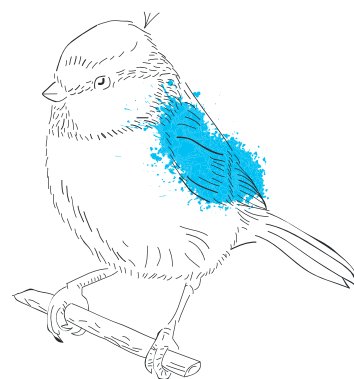


فصل اول

مثلثات



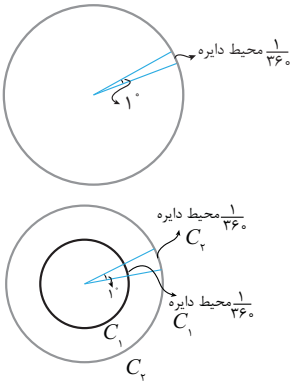
برای مشاهده فیلم های آموزشی این فصل
در سایت آلاء این کد را اسکن کنید.





جلسه اول: زاویه، نسبت‌های مثلثاتی و دایره‌ی مثلثاتی

زاویه

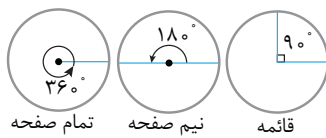


فضای بین دو نیم‌خط را زاویه می‌گوییم. برای اندازه‌گیری زاویه، دو واحد **درجه** و **رادیان** را در اختیار داریم. ابتدا درباره‌ی درجه که برای شما واحد قدیمی‌تر و آشناتری است کمی صحبت می‌کنیم. اگر محیط یک دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به هر قسمت **یک درجه** است. یک درجه را با نماد 1° نشان می‌دهیم.

اگر دقت کنید می‌بینید که فرقی نمی‌کند که **شعاع دایره‌ای که برای تعریف 1° استفاده می‌کنیم چقدر باشد**. به شکل مقابل دقت کنید:

نکته ✓

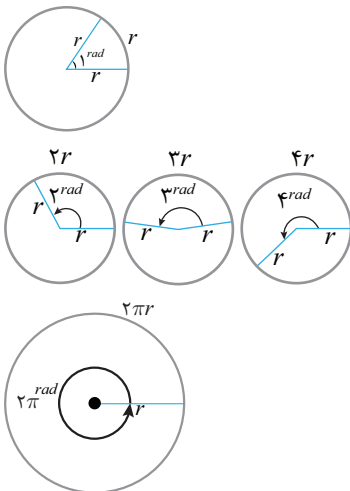
با توجه به آنچه که گفتیم زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به محیط یک دایره‌ی کامل معادل 360° است. این زاویه را تمام صفحه هم می‌نامند. به همین ترتیب زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به نصف محیط دایره معادل 180° است، این زاویه را نیم صفحه هم می‌نامند. همچنین زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به ربع دایره معادل 90° است. این زاویه را قائمه هم می‌نامند.



واحد دیگر اندازه‌گیری زاویه **رادیان** است. **یک رادین**، زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول کمان برابر با شعاع دایره باشد. یک رادین را با نماد 1^{rad} نشان می‌دهیم.

معلوم است که طبق این تعریف 2^{rad} زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی است که در آن طول کمان دو برابر طول شعاع دایره است. به همین ترتیب زوایای 3^{rad} ، 4^{rad} و ... را می‌توان تعریف کرد.

چون می‌دانیم محیط دایره‌ای به شعاع r برابر با $2\pi r$ است ($\pi \simeq 3/14$)، پس در واقع زاویه‌ی تمام صفحه معادل با $2\pi^{rad}$ بوده است، چرا که کمان روبه‌رو به آن 2π برابر شعاع دایره است:



پس می‌توانیم نتیجه بگیریم $2\pi^{rad}$ معادل با 360° است. به این ترتیب مبنای تبدیل واحد رادین به درجه و برعکس ساخته می‌شود. چون $2\pi^{rad}$ معادل 360° است، می‌توانیم با یک نسبت ساده زاویه‌ی D (درجه) را به R (بر حسب رادین) تبدیل کنیم و برعکس:

$$\frac{D}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi^{rad}} \quad \text{یا} \quad \frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi^{rad}}$$

مثال ۱ زوایای 30° ، 60° و 45° را به رادین تبدیل کنید.

پاسخ: با قرار دادن در تناسب بالا داریم:

$$\frac{30^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi^{rad}} \Rightarrow \frac{R}{\pi^{rad}} = \frac{1}{6} \Rightarrow R = \frac{\pi}{6}^{rad}$$

$$\frac{60^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi^{rad}} \Rightarrow \frac{R}{\pi^{rad}} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = \frac{\pi}{3}^{rad}$$

$$\frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi^{rad}} \Rightarrow \frac{R}{\pi^{rad}} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = \frac{\pi}{4}^{rad}$$

مثال ۲) زوایای $\frac{\pi}{12}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{2}$ را به درجه تبدیل کنید.

پاسخ: با قرار دادن در تناسب مذکور داریم:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\pi \text{ rad}}{12} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{1}{12} \Rightarrow D = 15^\circ$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{3\pi \text{ rad}}{4} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{3}{4} \Rightarrow D = 135^\circ$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{5\pi \text{ rad}}{2} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{5}{2} \Rightarrow D = 450^\circ$$

نکته ✓

برای سریع‌تر شدن روند تبدیل زوایا از درجه به رادیان و برعکس می‌توانید از روش‌های زیر که از همان تناسب نتیجه شده است استفاده کنید:

$$\text{درجه} \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ}} \text{رادیان} \qquad \text{رادیان} \xrightarrow{\times \frac{180^\circ}{\pi}} \text{درجه}$$

مثال ۳) ۱ رادیان، چند درجه است؟ ($\pi \approx 3/14$)

$$1 \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3/14} = 57/3^\circ$$

پاسخ: با قرار دادن در نسبت مذکور یا از نکته‌ی بالا داریم:

نکته ✓ حتماً حفظ کنید که $1 \text{ rad} \approx 57/3^\circ$

نکته ✓

زوایای پر کاربرد را بر حسب دو واحد درجه و رادیان در جدول زیر آورده‌ایم. با توجه به کاربرد زیاد آن‌ها توصیه می‌کنیم آن‌ها را حفظ کنید:

D (درجه)	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
R (رادیان)	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

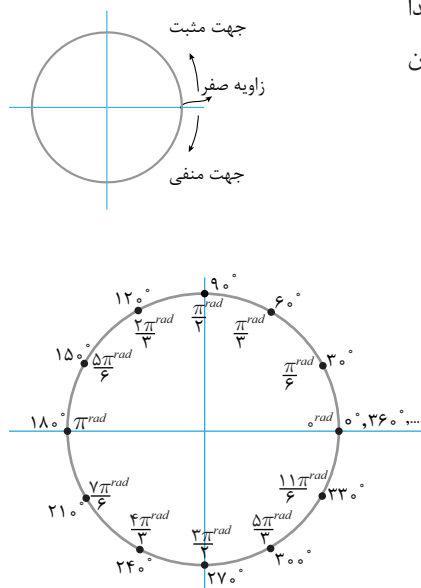
پیدا کردن زوایا در دایره مثلثاتی

چون کمی بعدتر درباره‌ی دایره‌ی مثلثاتی^۱ صحبت خواهیم کرد، ترجیح می‌دهیم همین‌جا درباره‌ی پیدا کردن یک زاویه در دایره‌ی مثلثاتی صحبت کنیم. برای پیدا کردن هر زاویه در دایره‌ی مثلثاتی دو قانون داریم:

قانون ۱: زاویه‌ی صفر، جهت مثبت محور x ها در نظر گرفته می‌شود.

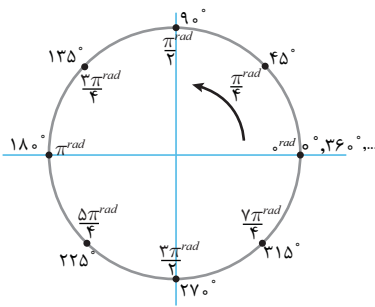
قانون ۲: جهت مثبت، پادساعتگرد و طبیعتاً جهت منفی ساعتگرد است.

با این دو قانون زوایای معروف و پرکاربرد را در دایره‌ی مثلثاتی مشخص کرده‌ایم:



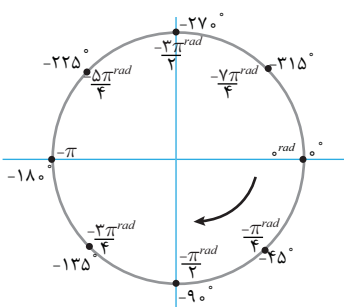
۱- بعداً در دایره‌ی مثلثاتی مفصل‌تر خواهیم گفت که شعاع دایره‌ی مثلثاتی یک واحد و مرکز آن بر مبدأ مختصات واقع است.





برای ساخت زوایای بالا با شروع از صفر، ۳۰ درجه، ۳۰ درجه، افزایش داده‌ایم. (در جهت مثبت حرکت کردیم). حال اگر با شروع از زاویه صفر، ۴۵ درجه، ۴۵ درجه، افزایش دهیم، به زوایای معروف پرکاربرد دیگری می‌رسیم:

در این حالت، وسط هر چهار ناحیه هم، ساخته خواهند شد. دقت کنید که وسط نواحی چهارگانه به ترتیب $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$ هستند. پس در واقع مضارب فرد $\frac{\pi}{4}$ ، وسط چهار ناحیه خواهند بود.



حال اگر در جهت منفی حرکت کنیم هم، همین جایگاه‌ها در دایره‌ی مثلثاتی با اعداد منفی خود را نشان می‌دهند، مثلاً وسط چهار ناحیه به شکل زیر خواهند شد:

تست ۱. زوایای 1000° ، $\frac{8\pi}{3} \text{ rad}$ و 7 rad به ترتیب در کدام نواحی قرار می‌گیرند؟

۴) چهارم - دوم - اول

۳) چهارم - دوم - چهارم

۲) چهارم - اول - اول

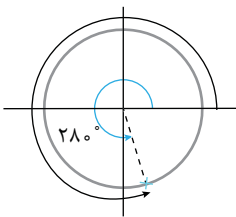
۱) سوم - دوم - اول

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

برای فهمیدن این که 1000° در کدام ناحیه قرار دارد، کافی است آن را به 360° تقسیم کنیم و باقی مانده‌ی آن را بیابیم:

$$\begin{array}{r} 1000 \mid 360 \\ \underline{720} \quad 2 \\ 280 \end{array}$$

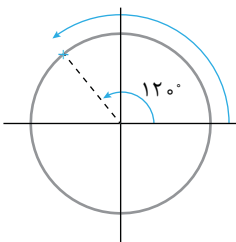
این یعنی برای رسیدن به 1000° باید دو دور کامل ($2 \times 360^\circ$) بعلاوه 280° دور دایره مثلثاتی بزنیم. پس در ناحیه چهارم قرار خواهیم گرفت. دقت کنید که وقتی از صفر شروع کنید و دو دور بزنید در همان جایگاه صفر قرار خواهید گرفت:

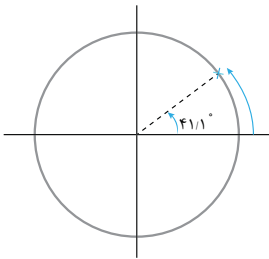


$$\frac{8\pi}{3} \text{ rad} \times \frac{18^\circ}{\pi \text{ rad}} = 48^\circ$$

برای زاویه $\frac{8\pi}{3} \text{ rad}$ هم می‌توان آن را به درجه تبدیل کرد:

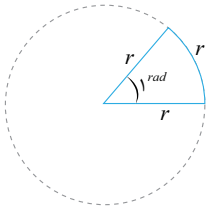
48° برابر است با $12^\circ + 36^\circ$ ، پس باید یک دور کامل بزنیم بعلاوه 12° ، پس این زاویه در ناحیه دوم قرار دارد.





برای زاویه 7^{rad} هم می‌توانیم به این شکل عمل کنیم که آن را به درجه تبدیل کنیم. می‌دانیم هر 1^{rad} معادل $57/3^\circ$ است. پس $7 \times 57/3 = 401/1^\circ$. این زاویه برابر است با $41/1^\circ + 360^\circ$. پس این زاویه برابر است با یک دور کامل بعلاوه $41/1^\circ$ که در ناحیه اول قرار می‌گیرد:

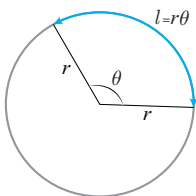
طول کمان



قبلاً زاویه‌ی 1^{rad} را به این شکل تعریف کردیم که، زاویه‌ای مرکزی است از یک دایره، به طوری که طول کمان روبه‌رو به آن برابر با شعاع آن دایره است:

به همین ترتیب طول کمان روبه‌رو به زاویه‌ی 2^{rad} دو برابر شعاع دایره و ... است.

پس طول کمان روبه‌رو به زاویه‌ی θ^{rad} برابر $l = r\theta$ است، یعنی اگر θ زاویه‌ای مرکزی از یک دایره برحسب رادیان باشد، طول کمان روبه‌رو به آن برابر $l = r\theta$ خواهد بود که در آن r شعاع دایره است:



مثال ۴ ماهواره‌ای در ارتفاع 800 کیلومتری از سطح زمین در گردش است. این ماهواره طی یک گردش، زاویه‌ی خود را نسبت به مرکز زمین 2° تغییر می‌دهد، در این صورت این ماهواره چه مسافتی را پیموده است؟ (شعاع زمین حدود 6400 کیلومتر است.)

پاسخ: ابتدا زاویه‌ی داده شده را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$2^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{9}^{rad}$$

می‌دانیم ماهواره در دایره‌ای به شعاع $6400 + 800 = 7200$ کیلومتر در حرکت است؛ پس مسافت پیموده شده برابر است با:

$$l = r\theta = 7200 \times \frac{\pi}{9} = 800\pi$$

$$800\pi \simeq 800 \cdot (3/14) = 2512 \text{ km}$$

اگر $\pi \simeq 3/14$ در نظر بگیریم، این مسافت برابر است با:

تست ۲. تهران و بندرعباس تقریباً طول جغرافیایی یکسانی دارند. اگر مسافت تهران تا بندرعباس 1300 کیلومتر و شعاع کره‌ی زمین 6500 کیلومتر در نظر گرفته شود، عرض جغرافیایی بندرعباس حدوداً چند درجه است؟ (عرض جغرافیایی تهران 35° درجه است.) ($\pi \simeq 3$)

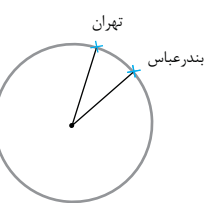
۲۷° (۲)

۲۳° (۱)

۱۲° (۴)

۴۷° (۳)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴



$$l = r\theta \Rightarrow 1300 = 6500\theta \Rightarrow \theta = \frac{1}{5}^{rad}$$

طول کمان $l = 1300$ کیلومتر و شعاع $r = 6500$ کیلومتر است، پس:

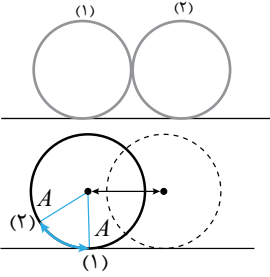
$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{D}{180} \Rightarrow D = 12^\circ$$

حال این زاویه را به درجه تبدیل می‌کنیم:

پس عرض جغرافیایی بندرعباس $35 - 12 = 23^\circ$ است.



تست ۳. چرخ‌های (۱) و (۲) برهم مماس هستند. چرخ (۱) چند رادیان بچرخد تا در جایگاه چرخ (۲) قرار بگیرد؟



۲π (۲)

π (۱)

۱ (۴)

۲ (۳)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

طول کمانی که یک چرخ طی می‌کند، برابر است با مقداری که مرکز چرخ جلو رفته است. به شکل دقت کنید:

در واقع دو قسمت مشخص شده با فلش‌ها هم طول‌اند. فرض کنید نقطه‌ی A روی چرخ ابتدا در جایگاه (۱) بوده و با چرخیدن در جایگاه (۲) قرار بگیرد.

حال راجع به این تست صحبت کنیم. مرکز چرخ به اندازه‌ی دو برابر شعاع ($2r$) جابه‌جا شده است. پس طول کمانی که چرخیده برابر $2r$ است.

$$l = r\theta \Rightarrow 2r = r\theta \Rightarrow \theta = 2 \text{ rad}$$

یعنی زاویه چرخش برابر است با:

نسبت‌های مثلثاتی

مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و $A'BC'$ را در نظر بگیرید. این دو مثلث متشابه‌اند، چون هر دو دارای یک زاویه‌ی قائمه و زاویه‌ی مشترک B هستند. بنابراین از نسبت تشابه اجزای متناظر در دو مثلث داریم:

$$\frac{A'C'}{BC'} = \frac{AC}{BC}$$

از این تساوی می‌توان نتیجه گرفت برای زاویه‌ی حاده‌ی B مشخص در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت ضلع روبه‌رو به وتر مقدار ثابتی است.

این نسبت را در مثلث قائم‌الزاویه برای زاویه حاده‌ی B ، سینوس می‌نامیم و می‌نویسیم: $\sin B = \frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{وتر}}$

به همین شکل نسبت مثلثاتی کسینوس به صورت ضلع مجاور به وتر تعریف می‌شود و با تشابه مثلث‌ها می‌توان ثابت کرد برای یک زاویه‌ی مشخص این مقدار برابر با عدد ثابتی است. یعنی در مثلث ABC به شکل روبه‌رو داریم:

$$\sin B = \frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC} \quad \text{و} \quad \cos B = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

نسبت‌های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت هم به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\tan B = \frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{\sin B}{\cos B}$$

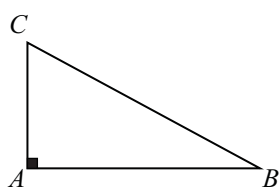
$$\cot B = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع روبه‌رو}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AC}{BC}} = \frac{\cos B}{\sin B}$$

نکته ✓ از تعریف فوق مشخص است که نسبت‌های تانژانت و کتانژانت یک زاویه معکوس هم هستند. یعنی برای زاویه‌ی دلخواه حاده‌ی B همواره داریم:

$$\tan B \cdot \cot B = 1 \quad \text{یا} \quad \tan B = \frac{1}{\cot B}$$



حال می‌خواهیم برای دو زاویه‌ی حاده‌ی B و C در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A}=90^\circ$) تمام نسبت‌های مثلثاتی را بنویسیم:



$$\begin{aligned} \sin B &= \frac{AC}{BC} & \sin C &= \frac{AB}{BC} \\ \cos B &= \frac{AB}{BC} & \cos C &= \frac{AC}{BC} \\ \tan B &= \frac{AC}{AB} & \tan C &= \frac{AB}{AC} \\ \cot B &= \frac{AB}{AC} & \cot C &= \frac{AC}{AB} \end{aligned}$$

به تساوی‌های مشخص در نسبت‌های مثلثاتی زوایای B و C که با فلش مشخص کردیم، دقت کنید:

$$\sin B = \cos C, \quad \cos B = \sin C, \quad \tan B = \cot C, \quad \cot B = \tan C$$

نتیجه: اگر دو زاویه باهم متمم باشند (جمع‌شان 90° باشد)، سینوس و کسینوس آن‌ها و همچنین تانژانت و کتانژانت آن‌ها به شکل ضربدری باهم برابرند. مثلاً:

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ &= \cos 70^\circ, & \cos 10^\circ &= \sin 80^\circ \\ \cos 40^\circ &= \sin 50^\circ, & \tan 25^\circ &= \cot 65^\circ \\ \cot 17^\circ &= \tan 73^\circ, & \cos 43^\circ &= \sin 47^\circ \end{aligned}$$

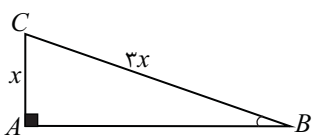
تست ۴. مقدار عبارت $\frac{\tan 10^\circ \times \sin 50^\circ \times \tan 80^\circ}{\cos 40^\circ}$ در کدام بازه است؟

- (۱) $(6, +\infty)$ (۲) $(2, 6)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $(2, 4)$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $\sin 50^\circ = \cos 40^\circ$ پس این دو عبارت از صورت و مخرج کسر ساده می‌شوند و حاصل برابر است با $\tan 10^\circ \times \tan 80^\circ$ می‌دانیم $\tan 10^\circ = \cot 80^\circ$ ، پس حاصل عبارت به شکل $\cot 80^\circ \times \tan 80^\circ$ است که می‌دانیم این عبارت برابر است با ۱، چون برای هر زاویه‌ی دلخواه α ، همواره $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ است. پس حاصل عبارت در بازه‌ی $(0, 2)$ قرار دارد.

