

## درس ۱: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

## آموزش



## مقدمه

بهتر است جهت یادآوری ابتدا مرواری به آنچه در سال قبل در مورد مجموعه‌ها آموختیم داشته باشیم.

## مفهوم مجموعه

دسته یا گروهی از افراد، اشیاء، اعداد و ... که کاملاً مشخص و متمایز باشند را مجموعه می‌گویند.

به طور خلاصه در مبحث مجموعه‌ها با مطالب زیر آشنا شده‌اید.

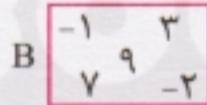
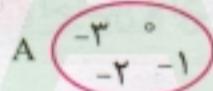
۱ هر مجموعه را با حروف بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنند.

۲ اعضای مجموعه را می‌توان درون دو آکولاد نمایش داد و اعضای آن‌ها را با قرار دادن «،» یا «و» از هم جدا کرد.

$$A = \{-3, -2, -1, 0\}$$

مثال:

۳ اعضای یک مجموعه را می‌توان در شکل‌های بسته مانند دایره، مربع و ... نمایش داد (نمودار ون)



۴ مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه «تهی» می‌نامند و با علامت  $\emptyset$  یا {} نشان می‌دهند.

$\emptyset$  یا {} = اعداد زوج بین ۲ و ۴

۵ ترتیب در قرار گرفتن اعضای یک مجموعه مهم نیست یعنی جایه‌جایی اعضای مجموعه باعث تولید یک مجموعه جدید نمی‌شود.

$$\{3, 7, 9\} = \{7, 9, 3\}$$

۶ هر مجموعه  $n$  عضوی به تعداد  $2^n$  زیرمجموعه دارد.

$$A = \{a, b, c\} \rightarrow A \text{ زیرمجموعه } 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

۷ تکرار در اعضای یک مجموعه مجاز نیست و تنها یکی از آن‌ها شمارش می‌شود:

$$\{5, 5, 3, 5, \sqrt{25}\} = \{3, 5\}$$

۸ تعداد اعضای هر مجموعه مانند  $A$  را با  $n(A)$  نمایش داده و به آن «عدد اصلی» مجموعه می‌گویند:

$$A = \{a, b, m, f, t\} \rightarrow n(A) = 5$$

۹ اگر هر عضو از مجموعه  $B$  در مجموعه  $A$  وجود داشته باشد،  $B$  را زیرمجموعه  $A$  می‌نامند:

$$B \subseteq A$$

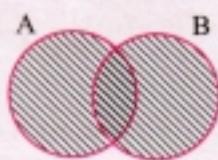
$$B \subseteq B, A \subseteq A$$

۱۰ هر مجموعه زیر مجموعه خودش می‌باشد:

۱۱ مجموعه تهی زیر مجموعه‌ی تمام مجموعه‌های است:

$$\emptyset \subseteq B, \emptyset \subseteq A$$

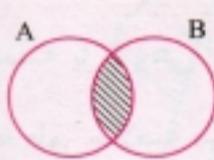
۱۲ اجتماع دو مجموعه A و B مجموعه‌ای است که اعضای آن حداقل عضو یکی از مجموعه‌های A و یا B هستند.



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

ناحیه هاشور خورده

۱۳ اشتراک دو مجموعه A و B مجموعه‌ای است که اعضای آن هم عضو مجموعه‌ی A باشند و هم عضو مجموعه‌ی B



$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

۱۴ اشتراک و اجتماع مجموعه‌ها خاصیت جابه‌جایی (تعویض پذیری) دارند:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

۱۵ اجتماع هر مجموعه با  $\emptyset$  برابر با خود مجموعه و اشتراک هر مجموعه با تهی برابر با مجموعه‌ی تهی است.

$$A \cup \emptyset = A$$

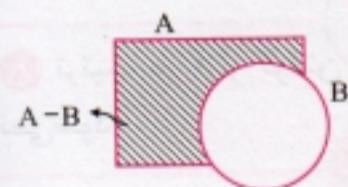
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

۱۶ اجتماع و اشتراک هر مجموعه با خودش برابر با خودش خواهد بود:

$$A \cup A = A$$

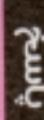
$$A \cap A = A$$

۱۷ منظور از مجموعه‌ی  $A - B$ ، مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو A هستند ولی عضو B نیستند.



