مهروماه

به نام پروردگار مهربان

کنکور جدید

به همراه سؤالات کنکور ۹۷

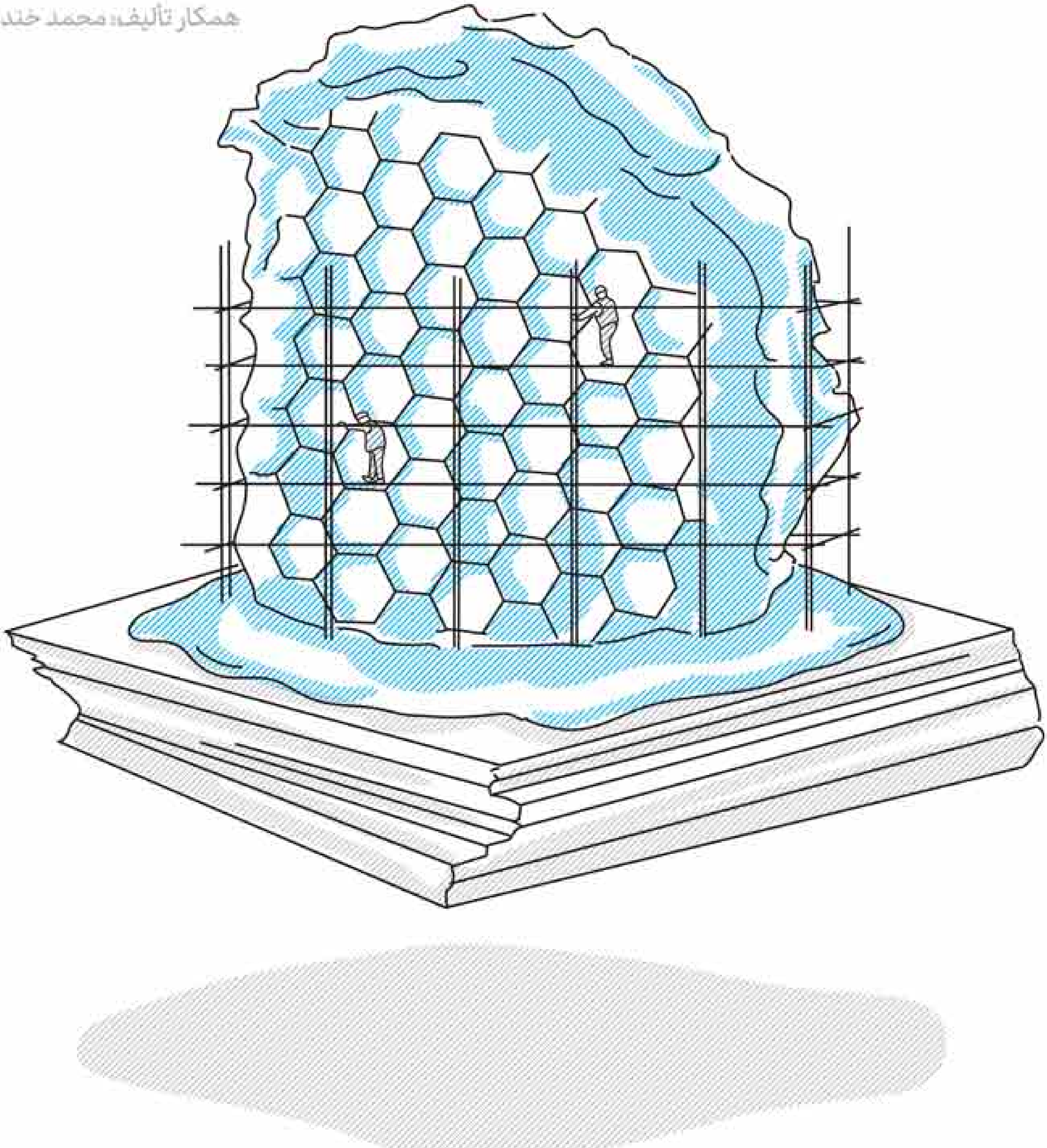
هندسه جامع

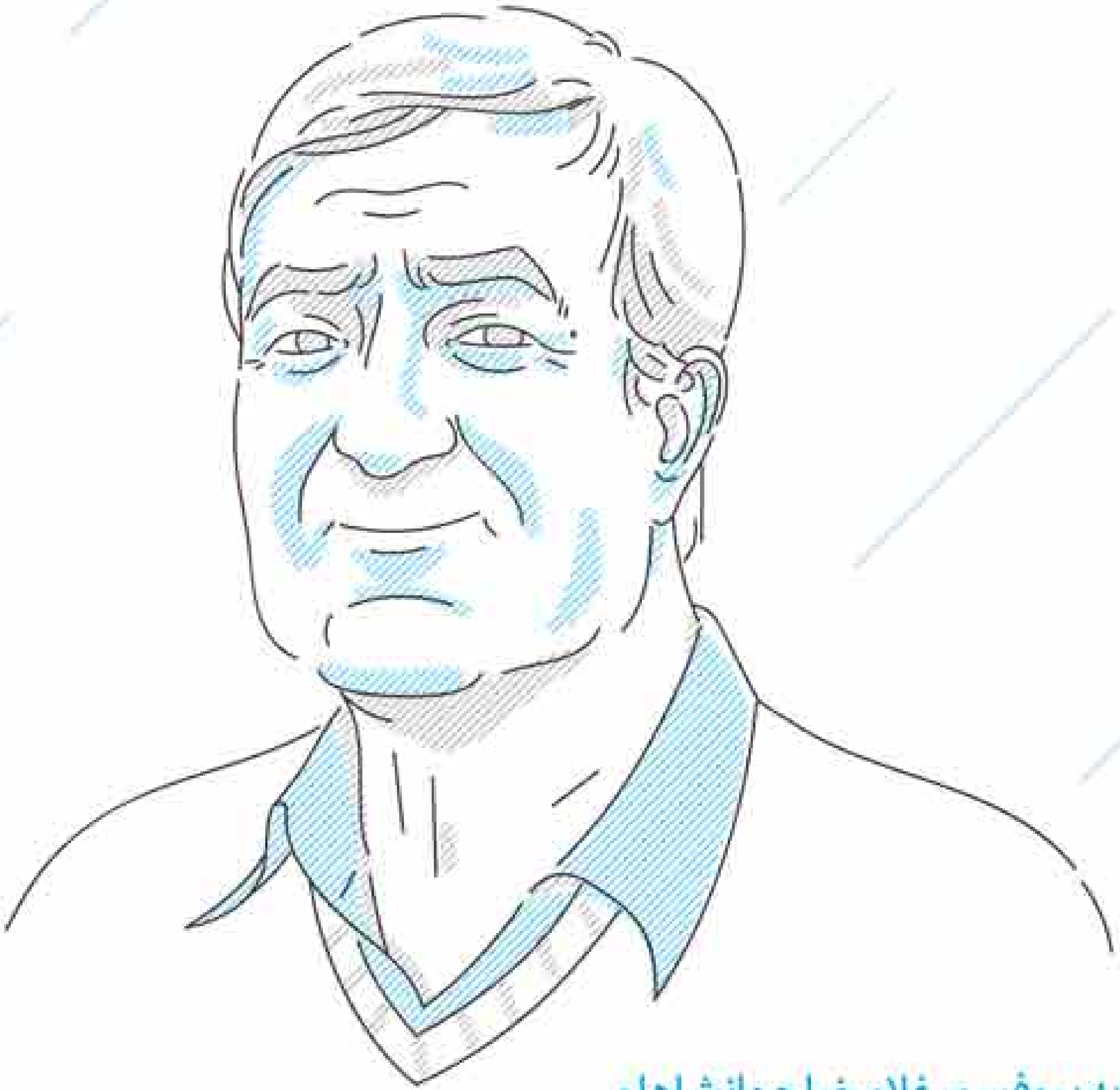
پایهٔ دهم، یازدهم و دوازدهم

• جواد ترکمن • روح‌الله مصطفی‌زاده

مدیر و ناظر گروه ریاضی: عباس اشرقی

همکار تألیف: محمد خندان





تقدیم به پروفسور غلامرضا جهانشاهلو

پروفسور غلامرضا جهانشاهلو در روز ۲۷ اسفند سال ۱۳۲۲ در روستای سمقاور از توابع کمیجان در استان اراک چشم به دنیا گشود. وی مدرک ششم ابتدایی خود را در سال ۱۳۳۴ گرفت و چون هیچ دبیرستانی تا فاصلهٔ صد کیلومتری سمقاور وجود نداشت به ناچار ترک تحصیل کرد و به مدت سه سال به همراه پدرش به کار کشاورزی پرداخت. در سال ۱۳۴۳ به عنوان فارغ‌التحصیل ممتاز از دبیرستانی در شهر اراک دیپلم ریاضی خود را اخذ نمود. سپس برای تحصیل در مقطع کارشناسی رشتهٔ ریاضی فیزیک به دانشگاه فردوسی مشهد رفت و پس از اخذ مدرک کارشناسی در مؤسسهٔ ریاضیات که توسط «پروفسور مصاحب» تأسیس شده بود، پذیرفته شد. مؤسسهٔ ریاضیات اولین مرکز دانشگاهی در ایران است که به منظور تربیت مدرسین دانشگاه تأسیس شده بود استاد جهانشاهلو دورهٔ ۲۷ ماههٔ بسیار سنگین مؤسسهٔ ریاضیات را در تابستان ۱۳۴۸ به پایان رسانده و به عنوان فارغ‌التحصیل ممتاز در دانشسرای عالی (دانشگاه خوارزمی کنونی) استخدام شد و به شغل مقدس معلمی در دانشگاه مشغول شد. ایشان در سال ۱۳۵۱ برای ادامهٔ تحصیل عازم انگلستان شد، ابتدا مدرک کارشناسی ارشد دیگری در رشتهٔ تحقیق در عملیات از دانشگاه ساوت‌همپتون دریافت نمود، سپس برای دورهٔ دکتری در زمینهٔ الگوریتم‌های مدل‌های تحقیق در عملیات به دانشگاه برونل رفت و در اردیبهشت سال ۱۳۵۵ از رسالهٔ خود دفاع کرد و به ایران بازگشت. وی در سال ۱۳۷۶ به مرتبهٔ استاد تمامی ارتقاء یافت و تا آخر عمر مفیدش به تدریس در مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری و تألیف مقاله و کتاب پرداخت؛ ماحصل زندگی وی چاپ بیست و دو جلد کتاب و چاپ بیش از ۲۶۰ مقاله در مجلات معتبر بین‌المللی و نیز راهنمایی بیش از ۱۱۰ دانشجوی دکتری و بیش از ۳۰۰ دانشجوی کارشناسی ارشد و بیش از هزار دبیر ریاضی است. او با مقام «پدر علم تحلیل پوششی داده‌های ایران» همچون پدری دلسوز در تمام عرصه‌های زندگی و کار دانشجویان خویش را همراهی می‌کرد و تأثیر ایشان تا ابد در پیشرفت علم تحقیق در عملیات باقی خواهد ماند و روشنگر راه کسانی است که او را سرمشق و الگوی خود در زندگی و کار خود قرار می‌دهند. ایشان در روز ۱۶ فروردین سال ۱۳۹۶ دار فانی را وداع گفتند.

مقدمه

خداوند منّان را شاکریم که بار دیگر توان و توفیق نوشتن کتابی در مورد هندسه را به ما عنایت فرمود.

پس از تألیف کتاب هندسهٔ یازدهم، بر آن شدیم تا کتابی تحت عنوان هندسهٔ جامع (هندسه ۱، ۲ و ۳) تألیف نماییم، که دربرگیرندهٔ کلیهٔ نیازهای داوطلبان کنکور رشتهٔ ریاضی باشد. تغییرات بنیادین و بسیار بجا در کتاب‌های هندسه نظام جدید آموزشی و اهمیت این درس، در بین تمام محافل آموزشی و داوطلبان کنکور مشهود است. همچنین تعداد تست‌های موجود در کنکور سراسری که از کتاب‌های هندسه ۱، ۲ و ۳ مطرح می‌شود، جای خالی کتابی جامع در این زمینه را به خوبی نشان می‌دهد.

اما در مورد ویژگی‌های کتاب حاضر مطالبی در ادامه مطرح می‌شود:

۱ در قسمت درسنامه، سعی کرده‌ایم تا حد ممکن مطالب مربوط به هر درس به صورت جامع و موجز ارائه گردد و از آوردن اثبات‌ها خودداری شده است. مگر در معدود مواردی که ارائهٔ اثبات در فهم بهتر مطلب کمک نماید، به اثبات پرداخته‌ایم.

۲ تست‌های مطرح شده در درسنامه‌ها، دربرگیرندهٔ تمام مثال‌ها و تمرین‌های کتاب‌های درسی می‌باشند، پس از آن‌ها، تست‌هایی شبیه‌سازی شده ارائه گردیده است تا مهارت داوطلبان در زمینهٔ پاسخ‌گویی به این‌گونه تست‌ها بیشتر شود.

۳ پرسش‌های چهار گزینه‌ای ارائه شده در انتهای هر فصل، شامل تست‌های مهم و هماهنگ با کتاب‌های درسی جدید در مقاطع دهم، یازدهم و دوازدهم رشتهٔ ریاضی هستند. این تست‌ها دربرگیرندهٔ کلیهٔ پرسش‌های کنکورهای سراسری، آزمون‌های مختلف و تست‌های تألیفی می‌باشند.

۴ پاسخ تشریحی ارائه شده برای پرسش‌های چهار گزینه‌ای، تا حد ممکن به صورت توضیحی و در بسیاری موارد، برحسب نیاز، به صورت تصویرهای مرحله‌ای می‌باشند.

۵ در انتهای پرسش‌های چهار گزینه‌ای هر فصل، تست‌هایی برای چالش بیشتر، تحت عنوان «برای ۱۰۰ درصد» ارائه شده است.

۶ آزمون‌های مطرح شده در انتهای هر فصل، جهت سنجش داوطلب، دربرگیرندهٔ تمام مطالب مربوط به درس یا فصل مربوطه است.

سپاس از

- در پدید آمدن این اثر افراد بسیاری سهیم هستند. بر خود لازم می‌دانیم سپاس بی‌انتهای خود را تقدیم افرادی کنیم که به‌طور مستقیم و غیرمستقیم ما را در به ثمر رساندن این مجموعه یاری نموده‌اند:
- جناب **آقای احمد اختیاری**، مدیریت محترم انتشارات مهروماه که همواره پشتیبانی خود را از ما دریغ نکرده‌اند و در تمام مشکلات با روحیه‌ای وصف‌ناپذیر همراه ما بوده‌اند.
- جناب **آقای محمدحسین انوشه** مدیر شورای تألیف که زحمات زیادی را متقبل می‌شوند.

◂ جناب **آقای مهندس عباس اشرفی**، مدیر محترم گروه ریاضی که در تمام مراحل یار و یاور ما بوده‌اند و افتخار دوستی و همکاری با ایشان برایمان بسیار مغتنم است.

◂ دوست گرامی **جناب آقای مهندس محمد خندان**، که در تألیف این کتاب همراه ما بودند و به ویژه در آماده‌سازی فصل چهارم و نیز تعدادی از تست‌ها زحمات زیادی را متقبل شدند.

◂ **سرکار خانم سنور حریری**، مسئول محترم ویراستاری، **خانم‌ها جمیله صادقی، الهام جعفری، فاطمه زارع** و **آقایان حامد شفیعی، احسان لعل** و **علی شهبازی** که زحمت ویراستاری و نمونه‌خوانی متن‌ها را به عهده داشتند.

◂ **سرکار خانم سمیه جباری**، مدیر توانمند واحد تولید، به همراه گروه بسیار حرفه‌ای و مسلط در امر تایپ، رسم شکل‌ها و صفحه‌آرایی تمام همت خود را به کار بسته‌اند. به ویژه **خانم‌ها الهام پیلوایه** و **رؤیا طبسی** (در قسمت صفحه‌آرایی با دستان توانمندشان)، **خانم‌ها مینا محمدلو، فرحناز قاسمی** و **جناب آقای صمد ذوالفقاری** (تایپیست‌های مسلط و شکیبا) **سرکار خانم هستی فرهادپور** و **جناب آقای مرتضی ضیایی** (رسام‌های هنرمند) و **سرکار خانم زهرا فریدونی** (هماهنگ کنندهٔ امر تولید با پشتکار ستودنی).

◂ **جناب آقای محسن فرهادی** مدیر محترم واحد هنری و همکاران خوبشان که دستی توانمند در تهیهٔ تصاویر داخل کتاب و طراحی جلد دارند و همواره ما را رهین منّت خویش نموده‌اند.

◂ **جناب آقای امیر انوشه** مسئول محترم واحد سایت و همکاران محترمشان به جهت سعی وافر در شناساندن کتاب در فضای مجازی

◂ **خانم‌ها فرزانه قنبری** مدیر روابط عمومی و **ساره کفاش‌زاده** به‌خاطر هماهنگی‌های لازمه و زحمات فراوانشان

و اما

هرچه هست از قامت ناساز بی‌اندام ماست

◂ در انتها از تمام کسانی که این کتاب را مورد مطالعه قرار می‌دهند صمیمانه درخواست می‌کنیم که کاستی‌های این کتاب را، چه در صورت و چه در محتوا، به ما گوشزد نمایند و نظرات سازندهٔ خود را آشکار سازند تا بتوانیم در چاپ(های) بعدی آن‌ها را برطرف نماییم. اهل دانش نیک می‌دانند که راه پویش علمی، نیازمند اصلاح و تغییر همیشگی است.

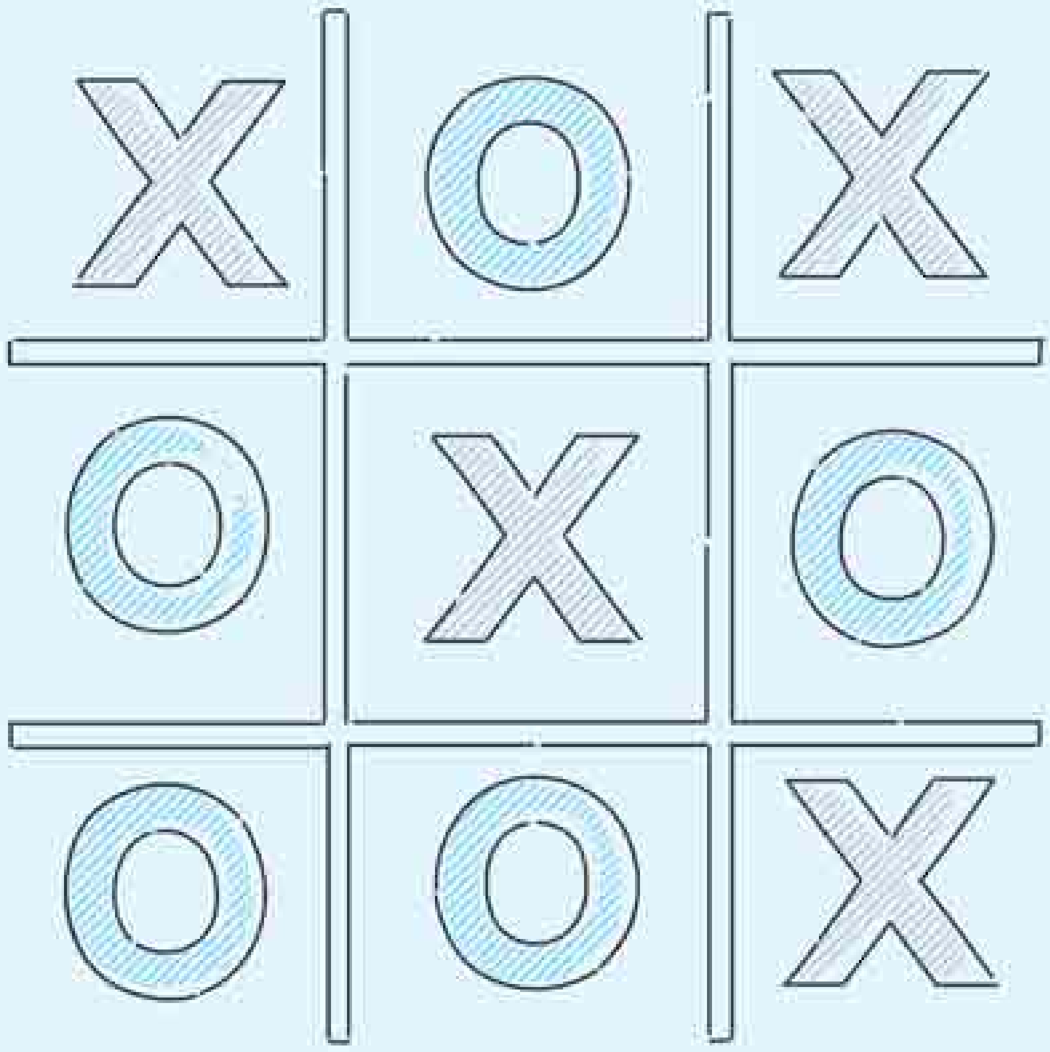
در آخر کتاب را در سهم خود به جوانان عزیز این مرز و بوم تقدیم می‌کنیم و تمام تلاشمان بر آن بوده است که نیازهای علمی این عزیزان برطرف گردد و هر آینه اگر این سعی‌مان هوده باشد، خوشا...