تست ۵. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی مقابل \hat{B} $\cos \hat{B}$ کدام است؟



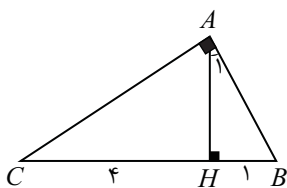
- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$ ، پس از رابطه‌ی فیثاغورس اندازه‌ی AB را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{(3x)^2 - x^2} = \sqrt{8x^2} = 2\sqrt{2}x \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{2\sqrt{2}x}{3x} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

تست ۶. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی روبه‌رو، ارتفاع وارد بر وتر رسم شده است. در این صورت $\sin \hat{A}_1$ کدام است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

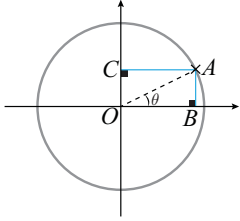
می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه با رسم ارتفاع وارد بر وتر داریم: $AH^2 = BH \cdot CH$ ، پس:

$$AH^2 = 4 \times 1 = 4 \Rightarrow AH = 2 \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AB^2 = HB^2 + AH^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow AB = \sqrt{5} \Rightarrow \sin \hat{A}_1 = \frac{HB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$



دایرهی مثلثاتی

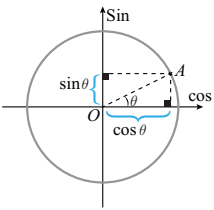
دایرهی مثلثاتی ابزاری برای اندازه‌گیری نسبت‌های مثلثاتی است. دایرهی مثلثاتی دارای شعاع یک واحد است و مرکز آن روی مبدأ مختصات قرار گرفته است. فرض کنید زاویه θ در ناحیه اول قرار گرفته باشد، نقطه‌ی A روی انتهای کمان زاویه‌ی θ قرار گرفته است. نقطه‌ی B پای عمود از A بر محور x ها و نقطه‌ی C پای عمود از A بر محور y ها است. در این صورت داریم:



$$\sin \theta = \frac{AB}{OA} \xrightarrow{OA = \text{شعاع دایره} = 1} \sin \theta = AB \xrightarrow{\text{مستطیل است } OBAC, AB=OC} \sin \theta = OC$$

$$\cos \theta = \frac{OB}{OA} \xrightarrow{OA = 1} \cos \theta = OB$$

پس فاصله‌ی پای عمود از نقطه‌ی A بر محور y ها تا نقطه‌ی O برابر سینوس θ و فاصله‌ی پای عمود از نقطه‌ی A بر محور x ها تا نقطه‌ی O برابر کسینوس θ است. بنابراین اگر در دایرهی مثلثاتی بخواهیم سینوس یک زاویه را محاسبه کنیم از انتهای کمان آن زاویه بر محور y ها عمود رسم می‌کنیم و فاصله‌ی پای عمود تا مبدأ مختصات را پیدا می‌کنیم، همچنین برای محاسبه‌ی کسینوس یک زاویه از انتهای کمان آن زاویه خطی بر محور x ها عمود می‌کنیم و فاصله‌ی پای عمود از مبدأ مختصات را پیدا می‌کنیم. به شکل روبه‌رو دقت کنید:



بنابراین در مبحث مثلثات محور x ها را محور کسینوس‌ها و محور y ها را محور سینوس‌ها می‌نامیم. با توجه به آنچه که گفته شد می‌توان نتیجه گرفت مختصات نقطه‌ی A به شکل $A(\cos \theta, \sin \theta)$ است. چون طول این نقطه $\cos \theta$ و عرض آن $\sin \theta$ است.

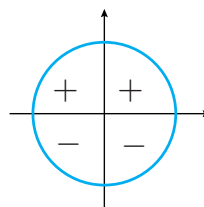
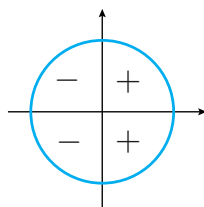
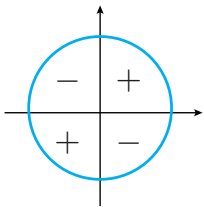
با استفاده از دایرهی مثلثاتی نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زوایای غیر حاده (کوچک‌تر یا مساوی صفر یا بزرگ‌تر یا مساوی 90°) هم تعمیم می‌دهیم^۱.

مشخص است که نقاطی که در ناحیه‌ی دوم مختصات قرار دارند، دارای طول منفی و عرض مثبت هستند، بنابراین اگر انتهای کمان یک زاویه در ناحیه‌ی دوم باشد، کسینوس آن منفی و سینوس آن مثبت است. به همین ترتیب علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر یک از نواحی چهارگانه به شکل زیر است:

«علامت تانژانت و کتانژانت^۲»

«علامت کسینوس»

«علامت سینوس»



تست ۷. علامت‌های عبارات $\tan 5$ و $\cos 4$ به ترتیب چگونه است؟

(۴) منفی - مثبت

(۳) مثبت - منفی

(۲) منفی - منفی

(۱) مثبت - مثبت

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

دقت کنید که زوایا برحسب رادیان هستند. آن‌ها را به درجه تبدیل می‌کنیم تا تشخیص دهیم در کدام ناحیه قرار دارند. می‌دانیم هر یک رادیان تقریباً معادل $57/3^\circ$ است، پس:

$$4 \text{ rad} \times 57/3 \simeq 229/2^\circ \rightarrow \text{ناحیه سوم}$$

$$5 \text{ rad} \times 57/3 \simeq 286/5^\circ \rightarrow \text{ناحیه چهارم}$$

در ناحیه‌ی دوم، کسینوس منفی است، پس $\cos 4 < 0$ و در ناحیه‌ی چهارم، کسینوس مثبت و سینوس منفی است، پس تانژانت منفی است، یعنی $\tan 5 < 0$

۱- چون نسبت‌های مثلثاتی را در مثلث قائم‌الزاویه و برای زوایای حاده تعریف کرده بودیم.

۲- از علامت سینوس و کسینوس نتیجه گرفتیم.



تست ۸. اگر برای زاویه α داشته باشیم، $\sqrt{\cot \alpha} = -\sin \alpha$ آن گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه قرار دارد؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

(*) α در ناحیه‌ی سوم یا چهارم است. $\Rightarrow \sin \alpha \leq 0 \Rightarrow -\sin \alpha \geq 0$

چون $\sqrt{\cot \alpha} \geq 0$ پس:

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال (با فرجه‌ی زوج) باید نامنفی باشد:

(**) α در ناحیه‌ی دوم یا سوم است. $\Rightarrow \cos \alpha \leq 0 \Rightarrow \frac{\sin \alpha \leq 0}{\cot \alpha \geq 0} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq 0$

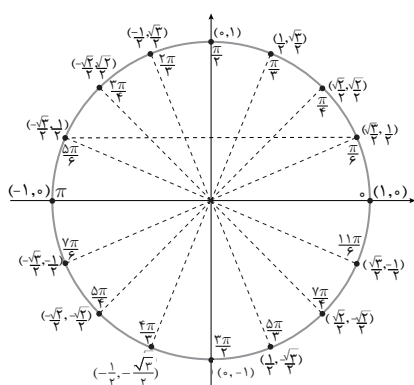
اشتراک موارد (*) و (**) ناحیه‌ی سوم است، دقت کنید که در ناحیه‌ی سوم هر دو نسبت مثلثاتی سینوس و کسینوس منفی است.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف و پرکاربرد

قبلاً گفتیم اگر نقطه‌ی A انتهای کمان زاویه‌ی α روی دایره‌ی مثلثاتی باشد، مختصات آن به شکل $A(\cos \alpha, \sin \alpha)$ است، بنابراین نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف را به شکل جدول و بار دیگر به شکل مختصات در دایره‌ی مثلثاتی نشان می‌دهیم:

زاویه (درجه)	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
زاویه (رادبان)	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
سینوس	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰
کسینوس	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-۱	۰	۱
تانژانت	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	$-\sqrt{3}$	-۱	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰
کتانژانت	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-۱	$-\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

حال همین نسبت‌ها (البته کامل‌تر) را در دایره‌ی مثلثاتی ببینید. در دایره‌ی مثلثاتی فعلاً فقط نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را آورده‌ایم. کمی جلوتر درباره‌ی محور تانژانت صحبت می‌کنیم و آن را هم در دایره‌ی مثلثاتی نشان می‌دهیم.



۱- از اثبات محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف می‌گذریم.

۲ و ۳- برای مقادیر تانژانت و کتانژانت از تقسیم سینوس و کسینوس بر هم استفاده می‌کنیم.



نکته ✓

همان‌طور که قبلاً گفتیم مختصات هر نقطه به شکل $(\cos \theta, \sin \theta)$ است. مثلاً در زاویه $\frac{2\pi}{3}$ مختصات نقطه به شکل

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ نوشته شده است. این یعنی } \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \text{ و } \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

نکته ✓

به نقاط روبه‌روی هم (هم‌عرض یا هم‌طول) دقت کنید. مثلاً $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ روبه‌روی هم (هم‌عرض) هستند، پس دارای سینوس برابر و

$$\text{کسینوس قرینه‌اند، یعنی: } \sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ و } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

نکته ✓

به مضارب فرد $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ ، $\frac{7\pi}{4}$ دقت کنید. این نقاط در وسط چهار ناحیه قرار می‌گیرند. سینوس و کسینوس این زوایا $\frac{\sqrt{2}}{2}$ یا

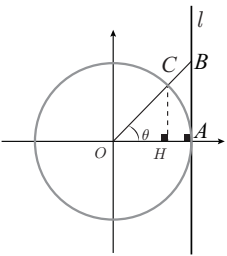
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ است که با توجه به علامت نسبت مثلثاتی در آن ناحیه می‌توانید علامت آن را تعیین کنید. مثلاً در وسط ناحیه‌ی دوم (چون

$$\text{در ناحیه‌ی دوم سینوس مثبت و کسینوس منفی است.) داریم: } \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

محور تانژانت‌ها

اگر بر دایره‌ی مثلثاتی در نقطه‌ی A خطی مماس کنیم، از تشابه مثلث‌های OAB و OCH داریم:

$$\frac{CH}{AB} = \frac{OH}{OA} \xrightarrow{\substack{CH = \sin \theta \\ OH = \cos \theta \\ OA = 1}} \frac{\sin \theta}{AB} = \frac{\cos \theta}{1} \Rightarrow AB = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$



یعنی برای این‌که تانژانت یک زاویه را بیابیم، کافیست از مرکز دایره به انتهای کمان آن زاویه (در اینجا نقطه‌ی C) وصل کنیم و امتداد دهیم تا خط l را در نقطه‌ی B قطع کند. در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی B از نقطه‌ی A برابر تانژانت زاویه‌ی θ است. بنابراین خط l را **محور تانژانت‌ها** می‌نامیم.

نکته ✓

می‌دانیم $\sin 0 = 0$ و $\cos 0 = 1$ ، پس $\tan 0 = 0$ است. بنابراین با امتداد زاویه‌ی صفر باید محور تانژانت‌ها را در عدد صفر قطع کنیم، پس نقطه‌ی A در واقع صفر محور تانژانت‌ها است.

نکته ✓

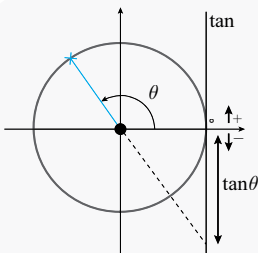
چون در ناحیه‌ی اول سینوس و کسینوس مثبت است، تانژانت هم مثبت است، بنابراین نقاط بالای نقطه‌ی A روی محور تانژانت‌ها نشان دهنده‌ی مقادیر مثبت تانژانت هستند.

نکته ✓

در ناحیه‌ی دوم، سینوس مثبت و کسینوس منفی است، پس تانژانت هم منفی است. ضمناً اگر زاویه در ناحیه‌ی دوم را امتداد دهیم، در همان جهت محور تانژانت‌ها را قطع نمی‌کند. پس در جهت مخالف امتداد می‌دهیم تا محور تانژانت را در نقطه‌ای پایین نقطه‌ی A قطع کند. بنابراین نقاط پایین نقطه‌ی A نشان دهنده‌ی مقادیر منفی روی محور تانژانت‌ها هستند.

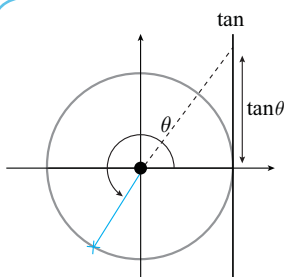
تذکر

با این تعاریف می‌توان علامت **تانژانت** (و **کوتانژانت**) را با محور تانژانت‌ها هم پیدا کرد.



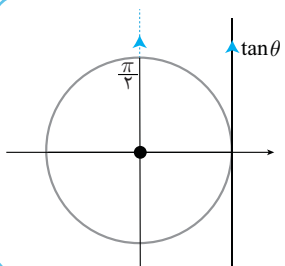
نکته ✓

در زوایای ناحیه‌ی سوم هم به همین شکل باید امتداد زاویه در جهت مخالف را برای پیدا کردن تانژانت زاویه مذکور، موردنظر داشته باشیم:



نکته ✓

از قبل می‌دانستیم $\tan \frac{\pi}{2}$ تعریف نشده است (چون $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ و $\cos \frac{\pi}{2} = 0$). این موضوع را از دایره‌ی مثلثاتی و محور تانژانت‌ها هم می‌توان فهمید. اگر زاویه‌ی $\frac{\pi}{2}$ را امتداد دهیم هرگز محور تانژانت‌ها را قطع نخواهد کرد، چرا که با آن موازی است. این موضوع برای زاویه $\frac{3\pi}{2}$ هم صادق است.

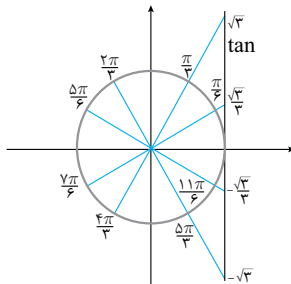
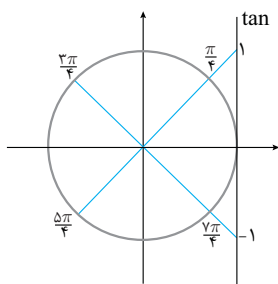


نکته ✓

تانژانت زوایای معروف را در دو دسته روی محور تانژانت‌ها نشان می‌دهیم:

زوایای مرتبط با 45° (وسط چهار ناحیه)

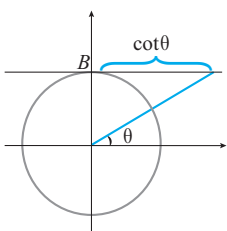
زوایای مرتبط با 30°



تذکر

با تصور کردن زوایای مرتبط با 30° و 45° در دایره‌ی مثلثاتی می‌توانید به راحتی تانژانت آن‌ها را حفظ کنید. همچنین دقت کنید که در وسط نایه‌ی اول و سوم مقدار تانژانت (و کتانژانت) برابر ۱ و در وسط نایه‌ی دوم و چهارم مقدار تانژانت (و کتانژانت) برابر -۱ است.

ویژه دکترها: محور کتانژانت‌ها ۱



مشابه با محور تانژانت، با تشابه مثلث‌ها می‌توان ثابت کرد، اگر خطی در نقطه‌ی B بر دایره‌ی مثلثاتی مماس کنیم، محور کتانژانت‌ها را رسم کرده‌ایم، چرا که اگر فاصله امتداد هر زاویه را از نقطه‌ی B بیابیم، کتانژانت آن زاویه را نشان می‌دهد:

نکته ✓

چون $\cot \frac{\pi}{2} = 0$ است، پس نقطه‌ی B صفر محور کتانژانت‌ها است.

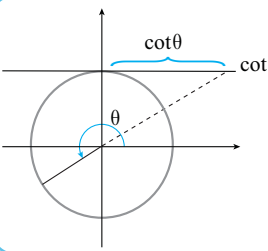
نکته ✓

چون در ناحیه‌ی اول و دوم به ترتیب مقدار کتانژانت مثبت و منفی است، نقاط راست نقطه‌ی B نشان دهنده‌ی مقادیر مثبت و نقاط چپ نقطه‌ی B نشان دهنده‌ی مقادیر منفی کتانژانت روی محور است.



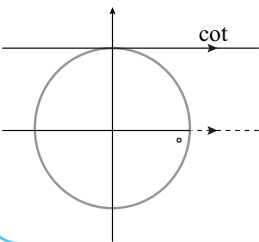
نکته ✓

در ناحیه‌ی سوم و چهارم که امتداد زاویه محور کتانژانت را قطع نمی‌کند، آن را در جهت خلاف آن امتداد می‌دهیم:



نکته ✓

از قبل می‌دانستیم $\cot 0^\circ$ تعریف نشده است (چون $\cos 0^\circ = 1$ و $\sin 0^\circ = 0$). این موضوع را می‌توان از دایره‌ی مثلثاتی و محور کتانژانت‌ها هم فهمید، چرا که اگر زاویه‌ی صفر را امتداد دهیم هرگز محور کتانژانت‌ها را قطع نخواهد کرد، چون با آن موازی خواهد بود.

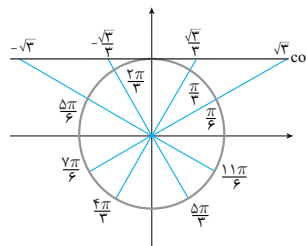
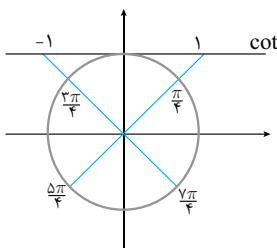


نکته ✓

کتانژانت زوایای معروف را در دو دسته روی محور کتانژانت‌ها نشان می‌دهیم:

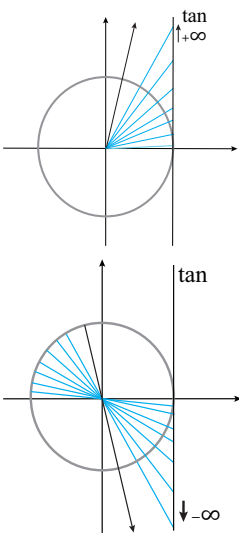
زوایای مرتبط با 45° (وسط چهار ناحیه)

زوایای مرتبط با 30°



محدوده‌ی نسبت‌های مثلثاتی

می‌دانیم هر نقطه روی دایره‌ی مثلثاتی به شکل $A(\cos \theta, \sin \theta)$ است. همچنین واضح است که هر نقطه روی دایره دارای طول و عرض، در محدوده‌ی $[-1, 1]$ است. پس می‌توان نتیجه گرفت برای هر زاویه دلخواه θ : $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ و $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ برخلاف نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس، نسبت‌های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت محدودیتی ندارند و می‌توانند خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشند. مثلاً برای نسبت مثلثاتی تانژانت با افزایش زاویه‌ی θ از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ روند افزایش تانژانت بدون هیچ محدودیتی ادامه پیدا می‌کند و با نزدیک شدن θ به $\frac{\pi}{2}$ مقدار تانژانت خیلی بزرگ شده است.^۱
همچنین به محض این‌که θ از $\frac{\pi}{2}$ عبور کند، مقدار تانژانت به شدت کاهش پیدا کرده و خیلی کوچک می‌شود.^۲ پس از آن با افزایش θ از $\frac{\pi}{2}$ به سمت π تانژانت **رشد کرده** و به صفر نزدیک می‌شود.