**مثال:** اگر  $A = \{x \in Z, -2 < x \leq 3\}$  و  $B = \{x \in W, x \leq 4\}$  مجموعه‌های  $A - B$  و  $B - A$  را مشخص کنید.

$$A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}, B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \begin{aligned} A - B &= \{-1\} \\ B - A &= \{4\} \end{aligned}$$



۱۸ تفاضل مجموعه‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارند.

۱۹ دو مجموعه را در صورتی مساوی می‌دانیم که هر عضوی از اولی در دومی باشد و برعکس. به عبارت دیگر هر یک زیرمجموعه دیگری باشند:

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

۲۰ اگریک مجموعه زیرمجموعه‌ی دیگری باشد اشتراک آن‌ها، مجموعه‌ی کوچک‌تر و اجتماع آن‌ها مجموعه‌ی بزرگ‌تر خواهد بود.

$$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Q}$$

۲۱ دسته یا گروهی که اعضای آن‌ها از نظر افراد مختلف یکسان نباشد و سلیقه افراد روی آن مؤثر باشد را مجموعه به شمار نمی‌آورند. مانند مثال‌های زیر:

- ب) غذاهای خوشمزه  
د) ۴ عدد بسیار بزرگ

- الف) رنگ‌های زیبا  
ج) سه عدد فرد متولی

## آموزش

### مجموعه‌های اعداد

در طی سال‌های گذشته با مجموعه‌های گوناگونی آشنا شدید که هر یک در جایگاه خود کاربرد داشتند، از آن جمله می‌توان به مجموعه‌های زیر اشاره کرد:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} : \text{مجموعه اعداد طبیعی}$$

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} : \text{مجموعه اعداد حسابی}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} : \text{مجموعه اعداد صحیح}$$

$$\text{هر عدد حقیقی که قابل نمایش به صورت یک کسر متعارفی است.} = Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} : \text{مجموعه اعداد گویا}$$

$$= \text{اعداد حقیقی که قابل نمایش به صورت کسر متعارفی نیستند} = Q' : \text{مجموعه اعداد گنگ}$$

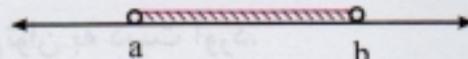
$$= \text{شامل همه اعداد گویا و گنگ} = \mathbb{R} = Q \cup Q' : \text{مجموعه اعداد حقیقی}$$

### بازه‌ها

هر زیرمجموعه‌ای مانند A از مجموعه اعداد حقیقی که شامل همه اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص می‌باشد را «بازه» می‌نامند. عضوهای یک بازه را می‌توان روی محور اعداد حقیقی به صورت‌های مختلفی نمایش داد.

(۱) با فرض این که  $a < b$ ، مجموعه اعداد حقیقی بین a و b را به صورت زیر نمایش می‌دهیم و آن را «بازه‌ی باز» از a تا b می‌نامیم.

$$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$



(۲) با فرض این که  $a < b$ ، مجموعه اعداد حقیقی از عدد a تا عدد b که a و b نیز جزء مجموعه هستند را به صورت زیر نمایش می‌دهیم و آن را «بازه‌ی بسته» از a تا b می‌نامیم.

$$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

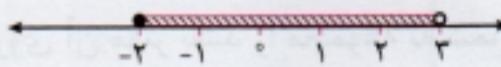


(۳) اگر یکی از نقاط  $a$  و  $b$  را که هر یک متناظر با یک عدد حقیقی است را از بازه  $[a, b]$  حذف کنیم به «بازه نیم‌باز» می‌رسیم:

$$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$



$$[-2, 3) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 \leq x < 3\}$$



$$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$



نماد  $+\infty$  را مثبت بینهایت و نماد  $-\infty$  را منفی بینهایت می‌خوانیم.



