کنیم که به صورت زیر عمل کنید.

ابتدا فصل یک و سپس سه بخش ابتدایی فصل دو را مطالعه نمایید. بعد از آن بخش یک از فصل سه و چهار را مطالعه کنید. سپس بخش‌های باقی‌مانده کتاب را به ترتیب از ابتدا شروع کرده و تا انتها مطالعه کنید.

توصیه‌ای که به دانش آموزان برای آموزش المپیاد داریم، این است که با صبر و حوصله در آموزش ریاضیات تلاش کنند. همین‌طور بهتر است که بر روی حل تمرین‌های المپیاد وقت گذاشته و ناامید نشوند.

خوش است زیر مغیلان به راه بادیه خفت، شب رحیل، ولی ترک جان بباید گفت

(گلستان سعدی)

در انتها ضروری است از دوستان زیادی که در نوشتن این اثر، اینجانب را کمک کرده‌اند تشکر کنم. از جمله چند تن از شاگردان این‌جانب که پیش‌نویس‌های کتاب را مطالعه کردند و بنده را از نظرات خوب خود بی‌بهره نگذاشتند و دوست عزیزم، آقای حسام‌الدین رجب‌زاده که ویراستاری این اثر را تقبل کردند و نظرات سازنده‌ی خود را به بنده گوشزد نمودند، سپاس‌گزاری می‌کنم. همین‌طور از کارکنان محترم انتشارات خوشخوان و شخص آقای اکبری، مسئول پروژه برگ و آقای حاجی‌زاده رئیس انتشارات خوشخوان که با تلاش خود این کتاب را برای دانش‌آموزان آماده نمودند نیز قدردانی می‌نمایم.

در انتها لازم است از پدر و مادر خود که همیشه پشتیبان من بوده‌اند، از خواهر خود که دلگرمی همیشگی خود را نثار من کرده است و از آقای احسان توحیدی که مشوق همیشگی بنده بوده اند، تشکر و قدردانی ویژه‌ای داشته باشم.

در پایان از همه‌ی اساتید و دانش‌آموزان عزیز خواهشمندم هرگونه پیشنهاد، انتقاد و نظرات خود در مورد این کتاب را از طریق پست الکترونیکی sina.rezaie71@gmail.com با بنده در میان بگذارند.

من الله توفیق

سینا رضایی زارعی

فهرست مطالب

۱

نامساوی‌های مقدماتی

در این فصل به بررسی خواص ابتدایی اعداد و ابزارهای مورد نیاز در بررسی نابرابری‌ها می‌پردازیم. به خواننده پیشنهاد می‌شود قبل از شروع مطالعه کتاب، مقدمه‌ی کتاب را مطالعه کند.

۱-۱ اعداد حقیقی

یکی از خواص اصلی و مهم اعداد حقیقی رابطه‌ی ترتیبی بین آن‌ها است. رابطه‌ی ترتیبی (بزرگ‌تر یا کوچک‌تر بودن اعداد نسبت به هم) به ما اجازه می‌دهد اعداد را با هم مقایسه کنیم و بررسی کنیم که کدام عدد بزرگ‌تر است و یا این‌که اعداد با هم برابر هستند یا خیر. در ادامه ویژگی‌های این رابطه را بررسی کنیم.

خاصیت ۱. هر عدد حقیقی x دقیقاً یکی از خواص زیر را داراست.

الف) $x = 0$

ب) $x > 0$

ج) $x < 0$

یعنی هر عدد حقیقی یا مثبت است یا منفی یا برابر صفر است.

خاصیت ۲. اگر x, y دو عدد مثبت باشند، $x + y$ و xy نیز اعدادی مثبت هستند.

خاصیت ۳. برای اعداد حقیقی a, b، $a > b$ است اگر و تنها اگر $a - b > 0$.

خاصیت ۴. اگر برای اعداد حقیقی a, b، $ab > 0$، آن‌گاه a, b یا هم‌زمان مثبت‌اند یا هم‌زمان منفی هستند و برعکس، یعنی اگر a و b هم‌زمان مثبت یا منفی باشند $ab > 0$.

نتیجه: برای هر عدد حقیقی a، $a^2 \geq 0$.

مثال ۱-۱ فرض کنید $a > b$ اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی c، $a + c > b + c$ و برعکس.

راه‌حل.

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow a - b + (c - c) > 0$$
$$\Leftrightarrow (a + c) - (b + c) > \Leftrightarrow a + c > b + c$$

در این‌جا دو بار از خاصیت سوم و یک بار از خاصیت دوم بالا استفاده کرده‌ایم.

مثال ۲-۱ فرض کنید a, b, c اعدادی حقیقی باشند که $c > 0$ و $a > b$. ثابت کنید $ac > bc$.

راه‌حل.

$$\begin{cases} a > b \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow (a - b)c > 0 \Rightarrow ac - bc > 0 \Rightarrow ac > bc$$

مثال ۳-۱ فرض کنید a, b, c اعدادی حقیقی باشند که $c > 0$ و $ac > bc$. ثابت کنید $a > b$.

راه‌حل. شبیه مثال قبل است و به خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۴-۱ فرض کنید a, b, c اعدادی حقیقی هستند که $c < 0$ و $a > b$. ثابت کنید $ac < bc$.

راه‌حل.

$$\begin{cases} a > b \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b > 0 \\ -c > 0 \end{cases} \Rightarrow (a - b)(-c) > 0 \Rightarrow bc > ac$$

مثال ۵-۱ a, b دو عدد حقیقی هستند. در این صورت عدد حقیقی $x = a - b$ دقیقاً در یکی از خواص زیر صدق می‌کند. (بنابر خاصیت ۱)

الف) $x = 0$

ب) $x > 0$

ج) $x < 0$

و در نتیجه اعداد a, b دقیقاً در یکی از خواص زیر صدق می‌کنند.

الف) اگر $x = 0$ آن‌گاه $a = b$،

ب) اگر $x > 0$ آن‌گاه $a > b$،

ج) اگر $x < 0$ آن‌گاه $a < b$

مثال ۱-۶ فرض کنید a, b اعدادی حقیقی باشند که $a > 0$ و $b < 0$. ثابت کنید $ab < 0$.

راه‌حل.

$$\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ -b > 0 \end{cases} \Rightarrow -ab > 0 \Rightarrow ab < 0$$

مثال ۱-۷ فرض کنید a, b, c اعدادی حقیقی هستند که $a > b, b > c$. ثابت کنید $a > c$.

راه‌حل.

$$\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b > 0 \\ b - c > 0 \end{cases} \Rightarrow (a-b)+(b-c) > 0 \Rightarrow a-c > 0 \Rightarrow a > c$$

مثال ۱-۸ فرض کنید a, b, c, d اعدادی حقیقی هستند که $a > b$ و $c > d$. ثابت کنید $a + c > b + d$.

راه‌حل.