۱- بعداً در حد و پیوستگی خواهیم گفت که: $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan \theta = +\infty$

۲- بعداً در حد و پیوستگی خواهیم گفت که: $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan \theta = -\infty$



روی محور کتانژانت‌ها یا با استفاده از خواص نامساوی‌ها می‌توان این موضوع را برای کتانژانت هم نشان داد. پس می‌توان گفت:

$$-\infty < \tan \theta < +\infty, \quad -\infty < \cot \theta < +\infty$$

یعنی تانژانت و کتانژانت یک زاویه ممکن است برابر هر عدد حقیقی باشند ولی سینوس و کسینوس یک زاویه عددی در بازه $[-1, 1]$ خواهند بود.

تست ۹. حداکثر مقدار عبارت $A = 2\sin \theta - 3$ از حداقل آن چقدر بیش‌تر است؟

- ۴ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ ، پس:

$$-2 \leq 2\sin \theta \leq 2 \Rightarrow -5 \leq 2\sin \theta - 3 \leq -1$$

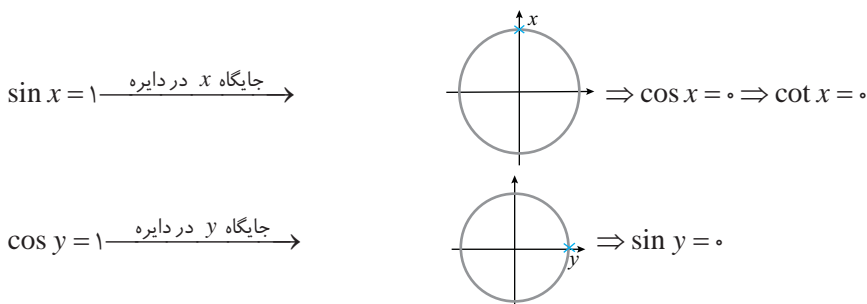
یعنی حداکثر این عبارت -1 و حداقل آن -5 است. پس حاصل نهایی $4 = -1 - (-5)$ است.

تست ۱۰. اگر $\sin x + \cos y = 2$ باشد، حاصل $\cot x + \sin y$ کدام است؟

- ۲ (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) تعریف نشده

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

چون حداکثر مقدار $\sin x$ و $\cos y$ برابر ۱ است، پس حداکثر مقدار مجموع آن‌ها هم برابر ۲ است و این مجموع زمانی برابر ۲ خواهد شد که هر دو برابر با ۱ (یعنی حداکثرشان) باشند:



پس $\cot x + \sin y = 0$.

تست ۱۱. کم‌ترین مقدار عبارت $B = \frac{3}{2\sin^2 x + 1}$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

از نامساوی $-1 \leq \sin x \leq 1$ شروع می‌کنیم:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2\sin^2 x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 2\sin^2 x + 1 \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2\sin^2 x + 1} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{3}{2\sin^2 x + 1} \leq 3$$

پس کم‌ترین مقدار این عبارت برابر ۱ و بیش‌ترین مقدار آن برابر ۳ است.

تست ۱۲. کم‌ترین مقدار عبارت $A = \cos^2 x - \cos x$ کدام است؟

- صفر (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) -1 (۴)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

راه‌حل اول: عبارت داده شده را مربع کامل می‌کنیم:

$$A = (\cos x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \xrightarrow{(\cos x - \frac{1}{2})^2 \geq 0} (\cos x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$$

پس حداقل مقدار این عبارت $-\frac{1}{4}$ است. (این مقدار به ازای $\cos x = \frac{1}{2}$ ، به دست می‌آید.)

راه‌حل دوم: از تغییر متغیر $\cos x = t$ عبارت داده شده را به شکل یک عبارت درجه دوم درمی‌آوریم که حداقل آن $-\frac{\Delta}{4a}$ خواهد بود:

$$\cos x = t \Rightarrow A = t^2 - t \Rightarrow A_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4(1)} = -\frac{1}{4}$$

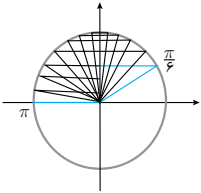


تذکر

دقت کنید که این مقدار به ازای $t = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ به دست می آید.

اگر محدوده‌ی تغییرات زاویه در صورت سؤال داده شود، با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی، می‌توان محدوده‌ی تغییرات نسبت‌های مثلثاتی را یافت. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۵ اگر $\frac{\pi}{6} < x < \pi$ باشد، محدوده‌ی تغییرات $\sin x$ و $\cos x$ را بیابید.



پاسخ: با رسم دایره‌ی مثلثاتی محدوده‌ی تغییرات هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را پیدا می‌کنیم:

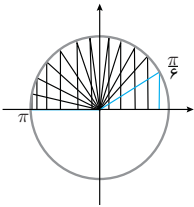
همان‌طور که در دایره‌ی روبه‌رو مشخص است، در ابتدا $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ است و با افزایش زاویه از $\frac{\pi}{6}$ تا $\frac{\pi}{2}$ مقدار سینوس افزایش می‌یابد تا در $\frac{\pi}{2}$ که $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ می‌شود و سپس با افزایش زاویه x از $\frac{\pi}{2}$ تا π مقدار سینوس روند کاهشی دارد تا در π که $\sin \pi = 0$ خواهد بود.

پس حداکثر مقدار آن برابر ۱ و حداقل آن برابر صفر خواهد بود. البته دقت کنید که عضو بازه $(\frac{\pi}{6}, \pi)$ است ولی عضو این بازه نیست، پس مقدار

سینوس برابر ۱ می‌شود ولی برابر صفر نمی‌شود. یعنی: $0 < \sin x \leq 1$

در نسبت مثلثاتی کسینوس هم با شروع از $\frac{\pi}{6}$ داریم $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و با افزایش x از $\frac{\pi}{6}$ تا π دائماً

کسینوس کاهش می‌یابد تا π که در آن $\cos \pi = -1$ است، پس: $-1 < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$



تست ۱۳. اگر $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ باشد، حداقل مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

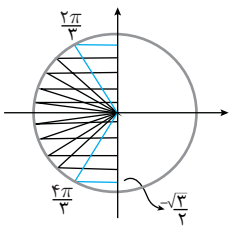
پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا از محدوده‌ی تغییرات x ، بازه‌ی تغییرات $2x$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{4\pi}{3}$$

حال تغییرات سینوس را در بازه‌ی $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ پیدا می‌کنیم:

معلوم است در این بازه کم‌ترین مقدار سینوس برابر $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.



تست ۱۴. اگر $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ ، آن‌گاه $\tan(x + \frac{\pi}{3})$ در کدام بازه است؟

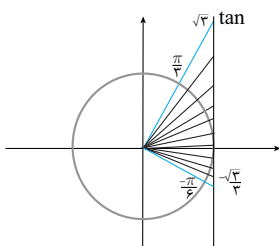
- (۱) $[-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ (۲) $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ (۳) $(-\infty, 0]$ (۴) $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

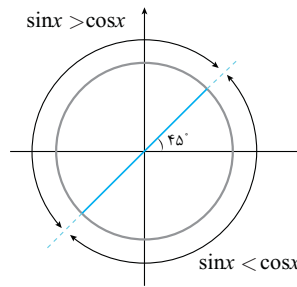
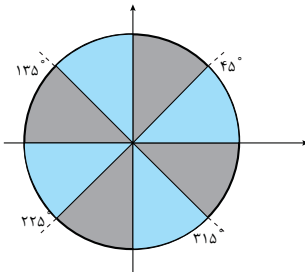
از بازه‌ی $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ بازه‌ی تغییرات کمان $(x + \frac{\pi}{3})$ را پیدا می‌کنیم:

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3}$$

از دایره‌ی مثلثاتی و محور تنازانت‌ها معلوم است که $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan(x + \frac{\pi}{3}) \leq \sqrt{3}$



در دایره‌های مثلثاتی زیر مقادیر نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس و همچنین تانژانت و کتانژانت را با هم مقایسه کرده‌ایم. بهتر است بعد از درک علت این محدوده‌ها، آن‌ها را به یاد بسپارید:



در نواحی روشن‌تر $\tan x > \cot x$ و در نواحی تیره‌تر $\tan x < \cot x$ است.

تست ۱۵. چه تعداد از نامساوی‌های زیر صحیح هستند؟

(د) $\tan 1 > \cot 1$

(ج) $\sin 1000^\circ > \cos 1000^\circ$

(ب) $\cos 2 > \cos 3$

(الف) $\sin 17^\circ > \sin 2^\circ$

۴ صفر

۳

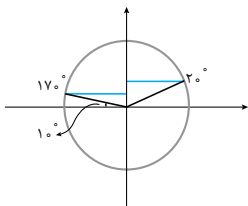
۲

۱

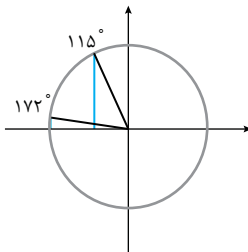
پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱

بررسی همه‌ی موارد:

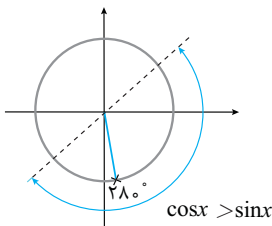
(الف) $\sin 2^\circ > \sin 17^\circ$



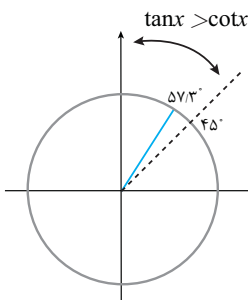
(ب) دقت کنید که $2 \text{ rad} \simeq 115^\circ$ و $3 \text{ rad} \simeq 172^\circ$. از شکل معلوم است که $\cos 115^\circ > \cos 172^\circ$



(ج) دقت کنید که $1000^\circ = 2(360^\circ) + 280^\circ$ ، پس 1000° برابر با دو دور کامل و 280° است. یعنی در جایگاه 280° قرار می‌گیرد و در این جایگاه کسینوس از سینوس بزرگ‌تر است.



(د) دقت کنید $1 \text{ rad} \simeq 57.3^\circ$ و این زاویه در محدوده‌ای است که در آن تانژانت از کتانژانت بیش‌تر است.



پس موارد «ب» و «د» صحیح هستند.



کاربرد مثلثات

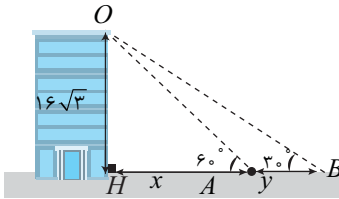
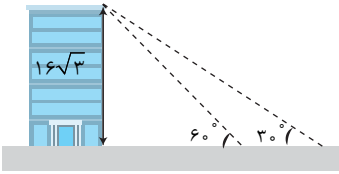
چند مثال از کاربردهای سادهی مثلثات و با تعریف نسبت‌های مثلثاتی را ببینید:

مثال ۶ یک شخص در جلوی یک ساختمان به ارتفاع $16\sqrt{3}$ متر آن را با زاویه 60° می‌بیند. این شخص چقدر باید از ساختمان دور شود تا آن را با زاویه 30° ببیند؟
پاسخ: اگر فاصله‌ی شخص تا پای آپارتمان در حالت اول را x در نظر بگیریم، داریم:

$$\Delta OAH : \tan 60^\circ = \frac{16\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 16$$

همچنین در مثلث OHB داریم:

$$\Delta OHB : \tan 30^\circ = \frac{16\sqrt{3}}{16+y} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{16+y} \Rightarrow 48 = 16+y \Rightarrow y = 32$$



تست ۱۶. یک سرباز تپه‌ای به ارتفاع h را با زاویه 30° و نوک دکل بالای تپه را به زاویه 45° می‌بیند. اگر دکل دارای ارتفاع ۲ متر باشد، ارتفاع تپه چقدر است؟

(۱) $\sqrt{3} + 1$

(۲) $\sqrt{3}$

(۳) 2

(۴) $\sqrt{3} - 1$

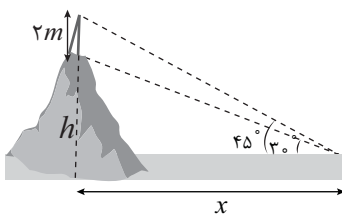
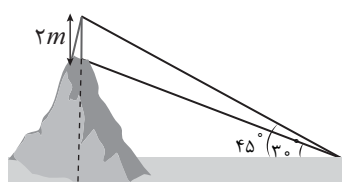
پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

اگر فاصله‌ی افقی سرباز تا تپه را x در نظر بگیریم، داریم:

$$\tan 45^\circ = \frac{h+2}{x} \Rightarrow 1 = \frac{h+2}{x} \Rightarrow x = h+2 \quad (*)$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x} \Rightarrow x = h\sqrt{3}$$

$$(*) \xrightarrow{x=h\sqrt{3}} h\sqrt{3} = h+2 \Rightarrow h(\sqrt{3}-1) = 2 \Rightarrow h = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \Rightarrow h = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$$



تست ۱۷. کابین A از یک چرخ و فلک در راستای افقی قرار گرفته است. با چرخش چرخ و فلک به اندازه‌ی زاویه‌ی θ کابین A در جایگاه B قرار می‌گیرد. در این صورت ارتفاع کابین A از سطح زمین چقدر است؟ (شعاع چرخ و فلک ۱۰ متر است.)

(۱) $10 \sin \theta$

(۲) $12 + 10 \cos \theta$

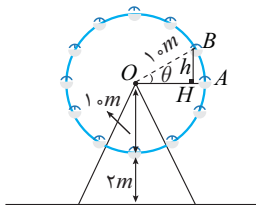
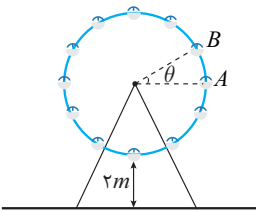
(۳) $2 + 10 \sin \theta$

(۴) $12 + 10 \sin \theta$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

طبق شکل ارتفاع کابین در نقطه‌ی B برابر با $h+12$ است. در مثلث OBH داریم:

$$\sin \theta = \frac{BH}{OB} \xrightarrow{\substack{BH=h \\ OB=10}} \sin \theta = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \sin \theta \Rightarrow B \text{ ارتفاع کابین در نقطه‌ی } B = 12 + 10 \sin \theta$$



مثال ۷ در تست قبل اگر چرخ و فلک هر دو دقیقه یک دور بزند، ارتفاع کابین را بعد از زمان t (برحسب ثانیه) به دست آورید.

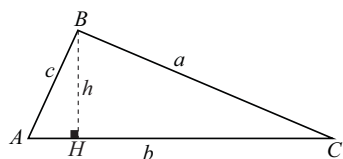
پاسخ: می‌دانیم در $120 \cdot s$ چرخ و فلک $2\pi \text{ rad}$ می‌چرخد، پس اگر در زمان t به اندازه‌ی θ چرخیده باشد، داریم:

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{t}{120} \Rightarrow \theta = \frac{\pi t}{60} \Rightarrow h = 12 + 10 \sin \theta = 12 + 10 \sin \frac{\pi t}{60}$$



مساحت مثلث

می‌دانیم در مثلث مساحت برابر نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده است:



$$S = \frac{hb}{2}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \sin \hat{A}$$

از طرفی در مثلث ABH داریم:

$$S = \frac{c \sin \hat{A} \times b}{2} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

با جایگذاری در رابطه‌ی بالا داریم:

پس مساحت هر مثلث برابر نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن‌هاست. به همین ترتیب می‌توان مساحت را از روابط زیر هم به دست آورد:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ba \sin \hat{C} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$$

مثال ۸ در یک مثلث متساوی الساقین، اندازه‌ی هر ساق برابر ۸ واحد و زاویه مجاور به ساق برابر ۱۵°



$$180 - 2(15) = 150^\circ$$

درجه است. مساحت این مثلث را بیابید.

پاسخ: مشخص است که زاویه‌ی رأس برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \frac{1}{2} = 16$$

حال از رابطه‌ای که برای مساحت ارائه کردیم، داریم:

تست ۱۸. مساحت یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ کدام است؟

۲ (۴)

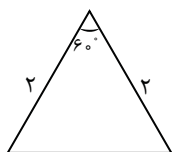
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم در هر مثلث متساوی الاضلاع زوایای داخلی برابر ۶۰° هستند:



$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

نتیجه: در هر مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a ، مساحت برابر است با:

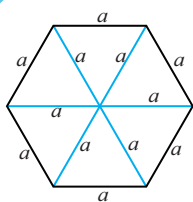
$$S = \frac{1}{2} \times a \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

نکته ✓

هر شش ضلعی منتظم با رسم قطرهای بزرگ به ۶ مثلث متساوی الاضلاع تقسیم می‌شود.

اگر طول ضلع شش ضلعی را برابر a در نظر بگیریم، مساحت آن برابر است با:

$$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$



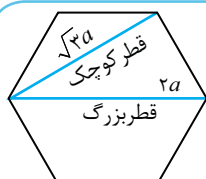
چند نکته‌ی تکمیلی درباره‌ی شش ضلعی منتظم

نکته ✓

در هر شش ضلعی منتظم به ضلع a با وصل کردن هر رأس به رأس مجاور آن ساخته می‌شود که طول آن برابر $2a$ است.

نکته ✓

در هر شش ضلعی منتظم با ضلع a با وصل کردن هر رأس به رأس مجاور با رأس روبه‌روی، قطر کوچک آن ساخته می‌شود که طول آن برابر $\sqrt{3}a$ است.





تست ۱۹. در یک شش ضلعی منتظم اندازه‌ی قطر کوچک ۴ واحد است. در این صورت مساحت آن چقدر است؟

۱۶ (۴)

۱۶√۳ (۳)

۸√۳ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

اگر اندازه‌ی ضلع شش ضلعی را a در نظر بگیریم، طول قطر کوچک برابر $\sqrt{3}a$ است. پس:

$$\sqrt{3}a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{16}{3} = 8\sqrt{3}$$

نکته ✓

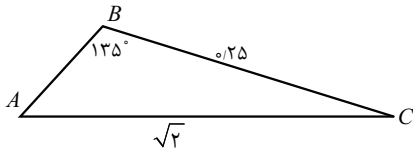
$$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

قبلاً گفتیم مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\frac{ab \sin \hat{C}}{abc} = \frac{ac \sin \hat{B}}{abc} = \frac{bc \sin \hat{A}}{abc} \Rightarrow \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{A}}{a}$$

با ساده کردن $\frac{1}{2}$ از عبارات و تقسیم آن‌ها بر abc داریم: این رابطه به قضیه‌ی سینوس‌ها معروف است. این قضیه بیان می‌کند که در هر مثلث نسبت سینوس هر زاویه به ضلع روبه‌روی آن عددی ثابت است.

تست ۲۰. در مثلث مقابل اندازه‌ی $\cos \hat{A}$ کدام است؟



$-\frac{3\sqrt{7}}{8}$ (۲)

$\frac{1}{8}$ (۴)

$\pm \frac{3\sqrt{7}}{8}$ (۱)

$\frac{3\sqrt{7}}{8}$ (۳)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{\sin 135^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{\sin \hat{A}}{0.25} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sin \hat{A}}{0.25} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{1}{8}$$

طبق قضیه‌ی سینوس‌ها، ابتدا $\sin \hat{A}$ را به دست می‌آوریم:

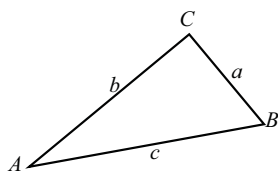
$$\cos \hat{A} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{63}{64}} = \pm \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

می‌دانیم $\cos \hat{A} = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \hat{A}}$ ، پس:

دقت کنید که چون زاویه‌ی B منفرجه است، بنابراین زاویه‌ی A حاده است، پس $\cos \hat{A} > 0$ است. بنابراین $\cos \hat{A} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ صحیح است.