زمانه قرعهٔ نو می‌زند به نام شما   خوشا شما که جهان می‌رود به کام شما

تابستان ۹۷

فهرست

فصل ۱



ماتریس و کاربردها

ماتریس و دترمینان به‌عنوان یکی از مهم‌ترین ابزارهای محاسباتی در ریاضیات مطرح است. در این فصل با ماتریس و دترمینان به‌همراه ویژگی‌های مقدماتی آن‌ها آشـنا می‌شوید. این فصل همواره مورد توجه طراحان کنکور رشتهٔ ریاضی می‌باشد.

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

ماتریس

ماتریس یک جدول مستطیل شکل از اعداد حقیقی است، (ماتریس را آرایهٔ مستطیل شکل نیز می‌نامند) که اگر دارای m سطر و n ستون باشد، آن را ماتریس از مرتبهٔ $m\times n$ (m در n) می‌گوییم.

به عنوان مثال داریم:

$$B=\begin{bmatrix}۵ & \sqrt{۲}\\ -۱ & ۱\end{bmatrix} \Rightarrow$$ یک ماتریس ۲×۲ می‌باشد. (زیرا دو سطر و دو ستون دارد)

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۵ & -۱\\ ۴ & ۰ & \frac{۱}{۵}\end{bmatrix} \Rightarrow$$ یک ماتریس ۲×۳ می‌باشد. (زیرا دو سطر و سه ستون دارد)

$$D=\begin{bmatrix}۱/۲ & ۵\\ -۱ & ۴\\ ۷ & ۱۰۰\end{bmatrix} \Rightarrow$$ یک ماتریس ۳×۲ می‌باشد. (زیرا سه سطر و دو ستون دارد)

$$C=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -\frac{۴}{۳}\end{bmatrix} \Rightarrow$$ یک ماتریس ۱×۳ می‌باشد. (زیرا یک سطر و سه ستون دارد)

$$E=\begin{bmatrix}۱\\ ۰\\ ۲\end{bmatrix} \Rightarrow$$ یک ماتریس ۳×۱ می‌باشد. (زیرا سه سطر و یک ستون دارد)

تذکر: معمولاً مرتبهٔ ماتریس را در کنار آن می‌نویسند.

درایه

هر عضو ماتریس را یک درایه می‌نامند. هر درایه در یک سطر و در یک ستون مشخص قرار گرفته است، که این دو عدد (عدد سطر و عدد ستون)، در کنار هم آدرس درایه را مشخص می‌سازند. درایهٔ واقع در سطر i ام و ستون j ام ماتریس A را به‌صورت a_{ij} نشان می‌دهیم.

درایهٔ واقع در سطر i و ستون j: $a_{\underset{\text{سطر}}{i}\;\underset{\text{ستون}}{j}}$

به عنوان مثال در ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۵\\ \sqrt{۳} & ۷ & ۰\end{bmatrix}$، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول برابر با $\sqrt{۳}$ است، بنابراین $a_{۲۱}=\sqrt{۳}$.

نتیجه: معمولاً اگر بخواهیم یک ماتریس را به صورت یک آرایه مستطیل شکل در حالت کلی نشان دهیم، از آدرس درایه‌ها کمک می‌گیریم.

به عنوان مثال داریم:

درایه‌واقع در سطر۱ و ستون۳

$$C=[c_{۱۱}\quad c_{۱۲}\quad c_{۱۳}]_{۱\times۳}$$

$$B=\begin{bmatrix}b_{۱۱} & b_{۱۲}\\ b_{۲۱} & b_{۲۲}\end{bmatrix}_{۲\times۲}$$

درایه‌واقع در سطر۲ و ستون۱

درایه‌واقع در سطر۱ و ستون۲

$$A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

نمایش فشردهٔ ماتریس

ماتریس A را به‌طور کلی می‌توان به صورت فشردهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش داد، که در آن a_{ij} نمایندهٔ تمام درایه‌های ماتریس A است و مرتبهٔ ماتریس $m\times n$ می‌باشد. بنابراین $۱\le i\le m$ و $۱\le j\le n$ است. به عبارت دیگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون می‌باشد.

به عنوان مثال، ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲}\end{bmatrix}_{۳\times۲}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، ماتریس A دارای سه سطر و دو ستون می‌باشد.

تذکر: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر می‌باشد، ماتریس صفر نامیده می‌شود و با نماد $\overline{O}$ نشان داده می‌شود. گاهی اوقات ماتریس صفر مرتبهٔ $m\times n$ به‌صورت $\overline{O}_{m\times n}$ نمایش داده می‌شود. پس: $\overline{O}_{m\times n}=[۰]_{m\times n}$

تست: اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ ، با $a_{ij}=i+j^۲$ تعریف شده باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه۳ واضح است که ماتریس A از مرتبهٔ ۲×۲ است، یعنی دو سطر و دو ستون دارد. پس $۱\le i\le۲$ و $۱\le j\le۲$ می‌باشد. پس:

	ستون اول $j=۱$ ↓	ستون دوم $j=۲$ ↓
سطر اول $i=۱$ →	$a_{۱۱}=۱+۱^۲=۲$	$a_{۱۲}=۱+۲^۲=۵$
سطر دوم $i=۲$ →	$a_{۲۱}=۲+۱^۲=۳$	$a_{۲۲}=۲+۲^۲=۶$

بنابراین ماتریس A عبارت است از: $A=\begin{bmatrix}۲&۵\\۳&۶\end{bmatrix}$

و جمع درایه‌های آن ۱۶ است.

تساوی دو ماتریس

۱) دو ماتریس باید هم‌مرتبه باشند. ۲) درایه‌ها نظیر به نظیر مساوی باشند.

بنابراین اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ دو ماتریس $m\times n$ با نمایش فشرده باشند، آن‌گاه

$$A=B\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$$
$$(\forall i,j;۱\le i\le m\wedge۱\le j\le n)$$

تست: اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۶&۵x-y\\-x^۲+x&۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x^۲-۵x&۲x+y\\-۲&۵\end{bmatrix}$ مساوی باشند. آن‌گاه $x+y$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: گزینه۱ درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر مساوی قرار می‌دهیم، داریم:

$$\begin{cases}x^۲-۵x=-۶\Rightarrow x^۲-۵x+۶=۰\Rightarrow(x-۲)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۲,۳\\-۲=-x^۲+x\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\Rightarrow(x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۲,-۱\end{cases}$$

بنابراین اشتراک جواب‌ها، $x=۲$ می‌باشد. همچنین داریم:

$$۲x+y=۵x-y\xrightarrow{\text{ساده‌سازی}}۳x=۲y\xrightarrow{x=۲}y=۳$$

پس $x+y=۵$ است.

اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}x-y&۹\\۲&z-۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳&x+y\\۲&۵\end{bmatrix}$ مساوی باشند، حاصل $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینه۴ درایه‌ها نظیر به نظیر مساوی‌اند. پس:

$$\begin{cases}۳=x-y\quad,\quad x+y=۹\\۲=۲\quad,\quad ۵=z-۱\Rightarrow z=۶\end{cases}$$

$$\begin{cases}z=۶\\x+y=۹\end{cases}\Rightarrow x+y+z=۱۵$$

ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

عدد در تک‌تک درایه‌های ماتریس ضرب می‌شود.

به عبارت دیگر اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش فشرده ماتریس دلخواه A باشد و $r\in\mathbb{R}$، آن‌گاه $rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$. یعنی عدد حقیقی r در تک‌تک درایه‌های ماتریس A ضرب می‌شود. پس rA ماتریسی هم مرتبه با ماتریس A است. به عنوان مثال داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۵&-۱&۴\\۰&۳&۲\end{bmatrix}\Rightarrow۳A=\begin{bmatrix}۳\times۵&۳\times(-۱)&۳\times۴\\۳\times۰&۳\times۳&۳\times۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۵&-۳&۱۲\\۰&۹&۶\end{bmatrix}$$

تذکر:

۱) همان‌طور که می‌توان یک عدد حقیقی را در ماتریس دلخواه A ضرب کرد، به همان ترتیب می‌توان یک عدد را از تمام درایه‌های ماتریس A فاکتور گرفت. به‌عنوان مثال داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۲&-۶\\۸&۱۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\times۱&۲\times(-۳)\\۲\times۴&۲\times۶\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}۱&-۳\\۴&۶\end{bmatrix}$$

۲ اگر یک ماتریس را در عدد (۱-) ضرب کنیم، تمام درایه‌های آن قرینه می‌شوند و ماتریس حاصل، ماتریس قرینه نامیده می‌شود.
به عبارت دیگر قرینهٔ ماتریس A، که با A- نشان داده می‌شود، ماتریسی است هم مرتبه با A که تمام درایه‌های آن نظیر به نظیر قرینهٔ درایه‌های ماتریس A می‌باشند.

بنابراین: $A=[a_{ij}]_{m\times n} \Leftrightarrow -A=[-a_{ij}]_{m\times n}$

به عنوان مثال داریم: $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۱ \\ ۰ & -۵ & ۳ \\ ۱ & ۶ & ۷ \end{bmatrix} \Rightarrow -A=\begin{bmatrix} -۲ & -۴ & +۱ \\ ۰ & +۵ & -۳ \\ -۱ & -۶ & -۷ \end{bmatrix}$

ویژگی‌های ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r, s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه ویژگی‌های زیر برقرار است:

۱ $r(sA)=s(rA)=(rs)A$ ۲ $(r\pm s)A=rA\pm sA$ ۳ $r(A\pm B)=rA\pm rB$

۴ $rA=rB \xleftrightarrow{r\neq ۰} A=B$ ۵ $rA=\overline{O} \Leftrightarrow (r=۰ \vee A=\overline{O})$

جمع (تفریق) دو ماتریس

۱ دو ماتریس باید هم مرتبه باشند. ۲ درایه‌ها نظیر به نظیر جمع (تفریق) می‌شوند.

بنابراین اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ دو ماتریس $m\times n$ با نمایش فشرده باشند، آن‌گاه:

$A\pm B=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}$
$(\forall i,j;\ ۱\le i\le m \wedge ۱\le j\le n)$

به عنوان مثال داریم:

$$\begin{cases} A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \\ B=\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۷ & ۱ \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} \overset{a_{۱۱}}{۳}+\overset{b_{۱۱}}{۵} & (\overset{a_{۱۲}}{-۵})+(\overset{b_{۱۲}}{-۳}) \\ \underset{a_{۲۱}}{۱}+(\underset{b_{۲۱}}{-۷}) & \underset{a_{۲۲}}{۲}+\underset{b_{۲۲}}{۱} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & -۸ \\ -۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۰ & -۳ \\ -۲ & ۱ & ۶ & -۲ \end{bmatrix} \\ B=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ & -۲ & ۱ \\ ۵ & -۳ & ۱ & ۷ \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A-B=\begin{bmatrix} ۱-۴ & ۷-۳ & ۰-(-۲) & (-۳)-۱ \\ -۲-۵ & ۱-(-۳) & ۶-۱ & -۲-۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳ & ۴ & ۲ & -۴ \\ -۷ & ۴ & ۵ & -۹ \end{bmatrix}$$

ویژگی جمع دو ماتریس

اگر A و B و C سه ماتریس هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه ویژگی‌های زیر در جمع ماتریس‌ها برقرار است:

۱ جابه‌جایی	$A+B=B+A$
۲ وجود عضو بی‌اثر (ماتریس صفر)	$A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$
۳ وجود عضو قرینه	$A+(-A)=(-A)+A=\overline{O}$
۴ شرکت‌پذیری	$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$
۵ حذف‌پذیری	$A+B=A+C\Rightarrow B=C$

چند ماتریس خاص

۱ ماتریس سطری

ماتریسی است که یک سطر و تعدادی ستون دارد.

شکل کلی آن عبارت است از: $A=[a_{۱۱}\ \ a_{۱۲}\ \ \dots\ \ a_{۱n}]_{۱\times n}$

به عنوان مثال، $A=[۴\ \ -۱\ \ ۲]$ یک ماتریس سطری (از مرتبهٔ ۳×۱) است.

۲ ماتریس ستونی

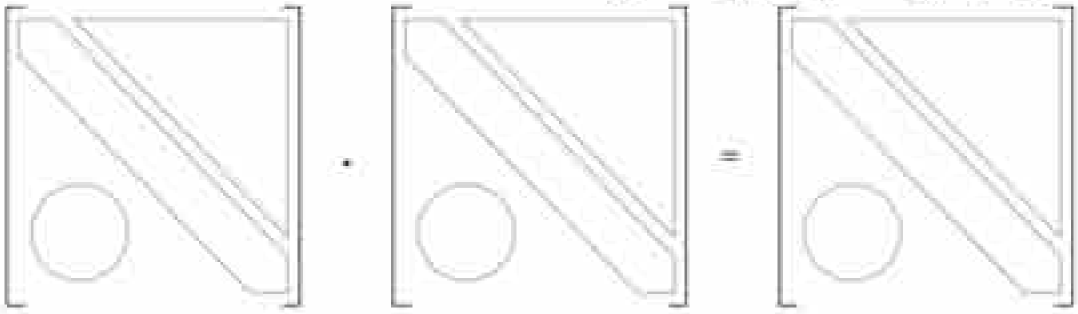
ماتریسی است که تعدادی سطر و یک ستون دارد.

شکل کلی آن عبارت است از: $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ \vdots \\ a_{m۱} \end{bmatrix}_{m\times ۱}$

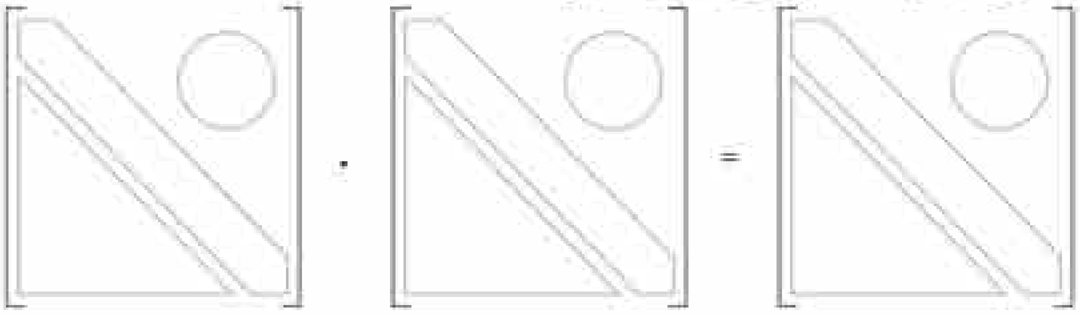
به عنوان مثال $A=\begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس ستونی (از مرتبهٔ ۱×۲) است.

ضرب ماتریس‌های مربعی خاص

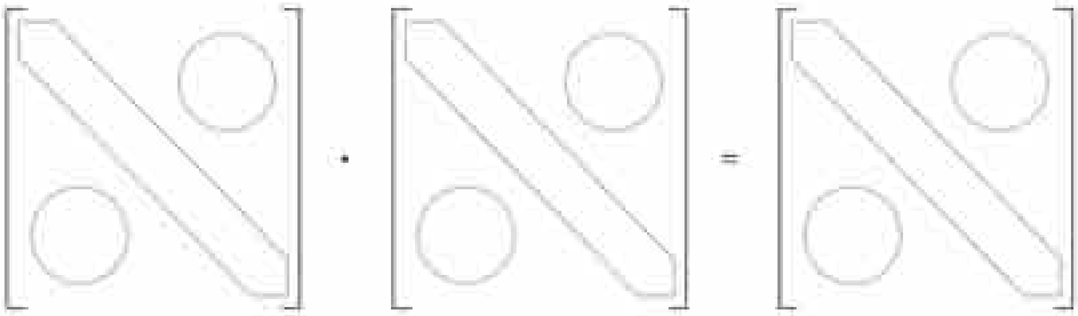
حاصل ضرب هر دو ماتریس بالامثلثی هم مرتبه، ماتریسی بالامثلثی است.



حاصل‌ضرب هر دو ماتریس پایین‌مثلثی هم‌مرتبه، ماتریسی پایین مثلثی است.

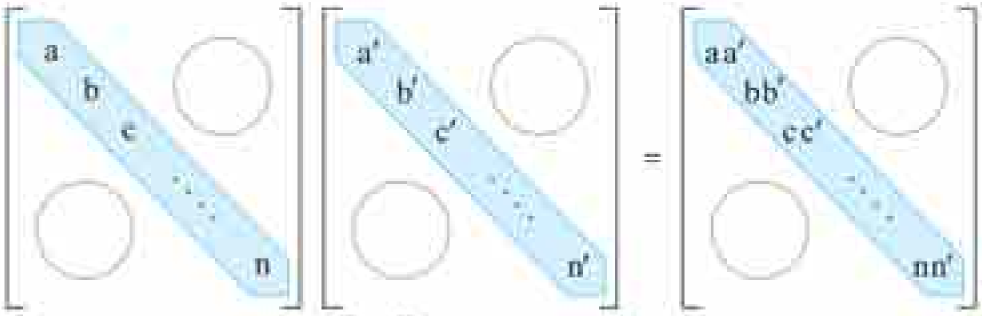


حاصل‌ضرب هر دو ماتریس قطری هم‌مرتبه، ماتریسی قطری است.



ترفندهای محاسباتی: در ضرب دو ماتریس قطری هم‌مرتبه، کافی است درایه‌های قطری دو ماتریس، نظیر به نظیر در یکدیگر ضرب شوند.

به عبارت دیگر:



به عنوان مثال:

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵\times ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲\times(-۴) & ۰ \\ ۰ & ۰ & (-۱)\times ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۸ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۴ \end{bmatrix}$$

نتیجه: ۱ هر دو ماتریس قطری هم‌مرتبه، تعویض‌پذیرند.

۲ حاصل‌ضرب هر ماتریس همانی، در خودش برابر با خودش است. یعنی: $II=I$

ضرب یک ماتریس قطری در یک ماتریس مربعی

۱ اگر یک ماتریس قطری، از چپ، در یک ماتریس مربعی هم‌مرتبه با خودش ضرب شود، هر درایهٔ روی قطر اصلی آن، در سطر متناظرش در ماتریس مربعی ضرب می‌شود.