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b > 0 \\ c - d > 0 \end{cases} \Rightarrow (a-b)+(c-d) > 0 \Rightarrow (a+c)-(b+d) > 0$$

که معادل است با $a + c > b + d$.

مثال ۱-۹ فرض کنید $b > a > 0$ و $d > c > 0$ اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید $bd > ac$.

راه‌حل. c عددی مثبت است و $b > c$. در نتیجه طبق مثال ۱ـ۲ $bc > ac$. از طرفی b عددی مثبت است و $d > c$. پس مجدداً طبق مثال ۱ـ۲ $bd > bc$. در نتیجه:

$$bd > bc > ac \Rightarrow bd > ac$$

نتیجه: اگر $a > b$ اعدادی مثبت باشند، $a^2 > b^2$.

مثال ۱-۱۰ فرض کنید $0 \leq a < b \leq 1$ اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید:

الف) $0 \leq \frac{b-a}{1-ab} \leq 1$

ب) $0 \leq \frac{b}{1+a} + \frac{a}{1+b} \leq 1$

ج) $0 \leq ab^2 - ba^2 \leq \frac{1}{4}$

راه‌حل. الف) بدیهی است $\frac{b-a}{1-ab} \geq 0$. زیرا هم صورت و هم مخرج آن مثبت است. از طرفی:

$$1 \geq \frac{b-a}{1-ab} \Leftrightarrow 1-ab \geq b-a \Leftrightarrow 1+a \geq b(1+a) \Leftrightarrow 1 \geq b$$

ب) واضح است $\frac{b}{1+a} + \frac{a}{1+b} \geq 0$. از طرفی:

$$\begin{aligned} 1 \geq \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} &\Leftrightarrow (1+a)(1+b) \geq a(1+a) + b(1+b) \\ &\Leftrightarrow 1+ab \geq a^2+b^2 \\ &\Leftrightarrow 1-a^2 \geq b^2-ab \Leftrightarrow (1-a)(1+a) \geq b(b-a) \\ &\Leftrightarrow 1+a \geq b-a \end{aligned}$$

که بدیهی است.

ج) مشخص است $ab^2-ba^2 = ab(b-a)$. پس مشخص است $ab^2-ba^2 \geq 0$.

از طرفی به راحتی می‌توان دید $a(b-a) \leq \frac{b^2}{4}$. پس:

$$ab(b-a) \leq b \times \frac{b^2}{4} = \frac{b^3}{4} \leq \frac{1}{4}$$

مثال ۱-۱۱ m, n اعدادی طبیعی هستند. ثابت کنید:

$$\frac{m}{n} < \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{m+2n}{m+n} > \sqrt{2}$$

راه‌حل.

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} < \sqrt{2} &\Leftrightarrow \frac{m+n}{n} < \sqrt{2}+1 \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{m+n} > \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \frac{m+2n}{m+n} > \sqrt{2} \end{aligned}$$

تمرین‌های پایان بخش

۱. اگر $a > ۰$ عددی مثبت باشد، ثابت کنید $\frac{۱}{a} > ۰$.

۲. a, b اعدادی مثبت هستند. ثابت کنید $\frac{a}{b} > ۰$.

۳. فرض کنید $a > ۱$ عددی مثبت است. ثابت کنید $a^۲ > a$.

۴. فرض کنید $a < ۱$ عددی مثبت است. ثابت کنید $a^۲ < a$.

۵. فرض کنید a, b اعدادی حقیقی باشند که $b > ۰$. ثابت کنید $\frac{a}{b} > ۱$ اگر و تنها اگر $a > b$.

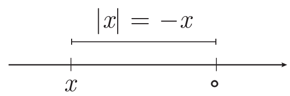
۶. برای عدد طبیعی n و اعداد حقیقی مثبت b, a که $a > b$ ثابت کنید $a^n > b^n$.

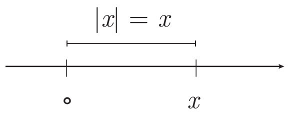
۱-۲ قدرمطلق

قدرمطلق عدد حقیقی x که با نماد $|x|$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

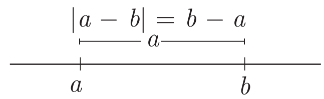
$$|x| = \begin{cases} x & \text{اگر: } x \geq 0 \\ -x & \text{اگر: } x < 0 \end{cases}$$

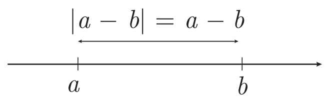
در حقیقت $|x|$ برابر فاصله‌ی عدد x تا عدد صفر در محور اعداد حقیقی است.





هم‌چنین برای اعداد حقیقی a, b، $|a-b|$ برابر فاصله‌ی اعداد a, b از یکدیگر است.





مثال ۱-۱۲ خواص زیر به سادگی قابل بررسی هستند.

الف) $|x| \geq 0$

ب) $|x| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$

ج) $|-x| = |x|$

د) $|x|^2 = x^2$

ه) $|ab| = |a||b|$

و) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ که $b \neq 0$

خاصیت ۱. نامساوی مثلث

برای اعداد حقیقی a, b، همیشه رابطه زیر که به آن نابرابری مثلث می‌گوییم، برقرار است.

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

و تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که $ab \geq 0$.

اثبات. دقت کنید طرفین نامساوی مثلث مثبت هستند. پس:

$$\begin{aligned} |a| + |b| \geq |a+b| &\Leftrightarrow (|a| + |b|)^2 \geq |a+b|^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2|ab| \geq a^2 + b^2 + 2ab \\ &\Leftrightarrow 2|ab| \geq 2ab \Leftrightarrow |ab| \geq ab \end{aligned}$$

نامساوی اخیر نتیجه‌ی بدیهی تعریف قدرمطلق است و تساوی زمانی است که $|ab| = ab$، یا معادلاً $ab \geq ۰$.

خاصیت ۲. حالت کلی نامساوی مثلث

این خاصیت تعمیم خاصیت ۱ است. برای اعداد حقیقی $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$:

$$|a_۱| + |a_۲| + \cdots + |a_n| \geq |a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n|$$

و حالت تساوی زمانی است که همه‌ی اعداد ناصفر در بین $a_۱, \cdots, a_n$ هم‌علامت باشند.

اثبات. روی n استقرا بزنید.

نتیجه: برای اعداد حقیقی $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$:

$$|a_۱| + |a_۲| + \cdots + |a_n| \geq |\pm a_۱ \pm a_۲ \pm \cdots \pm a_n|$$

مثال ۱-۱۳ برای اعداد حقیقی x, y, a, b ثابت کنید:

الف) اگر $|x| \leq b$، آن‌گاه $-b \leq x \leq b$

ب) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

راه‌حل. الف) مشخص است که b و $|x|$ هر دو مثبت هستند. در نتیجه:

$$b \geq |x| \;\Rightarrow\; -|x| \geq -b \;\Rightarrow\; b \geq |x| \geq ۰ \geq -|x| \geq -b$$

حال با توجه به این‌که $|x|$ برابر x یا $-x$ است، نتیجه می‌گیریم $-b \leq x \leq b$.