(۴) مجموعه‌هایی نیز وجود دارند که از سمت راست، چپ و یا از دو طرف بی‌کران هستند یعنی از آن طرف نام برده شده (راست یا چپ) عضوها تا بینهایت ادامه دارند و پایانی برای آن‌ها نیست.

$$(a, +\infty) \quad \text{←---} \quad \text{(از سمت راست بی‌کران)}$$

مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر از  $a$ :

$$[a, +\infty) \quad \text{←---} \quad \text{(از سمت راست بی‌کران)}$$

مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر مساوی  $a$ :

مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر از  $a$  (مجموعه از سمت چپ بی‌کران):

$$(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$$



مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر مساوی  $a$ : (مجموعه از سمت چپ بی‌کران):

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$$



مجموعه  $\mathbb{R}$  را می‌توان به صورت بازه‌ی باز  $(-\infty, +\infty)$  نمایش داد.



$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

همان‌طور که مشاهده گردید هر بازه در واقع یک مجموعه است بنابراین عبارت‌هایی مانند موارد زیر را در مورد بازه‌ها می‌توان نوشت:

$$\emptyset \subseteq [-2, 3], \quad (-1, 5] \subseteq (-3, 8), \quad (-452, \frac{3}{5}] \subsetneq \mathbb{Z}$$

$$-\frac{1}{25} \in (-\infty, 1), \quad \frac{2}{3} \notin [-5, 0], \quad \sqrt{17} \in (-4, 5]$$

### اجتماع، اشتراک و تفاضل بازه‌ها

بازه‌ای نیز به عنوان مجموعه با هم قابل اجتماع هستند و یا اشتراک و تفاضل آن‌ها را می‌توان به دست آورد.

**مثال:** حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک بازه نمایش دهید:

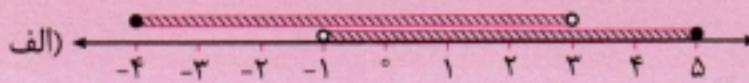
$$\text{(الف)} \quad [-4, 3] \cup (-1, 5) =$$

$$\text{(ب)} \quad (-\infty, 4] \cup (-2, 6) =$$

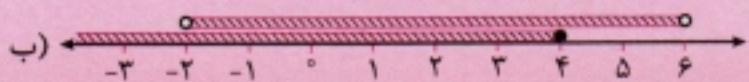
$$\text{(پ)} \quad [-2, +\infty] \cap (-3, 7) =$$

$$\text{(ت)} \quad (-\infty, 1) \cap (-3, 3) =$$

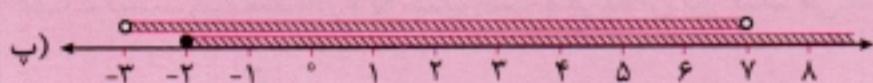
برای رسیدن به پاسخ عبارت‌های فوق می‌توان از رسم (نمایش) محوری کمک گرفت.



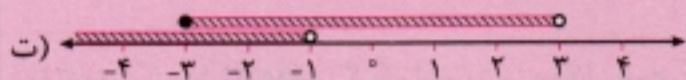
$$[-4, 5] = [-4, 5]$$



$$(-\infty, 6) = (-\infty, 6)$$



$$[-2, 7] = [-2, 7]$$



$$(-\infty, -3) = (-\infty, -3)$$

هرگز در کنار نماد  $+\infty$  یا  $-\infty$  از کروشه که نشان‌دهندهٔ بسته بودن است استفاده نمی‌شود.