در سطر اول ماتریس مربعی ضرب می‌شود

در سطر دوم ماتریس مربعی ضرب می‌شود

$$\begin{bmatrix} \boxed{m} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \boxed{n} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \boxed{p} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ma & mb & mc \\ na' & nb' & nc' \\ pa'' & pb'' & pc'' \end{bmatrix}$$

در سطر سوم ماتریس مربعی ضرب می‌شود

۲ اگر یک ماتریس قطری، از راست، در یک ماتریس مربعی هم‌مرتبه با خودش ضرب شود، هر درایهٔ روی قطر اصلی آن، در ستون متناظرش در ماتریس مربعی ضرب می‌شود:

در ستون اول ماتریس مربعی ضرب می‌شود

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boxed{m} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \boxed{n} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \boxed{p} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} am & bn & cp \\ a'm & b'n & c'p \\ a''m & b''n & c''p \end{bmatrix}$$

در ستون دوم ماتریس مربعی ضرب می‌شود

در ستون سوم ماتریس مربعی ضرب می‌شود

نتیجه:

۱) در ضرب یک ماتریس اسکالر در هر ماتریس مربعی هم مرتبه با خودش، عدد روی قطر اصلی ماتریس اسکالر، در تمام درایه‌های ماتریس مربعی ضرب می‌شود. به عبارت دیگر:

$$\begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & k & ۰ \\ ۰ & ۰ & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ ka' & kb' & kc' \\ ka'' & kb'' & kc'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & k & ۰ \\ ۰ & ۰ & k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ ka' & kb' & kc' \\ ka'' & kb'' & kc'' \end{bmatrix}$$

۲) هر ماتریس مربعی با هر ماتریس اسکالر هم مرتبه با خودش، تعویض‌پذیر است.

۳) ماتریس همانی، با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه با خودش تعویض‌پذیر است. به عبارت دیگر: $A\cdot I=I\cdot A=A$

۴) ماتریس همانی، عضو بی‌اثر در عمل ضرب ماتریس‌هاست. به عبارت دیگر، ماتریس همانی در مجموعهٔ ماتریس‌های مربعی، همانند عدد ۱ در عمل ضرب است.

توان‌های طبیعی یک ماتریس مربعی

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، توان‌های طبیعی A به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^۲=A.A$$
$$A^۳=A\cdot A^۲=A^۲\cdot A$$
$$A^۴=A\cdot A^۳=A^۲\cdot A^۲=A^۳\cdot A$$

و به‌طور کلی توان nام ماتریس مربعی A عبارت است از:

$$A^n=A\cdot A^{n-۱}=A^{n-۱}\cdot A \quad , \quad (n\in\mathbb{N})$$

(قرارداد: برای ماتریس مربعی A ، $A^۰=I$ تعریف می‌شود.)

تذکر: ۱) توان‌های مختلف یک ماتریس مربعی، تعویض‌پذیرند. به عبارت دیگر اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آن‌گاه:

$$\forall m,n\in\mathbb{N}\ ;\ A^m\cdot A^n=A^{(m+n)}=A^n\cdot A^m$$

(همان‌طور که ملاحظه می‌شود در ضرب ماتریس‌ها، همانند ضرب اعداد، اگر پایه‌ها یکسان باشند، می‌توان توان‌ها را با هم جمع کرد.)

۲) اگر دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، توان‌های مختلف آن‌ها نیز تعویض‌پذیرند.

به عبارت دیگر برای دو ماتریس A و B داریم: $AB=BA\xrightarrow{\forall m,n\in\mathbb{N}}A^m\cdot B^n=B^n\cdot A^m$

۳) اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آن‌گاه: $\forall m,n\in\mathbb{N}\,;\,(A^m)^n=(A^n)^m=A^{mn}$

۴) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند، آن‌گاه: $\forall n\in\mathbb{N}\,;\,(A\cdot B)^n\neq A^n\cdot B^n$

(زیرا $(AB)^n=(AB)\cdot(AB)\cdots(AB)$ و $A^n\cdot B^n=(A\cdot A\cdots A)\cdot(B\cdot B\cdots B)$ و آشکار است که این دو عبارت در حالت کلی با هم برابر نیستند.

حالت خاص: اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، آن‌گاه: $\forall n\in\mathbb{N}\,;\,(AB)^n=A^nB^n$

تست: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های غیرقطری ماتریس $A^۲-۲A$ برابر کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم $۲A=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۴ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$. داریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۵ & ۵ \\ ۵ & ۶ & ۵ \\ ۵ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$A^۲-۲A=\begin{bmatrix} ۶ & ۵ & ۵ \\ ۵ & ۶ & ۵ \\ ۵ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۴ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های غیرقطری $۶\times۳=۱۸$ است.

تست: اگر A یک ماتریس مربعی باشد و $A^۲=۳A-۵I$، آن‌گاه $A^۴$ برابر کدام است؟

۱) $۳A-۲۰I$ ۲) $۳A+۲۰I$ ۳) $-۳A+۲۰I$ ۴) $-(۳A+۲۰I)$

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم $A^۴=A^۲.A^۲$، پس:

$$A^۴=(۳A-۵I)(۳A-۵I)=۹A^۲-۱۵\underbrace{A\cdot I}_{A}-۱۵\underbrace{I\cdot A}_{A}+۲۵\underbrace{I\cdot I}_{I}=۹A^۲-۳۰A+۲۵I$$

$$=۹(۳A-۵I)-۳۰A+۲۵I=۲۷A-۴۵I-۳۰A+۲۵I=-۳A-۲۰I$$

تست: اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و $AB+BA=\bar{O}$، آن‌گاه ماتریس $A^۲B$ با کدام ماتریس برابر است؟

۱) $-BA^۲$ ۲) $BA^۲$ ۳) $AB^۲$ ۴) $B^۲A$

پاسخ: گزینه ۲ با توجه به فرض داریم:

$$AB+BA=\bar{O}\Rightarrow AB=-BA$$

حال تساوی بالا را، از چپ، در A ضرب می‌کنیم.

$$AB=-BA\xrightarrow{A}A(AB)=-A(BA)$$

$$\xrightarrow{\text{شرکت‌پذیری}}(A\cdot A)\cdot B=-(A\cdot B)\cdot A$$

$$\Rightarrow A^۲\cdot B=-(-BA)\cdot A\xrightarrow{\text{شرکت‌پذیری}}A^۲\cdot B=B\underbrace{(A\cdot A)}_{A^۲}\Rightarrow A^۲B=BA^۲$$

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}۳&-۱\\۲&۰\end{bmatrix}$ و α، β دو عدد حقیقی باشند به‌طوری‌که $A^۳=\alpha A+\beta I_۲$، آن‌گاه $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا ماتریس $A^۲$ و سپس ماتریس $A^۳$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۳&-۱\\۲&۰\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}۳&-۱\\۲&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷&-۳\\۶&-۲\end{bmatrix}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix}۷&-۳\\۶&-۲\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}۳&-۱\\۲&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۵&-۷\\۱۴&-۶\end{bmatrix}$$

از طرفی می‌دانیم $\alpha A=\begin{bmatrix}۳\alpha&-\alpha\\۲\alpha&۰\end{bmatrix}$ و $\beta I_۲=\begin{bmatrix}\beta&۰\\۰&\beta\end{bmatrix}$، بنابراین طبق فرض داریم:

$$A^۳=\alpha A+\beta I_۲\Rightarrow\begin{bmatrix}۱۵&-۷\\۱۴&-۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\alpha&-\alpha\\۲\alpha&۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta&۰\\۰&\beta\end{bmatrix}\Rightarrow ۱۵=۳\alpha+\beta\ ,\ \underbrace{-۷=-\alpha+۰}_{\alpha=۷}\Rightarrow\beta=-۶\Rightarrow\alpha+\beta=۱$$

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های $A^{۱۰}$ کدام است؟

۱) $۲^۹$ ۲) $۲^{۱۰}$ ۳) $۲^{۱۱}$ ۴) $۲^{۱۲}$

پاسخ: گزینه ۳

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۲\\۲&۲\end{bmatrix}=۲A$$

$$A^۳=\begin{bmatrix}۲&۲\\۲&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۴\\۴&۴\end{bmatrix}=۲^۲A$$

بنابراین می‌توان به‌طور استقرایی نتیجه گرفت $A^{۱۰}=۲^۹A$. پس: $A^{۱۰}=\begin{bmatrix}۲^۹&۲^۹\\۲^۹&۲^۹\end{bmatrix}$ و در نتیجه مجموعه درایه‌های آن عبارت است از:

$$۲^۹+۲^۹+۲^۹+۲^۹=۴\times۲^۹=۲^۲\times۲^۹=۲^{۱۱}$$

بررسی اتحادهای جبری در ماتریس‌ها

اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند، آن‌گاه:

$$(A+B)^۲=(A+B)\cdot(A+B)=A^۲+AB+BA+B^۲$$

از آن‌جایی که می‌دانیم ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد (یعنی $AB\neq BA$)، بنابراین سمت راست عبارت بالا تغییری نمی‌کند. بنابراین

نتیجه: ۱ اتحادهای جبری در حالت کلی، در مجموعهٔ ماتریس‌ها برقرار نیستند.

حال فرض کنید $AB=BA$، یعنی A و B دو ماتریس تعویض‌پذیرند، بنابراین:

$$(A+B)^۲=(A+B)\cdot(A+B)=A^۲+\underbrace{AB+BA}_{۲AB}+B^۲=A^۲+۲AB+B^۲$$

پس:

۲ در مجموعهٔ ماتریس‌های تعویض‌پذیر، تمام اتحادهای جبری برقرارند.

بنابراین اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، آن‌گاه:

$$(A+B)(A-B)=A^۲-B^۲\qquad(A-B)^۲=A^۲-۲AB+B^۲\qquad(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$$

$$(A-B)^۳=A^۳-۳A^۲B+۳AB^۲-B^۳\qquad(A+B)^۳=A^۳+۳A^۲B+۳AB^۲+B^۳$$

$$A^۳-B^۳=(A-B)(A^۲+AB+B^۲)\qquad A^۳+B^۳=(A+B)(A^۲-AB+B^۲)$$

(۳) با توجه به این‌که ماتریس همانی با هر ماتریس مربعی هم مرتبه با خودش تعویض‌پذیر است، پس ماتریس همانی با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه با خودش تمام اتحادهای جبری را تشکیل می‌دهد.

به عنوان مثال اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آن‌گاه:

$$(A+I)^2=(A+I)\cdot(A+I)=A^2+\underbrace{A\cdot I}_{A}+\underbrace{I\cdot A}_{A}+\underbrace{I\cdot I}_{I}=A^2+2A+I$$

و یا می‌توان گفت:

$$A^3-I=(A-I)\cdot(A^2+A+I)$$

و به‌طورکلی تمام اتحادهای جبری برای A و I (با فرض هم‌مرتبه بودن) برقرار است.

تست: برای دو ماتریس مربعی و هم مرتبهٔ A و B، اگر $AB=2BA$، آن‌گاه حاصل $(A+B)\cdot(A-B)$ کدام است؟

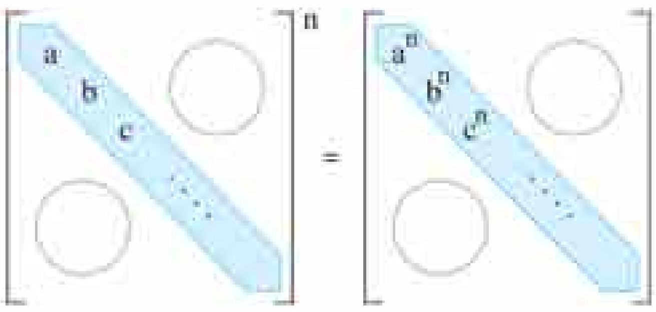
۱) A^2-B^2 ۲) A^2+2A ۳) A^2-B^2-AB ۴) A^2-B^2-BA

پاسخ: گزینه ۴

$$(A+B)\cdot(A-B)=A^2-\underbrace{AB}_{2BA}+BA-B^2=A^2-2BA+BA-B^2=A^2-B^2-BA$$

توان‌های یک ماتریس قطری

برای محاسبهٔ توان‌های مختلف یک ماتریس قطری، کافی است اعداد روی قطر اصلی را به توان برسانیم به عبارت دیگر داریم:



نتیجه: توان‌های مختلف ماتریس همانی، برابر با ماتریس همانی است. به عبارت دیگر:

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ I^n=I$$

(توان در ماتریس همانی، تأثیری ندارد و بازهم ماتریس همانی همانند عدد ۱ رفتار می‌کند.)

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^{100}-A^{99}$ برابر کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}2^{99}&0\\0&1\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}2^{99}&0\\0&0\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به این‌که ماتریس A یک ماتریس قطری است، پس:

$$A^{100}-A^{99}=\begin{bmatrix}2^{100}&0\\0&1^{100}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2^{99}&0\\0&1^{99}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{100}-2^{99}&0\\0&1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{99}&0\\0&0\end{bmatrix}$$

توان‌های یک ماتریس شبه قطری

ماتریس‌های شبه قطری، در هنگام محاسبه توان‌های زوج و فرد رفتارهای متفاوتی دارند.

به عنوان مثال ماتریس شبه‌قطری $A=\begin{bmatrix}0&0&a\\0&b&0\\c&0&0\end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

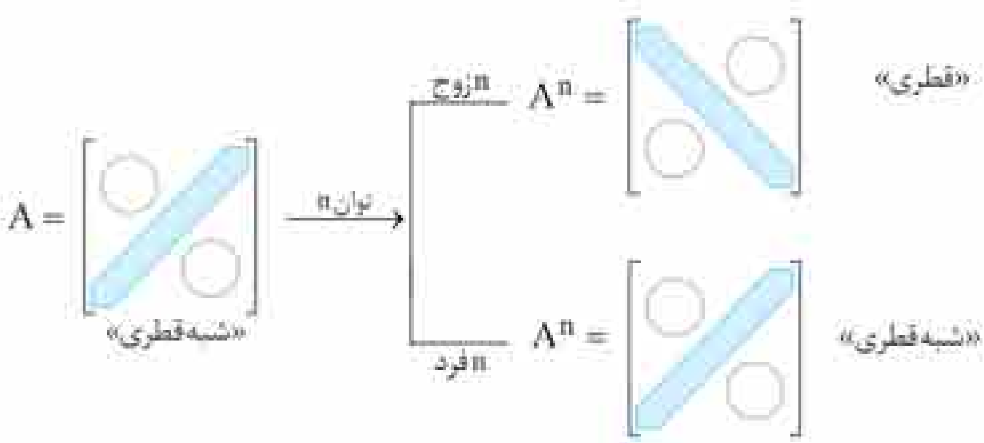
$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&a\\0&b&0\\c&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&a\\0&b&0\\c&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ac&0&0\\0&b^2&0\\0&0&ac\end{bmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، توان دوم ماتریس شبه‌قطری A، یک ماتریس قطری است. اکنون به محاسبهٔ توان سوم آن می‌پردازیم:

$$A^3=\begin{bmatrix}ac&0&0\\0&b^2&0\\0&0&ac\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&a\\0&b&0\\c&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&a^2c\\0&b^3&0\\ac^2&0&0\end{bmatrix}$$

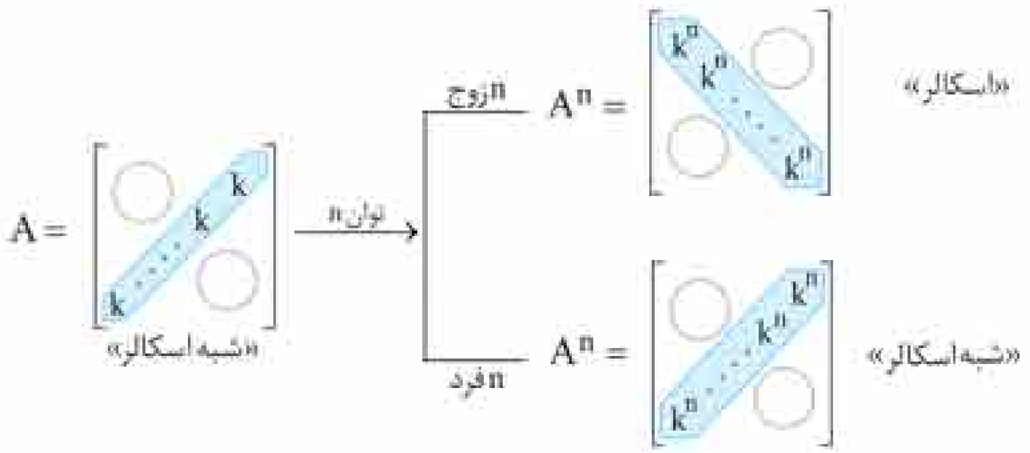
و لذا در توان سوم، ماتریس شبه‌قطری حاصل می‌گردد.

به‌طورکلی داریم:



توان‌های یک ماتریس شبه اسکالر

هر ماتریس شبه اسکالر، اگر به توان عددی زوج برسد، تمام درایه‌های قطر فرعی آن به توان آن عدد می‌رسند و شکل ماتریس حاصل به‌صورت اسکالر می‌باشد و اگر به توان عددی فرد برسد، تمام درایه‌های قطر فرعی آن به توان آن عدد می‌رسند و شکل ماتریس حاصل به صورت شبه اسکالر می‌باشد. به عبارت دیگر:



تست: اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^4 - A^3$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 16 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & -8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 16 & 0 & -8 \\ 0 & 8 & 0 \\ -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به این‌که ماتریس A شبه اسکالر است، داریم:

$$A^{\overset{\text{زوج}}{4}} - A^{\overset{\text{فرد}}{3}} = \underset{(\text{اسکالر})}{\begin{bmatrix} 2^4 & 0 & 0 \\ 0 & 2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 \end{bmatrix}} - \underset{(\text{شبه‌اسکالر})}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2^3 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2^4 & 0 & -2^3 \\ 0 & 2^4-2^3 & 0 \\ -2^3 & 0 & 2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & -8 \\ 0 & 8 & 0 \\ -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های خودتوان

ماتریس مربعی A را خود توان می‌گوییم هرگاه $A^2 = A$ که در این صورت $\forall n \in \mathbb{N} : A^n = A$.

به عنوان مثال ماتریس I، خود توان است.

توجه کنید که ممکن است ماتریس مربعی A در توان مثلاً سوم با خودش برابر شود، اما $A^2 \neq A$ باشد، که در این صورت ماتریس A خود توان محسوب نمی‌شود.

تست: اگر برای دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبهٔ A و B، $A^2 = A$ و $B = 2A - I$ باشد، آن‌گاه ماتریس B^3 برابر کدام است؟

۱) B^2 ۲) $\bar{O}$ ۳) B ۴) A

پاسخ: گزینه ۳ چون A و I تعویض‌پذیرند، پس می‌توانیم اتحاد به کار ببریم (توجه کنید که ماتریس A خود توان است و لذا تمام توان‌هایش با خودش برابر است). داریم:

$$B^3 = (2A-I)^3 = (2A)^3 + 3(2A)^2\cdot(-I) + 3(2A)\cdot(-I)^2 + (-I)^3$$

$$= 8\underset{A}{A^3} - 12\underbrace{\underset{A}{A^2}\cdot I}_{A} + 6\underbrace{A\cdot I}_{A} - I = 8A - 12A + 6A - I = 2A - I = B$$

هشدار: توجه کنید که نشان دادیم $B^3 = B$ و ثابت نکردیم $B^2 = B$، پس نمی‌توان گفت ماتریس B خود توان است.