ب) مشخص است طرفین نامساوی مثبت هستند. در نتیجه:

$$\begin{aligned} |a - b| \geq \big||a| - |b|\big| &\Leftrightarrow (a-b)^۲ \geq (|a| - |b|)^۲ \\ &\Leftrightarrow a^۲ + b^۲ - ۲ab \geq a^۲ + b^۲ - ۲|ab| \\ &\Leftrightarrow -۲ab \geq -۲|ab| \;\Leftrightarrow\; |ab| \geq ab \end{aligned}$$

که نامساوی اخیر بنابر تعریف درست است.

تمرین‌های پایان بخش

۱. a, b, c, d اعدادی حقیقی هستند که $c \geq d$ و $a \geq b$. ثابت کنید:

$$ac + bd \geq ad + bc$$

۲. a, b, c, d اعدادی حقیقی هستند که $a + d = b + c$. ثابت کنید:

$$(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geq ۰$$

«جمهوری چک ـ اسلواکی ۲۰۰۴»

۳. n عددی طبیعی است. ثابت کنید قسمت اعشاری عدد $\sqrt{۴n^۲ + n}$ از $\frac{۱}{۴}$ کم‌تر است.

٤. a, b, c اعدادی حقیقی هستند. ثابت کنید:

$$|a| + |b| + |c| + |a+b+c| \geq |a+b| + |b+c| + |c+a|$$

۱-۳ چندجمله‌ای درجه‌ی دو $(ax^{۲}+bx+c)$

یکی از مفیدترین نامساوی‌ها برای اعداد حقیقی، نامساوی $x^{۲} \geq ۰$ است که برای هر عدد حقیقی x برقرار است. با استفاده از نامساوی $x^{۲} \geq ۰$، نامساوی‌های دیگر را می‌توان اثبات کرد. (از قبیل نامساوی‌های واسطه و کوشی شوارتز که در فصل‌های آینده بررسی می‌شوند.) از جمله با استفاده از این نامساوی می‌توان حداقل یا حداکثر عبارت $ax^{۲}+bx+c$ را به ازای اعداد حقیقی دلخواه a, b, c یافت. از این عبارت به تناوب در مسائل نامساوی استفاده می‌شود.

ابتدا فرض کنید $a > ۰$ باشد. چندجمله‌ای درجه‌ی دو $ax^{۲}+bx+c$ به ازای $x = \frac{-b}{۲a}$ حداقل مقدار خود را می‌گیرد و مقدار حداقل نیز برابر $c - \frac{b^{۲}}{۴a}$ است. زیرا:

$$ax^{۲}+bx+c = a(x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}})+c-\frac{b^{۲}}{۴a} = a(x+\frac{b}{۲a})^{۲}+c-\frac{b^{۲}}{۴a}$$

از آنجا که $(x+\frac{b}{۲a})^{۲} \geq ۰$ و حداقل آن برابر صفر است و به ازای $x = \frac{-b}{۲a}$ برابر صفر می‌شود:

$$ax^{۲}+bx+c = a(x+\frac{b}{۲a})^{۲}+c-\frac{b^{۲}}{۴a} \geq c-\frac{b^{۲}}{۴a}$$

مشابهاً اگر $a < ۰$ باشد، چندجمله‌ای درجه‌ی دو $ax^{۲}+bx+c$ به ازای $x = \frac{-b}{۲a}$ حداکثر مقدار خود را می‌گیرد و مقدار حداکثر نیز برابر $c - \frac{b^{۲}}{۴a}$ است.

$$ax^{۲}+bx+c = a(x+\frac{b}{۲a})^{۲}+c-\frac{b^{۲}}{۴a} \leq c-\frac{b^{۲}}{۴a} = \frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}$$

یادآوری: یک عبارت بسیار مهم در برخورد با چندجمله‌ای $ax^{۲}+bx+c$، $b^{۲}-۴ac$ است که به آن مبین چندجمله‌ای گفته می‌شود و از نماد Δ برای نمایش آن استفاده می‌کنیم. به‌طور مثال اگر $\Delta < ۰$ باشد، چندجمله‌ای درجه‌ی دوم ما ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال ۱-۱٤ x, y اعدادی مثبت هستند که $x+y=۲a$. ثابت کنید حداکثر عبارت xy زمانی است که $x=y=a$.

راه‌حل.

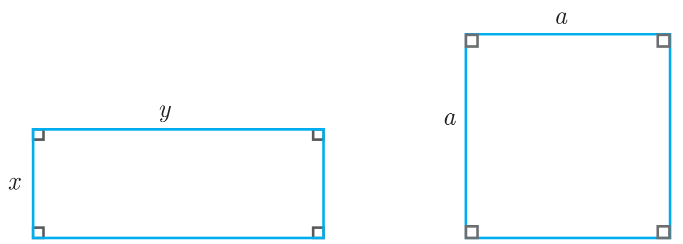
$$x+y=۲a \Rightarrow y=۲a-x \Rightarrow xy=x(۲a-x)=۲ax-x^{۲}=-(x-a)^{۲}+a^{۲}$$

در نتیجه:

$$xy=-(x-a)^{۲}+a^{۲} \leq a^{۲}$$

و زمانی xy حداکثر خود (یعنی $a^{۲}$) می‌شود که $x = a$. یعنی $x = y = a$.

مثال فوق را می‌توان به‌صورت زیر بررسی کرد. اگر مستطیلی با طول و عرض x, y داشته باشیم که محیط آن برابر $۴a$ $۲(x+y) =$ باشد، مساحت آن، یعنی xy زمانی حداکثر است که $x = y = a$. یعنی مستطیل، یک مربع باشد.



$$۲(x+y) = ۴a \qquad x = y = a$$
$$xy \leq a^{۲} \qquad xy = a^{۲}$$

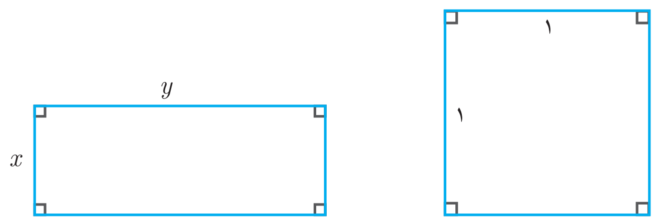
مثال ۱-۱۵ فرض کنید x, y اعدادی مثبت باشند که $xy = ۱$. حاصل $x + y$ زمانی می‌نیمم است که $x = y = ۱$.

راه‌حل. اگر $xy = ۱$، آن‌گاه $y = \frac{۱}{x}$ و در نتیجه

$$x + y = x + \frac{۱}{x} = (\sqrt{x} - \frac{۱}{\sqrt{x}})^{۲} + ۲ \geq ۲$$

پس حداقل مقدار $x + y$ برابر ۲ است و زمانی برابر ۲ است که $\sqrt{x} = \frac{۱}{\sqrt{x}}$ ، یا معادلاً $x = y = ۱$.