**تذکر**

### مجموعه‌ی متناهی (با پایان)

هر مجموعه که اعضای آن قابل شمارش باشد را یک مجموعه متناهی می‌گویند. به عبارت دیگر مجموعه A را متناهی می‌گویند هرگاه:

$$n(A) \in \mathbb{W}$$

**مثال:** مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از  $2^{\infty}$ ، مجموعه اعداد اول یک رقمی، مجموعه اعداد صحیح بین  $-600$  و  $+2500$ .

### مجموعه‌ی نامتناهی (بی‌پایان):

هر مجموعه که اعضای آن قابل شمارش نبوده و به عبارتی متناهی نباشد را مجموعه‌ی نامتناهی می‌گویند.

**مثال:** مجموعه اعداد طبیعی، مجموعه اعداد صحیح، مجموعه اعداد گویا و ...

### مثال‌های آموزشی

1 مجموعه‌های زیر را با اعضا نمایش دهید:

(الف)  $Z - W =$

(ب)  $W - N =$

(پ)  $Q - \mathbb{R} =$

(ت)  $N \cup W =$

(الف)  $Z - W = \{-..., -3, -2, -1\}$

(ب)  $W - N = \{0\}$

(پ)  $Q - \mathbb{R} = \emptyset$  یا  $\{\}$

(ت)  $N \cup W = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = W$

۲

الف)  $-\sqrt{7/2} \in Q'$

ب)  $\pi \notin Q$

ث)  $(Q \cap Q') \subset Z$

ب)  $-6 + \sqrt{5} \in Q$

ت)  $\mathbb{R} \subset Q$

ج)  $\left\{ \sqrt{\frac{-4}{9}} \right\} \subseteq \mathbb{R}$

الف) درست - زیرا عدد  $-\sqrt{7/2}$  گنگ است و قرینه آن نیز گنگ می‌باشد.

ب) نادرست - عدد  $\sqrt{5}$  گنگ بوده و مجموع آن با عدد صحیح ۶ - نیز حاصلی گنگ دارد.

پ) درست - عدد  $\pi$  عددی گنگ است زیرا معادل هیچ کسر متعارفی نیست.

ت) نادرست - اعداد حقیقی زیر مجموعه اعداد گویا نیستند بلکه بر عکس آن درست است.

ث) درست - می‌دانیم  $Q \cap Q' = \emptyset$  و با توجه به این که تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای هست بنابراین عبارت درست است.

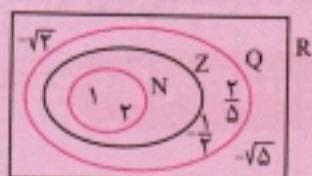
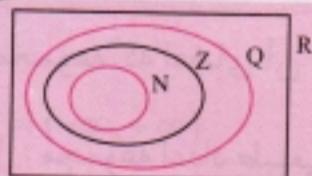
ج) نادرست - می‌دانیم اعداد منفی جذر ندارند بنابراین مجموعه  $\left\{ \sqrt{\frac{-4}{9}} \right\}$  زیرمجموعه اعداد حقیقی نیست.

۳ عضوهای خواسته شده در قسمت‌های زیر را پیدا کنید. سپس آن‌ها را روی نمودار مقابل در محل مناسب قرار دهید.

الف) دو عدد گویا که عدد صحیح نباشند.

ب) دو عدد منفی که گویا نباشند.

پ) دو عدد حقیقی که بزرگتر از صفر و شماره‌ی ۱۲ باشند.



الف)  $\frac{2}{5}$  و  $-\frac{1}{2}$

ب)  $-\sqrt{5}$  و  $-\sqrt{2}$

پ) ۲ و ۱

توجه: این سؤال می‌تواند پاسخ‌های متفاوتی با همین ویژگی‌ها داشته باشد.

۴ جاهای خالی را با نماد مناسب ( $\subseteq, \subset, \not\subseteq, \not\subset$ ) کامل کنید.