ویژه دکترا: قضیه‌ی کسینوس‌ها

با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها که اثبات آن خارج از قالب و چهارچوب کتاب است، می‌توان با داشتن دو ضلع از یک مثلث و زاویه بین آن‌ها اندازه‌ی ضلع سوم را محاسبه کرد. یعنی در هر مثلث مفروض ABC همواره روابط زیر برقرارند:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

تست ۲۱. در یک مثلث زاویه‌ی روبه‌رو به یک ضلع با طول $\sqrt{19}$ برابر 60° است. اگر اندازه‌ی یکی از اضلاع مثلث ۵ باشد، اندازه‌ی ضلع سوم کدام است؟

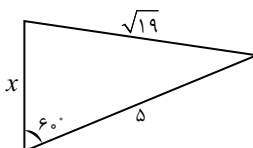
۵ یا ۳ (۴)

۵ یا ۲ (۳)

۶ یا ۳ (۲)

۳ یا ۲ (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴



اندازه‌ی ضلع سوم را x در نظر می‌گیریم. طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها، داریم:

$$(\sqrt{19})^2 = x^2 + 5^2 - 2(5)(x) \cos 60^\circ \Rightarrow 19 = x^2 + 25 - 10x \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = 3$$

تست ۲۲. اگر در یک مثلث رابطه‌ی $c^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab$ برقرار باشد، زاویه‌ی \hat{C} چند درجه است؟

۱۵۰° (۴)

۱۲۰° (۳)

۳۰° (۲)

۶۰° (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

از طرفی از صورت سؤال داریم:

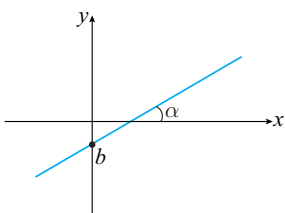
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab$$

$$\rightarrow \circ = \sqrt{3}ab + 2ab \cos \hat{C} \Rightarrow 2ab \cos \hat{C} = -\sqrt{3}ab \Rightarrow \cos \hat{C} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{C} = 150^\circ$$

شیب خط

می‌دانیم معادله‌ی هر خط را می‌توان به شکل $y = ax + b$ هم نوشت که در آن a شیب و b عرض از مبدأ خط (همان محل برخورد خط با محور y ها) نام دارد. می‌توان نشان داد شیب خط (a) همان تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.



$$a = \tan \alpha = \text{شیب خط}$$

$$y = ax + b \Rightarrow \text{معادله خط}$$

تست ۲۳. معادله‌ی خط روبه‌رو کدام است؟

(۱) $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$

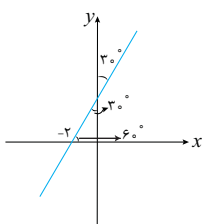
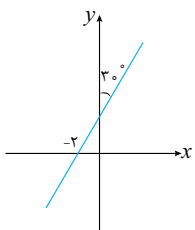
(۳) $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

معادله‌ی خط را به شکل $y = ax + b$ در نظر می‌گیریم. معلوم است، زاویه‌ای که این خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد برابر 60° است. پس شیب آن $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ است. بنابراین معادله‌ی آن را به شکل $y = \sqrt{3}x + b$ در نظر می‌گیریم. حال نقطه‌ی $(-2, 0)$ را در معادله‌ی خط قرار می‌دهیم:

$$0 = -2\sqrt{3} + b \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

پس معادله‌ی این خط به شکل $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ است.



پرسش‌های سطح ساده

۱. زاویه‌ی D برابر با $\frac{\pi}{2}$ رادیان است. اندازه‌ی این زاویه برحسب درجه کدام است؟

- (۱) ۲۰° (۲) ۱۸° (۳) ۱۰° (۴) ۹°

۲. کدام گزینه صحیح نیست؟

- (۱) $۲۵۲^\circ = \frac{7\pi}{5}$ رادیان (۲) $۱۱۲/۵^\circ = \frac{5\pi}{8}$ رادیان (۳) $۳ = (\frac{54^\circ}{\pi})^\circ$ رادیان (۴) $\frac{9}{5} = ۱۰۰^\circ$ رادیان

۳. مجموع اندازه‌های دو زاویه برحسب درجه برابر ۶۰° و اختلاف آن‌ها برحسب واحد رادیان برابر $\frac{\pi}{۱۵}$ رادیان است. اندازه‌ی زاویه‌ی کوچک‌تر کدام است؟

- (۱) ۲۵° (۲) ۲۴° (۳) ۱۵° (۴) ۱۴°

۴. اگر زاویه‌ی ۳۹۱۵° را به شکل $2k\pi + \alpha$ رادیان بنویسیم و k عددی طبیعی باشد و $0 < \alpha < 2\pi$ باشد، در این صورت α کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{8}$ (۲) $\frac{7\pi}{8}$ (۳) $\frac{5\pi}{4}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$

۵. چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

(الف) یک رادیان برابر است با اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با قطر دایره مساوی است.

(ب) یک رادیان تقریباً برابر ۵۳° درجه است.

(ج) اگر اندازه‌ی زاویه‌ای برحسب درجه را در $\frac{۱۸^\circ}{\pi}$ ضرب کنیم، اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان به دست می‌آید.

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶. در مدت زمان ۴۲ دقیقه، عقربه‌ی ساعت شمار چند رادیان دوران می‌کند؟

- (۱) $\frac{9\pi}{30}$ (۲) $\frac{9\pi}{60}$ (۳) $\frac{7\pi}{60}$ (۴) $\frac{7\pi}{30}$

۷. یک چرخ و فلک مطابق شکل ۲۴ کابین دارد. در لحظه‌ی شروع حرکت چرخ و فلک، کابین شماره‌ی یک

در پایین‌ترین نقطه قرار دارد. اگر چرخ و فلک به اندازه‌ی $\frac{53\pi}{6}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی دوران کند،

کابین شماره‌ی یک در محل فعلی کدام کابین قرار می‌گیرد؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۱ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۸. انتهای کمان مربوط به زاویه‌ی $۱۲-$ رادیان در کدام ناحیه‌ی دایره مثلثاتی واقع است؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۹. زوایای $-\frac{2\pi}{5}$ رادیان و $\frac{7\pi}{8}$ رادیان به ترتیب در کدام نواحی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارند؟

- (۱) سوم و اول (۲) سوم و دوم (۳) چهارم و اول (۴) چهارم و دوم

۱۰. انتهای کمان کدام‌یک از زوایای زیر، در دایره‌ی مثلثاتی، با بقیه زوایا «هم ناحیه» نیست؟

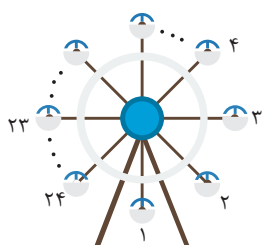
- (۱) ۱۷ رادیان (۲) $\frac{8\pi}{9}$ رادیان (۳) (-۳) رادیان (۴) $\frac{7\pi}{5}$ رادیان

۱۱. انتهای کمان‌های مقابل به زوایای $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{7\pi}{6}$ و $\frac{۱۱\pi}{6}$ را روی دایره‌ی مثلثاتی، به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل کدام است؟

- (۱) مستطیل (۲) مربع (۳) متوازی‌الاضلاع (۴) دوزنقه

(کتاب درسی)

(کتاب درسی)



(کتاب درسی)





$$\frac{5\pi}{6} \text{ rad} \quad (۴)$$

$$\frac{44\pi}{9} \text{ rad} \quad (۳)$$

$$-56^\circ \quad (۲)$$

$$124^\circ \quad (۱)$$

۱۲. زاویه‌ای با اندازه 52° با زاویه θ هم‌انتهاست. اندازه‌ی زاویه θ کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱۳. طول برف پاک‌کن اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. اگر برف پاک‌کن، کمانی به اندازه‌ی 12° طی کند، طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن تقریباً چند سانتی‌متر است؟

$$50/24 \quad (۲)$$

$$50/72 \quad (۱)$$

$$52/24 \quad (۴)$$

$$52/72 \quad (۳)$$

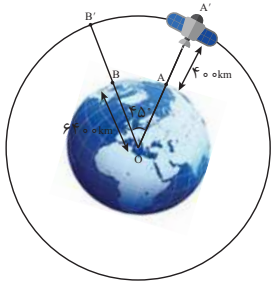
۱۴. ایستگاه فضایی بین‌المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصله‌ی تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کره‌ی زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B که با مرکز زمین زاویه‌ی 45° می‌سازند، رصد شوند، این ایستگاه تقریباً چه مسافتی را در مدار خود از A' به B' پوشش می‌دهد؟ شعاع تقریبی کره‌ی زمین را 6400 کیلومتر فرض کنید. (کتاب درسی)

$$5238 \quad (۲)$$

$$5328 \quad (۱)$$

$$5228 \quad (۴)$$

$$5338 \quad (۳)$$



۱۵. دایره‌ای به شعاع 10 سانتی‌متر مفروض است. اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به کمانی به طول 8 سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟ (کتاب درسی)

$$\frac{5}{4} \text{ رادیان} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{4} \text{ درجه} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{5} \text{ رادیان} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{5} \text{ درجه} \quad (۱)$$

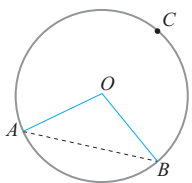
۱۶. در شکل مقابل، شعاع دایره برابر 12 و طول کمان ACB برابر 16π است. طول وتر AB کدام است؟

$$12\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$12 \quad (۱)$$

$$24 \quad (۴)$$

$$12\sqrt{3} \quad (۳)$$



$$۱۷. \text{ حاصل عبارت } A = \frac{3 \cot \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} \cos \pi}{4 \tan \frac{\pi}{6} - \sqrt{3} \cos^2 \frac{\pi}{4}} \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

۱۸. اگر $7 = 2 \sin a - 5 \cos b$ باشد، مقدار عبارت $\sin a \cos b$ کدام است؟

$$-\frac{13}{49} \quad (۴)$$

$$-1 \quad (۳)$$

$$1 \quad (۲)$$

$$-\frac{13}{15} \quad (۱)$$

۱۹. در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی، به ازای هر زاویه‌ی دلخواه α ، رابطه‌ی $\sin \alpha < \cos \alpha$ برقرار است؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

۲۰. کدام یک از نامساوی‌های زیر صحیح نیست؟

$$\cot 70^\circ < \cot 40^\circ \quad (۴)$$

$$\tan 70^\circ < \tan 40^\circ \quad (۳)$$

$$\cos 70^\circ < \cos 40^\circ \quad (۲)$$

$$\sin 70^\circ > \sin 40^\circ \quad (۱)$$

۲۱. مقدار کدام یک از گزینه‌های زیر از سایرین بزرگ‌تر است؟ (زوایا برحسب واحد رادیان هستند).

$$\sin 10 \quad (۴)$$

$$\sin 9 \quad (۳)$$

$$\sin 8 \quad (۲)$$

$$\sin 7 \quad (۱)$$

۲۲. کدام یک از نسبت‌های مثلثاتی زیر از سایرین بزرگ‌تر است؟ (زاویه برحسب واحد رادیان است).

$$\cot(-8) \quad (۴)$$

$$\tan(-8) \quad (۳)$$

$$\cos(-8) \quad (۲)$$

$$\sin(-8) \quad (۱)$$

۲۳. اگر $\tan \alpha \sin \alpha < 0$ و $\cot \alpha + \tan \alpha > 0$ آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

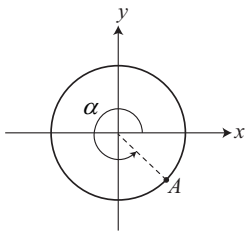
چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)





۲۴. مطابق شکل نقطه‌ی $A(\frac{1}{17}, -\frac{15}{17})$ روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد. حاصل $\sin \alpha - \cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{23}{17}$ (۲) $-\frac{23}{17}$ (۳) $\frac{7}{17}$ (۴) $-\frac{7}{17}$

۲۵. نقطه‌ی $P(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد. اگر این نقطه را 210° در جهت منفی مثلثاتی دوران دهیم، طول نقطه‌ی حاصل کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) صفر

۲۶. اگر $\sin x + \cos y = 2$ باشد، حاصل $\sin(x+y) - \cos(x-y)$ کدام است؟ ($0 \leq x, y < 360^\circ$)

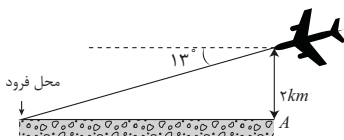
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) صفر

۲۷. اگر کمان x در محدوده‌ی $45^\circ \leq x \leq 15^\circ$ تغییر کند، حدود تغییرات $\sin x$ و $\cos x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
 (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x \leq 1$ (۴) $-1 \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $0 \leq \sin x \leq 1$

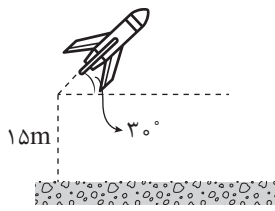
۲۸. اگر $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ و $\cos x = \frac{2m-1}{3}$ باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4} < m < \frac{5}{4}$ (۲) $\frac{5}{4} < m < 2$ (۳) $-\frac{1}{4} < m \leq \frac{5}{4}$ (۴) $\frac{5}{4} < m \leq 2$



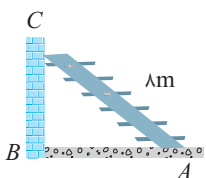
۲۹. یک هواپیما در ارتفاع 2 km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه‌ی هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما تقریباً در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی A فرود می‌آید؟ ($\tan 13^\circ \approx 0.23$) (کتاب درسی)

- (۱) ۹۲۹۵ متر (۲) ۸۲۹۵ متر (۳) ۹۶۹۵ متر (۴) ۸۶۹۵ متر



۳۰. یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه‌ی 30° پرتاب می‌شود. پس از طی کردن ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟ (کتاب درسی)

- (۱) ۲۰۱۵ (۲) ۱۰۱۵ (۳) $1000\sqrt{3} + 15$ (۴) ۱۰۰۰



۳۱. مطابق شکل، نردبانی به طول ۸ متر زیر پنجره‌ی ساختمانی قرار دارد. اگر زاویه‌ی نردبان با سطح زمین 30° باشد، فاصله‌ی پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟ (کتاب درسی)

- (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) $8\sqrt{3}$ (۴) $8\sqrt{2}$

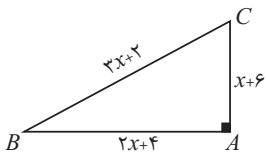
۳۲. علی می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه‌ی آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی $\frac{1}{5}$ متر و طول سایه‌ی او در همان لحظه $\frac{1}{5}$ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟ (کتاب درسی)

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۹ (۴) ۱۵

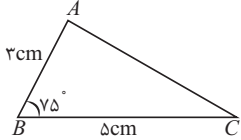
۳۳. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، ($\hat{B} = 90^\circ$)، نسبت دو ضلع زاویه‌ی قائمه برابر $\frac{1}{3}$ است. در این مثلث حاصل $\sin^2 C \cdot \cos^2 C$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{9}$

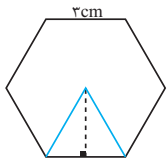




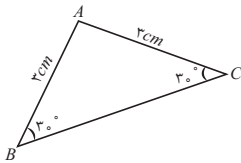
(کتاب درسی)



(کتاب درسی)



(کتاب درسی)



۳۴. در مثلث شکل مقابل، حاصل عبارت $(\tan C + \cot C)(\sin B + \cos B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{35}{6}$
 (۲) ۵
 (۳) $\frac{35}{12}$
 (۴) $\frac{5}{2}$

۳۵. مساحت مثلث ABC در شکل مقابل کدام است؟ $(\sin 75^\circ \approx 0.96)$

- (۱) $7/6$
 (۲) $7/2$
 (۳) $7/4$
 (۴) $7/8$

۳۶. مساحت شش ضلعی منتظم شکل مقابل کدام است؟

- (۱) $18\sqrt{3}$
 (۲) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$
 (۳) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$
 (۴) $9\sqrt{3}$

۳۷. مساحت مثلث ABC در شکل مقابل کدام است؟

- (۱) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$
 (۲) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$
 (۳) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
 (۴) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

۳۸. مساحت متوازی الاضلاعی که اندازه‌ی قطرهای آن برابر ۱۲ و ۱۶ و زاویه‌ی بین دو قطرش برابر 30° باشد، چقدر است؟

- (۱) ۲۴
 (۲) ۴۸
 (۳) ۳۶
 (۴) ۷۲

۳۹. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که دارای یک زاویه‌ی 30° است، طول وتر برابر ۱۲ است. مساحت این مثلث کدام است؟

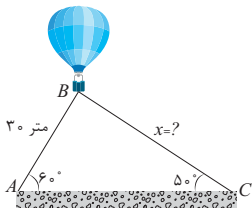
- (۱) $18\sqrt{3}$
 (۲) $36\sqrt{3}$
 (۳) $18\sqrt{2}$
 (۴) $36\sqrt{2}$

۴۰. یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است طول

طناب دوم کدام است؟ $(\sin 50^\circ \approx 0.76)$

(کتاب درسی)

- (۱) $17/74\sqrt{3}$
 (۲) $18/74\sqrt{3}$
 (۳) $19/74\sqrt{3}$
 (۴) $20/74\sqrt{3}$



۴۱. زاویه‌ی خطوط $\sqrt{3}x + y - 6 = 0$ و $3x + 1 = 0$ با جهت مثبت محور x ها به ترتیب کدام است؟

- (۱) صفر و 120°
 (۲) صفر و 60°
 (۳) 120° و 90°
 (۴) 90° و 60°

(کتاب درسی)

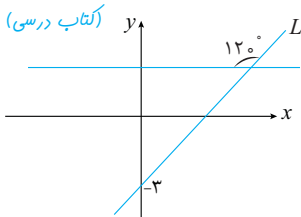
۴۲. معادله‌ی خطی که زاویه‌ی آن با محور x ها برابر 30° است و از نقطه‌ی $A(1, 0)$ می‌گذرد، کدام است؟

- (۱) $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$
 (۲) $3y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$
 (۳) $3y = \sqrt{3}x + 3$
 (۴) $y = \sqrt{3}x - 3$

۴۳. زاویه‌ی بین دو خط به معادلات $y = \sqrt{3}x$ و $x = \sqrt{3}y$ کدام است؟

- (۱) 30°
 (۲) 45°
 (۳) 60°
 (۴) 90°

(کتاب درسی)



- (۱) $y = -\sqrt{3}x - 3$
 (۲) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3$
 (۳) $y = \sqrt{3}x - 3$
 (۴) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 3$

۴۴. با توجه به شکل مقابل، معادله‌ی خط L کدام است؟



۴۵. به ازای کدام مقدار m ، خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(m, -3)$ و $B(-6, 1)$ با قسمت مثبت محور x زاویه‌ی 135° می‌سازد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱۰

پرسش‌های سطح متوسط

(کتاب درسی)

۴۶. چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح هستند؟

(الف) اگر زاویه‌ی بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقین ۱ رادیان باشد، آن‌گاه اندازه‌ی قاعده‌ی این مثلث کوچک‌تر از اندازه‌ی هر یک از ساق‌های آن است.

(ب) در دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر طول کمان روبه‌روی زاویه‌ی π رادیان تقریباً برابر با $3/14$ سانتی‌متر است.

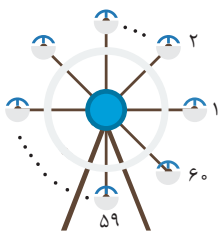
(ج) انتهای کمان زاویه‌ی $\frac{6\pi}{5}$ رادیان در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد.