مثال فوق را به‌صورت زیر می‌توان بررسی کرد. در همه‌ی مستطیل‌های با اضلاع x, y با مساحت $xy = ۱$، مربع با اضلاع واحد کم‌ترین محیط را دارد.



$$xy = ۱ \qquad x = y = ۱$$
$$x + y \geq ۲ \qquad x + y = ۲$$

مثال ۱-۱۶ برای هر عدد حقیقی مثبت x، ثابت کنید $x + \frac{۱}{x} \geq ۲$.

راه‌حل.

$$x + \frac{۱}{x} = (\sqrt{x} - \frac{۱}{\sqrt{x}})^۲ + ۲ \geq ۲$$

حالت تساوی زمانی است که $\sqrt{x} = \frac{۱}{\sqrt{x}}$، یا معادلاً $x = ۱$.

مثال ۱-۱۷ a, b, c سه عدد مثبت هستند. ثابت کنید a, b, c می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند اگر و تنها اگر برای هر $p, q > ۰$ که $p + q = ۱$، داشته باشیم:

$$pa^۲ + qb^۲ > pqc^۲$$

(**یادآوری:** اعداد مثبت a, b, c تنها زمانی می‌توانند طول اضلاع یک مثلث باشند که $c > a + b$، $b > a + c$ و $a < b + c$.)

راه‌حل. فرض کنید

$$Q = pa^۲ + qb^۲ - pqc^۲ = pa^۲ + (۱ - p)b^۲ - p(۱ - p)c^۲ = p^۲c^۲ + (a^۲ - b^۲ - c^۲)p + b^۲$$

در نتیجه Q یک چندجمله‌ای بر حسب p و از درجه‌ی دو است. از قبل می‌دانیم Q همیشه مثبت است، اگر و تنها اگر $\Delta < ۰$ باشد. در نتیجه:

$$\begin{aligned} Q > ۰ \;&\Leftrightarrow\; \Delta = [(a^۲ - b^۲ - c^۲)^۲ - ۴b^۲c^۲] < ۰ \\ &\Leftrightarrow\; [a^۲ - (b + c)^۲][a^۲ - (b - c)^۲] \geq ۰ \\ &\Leftrightarrow\; [a^۲ - b^۲ - c^۲ - ۲bc][a^۲ - b^۲ - c^۲ + ۲bc] < ۰ \\ &\Leftrightarrow\; (a + b + c)(a - b - c)(a - b + c)(a + b - c) < ۰ \\ &\Leftrightarrow\; (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) > ۰ \end{aligned}$$

بدون کم شدن از کلیت مسأله به سادگی می‌توان دید اگر $a \geq b \geq c$، دو تا از عبارت فوق مثبت هستند. پس اگر ضرب هر سه عبارت مثبت است، باید همگی مثبت باشند. در نتیجه:

$$a + b > c \quad , \quad a + c > b \quad , \quad b + c > a$$

تمرین‌های پایان بخش

۱. فرض کنید a, b اعدادی مثبت هستند. ثابت کنید $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq ۲$.

۲. فرض کنید چندجمله‌ای درجه‌ی دو $ax^۲ + bx + c$ در شرایط زیر صدق کند

$$a > ۰ \ , \ a + b + c \geq ۰ \ , \ a - b + c \geq ۰ \ , \ a - c \geq ۰ \ , \ b^۲ - ۴ac \geq ۰$$

ثابت کنید معادله‌ی $ax^۲ + bx + c$ دو جواب حقیقی دارد که در بازه‌ی $[-۱, ۱]$ قرار دارند.

۳. فرض کنید a, b, c اعدادی مثبت باشند. ثابت کنید عبارت‌های زیر نمی‌توانند هم‌زمان درست باشند.

$$a(۱ - b) > \frac{۱}{۴} \ , \ b(۱ - c) > \frac{۱}{۴} \ , \ c(۱ - a) > \frac{۱}{۴}$$

۲

نامساوی‌های واسطه

در این فصل به بررسی نامساوی‌های واسطه می‌پردازیم. نامساوی‌های واسطه یکی از کاربردی‌ترین روش‌ها در برخورد با نامساوی‌ها هستند. در بخش ۱ و ۲، ابتدا چند حالت خاص را بررسی می‌کنیم. در بخش ۳ حالت کلی را معرفی و اثبات کرده و به بررسی کاربردهای آن می‌پردازیم. بخش ۴ به بررسی جزئی‌تر این نامساوی و اشتباهات رایج و نکات ریز در آن اختصاص دارد. بخش ۵ نیز به حل تمرین‌های مشکل‌تر اختصاص دارد.

یادآوری می‌کنیم قبل از مطالعه‌ی کتاب به خواننده توصیه می‌شود روش مطالعه کتاب را در مقدمه‌ی کتاب مشاهده نماید.

۲-۱ نامساوی‌های واسطه با دو متغیر

قضیه ۲-۱

فرض کنید a, b اعدادی حقیقی و مثبت باشند. تعریف کنید

$$QM = \sqrt{\frac{a^۲ + b^۲}{۲}} \quad , \quad AM = \frac{a+b}{۲} \quad , \quad GM = \sqrt{ab} \quad , \quad HM = \frac{۲}{\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}}$$

میانگین مربعی — میانگین حسابی — میانگین هندسی — میانگین توافقی

در این‌صورت:

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$

و حالت تساوی در هر کدام از این نابرابری‌ها زمانی رخ می‌دهد که $a=b$.
نامساوی‌های بالا را به‌صورت جداگانه ثابت می‌کنیم و برای هر کدام در ادامه مثال ارائه خواهیم کرد.

اثبات قسمت $QM \geq AM$: (نامساوی مربعی ـ حسابی)

برای اثبات رابطه‌ی فوق تنها باید ثابت کنیم:

$$\sqrt{\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۲}} \geq \frac{a+b}{۲} \Leftrightarrow \frac{a^{۲}+b^{۲}}{۲} \geq \left(\frac{a+b}{۲}\right)^{۲}$$
$$\Leftrightarrow ۲(a^{۲}+b^{۲}) \geq a^{۲}+۲ab+b^{۲} \Leftrightarrow a^{۲}+b^{۲}-۲ab \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^{۲} \geq ۰$$

که نامساوی فوق همواره برقرار است و حالت تساوی زمانی است که $a-b=۰$ برقرار باشد، یعنی $a=b$.