اکنون ماتریس B^2 را می‌یابیم:

$$B^2 = (2A-I)^2 = 4\underset{A}{A^2} - 4\underbrace{A\cdot I}_{A} + I = 4A - 4A + I = I$$

به عبارت دیگر $B^2 \neq B$ و لذا ماتریس B، خود توان نیست.

اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{12} کدام ست؟

۱) صفر ۲) -2 ۳) 4 ۴) -4

پاسخ: گزینه ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}=A$$

همان‌طور که می‌بینید، $A^2=A$ می‌باشد و در نتیجه ماتریس A خود توان است یعنی $A^{12}=A$. پس مجموع درایه‌های ماتریس A را می‌یابیم که برابر با ۴- است.

ماتریس‌های پوچ توان

ماتریس مربعی A را پوچ توان می‌گوییم هرگاه عددی طبیعی مانند m یافت شود به‌طوری که $A^m=\bar{O}$. که در این صورت $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq m; A^n=\bar{O}$

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^2-A^7 کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۷ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\3&3&9\\-1&-1&-3\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\3&3&9\\-1&-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\bar{O}$$

پس ماتریس A پوچ توان است و لذا $A^7=\bar{O}$. پس $A^2-A^7=A^2$ و در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس A^2 را می‌یابیم که برابر با ۱۰ است.

اگر $A=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس A^9 دارای چند درایهٔ غیرصفر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

پاسخ: گزینه ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\bar{O}$$

پس ماتریس A پوچ توان است و لذا $A^9=\bar{O}$ و هیچ درایهٔ غیرصفری ندارد (توجه کنید که ماتریس A، یک ماتریس بالامثلثی است که تمام درایه‌های قطر اصلی آن صفرند!)

راهبرد: هر ماتریس بالامثلثی (پایین مثلثی)، که تمام درایه‌های قطر اصلی آن صفر می‌باشد، پوچ توان است و اگر مرتبهٔ ماتریس، $n\times n$ باشد، به‌طور قطع در توان n اُم، ماتریس صفر حاصل می‌شود.

اگر $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\5&7&0\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^2+A^4+A^6$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۷- ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ: گزینه ۲ با توجه به این‌که ماتریس A، پایین مثلثی است و تمام درایه‌های قطر اصلی آن صفر می‌باشند، پس پوچ توان است و چون مرتبهٔ آن ۳×۳ است، لذا به‌طور قطع، $A^3=\bar{O}$ می‌باشد و در نتیجه $A^4=\bar{O}$ و $A^6=\bar{O}$. پس کافی است A^2 را محاسبه کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\5&7&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\5&7&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-7&0&0\end{bmatrix}$$

یعنی مجموع درایه‌های ماتریس حاصل، برابر با ۷- است.

درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان

دترمینان

دترمینان تابعی است که **به هر ماتریس مربعی**، یک **عدد حقیقی** نسبت می‌دهد. این تابع **یک‌به‌یک نیست**، یعنی ممکن است ماتریس‌های مربعی متفاوتی دارای دترمینان‌های یکسانی باشند.

◀ تابع دترمینان را به صورت det نشان می‌دهند. بنابراین اگر مجموعهٔ تمام ماتریس‌های مربعی را به صورت $M_{n\times n}$، به عنوان دامنهٔ تابع دترمینان در نظر بگیریم، با توجه به این که بُرد (هم‌دامنه) این تابع، مجموعهٔ اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) می‌باشد، تابع دترمینان به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{cases}\det: M_{n\times n}\to\mathbb{R}\\ \det(A)=|A|\end{cases}$$

◀ دترمینان ماتریس مربعی A را به صورت $|A|$ نشان می‌دهند، که بیان‌گر یک عدد حقیقی است.

◀ دترمینان برای ماتریس‌های غیرمربعی تعریف نمی‌شود.

◀ دترمینان هر ماتریس ۱×۱ با عدد تنها درایهٔ آن ماتریس برابر است.

به عبارت دیگر:

$$A=[a]_{1\times1}\Rightarrow |A|=a$$

به عنوان مثال، دترمینان ماتریس $A=[5]_{1\times1}$ برابر است با ۵.

◀ یافتن دترمینان ماتریس‌های ۲×۲

دترمینان هر ماتریس ۲×۲ برابر است با: **حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی منهای حاصل ضرب درایه‌های قطر فرعی.**

به عبارت دیگر:

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=ad-bc$$

به عنوان مثال:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(5)(2)-(4)(-1)=14$$

$$B=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}\Rightarrow |B|=(\sqrt{3})(\sqrt{3})-(1)(-1)=4$$

$$C=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\Rightarrow |C|=(\cos\theta)(\cos\theta)-(\sin\theta)(-\sin\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & -\tan x\\ \tan x & 1\end{bmatrix}\Rightarrow |D|=(1)(1)-(\tan x)(-\tan x)=1+\tan^2 x$$

تست: اگر دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & -2\\ 3 & a-2\end{bmatrix}$ برابر ۵ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس $B=\begin{bmatrix}3a & -3\\ 2 & a^2+1\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۶−　　۲) ۱۲　　۳) ۱۲−　　۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲

طبق فرض مسأله داریم:

$$|A|=5\Rightarrow\begin{vmatrix}a & -2\\ 3 & a-2\end{vmatrix}=5\Rightarrow (a)(a-2)-(-2)(3)=5\Rightarrow a^2-2a+1=0\Rightarrow (a-1)^2=0\Rightarrow a=1$$

بنابراین $B=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ و در نتیجه:

$$|B|=(3)(2)-(-3)(2)=12$$

تست: اگر $A=\begin{bmatrix} ۴|A| & ۳ \\ ۱ & |A| \end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس A برابر کدام است؟

۱) ۱ و -۲ ۲) ۱ و $-\frac{۳}{۴}$ ۳) ۳ و $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۳ و $-\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

$$A=\begin{bmatrix} ۴|A| & ۳ \\ ۱ & |A| \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{دترمینان}} |A|=(۴|A|)(|A|)-(۳)(۱) \Rightarrow |A|=۴|A|^{۲}-۳ \Rightarrow ۴|A|^{۲}-|A|-۳=۰$$

اگر قرار دهیم $|A|=x$، معادلهٔ درجهٔ دوم $۴x^{۲}-x-۳=۰$ به دست می‌آید، که جواب‌های آن $x=۱$ و $x=-\frac{۳}{۴}$ است (چرا؟) و لذا $|A|=۱$ یا $|A|=-\frac{۳}{۴}$ می‌باشد.

دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱۱ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$ **برابر کدام است؟**

۱) ۱۸ ۲) -۱۸ ۳) ۱۹ ۴) -۱۹

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا درایه‌های ماتریس A را، که هر کدام یک دترمینان ۲×۲ می‌باشند، می‌یابیم:

$$\begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}=(۴)(۱)-(۲)(-۱)=۶ \qquad \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}=(۲)(۲)-(۳)(۱)=۱$$

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix}=(۲)(۵)-(-۳)(۱)=۱۳ \qquad \begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱۱ \end{vmatrix}=(۱)(۱۱)-(۵)(۲)=۱$$

بنابراین ماتریس A برابر است با $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ -۱ & ۱۳ \end{bmatrix}$ و در نتیجه داریم: $|A|=(۱)(۱۳)-(۶)(-۱)=۱۹$

یافتن دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ به کمک روش بسط

ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. از این پس، چهار درایهٔ b، a'، b'' و c' را، به عنوان چهار رأس لوزی نام می‌بریم. (به عبارت دیگر درایه‌های واقع در آدرس‌های ۱۲، ۲۱، ۲۳ و ۳۲، در هنگام محاسبهٔ دترمینان، علامت منفی تولید می‌کنند.)

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$

برای یافتن دترمینان ماتریس ۳×۳ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ یک سطر (یا یک ستون) از ماتریس را به دلخواه انتخاب می‌کنیم.

۲ هر درایهٔ سطر (ستون) انتخابی را در دترمینان ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستونِ درایهٔ موردنظر ضرب می‌کنیم.

۳ در مرحلهٔ ۲، هر درایه‌ای که جزء چهار رأس لوزی می‌باشد، علامت منفی برای آن در نظر می‌گیریم.

۴ نتایج حاصل از مرحلهٔ ۲ را با هم جمع می‌کنیم و عدد حاصل، دترمینان ماتریس ۳×۳ است.

به عنوان مثال برای یافتن دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۱ \\ ۱ & ۵ & ۳ \\ -۲ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$ داریم:

◄ یک سطر یا ستون را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. مثلاً سطر اول را برمی‌گزینیم (در این حالت می‌گوییم **بسط نسبت به سطر اول** صورت می‌گیرد).

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۱ \\ ۱ & ۵ & ۳ \\ -۲ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$$

◄ درایه‌های سطر اول را در دترمینان ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستون هر درایه ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix}2&4&-1\\1&5&3\\-2&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{سطر و ستون درایهٔ ۲ حذف می‌شود}}\begin{bmatrix}2&4&-1\\1&5&3\\-2&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{درایهٔ ۲ ضرب می‌شود}}(2)\underbrace{\begin{vmatrix}5&3\\0&-3\end{vmatrix}}_{\text{دترمینان ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستون درایهٔ ۲}}$$

$$\begin{bmatrix}2&4&-1\\1&5&3\\-2&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{سطر و ستون درایهٔ ۴ حذف می‌شود}}\begin{bmatrix}2&4&-1\\1&5&3\\-2&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{درایهٔ ۴ ضرب می‌شود}}(4)\underbrace{\begin{vmatrix}1&3\\-2&-3\end{vmatrix}}_{\text{دترمینان ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستون درایهٔ ۴}}$$

$$\begin{bmatrix}2&4&-1\\1&5&3\\-2&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{سطر و ستون درایهٔ (۱−) حذف می‌شود}}\begin{bmatrix}2&4&-1\\1&5&3\\-2&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{درایهٔ (۱−) ضرب می‌شود}}(-1)\underbrace{\begin{vmatrix}1&5\\-2&0\end{vmatrix}}_{\text{دترمینان ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستون درایهٔ ۱-}}$$

◄ اکنون برای یافتن دترمینان ماتریس A، سه مقدار به‌دست‌آمده را با هم جمع می‌کنیم. (توجه کنید که درایهٔ ۴، جزء چهار رأس لوزی است و علامت منفی برای آن در نظر گرفته می‌شود.)

$$|A|=\begin{vmatrix}\boxed{2\quad 4\quad -1}\\1\quad 5\quad 3\\-2\quad 0\quad -3\end{vmatrix}=(2)\underbrace{\begin{vmatrix}5&3\\0&-3\end{vmatrix}}_{-15}-(4)\underbrace{\begin{vmatrix}1&3\\-2&-3\end{vmatrix}}_{3}+(-1)\underbrace{\begin{vmatrix}1&5\\-2&0\end{vmatrix}}_{10}=(2)(-15)-(4)(3)+(-1)(10)=-52$$

اکنون یک سطر (یا ستون) دیگر را انتخاب می‌کنیم. مثلاً ستون دوم را برمی‌گزینیم (بسط نسبت به ستون دوم):

$$\begin{bmatrix}2&4&-1\\1&5&3\\-2&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{سطر و ستون درایهٔ ۴ حذف می‌شود}}\begin{bmatrix}2&4&-1\\1&5&3\\-2&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{درایهٔ ۴ ضرب می‌شود}}(4)\underbrace{\begin{vmatrix}1&3\\-2&-3\end{vmatrix}}_{\text{دترمینان ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستون درایهٔ ۴}}$$

$$\begin{bmatrix}2&4&-1\\1&5&3\\-2&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{سطر و ستون درایهٔ ۵ حذف می‌شود}}\begin{bmatrix}2&4&-1\\1&5&3\\-2&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{درایهٔ ۵ ضرب می‌شود}}(5)\underbrace{\begin{vmatrix}2&-1\\-2&-3\end{vmatrix}}_{\text{دترمینان ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستون درایهٔ ۵}}$$

◄ توجه کنید برای درایهٔ صفر انجام عملیات بالا بی‌مورد است، زیرا حاصل ضرب درایهٔ صفر در دترمینان ۲×۲، برابر صفر است.

پس دترمینان ماتریس A عبارت است از:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&4&-1\\1&5&3\\-2&0&-3\end{vmatrix}=-(4)\underbrace{\begin{vmatrix}1&3\\-2&-3\end{vmatrix}}_{3}+(5)\underbrace{\begin{vmatrix}2&-1\\-2&-3\end{vmatrix}}_{-8}=-52$$

درایهٔ ۴ جزء چهار رأس لوزی است پس علامت منفی برای آن در نظر گرفته می‌شود.

◄ همان‌طور که ملاحظه می‌شود، مقدار دترمینان، به انتخاب سطر یا ستون جهت عملیات بسط، ارتباطی ندارد و در هر دو حالتِ بالا، پاسخ یکسان است. اما واضح است در بسط نسبت به ستون دوم، به دلیل وجود درایهٔ صفر، عملیات بسط سریع‌تر صورت پذیرفت.

نتیجه: ۱ در محاسبهٔ دترمینان ماتریس ۳×۳، **بهتر است** سطر (ستونی) انتخاب شود که **تعداد درایهٔ صفر بیشتری** دارد.

۲ اگر در یک ماتریس **تمام اعداد یک سطر (یا یک ستون)** برابر با **صفر** باشند، آن‌گاه دترمینان آن ماتریس، **صفر** است.

تست: اگر دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&a&5\\0&3&-2\end{bmatrix}$ برابر ۶ باشد، آن‌گاه a کدام است؟

۱) ۸/۵ ۲) ۸/۵− ۳) ۱۲/۵ ۴) ۱۲/۵−

پاسخ: گزینه ۴ برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس ۳×۳، با توجه به این که بهتر است سطر یا ستونی انتخاب شود که تعداد درایه‌های صفر بیشتری دارد، پس انتخاب سطر دوم یا ستون دوم توصیه نمی‌شود. اکنون بسط نسبت به سطر اول را در نظر می‌گیریم:

درایهٔ (۱−) جزء چهار رأس لوزی است

$$|A|=6 \xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر ۱}} (1)\underbrace{\begin{vmatrix}a&5\\3&-2\end{vmatrix}}_{\text{دترمینان ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستون درایهٔ ۱}}(-1)\underbrace{\begin{vmatrix}2&5\\0&-2\end{vmatrix}}_{\text{دترمینان ۲×۲ حاصل از حذف سطر و ستون درایهٔ (۱−)}}=6$$

$$\Rightarrow (1)(-2a-15)-(-1)(-4-0)=6 \Rightarrow -2a=25 \Rightarrow a=-\frac{25}{2}=-12/5$$

دترمینان $\begin{vmatrix}x&0&x\\x&0&-1\\0&2&5\end{vmatrix}$ برابر ۴ می‌باشد. مقدار x کدام است؟

۱) ۱ و ۲− ۲) ۱ و $\frac{1}{2}$ ۳) ۱− و ۲ ۴) ۱− و $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ بسط نسبت به ستون دوم را در نظر می‌گیریم. (توجه کنید درایهٔ ۲ جزء چهار رأس لوزی است.)

$$-(2)\begin{vmatrix}x&x\\x&-1\end{vmatrix}=4 \Rightarrow -(2)(-x-x^2)=4 \Rightarrow 2x^2+2x=4 \xrightarrow{\div 2} x^2+x=2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=1,-2$$

حاصل $\begin{vmatrix}2&5&1\\-1&4&0\\3&0&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&4&3\\1&-1&2\\0&-2&6\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۶۸− ۲) ۴۲ ۳) ۶۵− ۴) ۴۸

پاسخ: گزینه ۱

هشدار: در جمع، تفریق و ضرب چند دترمینان، باید محاسبهٔ هر یک از دترمینان‌ها را به طور جداگانه انجام داد.

حاصل هر یک از دترمینان‌ها را به طور جداگانه محاسبه می‌کنیم و سپس نتایج را با هم جمع می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix}2&5&1\\-1&4&0\\3&0&-2\end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر سوم}} (3)\underbrace{\begin{vmatrix}5&1\\4&0\end{vmatrix}}_{-4}+(-2)\underbrace{\begin{vmatrix}2&5\\-1&4\end{vmatrix}}_{13}=-38$$

$$\begin{vmatrix}0&4&3\\1&-1&2\\0&-2&6\end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط نسبت به ستون اول}} -(1)\underbrace{\begin{vmatrix}4&3\\-2&6\end{vmatrix}}_{30}=-30$$

درایهٔ ۱ جزء چهار رأس لوزی است.

پس جواب $-68=(-30)+(-38)$ است.

حاصل $\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&3&5\\-4&0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3&4&-1\\0&5&0\\4&2&-2\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۸۰ ۳) ۷۰ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا حاصل هر کدام از دترمینان‌ها را می‌یابیم و سپس اعداد به‌دست‌آمده را در هم ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\begin{vmatrix}3&4&-1\\0&5&0\\4&2&-2\end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر دوم}} (5)\underbrace{\begin{vmatrix}3&-1\\4&-2\end{vmatrix}}_{-2}=-10$$

$$\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&3&5\\-4&0&1\end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط نسبت به ستون دوم}} (3)\underbrace{\begin{vmatrix}1&-1\\-4&1\end{vmatrix}}_{-3}=-9$$

پس جواب $90=(-9)(-10)$ است.

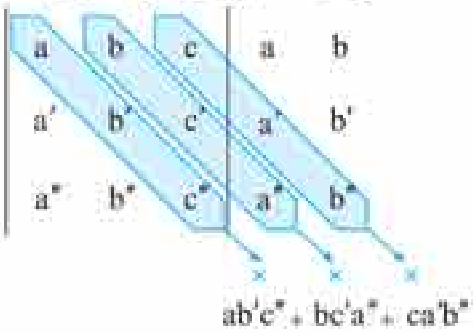
یافتن دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ به کمک روش ساروس

ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. برای یافتن دترمینان آن به صورت زیر عمل می‌کنیم:

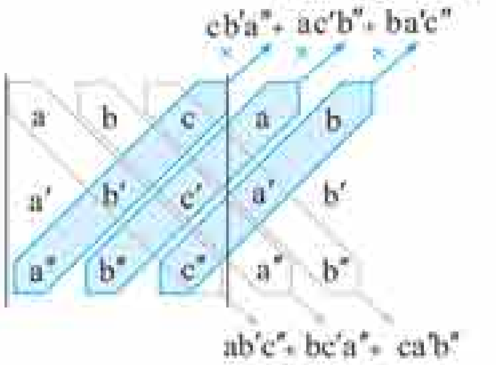
۱) دو ستون اول را در سمت راست دترمینان ماتریس A می‌نویسیم.

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ a' & b' \\ a'' & b'' \end{matrix}$$

۲) حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی و حاصل ضرب درایه‌های واقع بر دو خط موازی با قطر اصلی را جداگانه محاسبه می‌کنیم و هر سه عدد را با هم جمع می‌نماییم.



۳) حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر فرعی و حاصل ضرب درایه‌های واقع بر دو خط موازی با قطر فرعی را جداگانه محاسبه می‌کنیم و هر سه عدد را با هم جمع می‌نماییم.



۴) دترمینان ماتریس A برابر است با مجموع حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو خط موازی آن منهای مجموع حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر فرعی و دو خط موازی آن. به عبارت دیگر عدد حاصل از مرحلهٔ ۳ را از عدد حاصل از مرحلهٔ ۲ کم می‌کنیم.