الف)  $4 \square (-9, -3)$

ب)  $\sqrt{3} \square (0, 2)$

ث)  $(-\infty, 200) \square \mathbb{R}$

ب)  $(-5, 0) \square \emptyset$

ت)  $\{-1, 0, 1\} \square [-1, 2)$

ج)  $(-15, 4] \square (-20, 4)$

الف)  $\subseteq$

ب)  $\subseteq$

ج)  $\in$

د)  $\subsetneq$

الف)  $\in$



ج)  $\subsetneq$  (زیرا عدد ۴ از مجموعه سمت چپ در مجموعه سمت راست وجود ندارد)

دو مجموعه نامتناهی نام ببرید که تفاضل آن‌ها متناهی باشد.

$$W - N = \{ \circ \}$$

اعداد حسابی و اعداد طبیعی



دو مجموعه نامتناهی نام ببرید که یکی زیرمجموعه‌ی دیگری باشد:

$$N \subseteq Z, Q \subset R$$

$$Q \in \mathbb{R} \text{ و } \mathbb{Z} \text{ و } \mathbb{N}$$



مجموعه‌ی  $\{2\} - \mathbb{R}$  را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید:

$$\mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$



آیا می‌توان برای یک مجموعه متناهی، یک زیرمجموعه نامتناهی نوشت؟

خیر، زیرا از یک مجموعه متناهی فقط زیرمجموعه‌های متناهی تولید می‌شود.



۹ متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید:

الف) مجموعه‌ی دانش‌آموزان جهان

ب) مجموعه‌ی اعداد گویا در بازه‌ی  $(-1, 1)$

پ) مجموعه‌ی دانه‌های شن روی کره زمین

ت) مجموعه مضرب‌های صحیح عدد ۳

ث) مجموعه اشتراک بین مجموعه اعداد گویا و اعداد صحیح

ج) مجموعه اعداد طبیعی که مجذور کامل هستند.

پ) متناهی

ب) نامتناهی

الف) متناهی



ج) نامتناهی

ث) نامتناهی

ت) نامتناهی



## تمرین درس اول



۱

مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید.

$$(الف) Z - N =$$

$$(ب) Q' - \mathbb{R} =$$

$$(پ) Z \cap W =$$

$$(ت) W \cap N =$$

۲

درستی و یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

(ب)  $\sqrt{21} \in Q'$

(ت)  $-3 + \pi \in Z$

(ج)  $(-\infty, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$

۳ جاهای خالی را با نماد مناسب ( $\in, \notin, \subset, \subsetneq$ ) کامل کنید.

(ب)  $(4, +\infty) \square Z$

(ت)  $(-9, 2000) \square (-12, +\infty)$

(ج)  $Z \cap N \square W$

۴ حاصل عبارت‌های زیر را مشخص کنید و سپس آن‌ها را روی نمودار مشخص کنید.

(ب)  $(-\infty, 5] \cup (-1, 7) =$

(ت)  $(-4, +\infty) \cup (-2, 4) =$

۵ متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

(الف)  $A = \{x \in Q \mid 2 < x < 3\}$

(ب)  $B = \left\{ x \in Z \mid \frac{1}{x} \in Z \right\}$

(پ) مجموعه اعداد اول ۵ رقمی

(ت)  $\{x \in W, x < 8\}$

۶ ث) مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۸

۷ ج) مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۲۰

۸ بازه‌ی  $[-3, 4]$  را به صورت اشتراک دو بازه‌ی نیم‌باز نمایش دهید.

۹ دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که تفاضل آن‌ها متناهی باشد.

۷

۸

مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۴ را نوشته آن را A بنامید. سپس دو زیرمجموعه نامتناهی مانند B و C از A بنویسید به طوری

$B \subseteq C$

۹ بازه‌ی  $[-3 + \sqrt{2}, \sqrt{5})$  را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید. آیا عدد  $\sqrt{3} -$  در این بازه وجود دارد؟

۹

۱۰ بازه‌ی  $(-3, \sqrt{8}] \cup (-\infty, -3)$  را روی محور نمایش دهید و حاصل را به صورت یک بازه بنویسید.