مثال ۲-۱ فرض کنید x, y اعدادی حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید:

$$۲(x^{۲}+y^{۲}) \geq (x+y)^{۲}$$

راه‌حل. بنابر قضیه ۲ـ۱، برای هر دو عدد حقیقی مثبت، $QM \geq AM$. پس:

$$\sqrt{\frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲}} \geq \frac{x+y}{۲} \Rightarrow \frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲} \geq \left(\frac{x+y}{۲}\right)^{۲}$$
$$\Rightarrow \frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲} \geq \frac{(x+y)^{۲}}{۴} \Rightarrow ۲(x^{۲}+y^{۲}) \geq (x+y)^{۲}$$

اثبات قسمت $AM \geq GM$: (نامساوی حسابی ـ هندسی)

برای اثبات رابطه‌ی فوق تنها باید ثابت کنیم:

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq ۲\sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^{۲} \geq ۰$$

که نامساوی فوق همواره برقرار است و حالت تساوی زمانی است که $\sqrt{a}-\sqrt{b}=۰$ برقرار باشد، یعنی $a=b$.

مثال ۲-۲ فرض کنید x, y اعداد حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید:

$$x^۲ + y^۲ \geq ۲xy$$

راه‌حل. بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱، برای هر دو عدد حقیقی مثبت، $AM \geq GM$. پس:

$$\frac{x^۲ + y^۲}{۲} \geq \sqrt{x^۲y^۲} = xy \Rightarrow x^۲ + y^۲ \geq ۲xy$$

مثال ۲-۳ فرض کنید $x > ۰$ عددی حقیقی باشد، ثابت کنید:

$$x + \frac{۱}{x} \geq ۲$$

راه‌حل. بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱:

$$\frac{x + \frac{۱}{x}}{۲} \geq \sqrt{x.\frac{۱}{x}} = ۱ \quad (AM - GM)$$

$$\Rightarrow x + \frac{۱}{x} \geq ۲$$

بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱ حالت تساوی نیز زمانی است که:

$$x = \frac{۱}{x} \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = ۱$$

مثال ۲-٤ فرض کنید a, b, x اعدادی حقیقی و مثبت باشند. ثابت کنید:

$$ax + \frac{b}{x} \geq ۲\sqrt{ab}$$

راه‌حل. بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱:

$$\frac{ax + \frac{b}{x}}{۲} \geq \sqrt{ax.\frac{b}{x}} = \sqrt{ab} \quad (AM - GM)$$

$$\Rightarrow ax + \frac{b}{x} \geq ۲\sqrt{ab}$$

مثال ۲-۵ فرض کنید a, b اعدادی حقیقی و مثبت باشند. ثابت کنید:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq ۲$$

حالت تساوی را نیز بیابید.

راه‌حل. بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{۲} \geq \sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} = ۱ \quad (AM - GM)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq ۲ab$$

حالت تساوی نیز زمانی است که $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$، یعنی $a = b$.

مثال ۲-۶ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید:

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + ac + bc$$

راه‌حل. بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱:

$$\frac{a^۲ + b^۲}{۲} \geq \sqrt{a^۲ b^۲} = ab \qquad (AM - GM)$$

و

$$\frac{a^۲ + c^۲}{۲} \geq \sqrt{a^۲ c^۲} = ac \qquad (AM - GM)$$

و

$$\frac{b^۲ + c^۲}{۲} \geq \sqrt{b^۲ c^۲} = bc \qquad (AM - GM)$$

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲ + b^۲}{۲} + \frac{a^۲ + c^۲}{۲} + \frac{b^۲ + c^۲}{۲} \geq ab + bc + ac$$

مثال ۲-۷ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید:

$$(a + b)(a + c)(b + c) \geq ۸abc$$

حالت تساوی را نیز بیابید.

راه‌حل. بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱:

$$\frac{a + b}{۲} \geq \sqrt{ab} \qquad (AM - GM) \qquad (\text{حالت تساوی } a = b)$$

$$\frac{b + c}{۲} \geq \sqrt{bc} \qquad (AM - GM) \qquad (\text{حالت تساوی } b = c)$$

$$\frac{a + c}{۲} \geq \sqrt{ac} \qquad (AM - GM) \qquad (\text{حالت تساوی } a = c)$$

$$\Rightarrow \frac{a + b}{۲} \times \frac{b + c}{۲} \times \frac{a + c}{۲} \geq \sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ac} = abc$$

$$\Rightarrow (a + b)(a + c)(b + c) \geq ۸abc$$

همین‌طور حالت تساوی نیز زمانی است که در هر سه نامساوی حسابی هندسی فوق، تساوی رخ دهد. یعنی $a = b$، $b = c$ و $a = c$. در نتیجه حالت تساوی زمانی است که $a = b = c$.

اثبات قسمت $GM \geq HM$: (نامساوی هندسی ـ توافقی)

برای اثبات کافی است ثابت کنیم:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}} \Leftrightarrow \frac{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}{۲} \geq \frac{۱}{\sqrt{ab}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a+b}{ab}}{۲} \geq \frac{۱}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \frac{a+b}{۲} \geq \frac{ab}{\sqrt{ab}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$$

که نامساوی اخیر، همان $(AM - GM)$ است که از قبل صحت آن را می‌دانیم.

مثال ۲-۸ فرض کنید x, y اعدادی حقیقی و مثبت باشند. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y} \geq \frac{۲}{\sqrt{xy}}$$

راه‌حل. بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱:

$$\sqrt{xy} \geq \frac{۲}{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}} \qquad (GM - HM)$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y} \geq \frac{۲}{\sqrt{xy}}$$

تا اینجا قضیه‌ی ۲ـ۱ به تمامی اثبات شد و مثال‌هایی نیز بررسی شد. در ادامه ممکن است از نامساوی‌های زیر نیز استفاده کنیم که نتایج بدیهی از قضیه‌ی ۲ـ۱ هستند.

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$
$$\Rightarrow QM \geq HM \;,\; QM \geq GM \;,\; AM \geq HM$$

مثال ۲-۹ فرض کنید a, b اعدادی حقیقی و مثبت باشند. ثابت کنید:

$$(a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}) \geq ۴$$

راه‌حل. بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱:

$$\frac{a+b}{۲} \geq \frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}} \qquad (AM - HM)$$
$$\Rightarrow (a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}) \geq ۴$$

این بخش را با چند تمرین به پایان می‌بریم و در بخش ۵ مثال‌های دشوارتری را بررسی خواهیم کرد.

تمرین‌های پایان بخش

۱. برای اعداد حقیقی و مثبت x, y, z ثابت کنید:

$$xy + yz + zx \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}$$

۲. برای اعداد حقیقی و مثبت x, y ثابت کنید:

$$x^{۲} + y^{۲} + ۱ \geq xy + x + y$$

حالت تساوی را نیز بیابید.

۳. برای اعداد حقیقی و مثبت x, y, z ثابت کنید:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z} \geq \frac{۱}{\sqrt{xy}} + \frac{۱}{\sqrt{yz}} + \frac{۱}{\sqrt{xz}}$$

۴. برای اعداد حقیقی و مثبت x, y, z ثابت کنید:

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z$$

۵. برای اعداد حقیقی و مثبت x, y, z ثابت کنید:

$$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} \geq x\sqrt{y^{۲} + z^{۲}} + y\sqrt{x^{۲} + z^{۲}}$$

حالت تساوی را نیز بیابید.