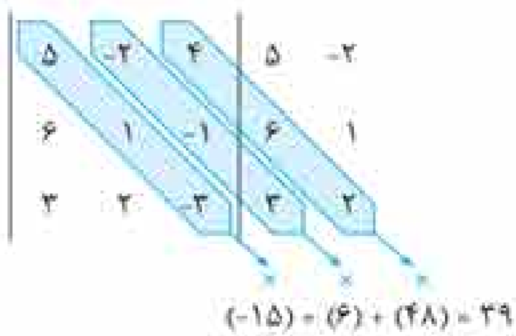
$$|A|=(ab'c''+bc'a''+ca'b'')-(cb'a''+ac'b''+ba'c'')$$

به عنوان مثال برای یافتن دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۵ & -۲ & ۴ \\ ۶ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ به روش ساروس داریم:

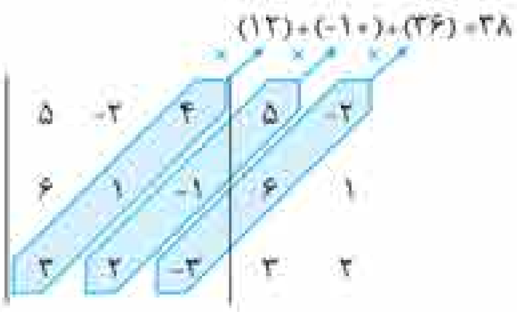
مرحلهٔ ۱) ابتدا دو ستون اول را در سمت راست دترمینان می‌نویسیم.

$$\left|\begin{matrix} ۵ & -۲ & ۴ \\ ۶ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ & -۳ \end{matrix}\right| \begin{matrix} ۵ & -۲ \\ ۶ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{matrix}$$

مرحلهٔ ۲)



مرحلهٔ ۳)

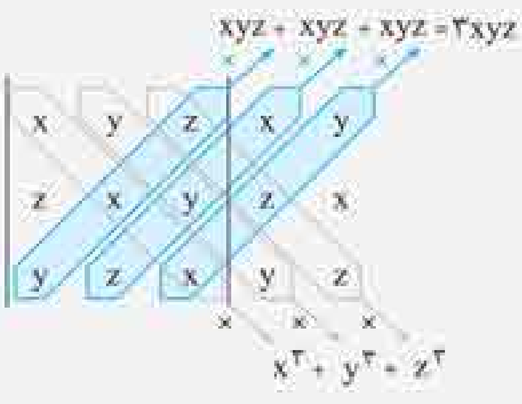


مرحلهٔ ۴) $|A|=۳۹-۳۸=۱$

تست: اگر حاصل دترمینان $\left|\begin{matrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{matrix}\right|$ برابر صفر باشد، آن‌گاه $x^۳+y^۳+z^۳$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) $۳xyz$ ۳) $(x+y+z)^۳$ ۴) $(xyz)^۳$

پاسخ: گزینه ۲ به کمک روش ساروس داریم:



پس دترمینان داده‌شده برابر است با: $x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz$ و از آن‌جایی که حاصل این دترمینان، طبق فرض مسأله، برابر صفر است، بنابراین:

$$x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz=۰ \Rightarrow x^۳+y^۳+z^۳=۳xyz$$

دترمینان ماتریس‌های مربعی خاص

دترمینان هر ماتریس **بالامثلثی، پایین‌مثلثی** و **قطری** برابر است با «**حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن**».

به عبارت دیگر:

$$\begin{vmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

(برای اثبات کافی است از روش بسط یا ساروس استفاده کنید.)

نتیجه: ۱ دترمینان هر ماتریس **اسکالر**، برابر است با یک درایهٔ روی قطر اصلی به توان مرتبهٔ ماتریس. به عبارت دیگر:

$$\begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k^2, \begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = k^3, \begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} = k^4, \dots$$

۲ دترمینان ماتریس همانی، همواره برابر با ۱ است. به عبارت دیگر: $|I| = 1$.

۳ اگر k عددی حقیقی و I_n ماتریس همانی از مرتبهٔ $n \times n$ باشد، آن‌گاه: $|kI_n| = k^n$.

برای اثبات می‌دانیم ماتریس kI همواره یک ماتریس اسکالر است که تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر k می‌باشند و طبق نتیجهٔ ۳، دترمینان آن برابر است با k به توان مرتبهٔ ماتریس که در این‌جا n می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$kI_n = k\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & & 0 \\ & k & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k \end{bmatrix} \Rightarrow |kI_n| = \begin{vmatrix} k & & 0 \\ & k & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k \end{vmatrix} = k^n$$

◂ به عنوان مثال $|kI_3| = k^3$ و $|kI_4| = k^4$ و ... می‌باشد.

۴ دترمینان هر ماتریس **شبه قطری** 2×2 و 3×3 با **قرینهٔ** حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر فرعی آن برابر است.

به عبارت دیگر:

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{vmatrix} = -ab \quad , \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = -abc$$

(برای اثبات کافی است از روش بسط یا ساروس کمک بگیرید.)

هشدار: دترمینان ماتریس‌های شبه قطری مرتبه‌های بالاتر، ممکن است از نتیجهٔ ۴ پیروی نکنند.

تست: اگر $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = k_1$ و $\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = k_2$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

۱) $k_1 + k_2 = abc$ ۲) $k_1 - k_2 = abc$ ۳) $k_1 + k_2 = bc$ ۴) $k_1 - k_2 = bc$

پاسخ: گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{شبه قطری } 3\times3} -abc \\ k_2 = \begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{قطری}} (a+1)bc = abc + bc \end{array}\right\} \xrightarrow{+} k_1 + k_2 = bc$$

چند ویژگی مهم دترمینان

ویژگی ۱ خاصیت ضربی دترمینان

دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه، با حاصل ضرب دترمینان‌های آن برابر است.

به عبارت دیگر اگر A و B **دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه** باشند، آن‌گاه: $|AB| = |A||B|$

◂ اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه: $|AB| = |BA|$

به عبارت دیگر ممکن است دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبهٔ A و B، تعویض‌پذیر نباشند، اما $|AB|$ با $|BA|$ همواره برابر است، زیرا هر دو با $|A||B|$ مساوی‌اند.

◄ توجه کنید که **شرط لازم** برای خاصیت ضربی دترمینان، آن است که هر دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند.

◄ این خاصیت برای جمع و تفریق به‌صورت کلی برقرار نیست. به عبارت دیگر در حالت کلی اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه: $|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$

◄ خاصیت ضربی قابل تعمیم است، یعنی اگر A_1، A_2، ...، A_n ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه: $|A_1A_2\dots A_n| = |A_1||A_2|\dots|A_n|$

نتیجه: اگر در حالت تعمیم‌یافتهٔ بالا، قرار دهیم $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$، به عبارت دیگر در یک حالت خاص همگی برابر با ماتریس A باشند، آن‌گاه: $\boxed{|A^n| = |A|^n}$

بنابراین دترمینان توان nاُم هر ماتریس مربعی، با توان nاُم دترمینان آن برابر است.

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و B ماتریس مربعی هم‌مرتبه با A باشد، به طوری که $AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس B کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۲ ۳) ۲/۸ ۴) ۳/۲

پاسخ: گزینه ۲ با توجه به خاصیت ضربی دترمینان داریم:

$$|AB| = |A||B| \Rightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}_{22} = \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}_{10}|B| \Rightarrow |B| = \frac{22}{10} = 2/2$$

اگر A یک ماتریس اسکالر 3×3 باشد و $a_{11} = 4$ و B ماتریسی شبه اسکالر هم‌مرتبه با A فرض شود، به طوری که $b_{22} = -3$، آن‌گاه $|AB|$ کدام است؟

۱) 12^2 ۲) 12^3 ۳) -12^3 ۴) -12^2

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به $a_{11} = 4$، درمی‌یابیم اعداد روی قطر اصلی ماتریس اسکالر A برابر ۴ و در نتیجه $|A| = 4^3 = 64$ است. از طرفی در ماتریس شبه اسکالر B، چون $b_{22} = -3$، درایهٔ واقع بر قطر فرعی است، پس $|B| = -(-3)^3 = -27$ می‌باشد. بنابراین طبق خاصیت ضربی دترمینان داریم:

$$|AB| = |A||B| = (64)(-27) = 4^3 \times (-3)^3 = (-12)^3 = -12^3$$

اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس A^4 کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱۶ ۳) ۸۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا دترمینان ماتریس A را به کمک بسط نسبت به سطر دوم (که صفرهای بیشتری دارد) می‌یابیم. توجه کنید که درایهٔ ۲، جزء چهار رأس لوزی نیست.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (2)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

بنابراین با توجه به نتیجهٔ خاصیت ضربی دترمینان داریم:

$$|A^4| = |A|^4 = 2^4 = 16$$

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & a \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$، به ازای کدام مقدار a، دترمینان ماتریس A^3B^2 برابر با ۴۹- است؟

۱) ۱۰ و ۲ ۲) ۱۰- و ۲- ۳) ۱۱ و ۴ ۴) ۱۱- و ۴-

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا دترمینان ماتریس‌های A و B را می‌یابیم. داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر سوم}} (-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{7} + (2)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}_{3} = -1$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & a \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط نسبت به ستون دوم}} (1)\begin{vmatrix} 5 & a \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 2a$$

اکنون طبق فرض داریم:

$$|A^3B^2| = -49 \xrightarrow{\text{خاصیت ضربی}} |A^3||B^2| = -49 \xrightarrow{\text{نتیجهٔ خاصیت ضربی}} |A|^3 \cdot |B|^2 = -49$$

$$\Rightarrow (-1)^3 \cdot (-15 - 2a)^2 = -49 \xrightarrow{\text{ساده‌سازی}} a^2 + 15a + 44 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} a = -4, -11$$

تست: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $A^۲+۲A+I_۲$ برابر کدام است؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۴۰۰

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم هر ماتریس مربعی با ماتریس همانی هم‌مرتبه با خودش تعویض‌پذیر است. پس ماتریس A با ماتریس $I_۲$ تعویض‌پذیر می‌باشد و در نتیجه اتحادهای جبری برقرارند. بنابراین:

$$|A^۲+۲A+I_۲|=|(A+I_۲)^۲|=|A+I_۲|^۲$$

از طرفی داریم:

$$A+I_۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین جواب سؤال برابر است با:

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ -۱ & ۵ \end{vmatrix}^۲=((۳)(۵)-(۵)(-۱))^۲=۲۰^۲=۴۰۰$$

توجه: اگر A و B دو ماتریس غیرمربعی ضرب‌پذیر باشند و حاصل ضرب آن‌ها یک ماتریس مربعی باشد، در این صورت برای یافتن $|AB|$ یا $|BA|$، نمی‌توان از خاصیت ضربی استفاده کرد (زیرا شرط لازم برقرار نیست!) و باید حاصل ضرب دو ماتریس را بیابیم و سپس دترمینان ماتریس مربعی حاصل را محاسبه نماییم.

یک گام فراتر: اگر دو ماتریس غیرمربعی در هم ضرب شوند و حاصل، یک ماتریس مربعی با مرتبه‌ای بزرگ‌تر از هر دو ماتریس باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس حاصل ضرب همواره برابر صفر است.

◂ به عنوان مثال اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس AB (که یک ماتریس ۳×۳ می‌باشد و مرتبه‌اش از هر دو ماتریس A و B بزرگ‌تر است) همواره برابر صفر است.

ویژگی ۲ اگر A یک ماتریس مربعی دلخواه از مرتبهٔ $n\times n$ و k عددی حقیقی باشد. آن‌گاه: $|kA_{n\times n}|=k^n|A|$

◂ به عبارت دیگر برای محاسبهٔ دترمینان «عدد در ماتریس»، ابتدا عدد را به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسانیم و حاصل را در دترمینان ماتریس ضرب می‌کنیم.

◂ برای اثبات داریم:

$$|kA|=|k(IA)|=|(kI)A|\xlongequal{\text{خاصیت ضربی}}\underbrace{|kI_n|}_{\text{از قبل می‌دانیم}}|A|=k^n|A|$$

تست: اگر $A=[a_{ij}]_{۶\times۶}$ و دترمینان ماتریس A برابر با ۳ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس $۲A$ برابر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۶۴ ۴) ۱۹۲

پاسخ: گزینه ۴ طبق ویژگی ۲ داریم:

$$|۲A_{۶\times۶}|=۲^۶|A|=۲^۶\times۳=۱۹۲$$

اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A|=۵$، آن‌گاه حاصل $||A|A|$ کدام است؟

۱) ۱۲۵ ۲) ۶۲۵ ۳) ۲۵۰ ۴) ۵۰۰

پاسخ: گزینه ۲

$$|\underbrace{|A|}_{۵}A|=|۵A|=|۵A_{۳\times۳}|=۵^۳\underbrace{|A|}_{۵}=۵^۴=۶۲۵$$

نتیجه: اگر A یک ماتریس مربعی دلخواه از مرتبهٔ $n\times n$ باشد، آن‌گاه:

$$|-A|=(-۱)^n|A|$$

◂ برای اثبات داریم:

$$|-A|=|(-۱)A|=|(-۱)A_{n\times n}|\overset{\text{(ویژگی ۲)}}{=}(-۱)^n|A|$$

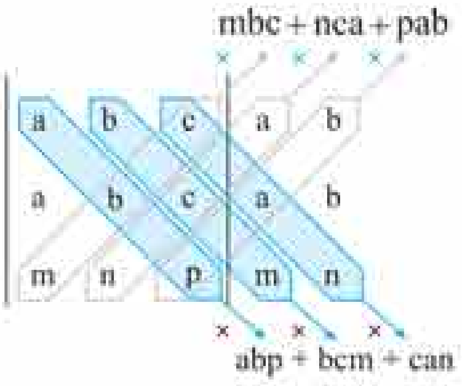
تست: معادلهٔ دترمینانی $\begin{vmatrix} -۱ & ۵ & ۰ \\ -x & ۰ & -۵ \\ ۰ & x & ۱ \end{vmatrix}$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۴ اگر مطابق روش ساروس عمل کنیم، دترمینان این ماتریس همواره صفر است و به مقدار x بستگی ندارد. بنابراین x می‌تواند هر مقدار حقیقی را اختیار کند. پس بی‌شمار جواب برای این معادله وجود دارد.

ویژگی ۳ اگر در یک دترمینان، دو سطر (یا دو ستون) یکسان (یا مضرب یکدیگر) باشند، آن‌گاه حاصل آن دترمینان همواره صفر است.

به عنوان مثال حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix}$ همواره برابر با صفر است، زیرا دو سطر اول و دوم یکسان‌اند. برای اثبات، کافی است از روش ساروس (یا بسط) کمک بگیریم.



همان‌طور که ملاحظه می‌شود، حاصل دترمینان برابر است با:

$$(\underline{abp}+\underline{\underline{bcm}}+\underline{\underline{\underline{can}}})-(\underline{\underline{mbc}}+\underline{\underline{\underline{nca}}}+\underline{pab})=0$$

تست: اگر $a>b>0$ باشد $(a,b\in\mathbb{R})$، آن‌گاه معادلهٔ $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & x^2 \\ a & b & x \\ a^3 & b^3 & x^3 \end{vmatrix}=0$ چند ریشه دارد؟

۱) یک ریشهٔ مضاعف ۲) دو ریشهٔ متمایز ۳) سه ریشهٔ متمایز ۴) یک ریشهٔ مضاعف و یک ریشهٔ ساده

پاسخ: گزینهٔ ۳

ترفند محاسباتی: در این‌جا به جای استفاده از روش‌های گفته‌شده برای محاسبهٔ دترمینان، به ترتیب زیر، مقداردهی می‌کنیم.
اگر قرار دهیم $x=a$، آن‌گاه ستون‌های اول و سوم یکسان می‌شوند و در نتیجه طبق ویژگی ۳، مقدار دترمینان برابر صفر می‌شود. پس $x=a$ یک ریشهٔ این معادله است. به همین ترتیب اگر $x=b$ باشد، ستون‌های دوم و سوم یکسان‌اند و حاصل دترمینان صفر است و لذا $x=b$ یک ریشهٔ این معادله محسوب می‌شود. از طرفی اگر $x=0$ باشد، از آن‌جایی که تمام درایه‌های ستون سوم برابر صفرند، پس حاصل دترمینان صفر است و در نتیجه $x=0$ نیز یک ریشهٔ این معادله است.

تست: حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & -6 \\ -4 & -2 & 2 & -6 \end{vmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱۲− ۳) ۲۴ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴ از آن‌جایی که درایه‌های سطرهای دوم و چهارم مضرب یکدیگرند (توجه کنید تمام درایه‌های سطر چهارم، (-2) برابر درایه‌های متناظرشان در سطر دوم می‌باشند)، پس حاصل این دترمینان (مطابق با ویژگی ۳) همواره برابر با صفر است.

تست: به ازای چند مقدار x، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 1 & x^2 & 1 & -4 \\ 2 & 2x & -2 & 4 \\ -1 & -x & 1 & -2 \end{vmatrix}$ صفر است؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینهٔ ۴ با کمی دقت متوجه می‌شویم سطر اول و چهارم قرینهٔ یکدیگرند. به عبارت دیگر مضرب هم می‌باشند و در نتیجه حاصل این دترمینان همواره صفر است و به مقدار x بستگی ندارد. پس x هر مقدار حقیقی را می‌پذیرد و بی‌شمار جواب دارد.

ویژگی ۴ اگر یک سطر یا یک ستون از دترمینان در یک عدد حقیقی ضرب شود، آن‌گاه حاصل دترمینان در آن عدد حقیقی ضرب می‌شود.

به عنوان مثال:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=k \xrightarrow{r\in\mathbb{R}} \begin{vmatrix} a & rb & c \\ a' & rb' & c' \\ a'' & rb'' & c'' \end{vmatrix}=rk \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=k \xrightarrow{r\in\mathbb{R}} \begin{vmatrix} ra & rb \\ c & d \end{vmatrix}=rk$$

تست: اگر $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=5$، آن‌گاه حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 6a_1 & -3a_2 \\ -2b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۵− ۳) ۳۰ ۴) ۳۰−

پاسخ: گزینهٔ ۳

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=5 \xrightarrow{\text{سطر اول در }(-3)\text{ ضرب شود}} \begin{vmatrix} -3a_1 & -3a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=-15 \xrightarrow{\text{ستون اول در }(-2)\text{ ضرب شود}} \begin{vmatrix} 6a_1 & -3a_2 \\ -2b_1 & b_2 \end{vmatrix}=30$$

نتیجه: ۱ در هر دترمینان همواره می توان یک عدد حقیقی را از یک سطر (ستون) فاکتور گرفت.

به عنوان مثال:

$$\begin{vmatrix} ra & rb & rc \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

تست: اگر $D = \begin{vmatrix} a & b & ۰ \\ b & -b & a \\ -a+۱ & -b & ۲b \end{vmatrix}$، آن‌گاه حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a & ۱ & ۰ \\ b & -۱ & ۲a \\ -a+۱ & -۱ & ۴b \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $۲bD$ ۲) $-\frac{۲D}{b}$ ۳) $\frac{۲D}{b}$ ۴) $-۲bD$

پاسخ: گزینه ۳

اگر از ستون دوم، b را فاکتور بگیریم، داریم:

$$b\begin{vmatrix} a & ۱ & ۰ \\ b & -۱ & a \\ -a+۱ & -۱ & ۲b \end{vmatrix} = D \xrightarrow{\div b} \begin{vmatrix} a & ۱ & ۰ \\ b & -۱ & a \\ -a+۱ & -۱ & ۲b \end{vmatrix} = \frac{D}{b}$$

حال کافی است ستون سوم را در ۲ ضرب کنیم. داریم:

$$\begin{vmatrix} a & ۱ & ۰ \\ b & -۱ & ۲a \\ -a+۱ & -۱ & ۴b \end{vmatrix} = \frac{۲D}{b}$$

۲ در ضرب یک عدد حقیقی در یک دترمینان، اگر عدد حقیقی به داخل دترمینان برود، فقط در یک سطر (ستون) ضرب می‌شود.

$$r\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ra & rb & rc \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

ویژگی ۵ در هر دترمینان، اگر جای دو سطر (دو ستون) عوض شود، مقدار دترمینان قرینه می‌شود.