(د) زاویه‌های $\frac{2\pi}{3}$ رادیان، $\frac{\pi}{9}$ رادیان و $\frac{7\pi}{36}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۷. اندازه‌ی زاویه‌ای که عقربه‌ی ساعت شمار، بین دو زمان خاص، طی می‌کند $\frac{5\pi}{36}$ رادیان است. اندازه‌ی زاویه‌ای که عقربه‌ی دقیقه شمار در این مدت طی می‌کند، چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{7\pi}{3}$ (۲) $\frac{5\pi}{3}$ (۳) $\frac{5\pi}{6}$ (۴) $\frac{7\pi}{6}$



۴۸. چرخ و فلکی مطابق شکل ۶۰ کابین دارد که از شماره‌ی ۱ تا ۶۰ شماره‌گذاری شده‌اند. این چرخ و فلک

در هر ۵ دقیقه، ۲ دور می‌چرخد. اگر چرخ و فلک ۱۲ دقیقه بچرخد کابین شماره‌ی یک به محل کدام کابین

منتقل می‌شود؟

- (۱) کابین ۳۶ (۲) کابین ۴۸ (۳) کابین ۴۹ (۴) کابین ۳۷

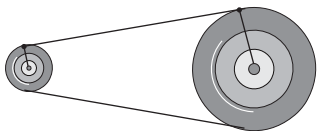
۴۹. زاویه‌ی بین عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار در ساعت $8:12'$ کدام است؟

- (۱) رادیان $\frac{87\pi}{90}$ (۲) رادیان $\frac{83\pi}{90}$ (۳) رادیان $\frac{92\pi}{90}$ (۴) رادیان $\frac{95\pi}{90}$

۵۰. اندازه‌ی یک زاویه برحسب درجه، از $\frac{240}{\pi}$ برابر اندازه‌ی آن برحسب واحد رادیان، 70 واحد کم‌تر است. اندازه‌ی این زاویه برحسب واحد رادیان چند

برابر زاویه‌ی $\frac{\pi}{3}$ است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) ۷ (۳) $\frac{7}{4}$ (۴) ۱۴



- (۱) ۲۰ cm (۲) ۲۵ cm (۳) ۱۸ cm (۴) ۲۴ cm

۵۱. در شکل مقابل، دو قرقره که شعاع قرقره‌ی کوچک‌تر ۱۸ سانتی‌متر است، با یک تسمه به هم وصل

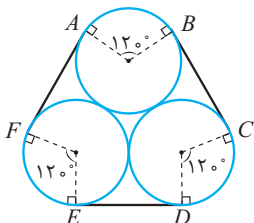
شده‌اند. وقتی قرقره‌ی کوچک‌تر به اندازه‌ی $\frac{5\pi}{3}$ رادیان می‌چرخد، قرقره‌ی بزرگ‌تر به اندازه‌ی 225°

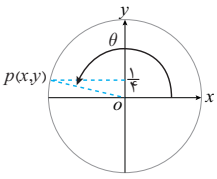
می‌چرخد. شعاع قرقره‌ی بزرگ‌تر کدام است؟

۵۲. سه لوله‌ی آب جهت حمل و نقل، با یک تسمه‌ی فلزی به هم بسته شده‌اند. اگر شعاع هر لوله‌ی آب

50 cm باشد، طول بخشی از تسمه‌ی فلزی که $FABC$ نامیده شده است، کدام است؟

- (۱) $100 + \frac{100\pi}{3}$ (۲) $200 + \frac{100\pi}{3}$ (۳) $100 + 75\pi$ (۴) $200 + 75\pi$





۵۳. با توجه به دایره‌ی مثلثاتی شکل مقابل، حاصل $\theta + \cos^2 \theta + 2 \cot^2 \theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{45}{4}$ (۲) $\frac{45}{2}$ (۳) $\frac{75}{4}$ (۴) $\frac{75}{2}$

۵۴. اگر نقطه‌ی $A(-1, 0)$ را که روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد، به اندازه‌ی 51° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، مختصات نقطه‌ی جدید کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (۲) $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ (۳) $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ (۴) $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

۵۵. اگر $\frac{5\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{4}$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $A = |\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x|$ کدام است؟

- (۱) $2 \cos x$ (۲) $-2 \cos x$ (۳) $-2 \sin x$ (۴) $2 \sin x$

۵۶. اگر $-\frac{\pi}{18} < x < \frac{5\pi}{36}$ باشد، آن‌گاه محدوده‌ی تغییرات $\cos 6x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos 6x < \frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2} < \cos 6x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2} < \cos 6x \leq 1$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos 6x \leq 1$

(کتاب درسی)

۵۷. چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره صحیح هستند؟

(الف) اگر $\sin \theta$ و $\tan \theta$ هم علامت باشند، θ در ناحیه اول دایره‌ی مثلثاتی است.

(ب) اگر $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ باشد، آن‌گاه α در ناحیه‌ی دوم یا سوم دایره‌ی مثلثاتی است.

(ج) اگر $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ و α در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی باشد، آن‌گاه $\sin \alpha = \pm \frac{2\sqrt{10}}{7}$.

(د) در هیچ یک از نواحی چهارگانه‌ی دایره‌ی مثلثاتی، به ازای هر زاویه دلخواه α در آن ناحیه، رابطه‌ی $\tan \alpha > \cot \alpha$ برقرار نیست.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۸. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، اگر طول وتر برابر ۱۲ و $2 \tan B = 3 \sin B$ باشد، آن‌گاه اندازه‌ی کوچک‌ترین ضلع مثلث کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{5}$ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) $8\sqrt{5}$

۵۹. در دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ای که اندازه‌های دو قاعده‌ی آن برابر ۱۲ و ۲۰ هستند، مساحت دوزنقه برابر $128\sqrt{3}$ است. در این دوزنقه، اندازه‌ی بزرگ‌ترین زاویه چقدر است؟

- (۱) 90° (۲) 120° (۳) 135° (۴) 105°

۶۰. زمینی به شکل دوزنقه وجود دارد که طول قاعده‌ی کوچک آن ۳۰ متر و طول هر یک از دو ساق آن ۲۰ متر است. اگر یکی از زوایای این دوزنقه، 60° باشد، مساحت آن کدام است؟

- (۱) $700\sqrt{3}$ (۲) $250\sqrt{3}$ (۳) $350\sqrt{3}$ (۴) $400\sqrt{3}$

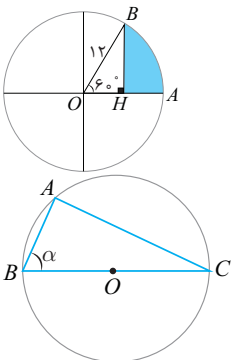
۶۱. در شکل مقابل، محیط قسمت رنگی کدام است؟

- (۱) $(\sqrt{3} + 1) + 4$ (۲) $(\sqrt{3} + 1) + 4\pi$ (۳) $6(\sqrt{3} + 1) + 2\pi$ (۴) $6(\sqrt{3} + 1) + 4\pi$

۶۲. با توجه به شکل مقابل، مساحت دایره‌ای به مرکز O ، برابر 100π است. اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ باشد،

اندازه‌ی ضلع AB کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۲



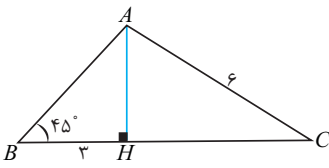
۶۳. در مثلث شکل مقابل، اندازه‌ی مساحت مثلث کدام است؟

(۱) $9 + 9\sqrt{3}$

(۳) $\frac{9 + 9\sqrt{3}}{2}$

(۲) $3 + 3\sqrt{3}$

(۴) $\frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}$



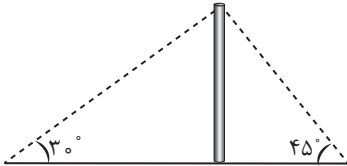
۶۴. دو شخص A و B در دو طرف یک دکل و با پای دکل بر یک خط راست واقفند. اگر زاویه‌ی دید اشخاص A و B با سر دکل به ترتیب 30° و 45° باشند و فاصله‌ی دو شخص A و B برابر ۸ متر باشد، ارتفاع دکل چقدر است؟

(۱) $2\sqrt{3} - 2$

(۳) $4\sqrt{3} - 4$

(۲) $4\sqrt{3} + 4$

(۴) $2\sqrt{3} + 2$



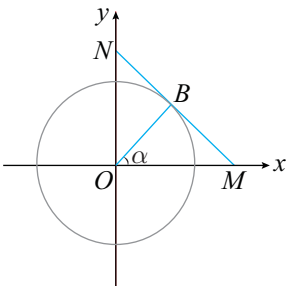
۶۵. در شکل مقابل پاره خط MN در نقطه‌ی B بر دایره‌ی مثلثاتی مماس است. مقدار MN کدام است؟

(۱) $\sin \alpha + \cos \alpha$

(۲) $\sin \alpha + \tan \alpha$

(۳) $\cos \alpha + \cot \alpha$

(۴) $\tan \alpha + \cot \alpha$



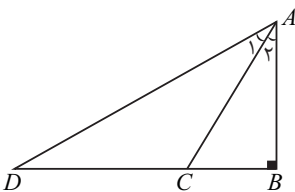
۶۶. با توجه به شکل مقابل، اگر $\hat{A}_P = 30^\circ$ ، $BC = 2\sqrt{3}$ و $DC = 4\sqrt{3}$ باشد، آن‌گاه زاویه‌ی \hat{A}_P چقدر از زاویه‌ی D بزرگ‌تر است؟

(۱) صفر

(۳) 30°

(۲) 15°

(۴) 20°



۶۷. برای تعیین فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B که در دو طرف رودخانه‌ای قرار دارند، نقطه‌ی C را در طرف A طوری اختیار می‌کنیم که $\hat{A}C = 30^\circ$ و

$\hat{B}AC = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$ و $\hat{A}CB = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ ، در این صورت طول AB کدام است؟

(۱) $10\sqrt{2}$

(۲) $10\sqrt{6}$

(۳) $20\sqrt{2}$

(۴) $20\sqrt{6}$

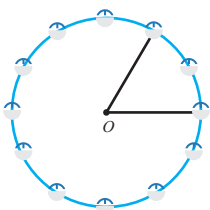
۶۸. در چرخ و فلک شکل مقابل، ارتفاع نقطه‌ی مفروض P که فاصله‌ی یکی از کابین‌ها تا سطح زمین است، برابر h و زاویه‌ی شعاع OP با سطح افقی برابر θ است. اگر ارتفاع نقطه‌ی P از رابطه‌ی $h(\theta) = 70 + 40 \sin \theta$ به دست آید، شعاع چرخ و فلک چقدر است؟

(۱) ۸۰ متر

(۳) ۴۰ متر

(۲) ۶۰ متر

(۴) ۳۰ متر



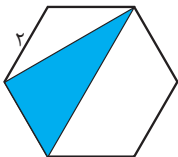
۶۹. در شش ضلعی منتظم شکل مقابل، مساحت قسمت رنگی کدام است؟

(۱) $4\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{3}$

(۲) $3\sqrt{3}$

(۴) $\sqrt{3}$



۷۰. طول هریک از اضلاع یک لوزی ۳۶ واحد و کسینوس بزرگ‌ترین زاویه‌ی آن $-\frac{\sqrt{15}}{4}$ است. مساحت این لوزی چند واحد مربع است؟

(۱) ۳۲۴

(۲) ۳۱۶

(۳) ۳۳۶

(۴) ۳۴۴

۷۱. حداکثر مساحت مثلثی که طول یک ضلع آن برابر ۶ و طول ضلع دیگر آن ۱۲ باشد، کدام است؟

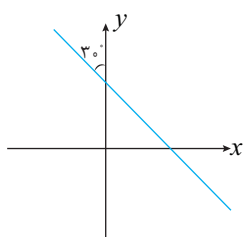
(۱) ۷۲

(۲) ۴۸

(۳) $18\sqrt{3}$

(۴) ۳۶

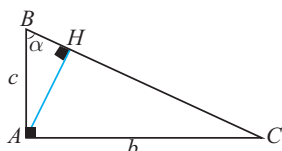




۷۲. به ازای کدام مقدار m ، خط $(3m-1)y + \sqrt{3}mx - 4 = 0$ که نمودار آن در شکل روبه‌رو رسم شده است، با محور y زاویه‌ی 30° می‌سازد؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

پرسش‌های سطح دشوار

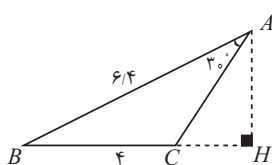


۷۳. در شکل مقابل، اندازه‌ی HC برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $c \sin \alpha \tan \alpha$ (۲) $c \cos^2 \alpha$
 (۳) $c \cos \alpha \cot \alpha$ (۴) $c \sin^2 \alpha$

۷۴. کم‌ترین مقدار عبارت $A = \sin^2 x - \sin x + 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

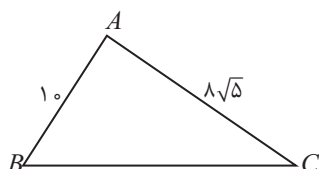


۷۵. در مثلث شکل مقابل، نسبت $\frac{AH}{AC}$ کدام است؟

- (۱) $0/9$ (۲) $0/8$ (۳) $0/7$ (۴) $0/6$

۷۶. در مثلثی با طول اضلاع $10, 6\sqrt{2}, 14$ ، ارتفاع وارد بر ضلع بزرگ‌تر، دو پاره‌خط روی آن ایجاد کرده است. طول قسمت کوچک‌تر کدام است؟

- (۱) 4 (۲) 6 (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$



۷۷. در شکل مقابل $\cos B = \frac{3}{5}$ است. اندازه‌ی ضلع BC کدام است؟

- (۱) 20 (۲) 22 (۳) 24 (۴) 26

۷۸. اگر در مثلث ABC ، داشته باشیم: $\hat{A} = 60^\circ$ ، $AB = 1 + \sqrt{3}$ و $AC = 2$. در این صورت اندازه‌ی زاویه‌ی C کدام است؟

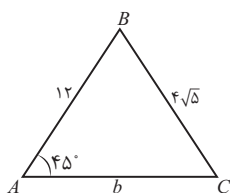
- (۱) 75° (۲) 90° (۳) 60° (۴) 105°

۷۹. در مثلثی با دو زاویه‌ی 60° و 45° ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی 45° برابر 12 است. اندازه‌ی ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی سوم کدام است؟

- (۱) $6(\sqrt{2}+1)$ (۲) $6(\sqrt{2}-1)$ (۳) $6(\sqrt{3}+1)$ (۴) $6(\sqrt{3}-1)$

۸۰. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، داریم: $\hat{A} = 120^\circ$ و $BC = 12$. در این صورت طول میانه‌ی وارد بر ضلع AB کدام است؟

- (۱) $\sqrt{21}$ (۲) $2\sqrt{21}$ (۳) 8 (۴) 6



۸۱. در مثلث شکل مقابل، اندازه‌ی ضلع b کدام است؟

- (۱) $8\sqrt{2}$ و $4\sqrt{2}$ (۲) 8 و 4
 (۳) $4\sqrt{2}$ و $2\sqrt{2}$ (۴) 12 و 8

۸۲. در مثلثی با اضلاع نابرابر، رابطه‌ی $b^3 + a^2c = c^3 + a^2b$ بین اضلاع برقرار است. زاویه‌ی A چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{3\pi}{4}$



پرسش‌های ترکیب سطوح

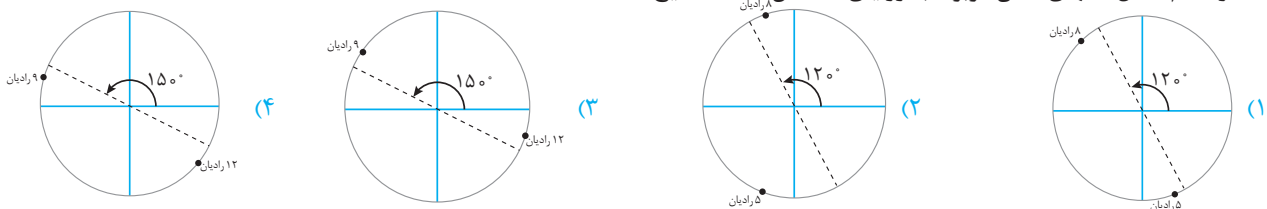
۸۳. مکمل زوایای -25° و $\frac{\pi}{12}$ رادیان به ترتیب کدام است؟

- (۱) 155° و $\frac{5\pi}{12}$ رادیان (۲) 205° و $\frac{5\pi}{12}$ رادیان (۳) 155° و $\frac{11\pi}{12}$ رادیان (۴) 205° و $\frac{11\pi}{12}$ رادیان

۸۴. انتهای کمان نظیر کدام زاویه در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی قرار ندارد؟

- (۱) 1000° (۲) $\frac{35\pi}{6}$ رادیان (۳) $-\frac{7\pi}{3}$ رادیان (۴) $\frac{28\pi}{3}$ رادیان

۸۵. در کدام شکل، انتهای کمان مربوط به زوایای مشخص شده، صحیح است؟



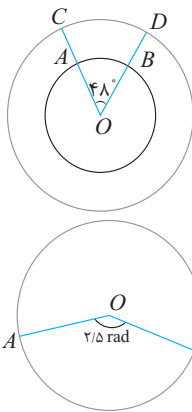
۸۶. انتهای کمانی که اندازه‌اش $\frac{35\pi}{6}$ رادیان است، بر انتهای کدام کمان منطبق است؟

- (۱) $-\frac{5\pi}{6}$ (۲) $\frac{13\pi}{6}$ (۳) $\frac{83\pi}{6}$ (۴) $-\frac{19\pi}{6}$

۸۷. هنگامی که عقربه‌ی ساعت شمار یک ساعت عقربه‌ای، به اندازه‌ی $\frac{5\pi}{24}$ رادیان دوران می‌کند، چند دقیقه زمان سپری شده است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۷۵ (۳) ۸۰ (۴) ۱۰۵

۸۸. در شکل مقابل دو دایره‌ی هم مرکز به شعاع‌های ۱۱ و ۱۷ واحد رسم شده‌اند. طول کمان CD چقدر از طول کمان AB بیش‌تر است؟



- (۱) $\frac{4\pi}{5}$ (۲) $\frac{4\pi}{15}$

- (۳) $\frac{8\pi}{5}$ (۴) $\frac{\pi}{15}$

۸۹. در شکل مقابل طول کمان کوچک‌تر AB برابر ۱۵ سانتی‌متر است. در این صورت مجموع اعداد محیط و مساحت دایره کدام است؟

- (۱) 36π (۲) 42π

- (۳) 48π (۴) 52π

۹۰. در دایره‌ای به شعاع r ، اندازه‌ی کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی $\frac{9}{4}$ رادیان، برابر $3r - 9$ است. در این صورت طول کمان مقابل به زاویه‌ی 75° در این دایره کدام است؟

- (۱) 7π (۲) 5π (۳) $2/5\pi$ (۴) $3/5\pi$

۹۱. چه تعداد از مقادیر عبارات مثلثاتی زیر، تعریف نشده هستند؟ (کمان‌هایی که واحد آن‌ها معرفی نشده است، بر حسب رادیان هستند.) (کتاب درسی)

- (الف) $\frac{\cos 90^\circ}{1 + \sin 270^\circ}$ (ب) $\tan \frac{\pi}{2}$ (ج) $\cot 2\pi$

- (د) $\frac{\cos 0^\circ}{\sin 180^\circ}$ (هـ) $\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}}$ (و) $\tan \frac{3\pi}{2} - \cot \pi$

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

(کتاب درسی)



۹۲. علامت عبارات $\cos(11/5)$ و $\cot(-3)$ به ترتیب چگونه است؟ (زوایا بر حسب واحد رادیان هستند).

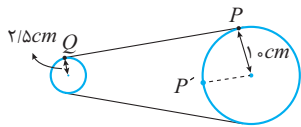
- (۱) مثبت- مثبت (۲) مثبت- منفی (۳) منفی- مثبت (۴) منفی- منفی

۹۳. چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح هستند؟ (زوایا بر حسب واحد رادیان هستند).