۶. برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c, d ثابت کنید:

$$a + b + c + d \geq ۴\sqrt[۴]{abcd}$$

حالت تساوی را نیز بیابید.

۷. برای اعداد حقیقی و مثبت a, b ثابت کنید:

$$a^{۴} + b^{۴} + ۸ \geq ۸ab$$

۸. برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c, d ثابت کنید:

الف) $(a + b + c + d)(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{d}) \geq ۱۶$

ب) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{c} \geq ۴$

۹. فرض کنید a, b دو عدد حقیقی و مثبت باشد که جمع آن‌ها برابر k است. ثابت کنید حداکثر مقدار ab برابر $\frac{k^۲}{۴}$ است.

۱۰. فرض کنید a, b دو عدد حقیقی مثبت باشند که $ab = k$. ثابت کنید حداقل مقدار $a+b$ برابر $۲\sqrt{k}$ است.

۱۱. فرض کنید $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ اعدادی حقیقی و مثبت با حاصل‌ضرب ۱ باشند. ثابت کنید:

$$(۱+a_۱)(۱+a_۲)\cdots(۱+a_n) \geq ۲^n$$

۱۲. فرض کنید a, b اعداد حقیقی و مثبت هستند. ثابت کنید:

$$\frac{a^۳}{b} + \frac{b^۳}{a} \geq ۲ab$$

۱۳. برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید:

$$۳(a^۲ + b^۲ + c^۲) \geq (a+b+c)^۲ \geq ۳(ab+ac+bc)$$

۱۴. فرض کنید x, y, z اعدادی حقیقی و مثبت باشند که $x+y+z = ۱$. ثابت کنید:

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq ۱$$

۱۵. فرض کنید a, b, c اعدادی حقیقی و مثبت باشند. ثابت کنید:

$$(a+\frac{۱}{b})(b+\frac{۱}{c})(c+\frac{۱}{a}) \geq ۸$$

۱۶. فرض کنید a, b, c اعداد حقیقی و مثبت باشند. ثابت کنید:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{۲}$$

۱۷. برای اعداد مثبت a, b ثابت کنید:

$$(\frac{a+b}{۲})^۴ \geq \frac{ab(a^۲+b^۲)}{۲}$$

۱۸. برای اعداد مثبت a, b, c, d ثابت کنید:

$$\frac{۱}{ab} + \frac{۱}{cd} \geq \frac{۸}{(a+b)(c+d)}$$

۲-۳ بررسی نامساوی‌های واسطه

در این بخش به بررسی نامساوی‌های واسطه در حالت کلی می‌پردازیم.

قضیه ۲-۳

فرض کنید $a_1, a_2, \cdots, a_n$، n عددی حقیقی و مثبت باشند. تعریف کنید:

$$QM = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \quad , \quad AM = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

میانگین مربعی — میانگین حسابی

$$GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad , \quad HM = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

میانگین هندسی — میانگین توافقی

در این‌صورت:

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$

و حالت تساوی زمانی است که $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

اثبات. در اینجا تنها نامساوی $AM \geq GM$ را ثابت می‌کنیم. اثبات $QM \geq AM$ و $GM \geq HM$ کاملاً مشابه است و به عنوان تمرین بر عهده‌ی خواننده می‌گذاریم.

اثبات به روش «استقرای قهقرایی» است. گزاره‌ی $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ را با نماد P_n نشان می‌دهیم. برای اثبات به روش استقرای قهقرایی، باید سه گزاره‌ی زیر را ثابت کنیم.

۱. ابتدا ثابت می‌کنیم P_2 برقرار است.

۲. ثابت می‌کنیم درستی P_n، درستی P_{2n} را نتیجه می‌دهد.

۳. ثابت می‌کنیم درستی P_n، درستی P_{n-1} را نتیجه می‌دهد.

اگر «۱، ۲ و ۳» اثبات شوند، آنگاه P_n برای تمام مقادیر $n \geq 2$ برقرار خواهد بود.*

اثبات ۱: این همان نامساوی حسابی ـ هندسی با دو متغیر است که در بخش ۱ اثبات شد.

اثبات ۲: اگر P_n برقرار باشد:

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n} \\ & = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \\ & \geq 2(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4} + \cdots + \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}) \end{aligned}$$

*) برای اطلاعات بیشتر در مورد استقرای قهقرایی به کتاب‌های ترکیبیات مراجعه کنید.

$$\geq ۲n\sqrt{\sqrt{a_۱a_۲} \times \sqrt{a_۳a_۴} \times \cdots \times \sqrt{a_{۲n-۱}a_{۲n}}}$$
$$= ۲n \sqrt[۲n]{a_۱a_۲a_۳\cdots a_{۲n}}$$

پس $P_{۲n}$ برقرار است.

اثبات ۳: فرض کنید $a_۱, a_۲, \cdots, a_{n-۱}$، $n-۱$ عدد مثبت باشند. تعریف کنید

$$g = \sqrt[n-۱]{a_۱a_۲\cdots a_{n-۱}}$$

با استفاده از فرض درستی P_n:

$$\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_{n-۱}+g}{n} \geq \sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_{n-۱}g} = \sqrt[n]{g^{n-۱}g} = g$$
$$\Rightarrow \frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_{n-۱}}{n-۱} \geq \sqrt[n-۱]{a_۱a_۲\cdots a_{n-۱}}$$

پس $P_{n-۱}$ نیز برقرار است. در نتیجه، برای هر عدد طبیعی n، P_n برقرار است.

مثال ۲-۱۷ فرض کنید a, b, c, d اعداد مثبت باشند، ثابت کنید:

$$(a+b+c)^۳ \geq a^۳+b^۳+c^۳+۲۴abc$$

راه‌حل.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^۳ &= a^۳+b^۳+c^۳+۶abc \\ &\quad +۳(a^۲b+a^۲c+b^۲a+b^۲c+c^۲a+c^۲b) \\ &\geq a^۳+b^۳+c^۳+۶abc+۳(۶\sqrt[۶]{a^۶b^۶c^۶}) \\ &= a^۳+b^۳+c^۳+۲۴abc\end{aligned}$$

مثال ۲-۱۸ برای اعداد حقیقی و مثبت $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$، ثابت کنید:

$$(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)(\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\cdots+\frac{۱}{a_n}) \geq n^۲$$

راه‌حل. با استفاده از نامساوی حسابی ـ هندسی:

$$(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)(\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\cdots+\frac{۱}{a_n})$$
$$\geq (n\sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n})(n\sqrt[n]{\frac{۱}{a_۱}\frac{۱}{a_۲}\cdots\frac{۱}{a_n}}) = n^۲$$

مثال ۲-۱۹ تعریف کنید $H_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n}$. ثابت کنید:

$$n(n+۱)^{\frac{۱}{n}} \leq n + H_n \qquad (n \geq ۲)$$

راه‌حل. با نوشتن $n = \underbrace{۱ + ۱ + \cdots + ۱}_{n \text{ تا}}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} n + H_n &= n + (۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n}) \\ &= (۱+۱) + (۱ + \frac{۱}{۲}) + (۱ + \frac{۱}{۳}) + \cdots + (۱ + \frac{۱}{n}) \\ &= ۲ + \frac{۳}{۲} + \frac{۴}{۳} + \cdots + \frac{n+۱}{n} \geq \\ & n\sqrt[n]{۲ \times \frac{۳}{۲} \times \frac{۴}{۳} \times \cdots \times \frac{n+۱}{n}} = n\sqrt[n]{n+۱} \end{aligned}$$

که همان حکم مطلوب است.