۱۰



نوین‌طلایی

نام: بسمه تعالی

آزمون پایانی فصل اول (نمونه ۱)

زمان آزمون: ۷۵ دقیقه ریاضی پایه‌ی دهم

ردیف		بارم
۱		مجموعه $\{-1, 1\} - \mathbb{R}$ را روی محور نشان دهید، سپس آن را به صورت اجتماع سه بازه بنویسید.
۲		مجموعه‌های خواسته شده را بنویسید. الف) دو مجموعه متناهی که یکی زیرمجموعه دیگری باشد. ب) دو مجموعه نامتناهی که تفاضل آن‌ها یک مجموعه تک عضوی باشد.
۳		اگر مجموعه اعداد حسابی یک رقمی، مجموعه مرجع و $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 3\}$ و $B = \left\{ \frac{x}{2} \mid x \in \mathbb{N}, x < 3 \right\}$ باشند مجموعه‌های خواسته شده را با اعضا بنویسید. الف) $A' - B'$ ب) $(A \cap B)'$
۴		در یک کلاس ۳۴ نفری ۲۱ نفر به فوتیال و ۱۷ نفر به والیبال علاقه‌مندند اگر ۳ نفر به هیچ‌کدام از این دو رشته علاقه‌مند نباشند، الف) چند نفر هم به فوتیال و هم به والیبال علاقه‌مندد? ب) چند نفر فقط به والیبال علاقه‌مندد?
۵		فرض کنیم $M$ و $N$ زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع $U$ هستند به طوری که $n(U) = ۲۰$ ، $n(M) = ۳۰$ ، $n(N) = ۱۵$ و $n(M \cap N) = ۸$ باشد مطلوب است: الف) $n(M' \cap N) =$ ب) $n(M' \cap N') =$

## پاسخ آزمون پایانی فصل ۱ (نمونه ۱)



$$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

۱

الف)  $\{2, 7\} \subset \{1, 2, 7, 8\}$

۲

ب)  $W - N = \{0\}$

۳

$$U = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

۴

$$A = \{0, 1, 4, 9\} \rightarrow A' = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$$

۵

$$B = \{1\} \rightarrow B' = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

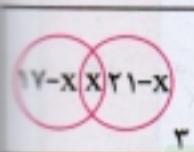
۶

الف)  $A' - B' = \emptyset$

۷

ب)  $(A \cap B)' = A' \cup B' = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

۸



۹

الف)  $(1Y - X + X + 21 - X) + 3 = 34 \Rightarrow X = 7$

۱۰

ب)  $1Y - Y = 10$

۱۱

الف)  $n(M' \cap N) = n(N \cap M') = n(N - M) = n(N) - n(N \cap M) = 15 - 8 = 7$

۱۲

ب)  $n(M' \cap N') = n(M \cup N)' = n(U) - n(M \cup N) = 30 - 27 = 3$

۱۳

زن(M ∪ N) = n(M) + n(N) - n(M ∩ N) = 20 + 15 - 8 = 27

۱۴

$a_7 = a_2 + a_1 = 2 + 2 = 4$

۱۵

$a_4 = a_3 + a_2 = 4 + 2 = 6$

۱۶

$a_1 = a_4 + a_3 = 6 + 4 = 10$

۱۷

جمله‌ی عمومی  $= 7n - 5$

۱۸

جمله‌ی نوزدهم  $= 7 \times 19 - 5 = 133 - 5 = 128$

۱۹

ب)  $7n - 5 = 212 \Rightarrow 7n = 217 \Rightarrow n = \frac{217}{7} = 31$  جمله‌ی سی و یکم

۲۰

الف)  $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$

۲۱

ب)  $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{4^4}, \frac{-1}{5^5}, \frac{1}{6^6}, \dots, \left(-\frac{1}{n}\right)^n, \dots$

۲۲