- (الف) $\sin 4 \cos 4 > 0$ (ب) $\tan 3 + \cot 3 < 0$ (ج) $\sin(-2) < \cos(-2)$ (د) $\tan 5 < \cot 5$
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

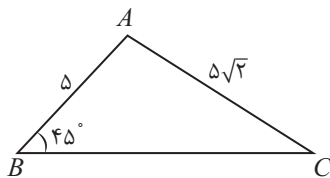
۹۴. فاصله‌ی مرکز یک چرخ و فلک به شعاع 20 متر از سطح زمین 25 متر است. اگر در نقطه‌ی شروع، کابین شماره ۱ در پایین‌ترین مکان چرخ و فلک باشد. بعد از چرخش چرخ و فلک به اندازه‌ی زاویه‌ی $\frac{10\pi}{3}$ رادیان، فاصله‌ی کابین شماره ۱ از سطح زمین چقدر است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۵ (۳) ۴۰ (۴) ۳۸



۹۵. در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های 10 cm و $2/5\text{ cm}$ را به هم وصل کرده است. وقتی قرقره‌ی بزرگ‌تر 90° می‌چرخد (یعنی نقطه‌ی P در موقعیت P' قرار می‌گیرد) قرقره‌ی کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟

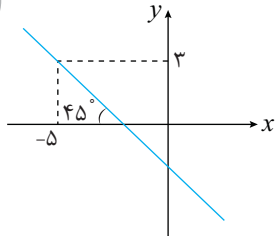
- (۱) 2π (۲) $\frac{5\pi}{2}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$



۹۶. در مثلث شکل مقابل اندازه‌ی ضلع BC چقدر است؟

- (۱) $\frac{5}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ (۲) $\frac{5}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
 (۳) $\frac{5}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ (۴) $\frac{5}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

۲۹



۹۷. عرض از مبدأ خط مقابل کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۹۸. خطی که زاویه‌ی آن با جهت مثبت محور x ها 45° است و نقطه‌ی $(2, 0)$ روی آن قرار دارد، از کدام یک از نقاط زیر عبور می‌کند؟ (کتاب درسی)

- (۱) $(3, 6)$ (۲) $(-3, 1)$ (۳) $(-4, -2)$ (۴) $(4, 2)$



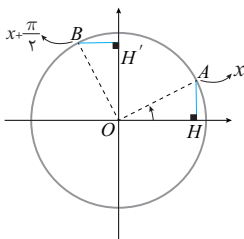
جلسه دوم: اتحادهای مثلثاتی و روابط $(\frac{k\pi}{2} \pm \alpha)$

روابط $(\frac{k\pi}{2} \pm \alpha)$

در این بخش می‌خواهیم ببینیم اگر مضربی از $\frac{\pi}{4}$ به یک کمان اضافه شود، نسبت‌های مثلثاتی آن چگونه تغییر خواهند کرد.

همین‌جا لازم است متذکر شویم منظورمان مضارب صحیح $\frac{\pi}{4}$ است (یعنی $k \in \mathbb{Z}$)، مثلاً π مضربی از $\frac{\pi}{4}$ است، چون $\pi = 4 \times \frac{\pi}{4}$.

ولی دقت کنید که $\frac{\pi}{4}$ مضرب $\frac{\pi}{4}$ نیست، چون $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4}$ و $\frac{1}{4}$ عددی صحیح نیست. حال فرض کنید به عنوان مثال می‌خواهیم ببینیم حاصل $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ با کدام یک از نسبت‌های مثلثاتی x برابر است. اگر x را زاویه‌ای فرضی در نظر بگیریم زاویه‌ی $(x + \frac{\pi}{4})$ هم در شکل مشخص شده است.



معلوم است که مثلث‌های OAH و OBH' هم‌نهشت هستند، پس $OH' = OH$. از طرفی می‌دانیم $OH = \cos x$ و $OH' = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ ، پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x$$

به همین روش می‌توان برای سایر نسبت‌های مثلثاتی همین کمان یا کمان‌های دیگری به شکل کلی $(\frac{k\pi}{2} \pm \alpha)$ روابط مثلثاتی را پیدا کرد. برای این‌که

در حل تست‌ها با سرعت این نتیجه‌ها را بگیریم، با استفاده از دو قانون همین روند را سریع‌تر انجام می‌دهیم.

قانون ۱: اگر k زوج باشد، نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود و اگر k فرد باشد، نسبت مثلثاتی عوض می‌شود. (قانون تبدیل)

تذکر

وقتی می‌گوییم نسبت مثلثاتی عوض می‌شود یعنی سینوس به کسینوس و کسینوس به سینوس، تانژانت به کتانژانت و کتانژانت به تانژانت تبدیل می‌شود.

قانون ۲: x را زاویه‌ای در ناحیه‌ی اول در نظر می‌گیریم و نسبت مثلثاتی زاویه‌ی مطلوب را تعیین می‌کنیم. (قانون علامت)

حالا ببینید از این دو قانون چگونه استفاده می‌کنیم:

مثال ۹ نسبت‌های مثلثاتی زوایای داده شده را برحسب نسبت‌های مثلثاتی x بیابید.

$$\sin(x + \pi), \quad \cos(\frac{\pi}{4} - x), \quad \tan(\pi - x), \quad \cos(\frac{3\pi}{4} + x), \quad \cot(2\pi - x)$$

پاسخ:

π مضرب زوج $\frac{\pi}{4}$ است، پس نسبت مثلثاتی عوض نشده

$$\sin(x + \pi) = -\sin x$$

اگر x در ناحیه‌ی اول باشد، $(x + \pi)$ در ناحیه‌ی سوم است و در

ناحیه‌ی سوم، سینوس منفی است.

$\frac{\pi}{4}$ مضرب فرد $\frac{\pi}{4}$ است، پس نسبت مثلثاتی عوض شده

$$\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \sin x$$

اگر x در ناحیه‌ی اول باشد، $(\frac{\pi}{4} - x)$ هم در ناحیه‌ی اول است

و در ناحیه‌ی اول، کسینوس مثبت است.



π مضرب زوج $\frac{\pi}{2}$ است، پس نسبت مثلثاتی عوض نشده

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

اگر x در ناحیه اول باشد، $(\pi - x)$ در ناحیه دوم است و در ناحیه دوم، تانژانت منفی است.

2π مضرب زوج $\frac{\pi}{2}$ است، پس نسبت مثلثاتی عوض نشده

$$\cot(2\pi - x) = -\cot x$$

اگر x در ناحیه اول باشد، $(2\pi - x)$ در ناحیه چهارم است و در ناحیه چهارم، کتانژانت منفی است.

$\frac{3\pi}{2}$ مضرب فرد $\frac{\pi}{2}$ است، پس نسبت مثلثاتی عوض شده

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$$

اگر x در ناحیه اول باشد، $(\frac{3\pi}{2} + x)$ در ناحیه چهارم است و در ناحیه چهارم، کسینوس مثبت است.

نکته ✓

این که برای علامت این نسبت‌ها فرض می‌کنیم x در ناحیه اول است، به این معنی نیست که اگر x در ناحیه اول نباشد، این روابط برقرار نیست. در واقع فرض ناحیه اول بودن x فقط برای راحتی تشخیص علامت است.

مثال ۱۰

نسبت‌های مثلثاتی زوایای زیر را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه 10° بیابید.

$\cos 100^\circ$, $\tan 260^\circ$, $\sin 190^\circ$, $\cot 350^\circ$, $\cos 80^\circ$, $\sin 170^\circ$

پاسخ: سعی می‌کنیم هریک از زوایا را به شکل $10^\circ + \frac{k\pi}{2}$ بنویسیم:

$$\cos 100^\circ = \cos(90^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ$$

تذکر

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \quad \text{می‌دانیم}$$

$$\tan 260^\circ = \tan(270^\circ - 10^\circ) = \cot 10^\circ$$

تذکر

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha \quad \text{می‌دانیم}$$

$$\sin 190^\circ = \sin(180^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ$$

تذکر

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \quad \text{می‌دانیم}$$

$$\cot 350^\circ = \cot(360^\circ - 10^\circ) = -\cot 10^\circ$$

تذکر

$$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot \alpha \quad \text{می‌دانیم}$$

$$\cos 80^\circ = \cos(90^\circ - 10^\circ) = \sin 10^\circ$$

تذکر

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \quad \text{می‌دانیم}$$

۱- نوشتن یک زاویه به شکل $10^\circ + \frac{k\pi}{2}$ به لحاظ علمی صحیح نیست، چون واحد $\frac{k\pi}{2}$ رادیان و واحد 10° درجه است. در این جا فقط برای درک راحت‌تر این کار را

انجام دادیم.



تذکر

 می‌دانیم $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

نکته ✓

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مهم مرتبط با ۳۰° و ۴۵° را می‌توان با استفاده از همین روابط به‌دست آورد. البته توصیه می‌کنیم آن‌ها را حفظ باشید. اگر یادتان رفت از این روابط برای محاسبه‌ی آن‌ها استفاده کنید. مثلاً نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{۲\pi}{۳}$ (درجه ۱۲۰)،

$\frac{۵\pi}{۶}$ (درجه ۱۵۰)، $\frac{۳\pi}{۴}$ (درجه ۱۳۵) و $\frac{۵\pi}{۴}$ (درجه ۲۲۵) را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} \sin \frac{۲\pi}{۳} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin \frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} & (\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha) \\ \cos \frac{۲\pi}{۳} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\cos \frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲} & (\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha) \\ \tan \frac{۲\pi}{۳} = \tan(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\tan \frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳} & (\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha) \\ \cot \frac{۲\pi}{۳} = \cot(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\cot \frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & (\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{۵\pi}{۶} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۶}) = \sin \frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲} \\ \cos \frac{۵\pi}{۶} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cos \frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \tan \frac{۵\pi}{۶} = \tan(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\tan \frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} \\ \cot \frac{۵\pi}{۶} = \cot(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cot \frac{\pi}{۶} = -\sqrt{۳} \end{cases}$$

تذکر

می‌توانستید برای محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\frac{۵\pi}{۶}$ از روابط $(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳})$ هم استفاده کنید.

$$\begin{cases} \sin \frac{۳\pi}{۴} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۴}) = \sin \frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \cos \frac{۳\pi}{۴} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\cos \frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \tan \frac{۳\pi}{۴} = \tan(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\tan \frac{\pi}{۴} = -۱ \\ \cot \frac{۳\pi}{۴} = \cot(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\cot \frac{\pi}{۴} = -۱ \end{cases}$$

تذکر

می‌توانستید برای محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\frac{۳\pi}{۴}$ از روابط $(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴})$ هم استفاده کنید.

$$\begin{cases} \sin \frac{۵\pi}{۴} = \sin(\pi + \frac{\pi}{۴}) = -\sin \frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \cos \frac{۵\pi}{۴} = \cos(\pi + \frac{\pi}{۴}) = -\cos \frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \tan \frac{۵\pi}{۴} = \tan(\pi + \frac{\pi}{۴}) = \tan \frac{\pi}{۴} = ۱ \\ \cot \frac{۵\pi}{۴} = \cot(\pi + \frac{\pi}{۴}) = \cot \frac{\pi}{۴} = ۱ \end{cases}$$

تذکر

می‌توانستید برای محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\frac{۵\pi}{۴}$ از روابط $(\frac{۳\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴})$ هم استفاده کنید.



تست ۲۴. اگر $\cot 10^\circ \simeq 6$ باشد، حاصل $\frac{\sin 10^\circ - \sin 19^\circ}{\cos 26^\circ - \cos 17^\circ}$ کدام است؟

۱/۸ (۴)

۱/۴ (۳)

۱/۶ (۲)

۱/۲ (۱)

پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱

$$\sin 10^\circ = \sin(90^\circ + 1^\circ) = \cos 1^\circ \quad \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha\right)$$

$$\sin 19^\circ = \sin(180^\circ + 1^\circ) = -\sin 1^\circ \quad \left(\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha\right)$$

$$\cos 26^\circ = \cos(270^\circ - 1^\circ) = -\sin 1^\circ \quad \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha\right)$$

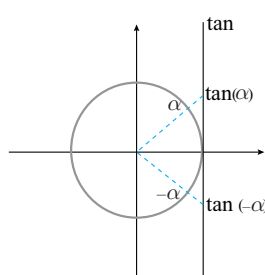
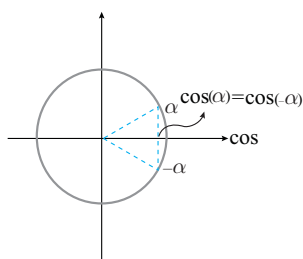
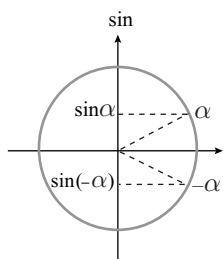
$$\cos 17^\circ = \cos(180^\circ - 1^\circ) = -\cos 1^\circ \quad \left(\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha\right)$$

$$\frac{\sin 10^\circ - \sin 19^\circ}{\cos 26^\circ - \cos 17^\circ} = \frac{\cos 1^\circ + \sin 1^\circ}{-\sin 1^\circ + \cos 1^\circ} \xrightarrow{\text{تقسیم صورت و مخرج بر } \sin 1^\circ} \frac{\cot 1^\circ + 1}{-1 + \cot 1^\circ} = \frac{6 + 1}{-1 + 6} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

روابط (ر)

با قرار دادن $k = 0$ در روابط $\frac{k\pi}{2} - \alpha$ ، روابط $-\alpha$ شکل می‌گیرند:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha, \quad \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

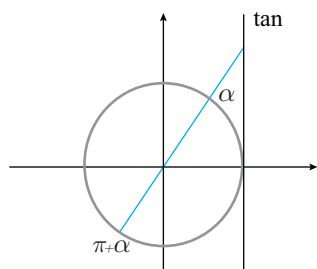


تذکر

دقت کنید از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت منفی از دایره کمان نسبت‌های مثلثاتی خارج می‌شود نیز کسینوس. یعنی کسینوس منفی فور است.

نکته

می‌دانیم زوایای α ، $2\pi + \alpha$ ، $4\pi + \alpha$ و ... همگی در یک جایگاه در دایره‌ی مثلثاتی قرار می‌گیرند. پس می‌توان نتیجه گرفت: $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$ و $\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$ ، یعنی در نسبت مثلثاتی سینوس و کسینوس از مضارب زوج π صرف‌نظر کنید. مثلاً $\sin(10\pi + \alpha) = \sin(6\pi + \alpha) = \sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$ و همچنین زوایای α ، $\pi + \alpha$ ، $2\pi + \alpha$ و ... یا در یک جایگاه و یا در روبه‌روی آن قرار می‌گیرند که تانژانت و کتانژانت برابر دارند. پس می‌توان نتیجه گرفت: $\tan(k\pi + \alpha) = \tan \alpha$ و $\cot(k\pi + \alpha) = \cot \alpha$. یعنی در نسبت مثلثاتی تانژانت و کتانژانت می‌توان از هر مضرب π (چه زوج و چه فرد) صرف‌نظر کرد. مثلاً $\tan(10\pi + \alpha) = \tan(2\pi + \alpha) = \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$.



مثال ۱۱ حاصل مقادیر زیر را بیابید.

$$\cos \frac{8\pi}{3}, \quad \sin \frac{101\pi}{4}, \quad \tan \frac{100\pi}{3}, \quad \cot\left(-\frac{19\pi}{4}\right)$$

$$\cos \frac{8\pi}{3} = \cos\left(\frac{6\pi + 2\pi}{3}\right) = \cos(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \quad (\text{از } 2\pi \text{ صرف نظر کردیم})$$

پاسخ:

$$\sin \frac{101\pi}{4} = \sin\left(\frac{100\pi + \pi}{4}\right) = \sin(25\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{از } 24\pi \text{ صرف نظر کردیم})$$

$$\tan \frac{100\pi}{3} = \tan\left(\frac{99\pi + \pi}{3}\right) = \tan(33\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \quad (\text{از } 33\pi \text{ صرف نظر کردیم})$$

$$\cot\left(-\frac{19\pi}{4}\right) = -\cot\left(\frac{19\pi}{4}\right) = -\cot\left(\frac{16\pi + 3\pi}{4}\right) = -\cot(\pi + \frac{3\pi}{4}) = -\cot \frac{3\pi}{4} = -(-1) = 1 \quad (\text{از } 4\pi \text{ صرف نظر کردیم})$$

تست ۲۵. کدام گزینه غلط است؟

$$\cot\left(\frac{87\pi}{4}\right) = -1 \quad (۴) \quad \tan\left(\frac{95\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۳) \quad \cos\left(\frac{125\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۲) \quad \sin\left(\frac{100\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱

بررسی گزینه‌ها:

$$\sin\left(\frac{100\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{99\pi + \pi}{3}\right) = \sin(33\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{125\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{124\pi + \pi}{4}\right) = \cos(31\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{95\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{90\pi + 5\pi}{6}\right) = \tan(15\pi + \frac{5\pi}{6}) = \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\left(\frac{87\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{84\pi + 3\pi}{4}\right) = \cot(21\pi + \frac{3\pi}{4}) = \cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$$

تست ۲۶. به ازای کدام مقدار k تساوی $\tan\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ برقرار نیست؟

$$۴۷ \quad (۴) \quad ۳۷ \quad (۳) \quad ۱۶ \quad (۲) \quad ۴ \quad (۱)$$

پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱

بررسی گزینه‌ها:

$$k = ۴ \rightarrow \tan\left(\frac{۴\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{۳\pi + \pi}{3}\right) = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$k = ۱۶ \rightarrow \tan\left(\frac{۱۶\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{۱۵\pi + \pi}{3}\right) = \tan(5\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$k = ۳۷ \rightarrow \tan\left(\frac{۳۷\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{۳۶\pi + \pi}{3}\right) = \tan(12\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$k = ۴۷ \rightarrow \tan\left(\frac{۴۷\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{۴۵\pi + ۲\pi}{3}\right) = \tan(15\pi + \frac{۲\pi}{3}) = \tan \frac{۲\pi}{3} = -\sqrt{3}$$





اتحادهای اولیه

اتحادهای مثلثاتی اولیه نسبت‌های مثلثاتی را به هم مرتبط می‌کنند. بنابراین مهم‌ترین ویژگی آن‌ها این است که اگر نسبت مثلثاتی یک زاویه را داشته باشیم، می‌توانیم با این اتحادها بقیه نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه را بیابیم.

$$(1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (2) \tan x \cdot \cot x = 1 \quad (3) 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (4) 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

یادآوری: روابط تانژانت و کتانژانت: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

مثال ۱۲ اگر x زاویه‌ای در ناحیه‌ی دوم باشد و $\sin x = \frac{1}{3}$ ، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی x را بیابید.

پاسخ: از رابطه‌ی $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ مقدار $\cos x$ را پیدا می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \xrightarrow{x \text{ در ناحیه دوم}} \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

حال از رابطه‌ی $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ داریم:

$$\tan x = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-\frac{1}{2\sqrt{2}}} = -2\sqrt{2}$$

مثال ۱۳ اگر $\cot x = -2$ و x زاویه‌ای در ناحیه‌ی چهارم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی x را بیابید.

پاسخ: از رابطه‌ی $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ داریم: $1 + (-2)^2 = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{x \text{ در ناحیه چهارم}} \sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

حال از رابطه‌ی $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ داریم: $\frac{1}{5} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \xrightarrow{x \text{ در ناحیه چهارم}} \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$

و از رابطه‌ی $\tan x = \frac{1}{\cot x}$ داریم: $\tan x = -\frac{1}{2}$

تست ۲۷. اگر x زاویه‌ای در ناحیه‌ی چهارم باشد و $\tan x = -4$ باشد، مقدار $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ کدام است؟

$$-\frac{1}{\sqrt{17}} \quad (4) \quad \frac{1}{\sqrt{17}} \quad (3) \quad \frac{4}{\sqrt{17}} \quad (2) \quad -\frac{4}{\sqrt{17}} \quad (1)$$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

اول دقت کنید که $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$. حال از رابطه‌ی $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ داریم:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{1}{4} \xrightarrow{1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}} 1 + \frac{1}{16} = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{16}{17}$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm \frac{4}{\sqrt{17}} \xrightarrow{x \text{ در ناحیه چهارم}} \sin x = -\frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow -\sin x = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{4}{\sqrt{17}}$$



۵ رابطه داریم که به نوعی با هم مرتبط هستند.^۱ این ۵ رابطه را ببینید. همه‌ی آن‌ها با $\sin x \cdot \cos x$ رابطه دارند. اگر $\sin x \cdot \cos x$ را p بنامیم، حفظ کردن آن‌ها ساده‌تر است.

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{p}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 + 2p$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = 1 - 2p^2$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x = 1 - 2p$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 3(\sin x \cos x)^2 = 1 - 3p^2$$

با توجه به ارتباط این رابطه‌ها، می‌توان از مقدار هر یک از آن‌ها مقدار سایر رابطه‌ها را پیدا کرد.