مثال ۲-۲۰ a, b, c اعدادی مثبت با مجموع ۱ هستند. ثابت کنید:

$$(\frac{۱}{a} + ۱)(\frac{۱}{b} + ۱)(\frac{۱}{c} + ۱) \geq ۶۴$$

راه‌حل. بنابر نامساوی $AM - GM$:

$$\frac{۱}{a} + ۱ = \frac{۱}{۳a} + \frac{۱}{۳a} + \frac{۱}{۳a} + ۱ \geq ۴\sqrt[۴]{\frac{۱}{۲۷a^۳}}$$

مشابهاً:

$$\frac{۱}{b} + ۱ \geq ۴\sqrt[۴]{\frac{۱}{۲۷b^۳}} \text{ ، } \frac{۱}{c} + ۱ \geq ۴\sqrt[۴]{\frac{۱}{۲۷c^۳}}$$

از طرفی بنابر فرض $a + b + c = ۱$:

$$\frac{۱}{۳} = \frac{a+b+c}{۳} \geq \sqrt[۳]{abc} \Rightarrow \frac{۱}{abc} \geq ۳^۳ \qquad (۱)$$

در نتیجه:

$$(\frac{۱}{a} + ۱)(\frac{۱}{b} + ۱)(\frac{۱}{c} + ۱) \geq ۶۴\sqrt[۴]{\frac{۱}{۳^۹a^۳b^۳c^۳}} \geq ۶۴$$

مثال ۲-۲۱ a, b, c اعدادی مثبت هستند. ثابت کنید:

$$a+b+c \geq \frac{۲ab}{a+b}+\frac{۲bc}{b+c}+\frac{۲ca}{c+a}$$

راه‌حل. بنابر نامساوی $AM-HM$:

$$\frac{a+b}{۲} \geq \frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}=\frac{۲ab}{a+b}$$
$$\frac{a+c}{۲} \geq \frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{c}}=\frac{۲ac}{ac}$$
$$\frac{b+c}{۲} \geq \frac{۲}{\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}}=\frac{۲bc}{b+c}$$

با جمع کردن طرفین رابطه بالا، حکم سؤال نتیجه می‌شود.

مثال ۲-۲۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید:

$$a^{۴}+b^{۴}+c^{۲} \geq \sqrt{۸}abc$$

«روسیه ۱۹۹۲»

راه‌حل. بنابر نامساوی $AM-GM$:

$$\begin{aligned} a^{۴}+b^{۴}+c^{۲} &\geq ۲\sqrt{a^{۴}b^{۴}}+c^{۲}=۲a^{۲}b^{۲}+c^{۲} \\ &\geq ۲\sqrt{(۲a^{۲}b^{۲})\times c^{۲}}=۲\sqrt{۲}abc=\sqrt{۸}abc \end{aligned}$$

مثال ۲-۲۳ برای اعداد حقیقی $a, b > ۱$ ثابت کنید:

$$\frac{a^{۲}}{b-۱}+\frac{b^{۲}}{a-۱} \geq ۸$$

«روسیه ۱۹۹۲»

راه‌حل.

$$\frac{a^{۲}}{b-۱}+\frac{b^{۲}}{a-۱}=\frac{(a-۱)^{۲}}{b-۱}+\frac{(b-۱)^{۲}}{a-۱}+۲(\frac{a-۱}{b-۱}+\frac{b-۱}{a-۱})+(\frac{۱}{a-۱}+\frac{۱}{b-۱})$$

$$\left(\frac{(a-۱)^{۲}}{b-۱}+\frac{(b-۱)^{۲}}{a-۱}+\frac{۱}{a-۱}+\frac{۱}{b-۱}\right)+۲(\frac{a-۱}{b-۱}+\frac{b-۱}{a-۱}) \geq$$

$$۴\sqrt[۴]{\frac{(a-۱)^۲}{b-۱}\times\frac{(b-۱)^۲}{a-۱}\times\frac{۱}{a-۱}\times\frac{۱}{b-۱}}+۴\sqrt{\frac{a-۱}{b-۱}+\frac{b-۱}{a-۱}}=۸$$

مثال ۲-۲۴ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c, d، ثابت کنید:

$$(a+b+c+d)^۳\geq ۱۶(abc+bcd+cda+dab)$$

راه‌حل. با استفاده از نامساوی $AM-GM$:

$$\begin{aligned}&۱۶(abc+bcd+cda+dab)=۱۶ab(c+d)+۱۶cd(a+b)\\&\leq ۴(a+b)^۲(c+d)+۴(c+d)^۲(a+b)=۴(a+b+c+d)(a+b)(c+d)\\&\leq (a+b+c+d)^۳\end{aligned}$$

مثال ۲-۲۵ جواب‌های مثبت معادله‌ی زیر را بیابید.

$$a^۶+b^۶+c^۶+d^۶+e^۶-۶abcde=-۱$$

راه‌حل.

$$\begin{aligned}&a^۶+b^۶+c^۶+d^۶+e^۶-۶abcd=-۱\\&\Rightarrow\ a^۶+b^۶+c^۶+d^۶+e^۶+۱\\&\qquad\qquad=۶abcde\end{aligned}$$

از طرفی بنابر نامساوی $AM-GM$:

$$a^۶+b^۶+c^۶+d^۶+e^۶+۱\geq ۶\times\sqrt[۶]{a^۶b^۶c^۶d^۶e^۶}=۶abcde$$

و تساوی هنگامی رخ می‌دهد که $a=b=c=d=e=۱$.
پس تنها جواب مثبت معادله $a=b=c=d=e=۱$ است.

مثال ۲-۲۶ a, b دو عدد طبیعی هستند که $ab\geq ۱$. ثابت کنید $۲a^۵+۵b^۲\geq ۷$.

راه‌حل.

$$۲a^۵+۵b^۲=a^۵+a^۵+b^۲+b^۲+b^۲+b^۲+b^۲\geq ۷\sqrt[۷]{a^{۱۰}b^{۱۰}}\geq ۷$$

حالت تساوی نیز زمانی است که $a=b=۱$.