به عنوان مثال در دترمینان ۲×۲ داریم:

$$\left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \\ &\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad \end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

به همین ترتیب در دترمینان ۳×۳ داریم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

تست: حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) -۲۴ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲ ۴) -۱۲

پاسخ: گزینه ۲ دترمینان شبه قطری داده شده را می‌توان با جابه‌جایی دو ستون اول و چهارم و دو ستون دوم و سوم به صورت قطری درآورد. توجه کنید که چون دو بار جابه‌جایی ستون‌ها انجام می‌شود، بنابراین علامت منفی در منفی، مثبت می‌شود.

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۴ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۴\times۳\times۲\times۱ = ۲۴$$

وارون یک ماتریس

اگر A یک ماتریس **مربعی** باشد و ماتریسی مانند B هم‌مرتبه با A یافت شود که $AB = BA = I$،
آن‌گاه ماتریس B را **وارون ماتریس** A می‌گویند و با نماد A^{-1} نشان می‌دهند. بنابراین:

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

(به سادگی ثابت می‌شود که **وارون** یک ماتریس مربعی، در صورت وجود، **منحصر به فرد** است. این مطلب را **قضیهٔ یکتایی وارون** می‌گویند.)

هشدار: توجه کنید که نماد A^{-1}، هیچ‌گاه به معنی $\frac{1}{A}$ نیست. (در ماتریس‌ها، عملیات تقسیم تعریف نمی‌شود.) به عبارت دیگر، (-1) به عنوان توان ماتریس در نظر گرفته نمی‌شود و فقط نماد وارون ماتریس A است.

به عنوان مثال وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ عبارت است از $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$، زیرا:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

تست: اگر A یک ماتریس مربعی باشد و $A^3 - 3A^2 + 4A + 3I = \bar{O}$، آن‌گاه وارون ماتریس A کدام است؟

۱) $A^2 - 3A + 4I$ ۲) $-\frac{1}{3}(A^2 - 3A + 4I)$ ۳) $\frac{1}{3}(3A - 4I)$ ۴) $-\frac{1}{3}(A^2 - 3A + I)$

پاسخ: گزینه ۲ توجه کنید در تعریف وارون، یعنی $AA^{-1} = I$، در سمت راست تساوی، ماتریس I دیده می‌شود. پس در عبارت داده‌شده، ابتدا $3I$ را به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم. داریم:

$$A^3 - 3A^2 + 4A = -3I \xrightarrow{\text{فاکتور } A} A\cdot(A^2 - 3A + 4I) = -3I$$

توجه کنید در هنگام فاکتورگیری از $4A$، آن را به صورت $4AI$ در نظر می‌گیریم. زیرا عبارت داده‌شده باید به صورت چندجمله‌ای ماتریسی باشد و جمع یک عدد با ماتریس بی‌معنی است. در ادامه برای این که در سمت راست ماتریس I داشته باشیم، دو طرف را در $(-\frac{1}{3})$ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\xrightarrow{\times(-\frac{1}{3})} A\cdot[\underbrace{-\frac{1}{3}(A^2 - 3A + 4I)}_{A^{-1}}] = I$$

عبارت داخل کروشه نقش A^{-1} را دارد، زیرا با ضرب در ماتریس A، ماتریس همانی را نتیجه می‌دهد.

اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر و B ماتریسی هم‌مرتبه با آن باشد، به طوری که $A + B = AB$، آن‌گاه وارون ماتریس B کدام است؟

۱) $I - A^{-1}$ ۲) $I - A$ ۳) $I + A^{-1}$ ۴) $A - I$

پاسخ: گزینه ۱ چون مطابق فرض مسأله، A ماتریسی وارون‌پذیر است، پس ماتریس A^{-1} وجود دارد. با ضرب A^{-1} از سمت چپ در تساوی $A + B = AB$ داریم:

$$A + B = AB \xrightarrow{A^{-1}\cdot} \underbrace{A^{-1}A}_{I} + A^{-1}B = \underbrace{A^{-1}A}_{I}B \Rightarrow I = IB - A^{-1}B \xrightarrow{\text{فاکتور } B} I = (I - A^{-1})\cdot B$$

واضح است که ماتریس $(I - A^{-1})$ وارون ماتریس B است، زیرا با ضرب شدن در ماتریس B، ماتریس همانی را نتیجه می‌دهد. بنابراین:

$$B^{-1} = I - A^{-1}$$

اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر باشد و $A^2 = 2A^{-1}$، آن‌گاه وارون ماتریس $A + I$ کدام است؟

۱) $A - I$ ۲) $A^{-1} - A + I$ ۳) $A^2 - A + I$ ۴) $\frac{A^2 - A + I}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

$$A^2 = 2A^{-1} \xrightarrow{A\cdot} A^3 = 2\underbrace{AA^{-1}}_{I} \xrightarrow{+I} A^3 + I = 3I \xrightarrow{\text{اتحاد}} (A + I)(A^2 - A + I) = 3I$$

$$\xrightarrow{\times\frac{1}{3}} (A + I)\cdot[\underbrace{\frac{1}{3}(A^2 - A + I)}_{(A+I)^{-1}}] = I \Rightarrow (A + I)^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 - A + I) = \frac{A^2 - A + I}{3}$$

اگر A یک ماتریس 2×2 و وارون‌پذیر باشد، حاصل $(A^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\cdot A)^2$ کدام است؟

۱) $A^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}\cdot A$ ۲) $A^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\cdot A$ ۳) $(A^{-1})^2\cdot\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}\cdot A^2$ ۴) $(A^{-1})^2\cdot\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}\cdot A^2$

پاسخ: گزینهٔ ۱ اگر قرار دهیم $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$، داریم:

$$(A^{-1}\cdot B\cdot A)^2=(A^{-1}BA)\cdot(A^{-1}BA)\xrightarrow{\text{شرکت‌پذیری}}A^{-1}B(\underbrace{AA^{-1}}_{I})BA=A^{-1}(\underbrace{BI}_{B})BA=A^{-1}(\underbrace{BB}_{B^2})A=A^{-1}\cdot B^2\cdot A$$

پس گزینه‌های «۳» و «۴» حذف می‌شوند و چون:

$$B^2=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}$$

است، پس جواب گزینهٔ «۱» می‌باشد.

نتیجه: اگر A یک ماتریس مربعی (وارون‌پذیر) و B ماتریسی هم‌مرتبه با آن باشد، آن‌گاه: $\boxed{(A^{-1}BA)^n=A^{-1}B^nA \quad (n\in\mathbb{N})}$

ویژگی‌های وارون ماتریس

ویژگی ۱ وارونِ وارون هر ماتریس مربعی با خودِ آن ماتریس برابر است.

به عبارت دیگر اگر A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه: $\boxed{(A^{-1})^{-1}=A}$

ویژگی ۲ اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر و k عددی حقیقی و غیرصفر باشد، آن‌گاه: $\boxed{(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}}$

به عبارت دیگر وارون، هم عدد را وارون می‌کند و هم ماتریس را.

ویژگی ۳ عمل وارون روی ضرب ماتریس‌ها با ترتیب برعکس صورت می‌پذیرد.

به عبارت دیگر اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر و ضرب‌پذیر باشند، آن‌گاه: $\boxed{(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}}$

◄ این ویژگی قابل تعمیم است، یعنی برای ماتریس‌های وارون‌پذیر و ضرب‌پذیر A_1، A_2، ...، A_n داریم:

$$(A_1A_2\dots A_n)^{-1}=A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\dots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

نتیجه: در حالت خاص، اگر $A_1=A_2=\dots=A_n=A$ فرض شوند، آن‌گاه: $\boxed{(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n}$

به عبارت دیگر وارونِ توان nاُم یک ماتریس با توان nاُم وارونِ آن ماتریس برابر است.

هشدار: عمل وارون روی جمع و تفریق ماتریس‌ها، قاعده‌ای ندارد. به عبارت دیگر: $(A\pm B)^{-1}=??$

تست: اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه حاصل $A^{-1}\cdot(A^{-1}+B^{-1})^{-1}\cdot B^{-1}$ کدام است؟

۱) $A^{-1}+B^{-1}$ ۲) $(A+B)^{-1}$ ۳) $A^{-1}-B^{-1}$ ۴) $(A-B)^{-1}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ اگر $A^{-1}+B^{-1}=C$ فرض شود، آن‌گاه طبق ویژگی ۳ داریم:

$$A^{-1}\cdot C^{-1}\cdot B^{-1}=(BCA)^{-1}=(B\cdot(A^{-1}+B^{-1})\cdot A)^{-1}$$

$$\xrightarrow{\text{توزیع‌پذیری}}((B\cdot A^{-1}+\underbrace{BB^{-1}}_{I})\cdot A)^{-1}\xrightarrow{\text{توزیع‌پذیری}}(B\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}+I\cdot A)^{-1}=(B+A)^{-1}$$

اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد، به طوری که $(A^2)^{-1}-A^{-1}-A+I=\bar{O}$، آن‌گاه وارون ماتریس A کدام است؟

۱) A^2+I ۲) A^2-A ۳) A^2-A-I ۴) A^2-A+I

پاسخ: گزینهٔ ۴ با توجه به نتیجهٔ ویژگی ۴، می‌دانیم $(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$. پس فرض مسأله به صورت زیر درمی‌آید:

$$(A^{-1})^2-A^{-1}-A+I=\bar{O}\xrightarrow{A\cdot}A\cdot(A^{-1})^2-\underbrace{A\cdot A^{-1}}_{I}-A^2+\underbrace{AI}_{A}=\bar{O}\Rightarrow A\cdot(A^{-1}\cdot A^{-1})-I-A^2+A=\bar{O}$$

$$\xrightarrow{\text{شرکت‌پذیری}}(\underbrace{A\cdot A^{-1}}_{I})A^{-1}-I-A^2+A=\bar{O}\Rightarrow\underbrace{IA^{-1}}_{A^{-1}}-I-A^2+A=\bar{O}\Rightarrow A^{-1}=A^2-A+I$$

ویژگی ۴ اگر دو ماتریس وارون‌پذیر و تعویض‌پذیر باشند، آن‌گاه وارون‌های آن‌ها نیز تعویض‌پذیرند و برعکس.

به عبارت دیگر برای دو ماتریس وارون‌پذیر A و B داریم: $AB=BA\Leftrightarrow A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

ویژگی ۵ در مجموعهٔ ماتریس‌های وارون‌پذیر، ضرب ماتریس‌ها خاصیت حذف‌پذیری دارد.

به عبارت دیگر اگر A ماتریسی وارون‌پذیر و B و C دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه با A و ضرب‌پذیر با آن باشند، داریم:

$$AB=AC\xrightarrow{A^{-1}\cdot}\underbrace{A^{-1}A}_{I}B=\underbrace{A^{-1}A}_{I}C\Rightarrow B=C$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

۱. ماتریس A از مرتبهٔ n مفروض است. اگر تمام درایه‌های این ماتریس برابر ۱ باشد، نسبت مجموع درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی این ماتریس، به مجموع درایه‌های قطر اصلی آن کدام است؟

۱) n ۲) $\frac{n}{۲}$ ۳) $\frac{n+۱}{۲}$ ۴) $\frac{n-۱}{۲}$

۲. ماتریس‌های A و B به ترتیب پائین مثلثی و بالا مثلثی هستند. اگر درایه‌های روی قطر اصلی آن‌ها برابر و $A+B=\begin{bmatrix} b & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۴ & -۱ & -۵ \\ ۶ & ۲ & ۳ & ۶ \\ ۴ & ۲ & ۳ & b \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A-B$ کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۱۶ ۳) -۳۵ ۴) -۱۶

۳. اگر ماتریس $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & x+۱ \\ x+y-۱ & ۱ & ۲x+y-۱ \\ x-۲y & ۲x-y & x \end{bmatrix}$ بالا مثلثی باشد، برای دوتایی (x,y) چند جواب موجود است؟

۱) یک ۲) دو ۳) بی‌شمار ۴) هیچ

۴. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۵\times۵}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} ۲i-j & ; \quad i=j \\ \dfrac{۲x^۲-۹x+۴}{۳x^۲-۱۳x+۴} & ; \quad i\neq j \end{cases}$ مفروض است. اگر این ماتریس، قطری باشد، چند مقدار برای x موجود است؟

۱) یک ۲) دو ۳) بی‌شمار ۴) هیچ

۵. اگر $\begin{bmatrix} ۴x & -x^۲+۵x \\ ۲x+y & -y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^۲+۳ & ۴ \\ ۳x-y & -y \end{bmatrix}$ باشد، $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۶. اگر $A=[j^۲+۲i]_{۲\times۳}$ ، $B=[i^۳-j]_{۲\times۳}$ باشد، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $-B+۲A$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۱

۷. اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ ، $A^۲=\alpha A+\beta I_۲$ ، دوتایی (α,β) کدام است؟

۱) $(۲,۱۱)$ ۲) $(۲,۱۳)$ ۳) $(۴,۱۱)$ ۴) $(۴,۱۳)$

۸. اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ، $A=(\alpha I_۲+\beta A)^۲$ آن‌گاه $\alpha\beta$ کدام است؟

۱) $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۹. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} ۱ & ; \quad i=j \\ ۲ & ; \quad i\neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲-۴A$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ، ماتریس $A_۴$ کدام می‌باشد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) بالامثلثی ۲) پایین مثلثی ۳) قطری غیرهمانی ۴) همانی

۱۱. ضرب یک ماتریس «دو سطر و سه ستونی» در کدام نوع ماتریس امکان‌پذیر است؟

۱) یک سطر و دو ستونی ۲) دو سطر و چهار ستونی ۳) سه سطر و یک ستونی ۴) چهار سطر و دو ستونی

۱۲. اگر A یک ماتریس بالامثلثی و B یک ماتریس پائین مثلثی باشد، آن‌گاه AB همواره ماتریسی:

۱) بالامثلثی است. ۲) پائین مثلثی است.

۳) قطری است. ۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

۱۳. اگر $A=\begin{bmatrix} c & 5\\ 3 & a\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} 3 & 1\\ b & 7\end{bmatrix}$ و $AB=BA$ باشد، آن‌گاه $c-a$ کدام است؟

۱) ۱۵　۲) ۱۵−　۳) ۲۰−　۴) ۲۰

۱۴. اگر حاصل‌ضرب $\begin{bmatrix} -2a & -2\\ 2 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1\\ -2 & -2\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، در این‌صورت $a+b$ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۱۵. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & x & y\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3 کدام است؟

۱) $3x$　۲) $3x^2$　۳) $2x^2+2y^2$　۴) $3x^2+3y^2$

۱۶. ماتریس‌های $B=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 3\end{bmatrix}$ مفروضند. اگر ماتریس A در رابطهٔ $C=AB$ صدق کند، مجموع درایه‌های این ماتریس کدام است؟

۱) ۷−　۲) ۸
۳) هر مقداری می‌تواند داشته باشد　۴) ماتریسی مثل A نداریم

۱۷. بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A از معادلهٔ $A\begin{bmatrix} 3 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2\\ -1 & 0\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $-\frac{9}{5}$　۲) $\frac{9}{5}$　۳) $\frac{7}{10}$　۴) $-\frac{1}{5}$

۱۸. اگر $\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a+b-c-d$ کدام است؟

۱) ۴−　۲) ۰　۳) ۴　۴) ۲

۱۹. اگر $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد، $\begin{bmatrix} 0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\times A\times\begin{bmatrix} 0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} d & c\\ b & a\end{bmatrix}$　۲) $\begin{bmatrix} c & d\\ b & a\end{bmatrix}$　۳) $\begin{bmatrix} -d & -c\\ -b & -a\end{bmatrix}$　۴) $\begin{bmatrix} -c & -d\\ -b & -a\end{bmatrix}$

۲۰. ماتریس‌های مربعی A و B مفروضند. اگر $A^2=A$ ، $B^2=B$ باشند و داشته باشیم $AB=BA$ ، در آن‌صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $(A+B-AB)^2=A^2+B^2+A^2B^2$　۲) $(A+B-AB)^2=-A-B+AB$
۳) $(A+B-AB)^3=A-B-AB$　۴) $(A+B-AB)^2=A+B-AB$

۲۱. ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبهٔ A و B مفروضند. اگر $AB=A$ و $BA=B$ باشند، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $A^2-B^2=A+B$　۲) $A^2=B^2$
۳) $A^2+B^2=A+B$　۴) $A^3=B^3$

۲۲. ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبهٔ A و B مفروضند. اگر $A*B=AB-AB$ باشد، حاصل $(A*A)*(B*I)$ کدام است؟

۱) I　۲) $BA-AB$　۳) A^2　۴) $\bar{O}$

۲۳. مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} 1 & 100\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۵۰۵۰　۲) ۱۰۰　۳) ۱۹۹　۴) ۱۰۱

۲۴. اگر $A^2=A$ و $B=2A-I$ ، در این صورت A^3+B^3 کدام است؟

۱) $2A+B$　۲) $A+2B$　۳) $A+B$　۴) $A-B$

۲۵. اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & -3\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -2\\ a & b\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند. در این صورت $a+b$ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۳　۳) ۲　۴) ۲−

۲۶. اگر $A^2=5A-2I$ ، آن‌گاه A^4 کدام است؟

۱) $23A-10I$　۲) $25A-10I$　۳) $27A-10I$　۴) $25A-12I$

۲۷. اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و $AB^2=B^2A$ ، آن‌گاه به‌ازای کدام مقدار حقیقی k رابطهٔ $AB=kBA$ برقرار است؟

۱) فقط ۱−　۲) ± 1　۳) فقط ۱　۴) هر مقدار دلخواه مخالف صفر

۲۸. ماتریس‌های مربعی A و B مفروضند. اگر $BA=-AB$ باشد، ماتریس BA^2-A^2B کدام است؟

۱) AB　۲) BA　۳) $\bar{O}$　۴) I

۲۹. اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه و ماتریس‌های A، B و $A+B$ خود توان باشند، آن‌گاه:

۱) $AB=A+B$ ۲) $AB=I$ ۳) $AB=-BA$ ۴) $AB=-I$

۳۰. اگر برای دو ماتریس A و B بدانیم $AB-BA=I$ آن‌گاه حاصل AB^2-B^2A برابر کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) $2I$ ۳) $2A$ ۴) $2B$

۳۱. اگر A، B و C سه ماتریس می‌باشند، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $AB=BA$ ۲) $AB=AC \Rightarrow B=C$

۳) $A(B+C)=AB+AC$ ۴) $AB=\bar{O} \Rightarrow A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$

۳۲. اگر A و B ماتریس‌های مربع برابر باشند، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) $AB=BA \Rightarrow BA^n=A^nB$ ۲) $AB=BA \Rightarrow (BA)^n=B^nA^n$

۳) $A^n=B^n \Rightarrow A=B$ ۴) $A=B \Rightarrow A^n=B^n$

۳۳. ماتریس‌های مربعی A و B مفروضند. اگر $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $(A-2B)(A+B)=A^2+BA-2B^2$ ۲) $AB^3=B^3A$

۳) $A^2B=-BA^2$ ۴) هر سه گزینه

۳۴. ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} x & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ مفروضند. اگر $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) چنین ماتریس‌هایی وجود ندارند.