تست ۲۸. اگر $\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{p}$ باشد، مقدار $\tan x + \cot x$ کدام است؟

±۲√۳ (۴)

±۲ (۳)

±√۳ (۲)

±۴ (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{p} \Rightarrow 1 - 2p^2 = \frac{1}{p} \Rightarrow 2p^2 = \frac{1}{p} \Rightarrow p^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \tan x + \cot x = \frac{1}{p} = \pm 2$$

تست ۲۹. کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد مثلثاتی نیست؟ (مخرج‌ها مخالف صفر هستند.)

$$\frac{1 + \tan^2 x}{1 + \cot^2 x} = \tan^2 x \quad (۲)$$

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin x} \quad (۱)$$

$$\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = 1 - (\sin x + \cos x)^2 \quad (۴)$$

$$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2 \quad (۳)$$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

اثبات گزینه‌ها:

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin x} \Rightarrow \text{طرف چپ رابطه} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \times \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 - \sin x)}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 - \sin x)} = \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \text{طرف راست رابطه} \quad (\text{گزینه ۱})$$

$$\frac{1 + \tan^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x \quad (\text{گزینه ۲})$$

$$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x + 1 - 2 \sin x \cos x = 2 \quad (\text{گزینه ۳})$$

بنابراین گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ صحیح هستند. یعنی اتحاد مثلثاتی محسوب می‌شوند ولی گزینه‌ی ۴ اتحاد مثلثاتی نیست زیرا

$$\text{طرف چپ} = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \sin x}{\cos x} = 2 \sin x \cos x \neq \text{طرف راست} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{طرف چپ} = 1 - (\sin x + \cos x)^2 = 1 - (\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) = 1 - 1 - 2 \sin x \cos x = -2 \sin x \cos x \neq \text{طرف راست}$$



تست ۳۰. اگر $\tan x + \cot x = 4$ باشد، مقدار $\sin^2 x + \cos^2 x$ کدام است؟

(۴) $\frac{93}{128}$

(۳) $\frac{95}{128}$

(۲) $\frac{99}{128}$

(۱) $\frac{97}{128}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $\tan x + \cot x = \frac{1}{p}$ پس: $\frac{1}{p} = 4 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$ ، حال $\sin^2 x + \cos^2 x$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (1 - 2p^2)^2 - 2p^4 = (1 - 2(\frac{1}{16}))^2 - 2(\frac{1}{256}) = (\frac{14}{16})^2 - \frac{1}{128} = \frac{49}{64} - \frac{1}{128} = \frac{97}{128}$$

روابط (۲۷)

در این جا روابطی ارائه می‌کنیم که نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه را به نسبت‌های مثلثاتی نصف آن زاویه ربط می‌دهد.

(۱) $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$

(۲) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

با جایگذاری $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ یا $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ در رابطه‌ی (۲) می‌توانیم روابط زیر را هم بسازیم:

(۳) $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

(۴) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

بنابراین روابط ۲ و ۳ و ۴ را به شکل زیر خلاصه می‌کنیم:

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$

با تقسیم روابط ۱ و ۲ برهم رابطه‌ای برای تانژانت به دست می‌آید:

(۵) $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

تذکر

رابطه‌ای برای کتانژانت 2α ارائه نمی‌کنیم و اگر نیاز به محاسبه آن داشتیم، تانژانت 2α را محاسبه می‌کنیم و سپس معکوس می‌کنیم. چند نمونه از استفاده از روابط بالا را ببینید:

$\sin 20^\circ - 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ$, $\cos 70^\circ - 2\cos^2 35^\circ - 1 = 1 - 2\sin^2 35^\circ$

$\tan 15^\circ = \frac{2 \tan 7.5^\circ}{1 - \tan^2 7.5^\circ}$, $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$

$\tan 4\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha}$, $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$

مثال ۱۴ مقادیر $\sin 15^\circ$ و $\cos 22.5^\circ$ را محاسبه کنید.

پاسخ: از رابطه‌ی $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ داریم: $\cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ \Rightarrow 2\sin^2 15^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

تذکر

توجه شود که تساوی $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ همواره برقرار است، زیرا:

$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

بنابراین $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ نیز برقرار است.



حال از رابطه‌ی $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ داریم:

$$\cos 45^\circ = 2\cos^2 22/5^\circ - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2 22/5^\circ - 1 \Rightarrow 2\cos^2 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2} + 2}{4} \Rightarrow \cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}$$

تست ۳۱. مقدار $\cos 112/5^\circ$ کدام است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$ ، پس $\cos(90^\circ + 22/5^\circ) = -\sin 22/5^\circ$. از رابطه‌ی $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ داریم:

$$\cos 45^\circ = 1 - 2\sin^2 22/5^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2 22/5^\circ \Rightarrow 2\sin^2 22/5^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 22/5^\circ = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow \cos 112/5^\circ = -\sin 22/5^\circ = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

تست ۳۲. مقدار $\frac{\cos 40^\circ + 1}{\sin 40^\circ}$ با کدام گزینه برابر است؟

(۱) $\tan 20^\circ$ (۲) $\tan 70^\circ$ (۳) $\tan 40^\circ$ (۴) $\tan 50^\circ$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $\cos 40^\circ = 2\cos^2 20^\circ - 1$ و $\sin 40^\circ = 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ$ ، پس:

$$\frac{\cos 40^\circ + 1}{\sin 40^\circ} = \frac{2\cos^2 20^\circ - 1 + 1}{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{2\cos^2 20^\circ}{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \cot 20^\circ$$

می‌دانیم $\cot 20^\circ = \cot(90^\circ - 70^\circ) = \tan 70^\circ$ ، پس: $\cot 20^\circ = \tan 70^\circ$

نکته ✓

قبلاً دیدیم که $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$ ، از این روابط می‌توان نتیجه گرفت:

$$\cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2 \alpha \quad , \quad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$$

این روابط جدید نیستند ولی در مباحث دیگر نیز کارایی دارند. بهتر است آن‌ها را حفظ کنید. در تست بالا از این رابطه استفاده کردیم.

تست ۳۳. اگر $\tan 2\alpha = 4 \tan \alpha$ باشد، $\tan \alpha$ کدام نمی‌تواند باشد؟

(۱) صفر (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ ، پس:

$$\tan 2\alpha = 4 \tan \alpha \Rightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = 4 \tan \alpha \Rightarrow 2 \tan \alpha = 4 \tan \alpha - 4 \tan^3 \alpha \Rightarrow 4 \tan^3 \alpha - 2 \tan \alpha = 0$$

$$\Rightarrow 2 \tan \alpha (2 \tan^2 \alpha - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 \tan \alpha = 0 \Rightarrow \tan \alpha = 0 \\ 2 \tan^2 \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



روابط تکمیلی (۲۴)

دو رابطه‌ی زیر، سینوس و کسینوس یک زاویه را به تانژانت نصف آن زاویه ربط می‌دهند:

$$(۱) \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$(۲) \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

تذکر

دقت کنید که با تقسیم این دو رابطه برهم رابطه‌ی $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ ساخته می‌شود.

تست ۳۴. اگر $\tan \alpha = 5$ باشد، مقدار $\sin 4\alpha$ کدام است؟

$$\frac{-125}{169} \quad (۴)$$

$$\frac{-120}{169} \quad (۳)$$

$$\frac{-115}{169} \quad (۲)$$

$$\frac{-110}{169} \quad (۱)$$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

از روابط قبل می‌دانیم $\sin 4\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 + \tan^2 2\alpha}$ ، پس نیاز به دانستن مقدار $\tan 2\alpha$ داریم. برای این هم از رابطه‌ی $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

$$\tan 2\alpha = \frac{2(5)}{1-25} = \frac{10}{-24} = -\frac{5}{12} \Rightarrow \sin 4\alpha = \frac{2(-\frac{5}{12})}{1+(-\frac{5}{12})^2} = \frac{-\frac{5}{6}}{\frac{169}{144}} = -\frac{120}{169}$$

استفاده می‌کنیم:

$$(۳) \cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

رابطه‌ی تکمیلی دیگر برای (2α) رابطه‌ی مقابل است:

تست ۳۵. اگر $\alpha = 11/25^\circ$ باشد، مقدار $\cot \alpha - \tan \alpha - 2 \tan 2\alpha$ کدام است؟

$$16(۴)$$

$$8(۳)$$

$$4(۲)$$

$$2(۱)$$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{2 \cot 2\alpha} - 2 \tan 2\alpha = 2(\cot 2\alpha - \tan 2\alpha) = 2 \times 2 \cot 4\alpha = 4 \cot 4\alpha = 4 \cot 45^\circ = 4(1) = 4$$



پرسش‌های سطح ساده

۹۹. حاصل عبارت $\frac{\tan^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{4}}{\cot^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{3}} + \cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ$ کدام است؟

(۱) $\frac{11}{9}$

(۲) $\frac{11}{10}$

(۳) $\frac{19}{10}$

(۴) $\frac{19}{9}$

۱۰۰. اگر $\cos \theta = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ و $\cot \theta > 0$ باشد، مقدار $\tan \theta$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(۲) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

(۴) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

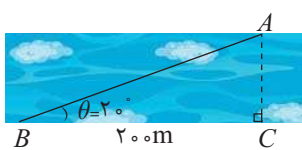
۱۰۱. شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای مانند C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازه‌ی 200 متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطه‌ی B برسد. اگر زاویه‌ی دید این شخص (از نقطه‌ی B به نقطه‌ی A) 20° باشد و $\sin 20^\circ \approx 0.34$ باشد، عرض رودخانه تقریباً چقدر است؟ (کتاب درسی)

(۱) $70/46$

(۲) $72/46$

(۳) $74/46$

(۴) $76/46$



(کتاب درسی)

۱۰۲. حاصل عبارت $A = \frac{\cos(-90^\circ) + \sin(-270^\circ)}{\sin(-180^\circ) - \cos(-360^\circ)}$ چند برابر حاصل عبارت $B = \cot(-\frac{\pi}{6}) + \tan(-\frac{\pi}{3})$ است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۰۳. اگر $\sin x - \frac{1}{\sin x} = a^3$ و $\cos x - \frac{1}{\cos x} = b^3$ در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $b = a \tan x$

(۲) $a = b \tan x$

(۳) $\tan x = ab$

(۴) $\tan x = \frac{1}{ab}$

۱۰۴. اگر به ازای هر x ، تساوی $1 + \tan^2 x = \frac{a}{1 + \sin x} + \frac{b}{1 - \sin x}$ برقرار باشد، مقدار ab کدام است؟ (با فرض $\sin x \neq \pm 1$)

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{6}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{12}$

۱۰۵. در دایره‌ی مثلثاتی شکل مقابل، مختصات نقطه‌ی A به صورت $A(-\frac{4}{5}, y)$ است. در این صورت

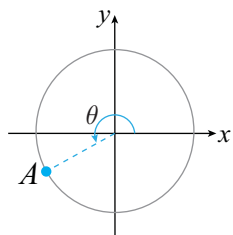
(۱) $-\frac{4}{15}$

(۲) $-\frac{13}{15}$

(۳) $\frac{67}{15}$

(۴) $\frac{76}{15}$

مقدار عبارت $2 \cot \theta - 3 \cos \theta$ کدام است؟



(کتاب درسی)

۱۰۶. چه تعداد از تساوی‌های زیر، یک اتحاد است؟ (مخرج‌ها مخالف صفر هستند)

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

(الف) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$ (ب) $\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha$ (ج) $1 - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} = \sin \alpha$ (د) $\frac{1}{\cos \alpha} - \tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$

۱۰۷. اگر $\sin x + \tan x > 0$ و $\frac{1}{\cos x} - \sin x \tan x < 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه واقع است؟

(۱) اول

(۲) دوم

(۳) سوم

(۴) چهارم



۱۰۸. ساده شده عبارت $(\cot x - \frac{1}{\sin x})(\cot x + \frac{1}{\sin x}) + \frac{\cot^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x}$ کدام است؟

- (۱) $\tan^2 x$ (۲) $1 + \tan^2 x$ (۳) $\cot^2 x$ (۴) $1 + \cot^2 x$

۱۰۹. اگر $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$ باشد، آن گاه بیشترین مقدار عبارت $A = \cos x (\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x})$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -4 (۳) 2 (۴) 4

۱۱۰. اگر $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ و α در ناحیه چهارم دایره‌ی مثلثاتی قرار داشته باشد، حاصل عبارت $A = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - \frac{4 - \tan^2 \alpha}{1 - 4 \cot^2 \alpha}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) $\frac{63}{100}$ (۲) $\frac{100}{63}$ (۳) $-\frac{460}{63}$ (۴) $-\frac{63}{460}$

۱۱۱. در صورت برقراری تساوی $\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \tan x - \frac{1}{\cos x}$ ، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول یا دوم (۲) دوم یا سوم (۳) سوم یا چهارم (۴) اول یا چهارم

۱۱۲. حاصل عبارت $\sqrt{1+2\sin x \cos x} + \sqrt{1-2\sin x \cos x}$ به ازای $x = 20^\circ$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $2 \sin 20^\circ$ (۲) $2 \cos 20^\circ$ (۳) $\sin 40^\circ$ (۴) $\cos 40^\circ$

۱۱۳. اگر $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{2}{5}$ باشد، حاصل $\sin^8 x + \cos^8 x$ کدام است؟

- (۱) $0/2$ (۲) $0/4$ (۳) $0/1$ (۴) $0/3$

۱۱۴. اگر $\tan x + \cot x = 2$ باشد، حاصل عبارت $A = \sin^8 x + \cos^6 x + \tan^4 x + \cot^2 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{33}{16}$ (۲) $\frac{17}{8}$ (۳) $\frac{35}{16}$ (۴) $\frac{18}{8}$

۱۱۵. اگر $\alpha + \beta = 90^\circ$ و $\gamma + \theta = 180^\circ$ در این صورت چه تعداد از گزاره‌های زیر قطعاً صحیح است؟

(الف) $\tan \gamma + \tan \theta = 0$ (ب) $\sin(\alpha + \gamma) = \cos(\beta + \theta)$

(ج) $\tan(\gamma - \alpha) = \cot(\theta - \beta)$ (د) $\sin \gamma = \sin \theta$

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۱۱۶. مقدار $\tan 66^\circ$ با مقدار $\cot \alpha$ برابر است. α کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) 15° (۲) 12° (۳) 24° (۴) 21°

۱۱۷. حاصل عبارت $A = \cos^3 \frac{\pi}{13} + \cos^3 \frac{2\pi}{13} + \cos^3 \frac{3\pi}{13} + \dots + \cos^3 \frac{12\pi}{13}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) $12 \cos^3 \frac{6\pi}{13}$ (۴) $6 \cos^3 \frac{6\pi}{13}$

۱۱۸. اگر A, B و C زوایای یک مثلث باشند، حاصل $\tan(B+C)$ با کدام گزینه برابر است؟

- (۱) $\tan A$ (۲) $-\tan A$ (۳) $\cot A$ (۴) $-\cot A$

۱۱۹. در مثلث ABC ، رابطه‌ی $\tan(B+2^\circ) \tan(C+4^\circ) = 1$ برقرار است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $\hat{A} = 90^\circ$ (۲) $\hat{A} = 11^\circ$ (۳) $\hat{A} = 12^\circ$ (۴) $\hat{A} = 15^\circ$



۱۲۰. اگر $\tan 20^\circ = 0/36$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\cos 70^\circ + 2 \sin 110^\circ}{\cos 160^\circ - 2 \sin 200^\circ}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{41}{7}$ (۲) $\frac{15}{8}$ (۳) $\frac{17}{8}$ (۴) $-\frac{59}{7}$

۱۲۱. اگر $\sin 24^\circ = a$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin 66^\circ + \tan 24^\circ \sin 24^\circ}{\cos 156^\circ}$ بر حسب a کدام است؟

(۱) $\frac{1}{a^2 - 1}$ (۲) $\frac{1}{1 - a^2}$ (۳) $\frac{a}{1 - a}$ (۴) $\frac{a}{a - 1}$

۱۲۲. یک چرخ و فلک که شعاع دایره‌ی آن ۲۵ متر است، مفروض است. فاصله‌ی مرکز دایره‌ی این چرخ و فلک تا زمین ۳۵ متر است. با فرض این که شخصی از پایین‌ترین نقطه‌ی چرخ و فلک شروع به حرکت کند، وقتی چرخ و فلک به اندازه‌ی θ رادیان بچرخد، ارتفاع شخص از سطح زمین چقدر خواهد بود؟

(۱) $h(\theta) = 35 + 25 \sin \theta$ (۲) $h(\theta) = 35 - 25 \sin \theta$

(۳) $h(\theta) = 35 + 25 \cos \theta$ (۴) $h(\theta) = 35 - 25 \cos \theta$

۱۲۳. $\tan(\frac{10\pi}{3})$ را در کدام عبارت زیر ضرب کنیم تا حاصل ضرب برابر یک شود؟

(۱) $\cot 30^\circ$ (۲) $\cot 210^\circ$ (۳) $\cot 240^\circ$ (۴) $\cot 300^\circ$

(کتاب درسی)

۱۲۴. حاصل عبارت $A = \frac{\tan 225^\circ - \cos(-\frac{4\pi}{3})}{\sin(-\frac{7\pi}{6}) + \cot(\frac{5\pi}{4})}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) -۳

(کتاب درسی)

۱۲۵. حاصل عبارت $\tan 72^\circ + \sin 63^\circ + \tan(-54^\circ) + \cos(-72^\circ) + \cot(-60^\circ) - \tan(-60^\circ)$ کدام است؟

(۱) $-2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۲) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴) $2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$

۱۲۶. تساوی $\tan(2x - \frac{\pi}{15}) = \cot(\frac{3\pi}{15} + 3x)$ به ازای کدام مقدار x می‌تواند برقرار باشد؟

(۱) $\frac{11\pi}{15}$ (۲) $\frac{11\pi}{50}$ (۳) $\frac{11\pi}{150}$ (۴) $\frac{11\pi}{30}$

۱۲۷. حاصل عبارت $A = 2 \sin(\frac{3\pi}{4} - \alpha) - 3 \sin(\frac{7\pi}{4} + \alpha) - 4 \sin(\frac{5\pi}{4} - \alpha) + 5 \sin(\frac{9\pi}{4} + \alpha)$ به ازای $\alpha = \frac{22\pi}{3}$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

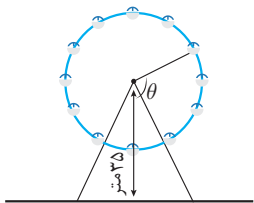
(کتاب درسی)

۱۲۸. مقدار $\sin 15^\circ$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ (۲) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

۱۲۹. حاصل عبارت $A = \frac{\sin 15^\circ \cos 15^\circ (2 \cos^2 15^\circ - 1)}{\sin^6 15^\circ + \cos^6 15^\circ}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (۳) $\frac{2\sqrt{3}}{13}$ (۴) $\frac{2\sqrt{3}}{15}$



۱۳۰. حاصل عبارت $A = \frac{\cos \frac{\pi}{8} (\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8})}{(\sin 15^\circ) (\sin^2 (7/5)^\circ - \cos^2 (7/5)^\circ)}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۱۳۱. اگر $\frac{\cos x}{2 \sin x + 5 \cos x} = 3$ آن گاه مقدار $\cot 2x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{21}{29}$ (۲) $-\frac{29}{21}$ (۳) $\frac{21}{20}$ (۴) $\frac{20}{21}$

۱۳۲. اگر $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 9$ و انتهای کمان مربوط به زاویه x در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی باشد، آن گاه مقدار $\tan \frac{x}{2}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۱۳۳. اگر $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$ باشد، $\sin 2x$ کدام است؟

- (۱) $\pm \frac{1}{4}$ (۲) $\pm \frac{1}{2}$ (۳) ± 1 (۴) $\pm \frac{3}{4}$

پرسش‌های سطح متوسط

۱۳۴. اگر $\cos(\frac{5\pi}{2} - x) = 2 \sin(\frac{11\pi}{2} + x)$ ، آن گاه حاصل عبارت $B = 3 \cot(x - 7\pi) + \tan(\frac{41\pi}{2} + x)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲

۱۳۵. اگر $75^\circ < \alpha < 27/5^\circ$ و $\sin(126^\circ - 2\alpha) = \frac{2m-1}{m}$ ، آن گاه حدود تغییرات m کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3} < m \leq 1$ (۲) $1 \leq m < \frac{3}{2}$ (۳) $-1 \leq m < -\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{3}{2} < m \leq -1$

۱۳۶. اگر $\alpha - \beta = \frac{3\pi}{2}$ آن گاه $A = \sin(\beta - 2\alpha) + \cos(4\alpha - 3\beta)$ کدام است؟

- (۱) $2 \cos \alpha$ (۲) $2 \sin \alpha$ (۳) $\cos \alpha - \sin \alpha$ (۴) $\cos \alpha + \sin \alpha$

۱۳۷. حاصل عبارت $A = \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$ چند برابر حاصل عبارت $B = \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$ است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۳۸. مقدار عبارت $A = \frac{1}{1 + \cot 1^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 2^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 3^\circ} + \dots + \frac{1}{1 + \cot 89^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{89}{2}$ (۲) $\frac{91}{2}$ (۳) ۴۴ (۴) ۴۵

۱۳۹. مقدار عبارت $A = \frac{1 - \sin 8^\circ - \sin^2 35^\circ - \sin^2 55^\circ}{\tan 35^\circ \tan 55^\circ - 1 - 2 \cos 1^\circ}$ چند برابر حاصل عبارت $B = \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{7\pi}{4}$ است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$





۱۴۰. کدام یک از گزینه‌های زیر برای قرار گرفتن به جای x و y در تساوی $\sin x = \cos(x + 2^\circ)$ و $\tan(y + \frac{\pi}{18}) = \cot(\frac{2\pi}{9} + y)$ می‌توانند مناسب باشند؟

(کتاب درسی)

$$\begin{cases} x = \frac{43\pi}{36} \\ y = \frac{13\pi}{36} \end{cases} \quad (۴) \quad \begin{cases} x = \frac{43\pi}{36} \\ y = \frac{10\pi}{9} \end{cases} \quad (۳) \quad \begin{cases} x = \frac{4\pi}{9} \\ y = \frac{13\pi}{36} \end{cases} \quad (۲) \quad \begin{cases} x = \frac{4\pi}{9} \\ y = \frac{10\pi}{9} \end{cases} \quad (۱)$$

(کتاب درسی)

۱۴۱. چه تعداد از تساوی‌های زیر یک اتحاد هستند؟ (تمام مخارجها مخالف صفر هستند.)