مثال ۲-۲۷ a, b, c اعدادی مثت هستند. ثابت کنید:

$$۳a^۲ + ۲b^۳ + c^۶ \geq ۶abc$$

راه‌حل.

$$۳a^۲ + ۲b^۳ + c^۶ = a^۲ + a^۲ + a^۲ + b^۳ + b^۳ + c^۶ \geq ۶\sqrt[۶]{a^۲a^۲a^۲b^۳b^۳c^۶}$$
$$\Rightarrow \; ۳a^۲ + ۲b^۳ + c^۶ \geq ۶abc$$

مثال ۲-۲۸ a, b اعدادی مثبت و متمایز و n عددی طبیعی است. ثابت کنید:

$$\frac{a + nb}{n + ۱} > \sqrt[n+۱]{ab^n}$$

راه‌حل.

$$\frac{a + nb}{n + ۱} = \frac{a + (\overbrace{b + b + \cdots + b}^{n \text{ تا}})}{n + ۱} \geq \sqrt[n+۱]{ab^n}$$

اما $a \neq b$. پس تساوی اتفاق نمی‌افتد و همیشه $\sqrt[n+۱]{ab^n} < \frac{a + nb}{n + ۱}$.

مثال ۲-۲۹ فرض کنید a, b, c اعدادی مثبت‌اند که $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۳$. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{a^۲ + ۲} + \frac{۱}{b^۲ + ۲} + \frac{۱}{c^۲ + ۲} \geq ۱$$

راه‌حل. بنابر نامساوی $AM - HM$:

$$\frac{۱}{a^۲ + ۲} + \frac{۱}{b^۲ + ۲} + \frac{۱}{c^۲ + ۲} \geq \frac{۹}{(a^۲ + ۲) + (b^۲ + ۲) + (c^۲ + ۲)} = ۱$$

تمرین‌های پایان بخش

۱. k عددی طبیعی و $a_1, a_2, \cdots, a_n$ اعدادی مثبت با حاصل‌جمع ۱ هستند. ثابت کنید:

$$a_1^{-k} + a_2^{-k} + \cdots + a_n^{-k} \geq n^{k+1}$$

۲. اعداد مثبت a, b, c, d را در نظر بگیرید که:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt{(n-1)(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)}$$

ثابت کنید a_iها همگی نامنفی‌اند.

۳. $x, y, z \geq 2$ اعدادی حقیقی هستند. ثابت کنید:

$$(y^3 + x)(z^3 + y)(x^3 + z) \geq 125xyz$$

۴. برای مقادیر حقیقی $0 \leq x \leq 1$، حداکثر مقدار عبارت $x(1 - x^3)$ را بیابید.

۵. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ اعدادی حقیقی و مثبت هستند. $b_1, b_2, \cdots, b_n$ جایگشتی از آن‌ها هستند. ثابت کنید:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq n$$

۶. $a > 1$ عددی حقیقی و n عددی طبیعی است. ثابت کنید:

$$a^n - 1 > n(a^{\frac{n+1}{2}} - a^{\frac{n-1}{2}})$$

۷. a, b, c اعدادی مثبت هستند که $abc = 1$. ثابت کنید:

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ca}{1+c} \geq 3$$

۸. اعداد مثبت $a_1, a_2, \cdots, a_n$ را در نظر بگیرید که $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1$. ثابت کنید:

$$\frac{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n[1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)]}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2)\cdots(1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}$$

«پیشنهادی المپیاد جهانی ریاضی ۱۹۹۸»

۹. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ اعدادی مثبت هستند که:

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}=1$$

ثابت کنید:

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}\geq (n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$$

۱۰. فرض کنید «$b_1, b_2, \cdots, b_n$» و «$a_1, a_2, \cdots, a_n$» اعدادی مثبت باشند که:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

ثابت کنید:

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}$$

۱۱. a, b, c اعدادی مثبت هستند، ثابت کنید:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$$

«آمریکا ۱۹۹۸»

۱۲. a, b, c اعدادی مثبت با مجموع ۱ هستند. ثابت کنید:

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geq 8$$

۱۳. a, b, c اعدادی مثبت هستند که $abc=1$. ثابت کنید:

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}$$

«چک‌اسلواکی ۲۰۰۵»

۱۴. a, b, c اعدادی مثبت‌اند که $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1$. ثابت کنید:

$$abc\geq 8$$

۱۵. برای اعداد مثبت a, b, c ثابت کنید:

$$\frac{(a+b+c)^2}{3}\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}$$

«روسیه ۱۹۹۱»

۱۶. برای اعداد گویای مثبت $q_۱, q_۲, \cdots, q_n$ که $q_۱ + q_۲ + \cdots + q_n = ۱$ و اعداد مثبت و حقیقی $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ ثابت کنید:

$$a_۱q_۱ + a_۲q_۲ + \cdots + q_nq_n \geq a_۱^{q_۱}a_۲^{q_۲}\cdots a_n^{q_n}$$

(توضیح: $q_۱, q_۲, \cdots, q_n$ می‌توانند اعداد حقیقی مثبت نیز باشند. ولی اثبات آن به مفاهیمی پیچیده‌تر از سطح این کتاب نیاز دارد و بدون اثبات آن را در ادامه استفاده می‌کنیم.)

۱۷. x, y, z اعدادی مثبت هستند که $xyz = ۱$. ثابت کنید:

$$\frac{x^۳}{(۱+y)(۱+z)} + \frac{y^۳}{(۱+x)(۱+z)} + \frac{z^۳}{(۱+x)(۱+y)} \geq \frac{۳}{۴}$$

«پیشنهادی المپیاد جهانی ریاضی ۱۹۹۸»

۱۸. $n > ۲$ عددی طبیعی است. ثابت کنید:

$$(\frac{n+۱}{۲})^n > n!$$

۱۹. ثابت کنید چندجمله‌ای $۳x^۳ - ۶x^۲ + ۴$ در اعداد حقیقی مثبت، ریشه ندارد.

۲۰. $n > ۲$ عددی طبیعی است. ثابت کنید:

$$\prod_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} \leq (\frac{۲^n - ۲}{n-۱})^{n-۱}$$

۲۱. جواب‌های معادله‌ی زیر را در اعداد مثبت بیابید.

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ - (ab + bc + cd + da) + \frac{۲}{۵} = ۰$$

۲۲. $n > ۲$ عددی طبیعی است. ثابت کنید:

$$n^n < (۲n-۱)(۲n-۳)\cdots(۳)(۱) = \frac{(۲n)!}{۲^n n!}$$

۲۳. a, b, c اعدادی مثبت‌اند که $abc = ۱$. ثابت کنید:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$$

۲۴. a, b, c اعدادی مثبت‌اند که $a + b + c = ۳$. ثابت کنید:

$$\frac{a}{۱+b^۲} + \frac{b}{۱+c^۲} + \frac{c}{۱+a^۲} \geq \frac{۳}{۲}$$