۳۵. ماتریس‌های مربعی A و B مفروضند. اگر $A^2=A$، $B^2=B$ و $(A-I)^{1397}=(I-B)^{1398}$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $A=B$ ۲) $A+B=2I$ ۳) $A=-B$ ۴) $A+2B=-2I$

۳۶. ماتریس‌های قطری A و B از مرتبهٔ ۳ مفروض‌اند. اگر $AB=2I$ و $A+B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(A+B)^2(A^2+B^2)$ کدام است؟

۱) I ۲) $6I$ ۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

۳۷. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ آن‌گاه در ماتریس $B=(A+I)(A-I)$ درایهٔ b_{22} کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۰

۳۸. در ماتریس‌های $A=B+C$ حاصل $A^2+B^2-AB-BA$ کدام است؟

۱) $-C^2$ ۲) C^2 ۳) $\bar{O}$ ۴) C

۳۹. ماتریس مربعی A مفروض است: اگر $A^2-A+I=0$ باشد، حاصل $A+\cdots+A^8+A^9+A^{10}$ کدام است؟

۱) $A+I$ ۲) $A-I$ ۳) A^2-I ۴) A^3-I

۴۰. اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، A^n کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n-1 \end{bmatrix}$ ۳) A^{n-1} ۴) I

۴۱. در ماتریس $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل‌جمع درایه‌های ماتریس $A+A^2+A^3+A^4$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۶

۴۲. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A^6 کدام است؟

۱) 3^5 ۲) 3^6 ۳) 3^7 ۴) 3^8

۴۳. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، $(A+I)^6=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ آن‌گاه $a-b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۱ ۴) ۳۶

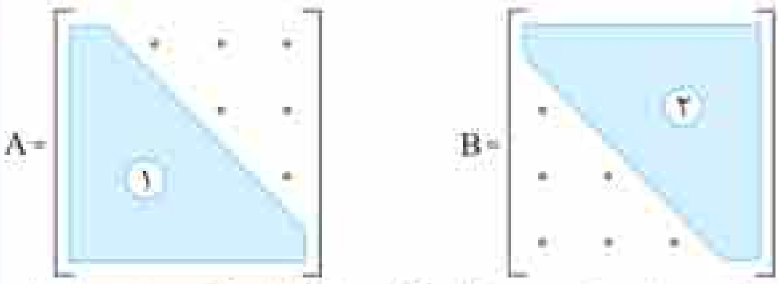
پاسخ‌های تشریحی

۱. گزینه ۴ تعداد درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A برابر با n می‌باشد. پس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی این ماتریس n است.
برای پیدا کردن تعداد درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی این ماتریس، باید تعداد درایه‌های روی قطر اصلی آن را از کل درایه‌ها کم کنیم و در نهایت عدد حاصل را نصف نمائیم: $\frac{n^2-n}{2}$

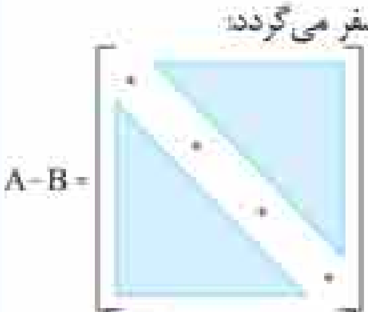
پس مجموع درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی برابر $\frac{n^2-n}{2}$ می‌باشد.
در نهایت برای خواستهٔ مسأله می‌توانیم بنویسیم:

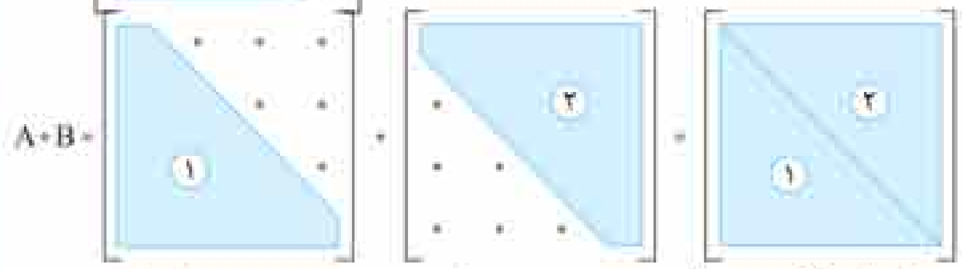
$$\frac{\text{مجموع درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی}}{\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی}}=\frac{\frac{n^2-n}{2}}{n}=\frac{n-1}{2}$$

۲. گزینه ۴ ماتریس‌های A و B را به‌صورت زیر داریم. (از آن‌جایی‌که ماتریس مجموع آن‌ها، ماتریسی ۴×۴ می‌باشد، پس هریک از ماتریس‌های A و B نیز ۴×۴ هستند.)

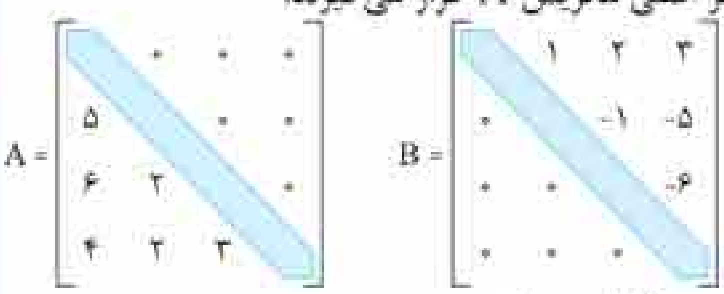


به دنبال تفاضل ماتریس‌ها هستیم. می‌دانیم که در تفاضل ماتریس‌ها، درایه‌های متناظر از هم کم می‌شوند. از آن‌جایی که گفته شده درایه‌های قطر اصلی آن‌ها با هم برابرند، پس درایه‌های قطر اصلی تفاضل آن‌ها برابر صفر می‌گردد:





همان‌طور که در ماتریس مجموع مشاهده می‌شود، در حاصل جمع دو ماتریس، درایه‌های روی قطر اصلی، دو برابر درایه‌های متناظر روی قطر اصلی هریک از ماتریس‌های A و B هستند. قسمت بالای قطر اصلی، درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس B و قسمت پائین قطر اصلی آن درایه‌های پائین قطر اصلی ماتریس A قرار می‌گیرند.



بنابراین برای ماتریس تفاضل می‌توانیم بنویسیم:

$$A-B=\begin{bmatrix}0&-1&-2&-3\\5&0&1&5\\6&2&0&-6\\4&2&3&0\end{bmatrix}$$

که مجموع درایه‌های آن برابر ۱۶ است.

۳. گزینه ۴ در ماتریس بالامثلثی، درایه‌های پائین قطر اصلی همگی صفرند. بنابراین درایه‌های a_{21} , a_{31} , a_{32} باید برابر صفر باشد. با درایه‌های a_{21}, a_{31} دستگاهی دومعادله دومجهولی تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{cases}x+y=1\\x-2y=0\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}x=\frac{2}{3}\ ,\ y=\frac{1}{3}$$

حالا باید به‌ازای این x و y درایهٔ a_{32} هم صفر باشد. با جای‌گذاری، این درایه برابر $2\times\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=1$ می‌باشد که مخالف صفر است. پس هیچ دوتایی مثل (x,y) وجود ندارد که به‌ازای آن‌ها این ماتریس، بالامثلثی باشد.

۴. گزینه ۱ در ماتریس قطری، همهٔ درایه‌های غیرواقع روی قطر اصلی باید صفر باشند. یعنی درایه‌های به فرم $\frac{2x^2-9x+4}{3x^2-13x+4}$ باید برابر صفر شوند. بنابراین با معادلهٔ به‌صورت $2x^2-9x+4=0$ به شرط این‌که ریشه‌هایش، عبارت واقع در مخرج را صفر نکنند مواجه هستیم.

$$2x^2-9x+4=0\xrightarrow{\text{تجزیه}}(2x-1)(x-4)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2},x=4$$

با امتحان ریشه‌های این معادله در عبارت مخرج کسر، مشاهده می‌شود که $x=4$، این عبارت را صفر می‌کند. پس فقط $x=\frac{1}{2}$ قابل قبول است.

۵. گزینه ۳ طبق خاصیت تساوی در ماتریس‌ها، درایه‌ها نظیر به نظیر با هم برابرند. پس می‌توانیم چهار معادله داشته باشیم. اما با توجه به درایه‌ها، با استفاده از درایهٔ سطر اول و ستون اول از هر دو ماتریس، ابتدا x را پیدا می‌کنیم:

$$x^2+3=4x\Rightarrow x^2-4x+3=0\xrightarrow{\text{تجزیه}}(x-3)(x-1)=0$$
$$\Rightarrow x=3,x=1$$

این‌جا، دو مقدار برای x پیدا کردیم. اما با توجه به درایهٔ سطر اول و ستون دوم از هر دو ماتریس، درمی‌یابیم که به‌ازای $x=3$ تساوی برقرار نیست.

به‌ازای $x=1$ تساوی برقرار است $\quad x=1\Rightarrow-(1)^2+5(1)=4$

به‌ازای $x=3$ تساوی برقرار نیست $\quad x=3\Rightarrow(3)^2+5(3)=15\neq4$

با قرار دادن مقدار $x=1$ در درایه‌های سطر دوم و ستون اول از هر دو ماتریس به مقدار y می‌رسیم: $3x-y=2x+y\Rightarrow x=2y\xrightarrow{x=1}y=\frac{1}{2}$

در نهایت مقدار $x+y$ برابر با $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ می‌باشد.

۶. گزینه ۴ از آن‌جایی که ماتریس‌های A و B دارای تعداد سطر و ستون برابر هستند، می‌توان عملیات خواسته شده را انجام داد. در این‌جا نیازی به پیدا کردن همهٔ درایه‌های ماتریس‌های A و B نداریم. در عملیات خواسته‌شده، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم خواسته شده است. پس محاسبهٔ درایهٔ سطر دوم و ستون سوم از ماتریس‌های A و B کافی می‌باشد:

$$a_{23}=(3)^2+2\times(2)=13,b_{23}=(2)^3-3=5$$

حالا با توجه به خواص ضرب عدد در ماتریس درایهٔ $2a_{23}$ برابر با $2\times13=26$ و درایهٔ $-b_{23}$ برابر -5 می‌باشد و در نهایت درایهٔ سطر دوم و ستون سوم از ماتریس خواسته‌شده برابر با $-5+26=21$ است.

۷. گزینه ۲ ابتدا ماتریس A^2 را پیدا کرده، سپس در رابطهٔ داده شده قرار می‌دهیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}-2&1\\5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1\\5&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&2\\10&21\end{bmatrix}$$

$$A^2=\alpha A+\beta I_2\Rightarrow\begin{bmatrix}9&2\\10&21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\alpha&\alpha\\5\alpha&4\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta&0\\0&\beta\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-2\alpha+\beta&\alpha\\5\alpha&4\alpha+\beta\end{bmatrix}$$

می‌دانیم که در ماتریس‌های مساوی، درایه‌ها، نظیر به نظیر با هم برابرند. با توجه به برابری درایه‌های x_{21} در هر دو α برابر با ۲ می‌شود. درایه‌های x_{11} از هر دو ماتریس با هم برابرند: $9=-2\alpha+\beta\xrightarrow{\alpha=2}\beta=13$

۸. گزینه ۲ ماتریس همانی با هر ماتریسی در اتحادها شرکت می‌کند:

$$(\alpha I_2+\beta A)^2=\alpha^2 I_2^2+\beta^2A^2+2AI_2\alpha\beta=A$$

$$\xrightarrow{I^2=I}\alpha^2I+\beta^2A^2+2\alpha\beta A=A$$

$$\Rightarrow \alpha^2I+\beta^2A^2+(1-2\alpha\beta)A=\bar{O}\qquad(*)$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(*)}\alpha^2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\beta^2\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=(1-2\alpha\beta)\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\alpha^2-\beta^2&0\\0&\alpha^2-\beta^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1-2\alpha\beta\\2\alpha\beta-1&0\end{bmatrix}$$

از تساوی ماتریسی فوق به معادلات $\alpha^2=\beta^2$ و $2\alpha\beta=1$ می‌رسیم. از تساوی اول $\alpha=\pm\beta$ به‌دست می‌آید که با جای‌گذاری در معادلهٔ دوم داریم:

$$\alpha=-\beta\Rightarrow 1=-2\beta^2\Rightarrow\beta^2=-\frac{1}{2}$$ غیرقابل قبول

$$\alpha=\beta\Rightarrow 1=2\beta^2\Rightarrow\beta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha\beta=\frac{1}{2}$$

۹. گزینه ۲ ماتریسی سه در سه داریم که اگر درایه، روی قطر اصلی باشد، مقدارش برابر ۱ و در غیر این‌صورت برابر ۲ است.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2-4A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس حاصل برابر با ۱۵ می‌باشد.

۱۰. گزینه ۴ برای راحتی کار کافی است که ابتدا A^2 را پیدا کرده، سپس ماتریس حاصل را در خودش ضرب کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^2\times A^2=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس حاصل، همانی است.

۱۱. گزینه ۳ ماتریس ذکرشده در صورت مسئله به‌صورت $A=[a_{ij}]_{2\times 3}$ می‌باشد. اگر حاصل‌ضرب این ماتریس در ماتریسی مثل $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ امکان‌پذیر باشد، باید تعداد سطرهای ماتریس B با تعداد ستون‌های ماتریس A برابر گردد، یعنی $m=3$. تعداد ستون‌های ماتریس B هر عددی را می‌تواند بگیرد.

۱۲. گزینه ۴ برای روشن شدن سؤال، ماتریس‌هایی به‌صورت بالامثلثی و پائین‌مثلثی به فرم سه در سه مثال می‌زنیم. ماتریس $A_{3\times3}$ و $B_{3\times3}$ به ترتیب بالامثلثی و و پایین‌مثلثی هستند:

$$A=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\0&a_4&a_5\\0&0&a_6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}b_1&0&0\\b_2&b_3&0\\b_4&b_5&b_6\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}a_1b_1+a_2b_2+a_3b_4&a_2b_3+a_3b_5&a_3b_6\\a_4b_2+a_5b_4&a_4b_3+a_5b_5&a_5b_6\\a_6b_4&a_6b_5&a_6b_6\end{bmatrix}$$

همان‌طور که در مثال بالا کاملاً واضح است، نمی‌توان در مورد این ماتریس اظهارنظر قطعی کرد و همه چیز به درایه‌های ماتریس‌های A و B بستگی دارد.

۱۳. گزینه ۳ حاصل ضرب‌های AB و BA را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}c&5\\3&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\b&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3c+5b&c+35\\9+ab&3+7a\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}3&1\\b&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c&5\\3&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3c+3&15+a\\bc+21&5b+7a\end{bmatrix}$$

در ماتریس‌های برابر، درایه‌های متناظر با هم برابرند. اما در این مسئله نیازی به پیدا کردن همهٔ پارامترها نداریم. مقدار $c-a$ خواسته شده است. پارامترهای c،a در درایهٔ x_{12} از هریک از ماتریس‌ها قرار دارند. پس فقط کافیست که همین درایه از هریک از آن‌ها را مساوی هم بگذاریم:

$$(AB)_{12}=(BA)_{12}\Rightarrow c+35=15+a\Rightarrow c-a=-20$$

۱۴. گزینه ۱ از آن‌جایی که حاصل‌ضرب ماتریسی، یک ماتریس قطری است، پس درایه‌هایی که روی قطر اصلی قرار نگرفته‌اند، باید صفر باشند.
یعنی درایه‌های x_{12} و x_{21} از ماتریس حاصل باید صفر باشند. برای راحتی کار، فقط همین دو درایه را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}-2a&-2\\2&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\-2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dots&2a+4\\6-2b&\dots\end{bmatrix}$$

از معادلات $2a+4=0$ و $6-2b=0$ مقادیر b،a به‌ترتیب برابر ۲− و ۳ به‌دست می‌آیند. در نتیجه حاصل $a+b$ برابر با ۱ می‌باشد.

۱۵. گزینه ۱ برای پیدا کردن ماتریس A^3، ابتدا باید ماتریس A^2 را محاسبه کرده و سپس در ماتریس A ضرب کنیم. برای راحتی کار، با توجه به این‌که در این سؤال فقط درایهٔ سطر دوم و ستون سوم خواسته شده، پس سطر دوم ماتریس A^2 را محاسبه کرده و سپس در ستون سوم ماتریس A ضرب می‌کنیم:

۱ درایهٔ سطر دوم و ستون سوم A^3 = $(\underline{A^2\cdot\overline{A}})$ درایه‌سطر دوم‌وستون سوم

پس به سطر دوم A^2 نیاز داریم:

سطر دوم A^2 = سطر دوم $(A\cdot A)$ = (سطردوم A) $\cdot A$

$$=[0\ 1\ x]\begin{bmatrix}1&x&y\\0&1&x\\0&0&1\end{bmatrix}=[0\ 1\ 2x]$$

با قرار دادن سطر دوم به‌دست آمده در رابطهٔ ۱ می‌توان نوشت:

درایهٔ‌سطر دوم‌وستون‌سوم A^3 = (سطر دوم A^2)$\cdot$(ستون‌سوم A)

$$=[0\ \ 1\ \ 2x]\begin{bmatrix}y\\x\\1\end{bmatrix}=[3x]$$

۱۶. گزینه ۴ ماتریس‌های C،B از مرتبهٔ 2×3 هستند می‌دانیم در ضرب ماتریسی AB تعداد سطر از ماتریس A می‌باشد. پس ماتریس A حتماً دارای ۲ سطر است. از طرفی ضرب ماتریسی AB وقتی ممکن است که تعداد ستون ماتریس A با تعداد سطر ماتریس B برابر باشد پس ماتریس A دارای ۲ ستون می‌باشد.

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

$$C=AB\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&2&-1\\1&3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&1&2\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&2&1\\1&3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3a+b&a-b&2a+b\\-3c+d&c-d&2c+d\end{bmatrix}$$

از تساوی درایه‌های متناظر سطر اول از هر دو ماتریس مساوی داریم:

$$-3a+b=-1\ ,\ a-b=2\ ,\ 2a+b=1$$

از حل معادلات $a-b=2\ ,\ -3a+b=-1$ مقادیر a و b به‌ترتیب برابر $-\frac{1}{2}$ و $-\frac{5}{2}$ به‌دست می‌آیند. که این مقادیر در رابطهٔ $2a+b=1$ صادق نیستند، زیرا $2(\frac{-1}{2})-\frac{5}{2}=-\frac{7}{2}\neq 1$، پس ماتریسی مثل A نداریم.

۱۷. گزینه ۲ ماتریس سمت راست دارای سه سطر است. بنابراین ماتریس A به‌طور حتم سه سطر دارد. از طرفی برای این‌که بتوان ماتریس A را در ماتریس $B=\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}$ ضرب کرد، باید تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد پس ماتریس A از مرتبهٔ 3×2 می‌باشد.

$$A\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\3&5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a&d\\c&d\\e&f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\3&5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3a+4b&-a+2b\\3c+4d&-c+2d\\3e+4f&-e+2f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\3&5\end{bmatrix}$$

از برابر قرار دادن درایه‌های متناظر هر سطر به‌ترتیب مقادیر دوتایی‌های (a,b) و (c,d) و (e,f) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases}3a+4b=1\\-a+2b=2\end{cases}\Rightarrow a=\frac{-3}{5}\ ,\ b=\frac{7}{10}$$

$$\begin{cases}3c+4d=-1\\-c+2d=0\end{cases}\Rightarrow c=-\frac{1}{5}\ ,d=-\frac{1}{10}$$

$$\begin{cases}3e+4f=3\\-e+2f=5\end{cases}\Rightarrow e=-\frac{7}{5}\ ,f=\frac{9}{5}$$

بنابراین بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A برابر $f=\frac{9}{5}$ است.