الف) $(1 - \sin \theta)(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta) = \cos \theta$ (۱)
 ب) $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$ (۲)
 ج) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$ (۳)
 د) $\frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ (۴)
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۴۲. حاصل عبارت $A = \frac{\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ}{\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 90^\circ}$ کدام است؟

۱ (۱) ۱/۲۵ (۲) ۰/۸ (۳) تعریف نشده (۴)

(کتاب درسی)

۱۴۳. اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{2 \sin \alpha - 3 \cot \alpha}{4 \cos \alpha}$ کدام است؟

۱ (۱) ۱۳/۸ (۲) -۱۳/۸ (۳) -۷/۸ (۴)

۱۴۴. حاصل عبارت $A = \sin^2 \theta (3 + 2 \cot^2 \theta) + \frac{8 - \sin^3 \theta}{2 - \sin \theta} + 1 - 2 \sin \theta$ برابر کدام گزینه است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۴۵. اگر $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ و انتهای کمان روبرو به زاویه α در ناحیه‌ی چهارم دایره‌ی مثلثاتی باشد، مقدار عبارت $3 \sin(270^\circ - \alpha) - \sqrt{2} \cot(630^\circ + \alpha)$ کدام است؟

۱ (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۵ (۴)

۱۴۶. حاصل عبارت $A = \frac{\sin^2 385^\circ + \sin^2 785^\circ}{\tan 751^\circ \times \cot 1049^\circ}$ چند واحد کم‌تر از حاصل عبارت $B = \frac{\sin \frac{5\pi}{16} \tan \frac{\pi}{8}}{\cot \frac{3\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{16}}$ است؟

۱ (۱) ۱/۲ (۲) ۲ (۳) صفر (۴)

۱۴۷. اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{13}{10}$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

۱ (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

۱۴۸. اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ کدام است؟

۱ (۱) ۱۳/۲۷ (۲) ۱۷/۲۷ (۳) ۱۷/۸۱ (۴)

۱۴۹. اگر $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + kx + k - 2 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$ کدام است؟

۱ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴)

۱۵۰. حاصل عبارت $A = \frac{\cos^2 13^\circ - \sin^2 5^\circ}{\sin 14^\circ \cos 4^\circ}$ با کدام گزینه برابر است؟

(۱) $-2 \cot 8^\circ$ (۲) $2 \cot 8^\circ$ (۳) $\frac{1}{2} \cot 8^\circ$ (۴) $-\frac{1}{2} \cot 8^\circ$

۱۵۱. اگر $a = \frac{\sqrt{1 + \sin 5^\circ}}{3 \sin 25^\circ - 2 \sin 65^\circ}$ باشد، آن گاه حاصل $\cot 25^\circ$ بر حسب a کدام است؟

(۱) $\frac{1+2a}{3a-1}$ (۲) $\frac{3a-1}{1+2a}$ (۳) $\frac{1+3a}{2a-1}$ (۴) $\frac{2a-1}{1+3a}$

۱۵۲. حاصل عبارت $A = \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24} \cos \frac{7\pi}{24} \cos \frac{11\pi}{24}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{32}$

۱۵۳. حاصل عبارت $A = \frac{\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{\pi}{8}}{\sin^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{5\pi}{8}}$ کدام است؟

(۱) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ (۲) $-\frac{5\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{-3\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

۱۵۴. مقدار عبارت $A = \cos^5 2x \sin 2x - \sin^5 2x \cos 2x$ به ازای $x = \frac{\pi}{48}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$

۱۵۵. حاصل عبارت $A = 4 \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) \sin(2\pi - 2\alpha)$ کدام است؟

(۱) $-\sin 4\alpha$ (۲) $\sin 4\alpha$ (۳) $\sin^2 2\alpha$ (۴) $-\sin^2 2\alpha$

۱۵۶. حاصل عبارت $A = \frac{\sin 44^\circ \cos 22^\circ}{(1 + \cos 44^\circ)(1 - \cos 22^\circ)}$ کدام است؟

(۱) $2 \cot 11^\circ$ (۲) $2 \tan 11^\circ$ (۳) $\cot 11^\circ$ (۴) $\tan 11^\circ$

۱۵۷. حاصل عبارت $\frac{1 + \sin 40^\circ - \cos 40^\circ}{1 + \sin 40^\circ + \cos 40^\circ}$ کدام است؟

(۱) $\tan 10^\circ$ (۲) $\tan 20^\circ$ (۳) $\cot 10^\circ$ (۴) $\cot 20^\circ$

۱۵۸. حاصل عبارت $A = \frac{\cos 2x}{\tan x + \cot x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{32}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{8}$ (۲) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8}$ (۴) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}$

۱۵۹. اگر $\sin x - \cos x = -\frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\cos 4x$ کدام است؟

(۱) $\frac{37}{81}$ (۲) $\frac{47}{81}$ (۳) $-\frac{47}{81}$ (۴) $-\frac{37}{81}$

۱۶۰. اگر رابطه‌ی $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\tan^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cot^2 x} = 14$ برقرار باشد، حاصل $\cos 2x$ کدام است؟

(۱) $\pm \frac{1}{2}$ (۲) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\pm \frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\pm \frac{1}{4}$



۱۶۱. اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ باشد و $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ باشد، مقدار عبارت $\tan 2\alpha + \cot 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{625}{168}$ (۲) $-\frac{625}{168}$ (۳) $\frac{527}{168}$ (۴) $-\frac{527}{168}$

۱۶۲. اگر $\tan \frac{x}{y} - \cot \frac{x}{y} = -4$ باشد، حاصل $\tan 4x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{24}{7}$ (۲) $\frac{24}{7}$ (۳) $-\frac{16}{9}$ (۴) $\frac{16}{9}$

۱۶۳. اگر $\frac{(1 - \tan^2 \alpha) \tan \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} = \frac{3}{16}$ باشد، حاصل $\cos 8\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{7}{16}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۴) $-\frac{7}{16}$

۱۶۴. اگر $\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{12}$ باشد، بیشترین مقدار عبارت $A = \frac{1 - \tan^2(45^\circ - 2\alpha)}{1 + \tan^2(45^\circ - 2\alpha)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۶۵. حاصل عبارت $A = \frac{1 - \cot^2 \frac{5\pi}{12}}{1 + \cot^2 \frac{5\pi}{12}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پرسش‌های سطح دشوار

۱۶۶. در مثلثی بین زوایای A ، B و C رابطه‌ی $\sin^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 2$ برقرار است. اندازه‌ی زاویه‌ی A کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۶۷. اگر $\sin^2 x + 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 3$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) -1 (۴) 1

۱۶۸. اگر $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل عبارت $\tan^4 \alpha + \cot^4 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1844}{81}$ (۲) $\frac{1854}{81}$ (۳) $\frac{1954}{81}$ (۴) $\frac{1944}{81}$

۱۶۹. اگر $f(\sin x) = \cos 4x$ باشد، در این صورت $f(\frac{1}{2})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۷۰. حاصل عبارت $A = \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ$ با کدام گزینه برابر است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{16}$ (۴) $\frac{1}{32}$

۱۷۱. حاصل عبارت $\sin 18^\circ \sin 54^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{8}$



۱۷۲. اگر $\tan \frac{x}{y} = 2 - \sqrt{3}$ باشد، آنگاه حاصل $\cos 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۱۷۳. حاصل عبارت $A = \tan 2^\circ + 2 \tan 4^\circ + 4 \cot 8^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\tan 7^\circ$ (۲) $\tan 8^\circ$ (۳) $\tan 5^\circ$ (۴) $\tan 4^\circ$

۱۷۴. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، ($\hat{B} = 90^\circ$)، مقدار $\tan \frac{A}{y}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{a}{b+c}$ (۲) $\frac{b}{a+c}$ (۳) $\frac{a}{b-c}$ (۴) $\frac{b}{a-c}$

پرسش‌های ترکیب سطوح

۱۷۵. حاصل عبارت $A = \tan \frac{\pi}{9} + \tan \frac{2\pi}{9} + \tan \frac{3\pi}{9} + \dots + \tan \frac{17\pi}{9}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) ۲

۱۷۶. کدام گزینه درباره‌ی عبارت $A = \frac{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 3^\circ + \dots + \sin 90^\circ}{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 90^\circ}$ صحیح است؟

- (۱) $A = 0$ (۲) $A = 1$ (۳) $A > 1$ (۴) $A < 1$

۱۷۷. حاصل عبارت $A = \sin^2 \frac{\pi}{20} + \sin^2 \frac{2\pi}{20} + \sin^2 \frac{3\pi}{20} + \dots + \sin^2 \frac{10\pi}{20}$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴/۵ (۳) ۴ (۴) ۵/۵

(کتاب درسی)

۱۷۸. حاصل عبارت $A = \frac{\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin(-\frac{3\pi}{4}) + \frac{1}{2} \tan(-\frac{4\pi}{3})}$ چند واحد کم‌تر از حاصل عبارت $B = \sin^2 \frac{25\pi}{3} - \cos^2 \frac{23\pi}{4}$ است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۷۹. اگر α کمانی در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $A = \sqrt{\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}} \left(\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۲

۱۸۰. اگر θ کمانی در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی بوده و $\frac{\sin \theta + 3 \cos \theta}{\sin \theta - 2 \cos \theta} = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\cos \theta$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{5\sqrt{5}}$ (۲) $\frac{2}{5\sqrt{5}}$ (۳) $-\frac{4}{5\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{4}{5\sqrt{5}}$

۱۸۱. اگر α کمانی در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی بوده و رابطه‌ی $3 = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$ برقرار باشد، مقدار عبارت

$$\tan\left(\frac{125\pi}{3} - \alpha\right) - \cot(-9\pi - \alpha)$$

- (۱) $-\frac{8}{3}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۸۲. مجموع کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار عبارت $A = \frac{1 - 4 \cos^2 x}{-3 + 2 \cos^2 x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{3}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) ۴



۱۸۳. حاصل عبارت $A = \sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۳ (۴) ۱

۱۸۴. اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ و $\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} = \frac{4}{5}$ آن گاه حاصل $\cos 4x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{67}{625}$ (۲) $-\frac{57}{625}$ (۳) $-\frac{47}{625}$ (۴) $-\frac{37}{625}$

۱۸۵. حاصل عبارت $A = \frac{\sin 2x + \sin 4x}{1 + \cos 2x + \cos 4x} - \cot 2x$ کدام است؟

- (۱) $-2 \cot 4x$ (۲) $2 \cot 4x$ (۳) $-\cot 4x$ (۴) $\cot 4x$

۱۸۶. اگر حاصل عبارت $A = \frac{4 \cos 2x}{\tan x + \cot x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{16}$ را a و حاصل عبارت $B = \sin^2(\frac{\pi}{4} + x) - \sin^2(\frac{\pi}{4} - x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{8}$ را b بنامیم، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۸۷. حاصل عبارت $A = \sin^2(38^\circ + \alpha) + \cot(22^\circ + \beta) \cot(\beta - 68^\circ) + \sin^2(52^\circ - \alpha)$ چند واحد کم تر از حاصل عبارت

$$B = \frac{\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{3\pi}{5}}$$

است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۱۸۸. اگر $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ باشد، حاصل عبارت $A = 3 \tan^2 \frac{\alpha}{4} + 25 \cos 4\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{483}{25}$ (۲) $\frac{473}{25}$ (۳) $\frac{493}{25}$ (۴) $\frac{463}{25}$



جلسه سوم: معادلات مثلثاتی

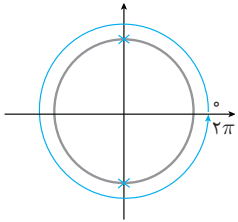
هر معادله‌ای که شامل نسبت‌های مثلثاتی باشد، معادله‌ی مثلثاتی نام دارد. تست‌ها و سؤالات معادله‌ی مثلثاتی دارای دو تیپ اصلی هستند: ۱- شمارش تعداد جواب‌های معادله ۲- جواب کلی یک معادله‌ی مثلثاتی. در اینجا هر تیپ را جداگانه بررسی می‌کنیم.

شمارش تعداد جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی ساده

معادلات مثلثاتی ساده به شکل $\cos x = b$, $\sin x = b$ ($-1 \leq b \leq 1$), $\tan x = c$ و $\cot x = c$ هستند. معلوم است که این دست معادلات، دارای بی‌شمار جواب هستند. مثلاً معادله‌ی ساده $\sin x = 0$ را در نظر بگیرید. جواب‌های این معادله به شکل $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ هستند که به‌طور کلی می‌توان آن‌ها را $k\pi$ (همه مضارب π) نامید. معلوم است که این معادله دارای بی‌شمار جواب است چون بی‌شمار عدد مضرب π داریم. بنابراین در تیپ سؤالات شمارش تعداد جواب‌ها، بازه‌ای را مشخص می‌کنند تا تعداد جواب‌ها در آن بازه شمارش شود.

حال فرض کنید می‌خواهیم تعداد جواب‌های معادله‌ی $\cos x = 0$ را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ پیدا کنیم. روش حل این دست معادلات به این شکل است که با رسم دایره‌ی مثلثاتی، مکان‌هایی را که مقدار کسینوس در آن‌ها برابر صفر می‌شود را مشخص می‌کنیم. پس از آن با توجه به بازه‌ی داده شده از زاویه‌ی صفر شروع می‌کنیم و در جهت مثلثاتی (پادساعتگرد) می‌چرخیم تا به انتهای بازه یعنی 2π برسیم.

معلوم است که در طی چرخیدن یک دور (از صفر تا 2π)، دو بار از روی جواب‌های معادله (که با علامت \times مشخص کرده‌ایم) عبور می‌کنیم، پس این معادله در این بازه دارای دو جواب است. این جواب‌ها $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ هستند.



مثال ۱۵ تعداد جواب‌های هریک از معادلات زیر را در بازه‌ی داده شده بیابید.

$$\sin x = 0, \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$\sin x = 1, \quad x \in [0, \pi]$$

$$\cos x = -\frac{1}{3}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\sin x = \frac{1}{5}, \quad x \in [0, 4\pi]$$

$$\tan x = 8, \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$\cot x = 4, \quad x \in [\pi, 2\pi]$$

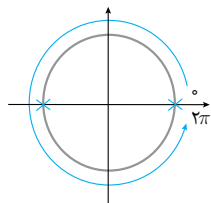
پاسخ:

معادله

دایره‌ی مثلثاتی

تعداد جواب‌ها

$$\sin x = 0$$

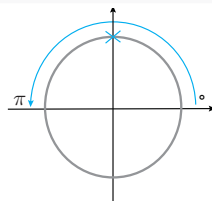


۳

تذکر

دقت کنید که از صفر شروع می‌کنیم (توجه شود که یکی از جواب‌ها $x = 0$ است) و با حرکت به سمت 2π از π عبور می‌کنیم و دوباره به 2π می‌رسیم که در همان پایگاه صفر قرار دارد. بنابراین 2π و π و 0 جواب‌های معادله هستند. هواستان باشد که صفر و 2π در دایره در یک‌جا قرار می‌گیرند ولی دو زاویه متفاوت هستند.

$$\sin x = 1$$



۱

۱ و ۲- معادلات مثلثاتی دارای تانژانت و کتانژانت به شکل مستقیم در کتاب درسی مطرح نشده‌اند.





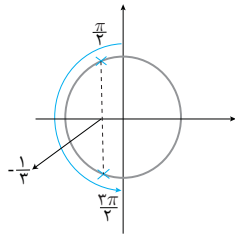
تذکر

تذکر

تذکر

تذکر

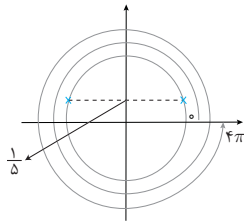
$$\cos x = -\frac{1}{3}$$



۲

مهم نیست که چه زاویه‌ای است که کسینوس آن $-\frac{1}{3}$ می‌شود. مهم تعداد جواب‌هاست. عدد $-\frac{1}{3}$ را روی محور کسینوس پیدا می‌کنیم و عمودی بر آن رسم می‌کنیم تا دایره‌ی مثلثاتی را در دو نقطه قطع کند.

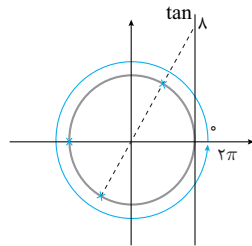
$$\sin x = \frac{1}{5}$$



۴

دقت کنید که از صفر تا 4π باید دو دور، دور دایره‌ی مثلثاتی بزنیم. بنابراین ۴ بار از روی جواب‌ها عبور می‌کنیم.

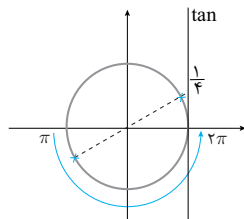
$$\tan x = 8$$



۲

لازم است در این معادله محور تانژانت را هم رسم کنیم. عدد ۸ را روی محور تانژانت پیدا می‌کنیم و به مرکز دایره‌ی مثلثاتی وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در دو نقطه قطع کند. این نقاط تقاطع، جواب‌های معادله هستند.

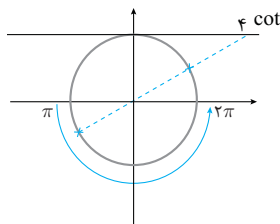
$$\cot x = 4 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{4}$$



۱

اگر محور کتانژانت (که در کتاب درسی نیست ولی ما آن را یاد داده‌ایم) را رسم کنید می‌توانید بدون تغییر معادله مستقیماً آن را حل کنید.

$$\cot x = 4$$



۱