۱۸. گزینه ۳ حاصل‌ضرب ماتریسی طرف راست تساوی مفروضی را به صورت زیر داریم:

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&d\\a&b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}c&d\\a&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d&c\\b&a\end{bmatrix}$$

بنابراین تساوی $\begin{bmatrix}d&c\\b&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ حاصل می‌شود که داریم:

$$a+b-c-d=4+3-1-2=4$$

۱۹. گزینه ۱ ماتریس A را جای‌گذاری کرده و به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c&-d\\-a&-b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-c&-d\\-a&-b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d&c\\b&a\end{bmatrix}$$

۲۰. گزینه ۴ با توجه به گزینه‌ها، ابتدا توان دوم ماتریس $A+B-AB$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(A+B-AB)^2=(A+B-AB)(A+B-AB)$$

$$=A^2+AB-A^2B+BA+B^2-BAB-ABA-AB^2+ABAB$$

طبق فرض می‌دانیم $AB=BA$ ، $B^2=B$ و $A^2=A$. پس:

$$=A+\cancel{AB}-\cancel{AB}+\cancel{AB}+B-ABB-BAA-\cancel{AB}+BAAB$$

$$-ABB-BAA-\cancel{AB}+BAAB$$

$$=A+B-A\underbrace{B^2}_{B}-B\underbrace{A^2}_{A}+B\underbrace{A^2}_{A}B$$

$$=A+B-AB-\underbrace{BA}_{AB}+\underbrace{BA}_{AB}B=A+B-AB-AB+A\underbrace{B^2}_{B}$$

$$=A+B-2AB+AB=A+B-AB$$

۲۱. گزینه ۳ ماتریس‌های A^2 و B^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2=(AB)^2=A\underbrace{BA}_{B}B=\underbrace{AB}_{A}B=AB=A$$

$$B^2=(BA)^2=B\underbrace{AB}_{A}A=BAA=BA=B$$

بنابراین مجموع ماتریس‌های A^2 و B^2 برابر مجموع ماتریس‌های A و B هستند.

۲۲. گزینه ۴ با گذاشتن ماتریس‌های A و A در رابطهٔ ذکرشده داریم:

$$A*A=AA-AA=\bar{O}$$

بنابراین حاصل $A*A$ برابر ماتریس $\bar{O}$ می‌باشد. سپس ماتریس‌های I و B را در رابطهٔ داده‌شده قرار می‌دهیم:

$$B*I=BI-IB=B-B=\bar{O}$$

در نهایت باید $\bar{O}*\bar{O}$ را از رابطهٔ داده شده پیدا کنیم که برابر ماتریس صفر است.

۲۳. گزینه ۴ در این‌جا، حاصل‌ضرب چند ماتریس اولیه را پیدا می‌کنیم تا بتوانیم به دید خوبی از کل حاصل‌ضرب‌ها برسیم.

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&3\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\cdots$$

پس می‌توان گفت که وقتی حاصل‌ضرب‌های قبلی در ماتریسی مثل $\begin{bmatrix}1&a\\0&0\end{bmatrix}$ ضرب می‌شوند، ماتریس حاصل همان $\begin{bmatrix}1&a\\0&0\end{bmatrix}$ می‌باشد بنابراین ماتریس حاصل‌ضرب‌های فوق برابر ماتریس آخر یعنی $\begin{bmatrix}1&100\\0&0\end{bmatrix}$ می‌باشد که مجموع درایه‌هایش برابر ۱۰۱ است.

۲۴. گزینه ۳ از تساوی اول در می‌یابیم که ماتریس خود توان است. این بدان معناست که $A^2=A$.

حالا به سراغ یافتن B^3 می‌رویم. برای این کار، دو طرف تساوی دوم را به توان ۳ می‌رسانیم. در عین حال توجه داریم که ماتریس I با هر ماتریسی توزیع‌پذیر است، پس با هر ماتریسی قوانین اتحادها را دارد و ضرب آن از هر طرف در ماتریس، با خود آن ماتریس برابر است. $(B=2A-I)^3$

$$\Rightarrow B^3=(2A)^3+3(2A)^2(-I)+3(2A)(-I)^2+(-I)^3$$

$$=8A^3-12A^2+6A-I=2A-I$$

عبارت حاصل همان ماتریس B شده است، پس A^3+B^3 برابر $A+B$ می‌باشد.

۲۵. گزینه ۲ اگر ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر باشند، تساوی $AB=BA$ برقرار می‌شود.

$$AB=BA\Rightarrow\begin{bmatrix}-2&-3\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\a&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\a&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-3\\3&-2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-2-3a&4-3b\\3-2a&-6-2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&1\\-2a+3b&-3a-2b\end{bmatrix}$$

در ماتریس‌های مساوی، درایه‌های متناظر با هم برابرند. از تساوی درایه‌های ۱×۱ یعنی $-8=-2-3a$ مقدار a مساوی ۲ می‌شود. از تساوی درایه‌های ۲×۱ داریم:

$$3-2a=-2a+3b\Rightarrow b=1\xrightarrow{a=2}a+b=2+1=3$$

۲۶. گزینه ۱ در هر دو طرف تساوی داده‌شده، ماتریس A را ضرب می‌کنیم تا این‌که ماتریس A^3 در طرف چپ آن ظاهر گردد.

$$A^2=5A-2I\xrightarrow{A\times}A^3=5A^2-2AI$$

از آن‌جایی که ضرب هر ماتریس از طرف راست یا چپ در ماتریس واحد برابر با خود آن ماتریس است، پس ماتریس AI برابر ماتریس A می‌شود.

$$A^3 = 5A^2 - 2A \xrightarrow{A^2=5A-2I} A^3 = 5(5A-2I) - 2A$$
$$\Rightarrow A^3 = 25A - 10I - 2A = 23A - 10I$$

۲۷. (گزینه ۲) رابطهٔ اول را از حالت توان خارج نموده و به‌صورت ضرب ماتریسی می‌نویسیم تا به تساوی $ABB = BBA$ برسیم. از رابطهٔ دوم، ماتریس AB را در این رابطه جای‌گذاری می‌کنیم تا رابطهٔ $kBAB = BBA$ حاصل شود در نهایت باز هم از رابطهٔ دوم به جای ماتریس BA، ماتریس $\frac{1}{k}AB$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$kBAB = BBA \xrightarrow{BA=\frac{1}{k}AB} kBAB = B(\frac{1}{k}AB)$$
$$\Rightarrow kBAB = \frac{1}{k}BAB$$

بنابراین ضرایب در هر دو طرف باید با هم برابر باشند.

$$\frac{1}{k} = k \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$$

۲۸. (گزینه ۳) در رابطهٔ خواسته‌شده توان‌ها را به‌صورت ضرب می‌نویسیم تا به رابطهٔ $C = BAA - AAB$ برسیم سپس به جای ماتریس BA در ماتریس اول ماتریس $-AB$ و به جای ماتریس AB در ماتریس دوم $-BA$ قرار می‌دهیم:

$$C = BAA - AAB = (-AB)A - A(-BA) = -ABA + ABA = \bar{O}$$

۲۹. (گزینه ۳) از آن‌جائی‌که گفته شده ماتریس‌های A، B ، $A+B$ خود توان هستند، پس داریم:

$$A^2 = A \ , \ B^2 = B \ , \ (A+B)^2 = A+B$$

با باز کردن تساوی $(A+B)^2 = A+B$ داریم:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A+B$$
$$\xrightarrow[B^2=B]{A^2=A} A + AB + BA + B = A + B \Rightarrow AB = -BA$$

توجه کنید که در صورت مسئله در مورد خاصیت جابه‌جایی در ضرب ماتریس‌های A و B صحبتی نشده است.

۳۰. (گزینه ۴) رابطهٔ داده‌شده را از حالت توان خارج کرده و به‌صورت ضرب ماتریس می‌نویسیم:

$$AB^2 - B^2A = ABB - BBA$$

از تساوی داده‌شده در مسئله می‌دانیم که $AB = I + BA$ و همچنین $BA = AB - I$ می‌باشد. حالا این مقادیر را در رابطهٔ خواسته‌شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$ABB - BBA = (I+BA)B - B(AB-I)$$
$$\Rightarrow IB + BAB - BAB + BI = IB + BI$$

از طرفی می‌دانیم که ماتریس همانی در هر ماتریسی و از هر طرفی ضرب شود، حاصل برابر همان ماتریسی می‌باشد. پس ماتریس‌های IB و BI هر دو برابر ماتریس B هستند:

$$IB + BI = 2B$$

۳۱. (گزینه ۳) تساوی گزینه اول فقط در حالتی برقرار است که ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی داشته باشد که این در مورد همهٔ ماتریس‌ها صادق نیست. در ضرب ماتریس‌ها، نمی‌توانیم در حالت کلی ساده‌سازی انجام دهیم. بنابراین گزینه «۲» همواره درست نیست. در مورد گزینه «۴» هم به‌راحتی می‌توان مثال نقض پیدا کرد. راحت‌ترین ماتریس‌ها را می‌توان مثل $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ مثال زد که هیچ‌کدام ماتریس صفر نیستند اما حاصل‌ضربشان، ماتریس صفر است.

۳۲. (گزینه ۴) اگر A و B ماتریس‌های برابر باشند، در حالت کلی ماتریس‌های A^n و B^n نیز برابرند. اما عکس این در حالت کلی برقرار نیست. به‌طورمثال بازهم ماتریس‌های راحت $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در این‌جا، ماتریس‌ها A^2 و B^2 باهم برابرند اما ماتریس‌ها A و B با هم برابر نیستند.

برای بررسی گزینه‌های «۱» و «۲» توان‌ها را به‌صورت ضرب ماتریس می‌نویسیم:

$$BA^n = B\underbrace{AA\dots A}_{n\text{تا}} = (BA)\underbrace{A\cdot A\dots A}_{n-1\text{تا}} = AB\underbrace{A\dots \cdot A}_{n-1\text{تا}} \quad (BA=AB)$$
$$= A(BA)\cdot\underbrace{A\dots A}_{n-2\text{تا}} = A(AB)\cdot\underbrace{A\dots A}_{n-2\text{تا}} = A^2(BA)\cdot A\dots A \quad (BA=AB)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود رفته‌رفته، توان‌های ماتریس A در طرف چپ بیشتر و ماتریس B به طرف راست منتقل می‌شود تا به ماتریس A^nB می‌رسد. در مورد گزینهٔ «۲» هم همین اتفاق می‌افتد.

۳۳. (گزینه ۲) در ضرب ماتریسی ذکرشده، قوانین اتحادها صادق می‌باشد، پس در این‌جا ماتریس‌ها تعویض‌پذیرند یعنی $AB = BA$. بنابراین گزینهٔ «۱» غلط است. در مورد گزینهٔ «۲» با تبدیل توان به ضرب ماتریسی در AB^3 داریم:

$$AB^3 = \underbrace{AB}_{AB=BA}BB = B\underbrace{AB}_{AB=BA}B = BA\underbrace{BB}_{}= B\underbrace{BA}_{AB=BA}B = BBAB$$
$$= B^2\underbrace{AB}_{AB=BA} = B^2BA = B^3A$$

گزینهٔ «۳» هم با روش گزینهٔ «۲» اشتباه است.

۳۴. (گزینه ۴) طبق تساوی داده‌شده، قوانین اتحادها برقرار است، پس ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیرند:

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} x & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -x-y & -1 \\ -2+y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & 1 \\ xy+2 & -y+1 \end{bmatrix}$$

از تساوی ماتریس‌ها، می‌دانیم که درایه‌های متناظر باید برابر باشند. اما درایه‌های واقع در سطر اول و ستون دوم این ماتریس‌ها به‌طور آشکارا با هم نابرابرند پس ماتریس‌هایی به‌صورت A و B نمی‌توانند تعویض‌پذیر باشند.

۳۵. (گزینه ۲) سعی می‌کنیم تا توان‌های دو طرف رابطهٔ داده‌شده را بسازیم. از توان دوم آن‌ها شروع می‌کنیم. دقت کنید که ماتریس واحد با هر ماتریسی، توزیع‌پذیر است و از هر طرفی در ماتریس ضرب شود، حاصل برابر همان ماتریس می‌باشد.

$$(A-I)(A-I) = A^2 - 2AI + I^2 = A^2 - 2A + I = -A + I$$
$$(A-I)^3 = (A-I)^2(A-I) = (-A+I)(A-I) = A - I$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که اگر توان زوج باشد، حاصل برابر $-A+I$ و اگر توان فرد بود، حاصل برابر $A-I$ است.

$$(A-I)^n = (A-I)(A-I)(A-I)(A-I)\cdots$$
$$-A+I$$
$$A-I$$
$$-A+I$$

در مورد $(I-B)^{1397}$ هم به همین ترتیب عمل می‌کنیم:

$$(I-B)^n=(I-B)(I-B)(I-B)(I-B)\cdots$$

I−B
I−B
I−B

به عبارت دیگر $I-B$ به هر توانی که برسد با خودش برابر است پس:

$$A-I=I-B\Rightarrow A+B=2I$$

۳۶. گزینه ۴ می‌خواهیم تعویض‌پذیری دو ماتریس قطری را بررسی کنیم:

$$\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1&0&0\\0&b_2&0\\0&0&b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1b_1&0&0\\0&a_2b_2&0\\0&0&a_3b_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}b_1&0&0\\0&b_2&0\\0&0&b_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1b_1&0&0\\0&a_2b_2&0\\0&0&a_3b_3\end{bmatrix}$$

همان‌طور که در بالا مشاهده می‌شود، با توجه به مثال ماتریس‌های قطری مرتبهٔ ۳ که آمده، تعویض‌پذیری در دو ماتریس قطری صادق می‌باشد. بنابراین قوانین اتحادها دربارهٔ ماتریس‌های قطری، درست هستند. $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$

$$\Rightarrow A^2+B^2=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}-4I$$

$$=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2(A^2+B^2)=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

۳۷. گزینه ۴ از آن‌جایی‌که ماتریس واحد با هر ماتریس هم‌مرتبه‌ای با خودش، توزیع‌پذیر است، می‌توان گفت که ماتریس واحد با هر ماتریسی، قوانین اتحادها را دارا می‌باشند. عبارت داده شده به صورت اتحاد مزدوج می‌باشد که حاصل آن ماتریس A^2-I^2 است. توان nاُم ماتریس واحد با خودش برابر است پس $A^2-I^2=A^2-I$. در نهایت چون فقط عضو ۲×۲ از این ماتریس را خواسته می‌توان عضو ۲×۲ از A^2 را پیدا کرد و عضو ۲×۲ از ماتریس I که همان ۱ می‌باشد را از آن کم کرد. برای پیدا کردن عضو ۲×۲ از A^2 نیز کافیست که سطر دوم از ماتریس A را نظیر به نظیر در ستون دوم از خودش ضرب کرد.

$$(A^2)_{\text{درایهٔ سطر دوم و ستون دوم}}=\text{سطر دوم}\,A\times\text{ستون دوم}\,A$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$(A^2-I^2)_{2\times 2}=[0]$$

۳۸. گزینه ۲ ماتریس B را به سمت چپ رابطه منتقل می‌کنیم تا به تساوی $A-B=C$ برسیم. سپس دو طرف تساوی را در خودشان ضرب می‌کنیم (هر طرف را به توان دو می‌رسانیم):

$$(A-B)(A-B)=C^2\Rightarrow A^2-AB-BA+B^2=C^2$$

توجه کنید که در این‌جا ذکرنشده که ضرب ماتریس‌های A و B، خاصیت جابه‌جایی دارد.

۳۹. گزینه ۳ در دو طرف تساوی‌داده شده عبارت ماتریسی $A+I$ را ضرب می‌کنیم، دلیل این عملیات عبارت است از این‌که چون ماتریس واحد با هر ماتریسی توزیع‌پذیر می‌باشد، پس با هر ماتریسی در اتحادها صادق است. طرف چپ تساوی داده‌شده، عبارت چاق از اتحاد چاق و لاغر می‌باشد. پس اگر عبارت لاغر اتحاد را در آن ضرب کنیم می‌توانیم ماتریس A^3+I^3 را داشته باشیم:

$$(A+I)(A^2-A+I=0)\Rightarrow A^3+I^3=A^3+I=0\Rightarrow A^3=-I$$

برای پیدا کردن حاصل‌جمع ماتریسی داده‌شده، باید بتوانیم حالت کلی توان‌ها را بررسی کنیم. توان‌های زوج A^3 برابر I و توان‌های فرد آن برابر $-I$ است: $(A^3)^{2k}=I\,,\,(A^3)^{2k+1}=-I$

$$A^4=A^3\times A=-I\times A=-A\,,\,A^5=A^4\times A=-A^2$$

$$A^6=(A^3)^2=I\,,\,A^7=A^6\cdot A=A,A^8=A^7\cdot A=A^2$$

$$A^9=(A^3)^3=-I\,,\,A^{10}=A^9\times A=-A$$

$$\text{عبارت}=A+A^2+\underset{-I}{A^3}+\underset{-A}{A^4}+\underset{-A^2}{A^5}+\underset{I}{A^6}+\underset{A}{A^7}+\underset{A^2}{A^8}+\underset{-I}{A^9}+\underset{-A}{A^{10}}$$

$$=A^2-I$$

۴۰. گزینه ۱ برای چند توان اولیهٔ A^n، ضرب ماتریسی ۱ به صورت زیر داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\2&-1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}3&-2\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-3\\3&-2\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{bmatrix}4&-3\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-4\\4&-3\end{bmatrix}$$

در همهٔ ماتریس‌های فوق درایهٔ سطر اول ستون اول، یک واحد از توان بیشتر، درایهٔ سطر اول ستون دوم، قرینهٔ توان، درایهٔ سطر دوم ستون اول برابر توان و درایهٔ سطر دوم ستون دوم یک قرینهٔ عددی یک واحد کمتر از توان می‌باشد.

$$A^n=\begin{bmatrix}n+1&-n\\n&-(n-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n+1&-n\\n&-n+1\end{bmatrix}$$

۴۱. گزینه ۱ ماتریس بالامثلثی یا پائین‌مثلثی از مرتبهٔ n، اگر تمام درایه‌های قطر اصلی‌اش برابر صفر باشد، در توان nاُم پوچ توان است. پس ماتریس فوق که مربعی از مرتبهٔ ۳ می‌باشد، قطعاً در توان سوم پوچ توان است. از آن‌جا می‌توان گفت که A^3 و A^4 هر دو ماتریس صفر هستند.

حالا فقط باید ماتریس A^2 را پیدا کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A+A^2+A^3+A^4=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\bar{O}+\bar{O}=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

جمع درایه‌های ماتریس حاصل برابر با ۴ می‌باشد.

۴۲. گزینه ۳ به سراغ بررسی الگوی رفتاری ماتریس A^n می‌رویم. برای این‌کار، حاصل چند توان اولیهٔ ماتریس A را پیدا می‌کنیم.

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{bmatrix}$$

می‌دانیم که عدد را می‌توان از تمام درایه‌های ماتریس فاکتور گرفت. پس در این‌جا عدد ۳ را از همهٔ درایه‌های ماتریس خارج می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=3A$$

برای توان سوم A باید ماتریس A^2 را در ماتریس A ضرب کنیم که حاصل برابر $3A\times A$ یا $3A^2$ می‌شود. پس داریم:

$$A^3=A^2\cdot A=(3A).A=3A^2=3(3A)=3^2A$$

بنابراین با توجه به ماتریس‌های A^2 و A^3 می‌توانیم بگوئیم که ماتریس A^n برابر با $3^{n-1}A$ می‌شود یعنی داریم: