روزی نشست بر پاره‌سنگی

با انگشتانی گره‌کرده در زیر چانه‌اش

و خیره نگاهی تا بی‌انتها

آرام‌آرام شرارِ وسوسه‌ای در رگ‌هایش دوید

و هُرمِ قدرتی سترگ، ساق‌های بی‌قرارش را در هم نوردید

ناگاه به پا خاست

و گام در راهی نهاد

بی‌انتها

ـ انسان را می‌گویم ـ

او ناچارِ رفتن بود و یافتن

شاید به این امید که روزی، بر فراز قلّه‌ی دریافتن، پاتابه وا کُند و یَله بر چارطاقِ نیلیِ چرخ دهد.

تقدیم به شما و همه ی آن هایی که

برای «یافتن»

راهی جز «دریافتن» نمی شناسند.

سرشناسه: سلامیان، محمدصالح، ۱۳۵۵- حسینی، عادل، ۱۳۷۲
عنوان و نام پدیدآور: هزار تست ریاضیات تجربی / نویسنده محمدصالح سلامیان، عادل حسینی
مشخصات نشر: تهران: دریافت، ۱۴۰۱.
مشخصات ظاهری: ۲۲ × ۲۹ سم.
شابک: ۳-۲۶-۶۷۷۳-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی: فیپای مختصر

هزار تست ریاضیات تجربی

مؤلفان: دکتر محمد صالح سلامیان، مهندس عادل حسینی
ویراستاران علمی: مائده میرزایی، امیرحسین رحمتی، اردلان گرامی، سارا فروزانی آذر، کسری ناظمی، علی بیک‌زاده
طراح جلد: ایمان خاکسار
ناظر چاپ: سعید حیدری
صفحه‌آرا: فرناز صفی، محمد یوسفی
نوبت چاپ: اول ـ ۱۴۰۱
شمارگان: ۱۵۰۰
بها: ۱۶۵۰۰۰ تومان
ناشر: نشر دریافت
تلفن: ۶۶۹۵۰۳۹۲ ـ ۰۲۱
نشانی اینترنتی: www.Daryaftpub.com
پست الکترونیک: daryaftpubgmail.com

مقدمه مؤلفان

هزاران نرگس[1] از چرخ جهان‌گرد   فرو شد تا بر آمد یک گل زرد[2]

اگر زمان جنینی‌ات، پای تخته بوده باشی، اولین خاطرات کودکی‌ات از گچ و تخته و کلاس و مدرسه باشد و سه‌چرخه بازی دوران کودکیت در حیاط بزرگی باشد که زنگ‌های تفریح هشتصد نفر را به خود می‌دیده است و وقتی همه سر کلاس هستند، زمانت به معلم‌بازی و مشق و نوشتن بگذرد، ناخودآگاه خانه‌ات، مدرسه، محل کار تو کلاس و زندگی‌ات آمیخته با یادگیری و آموزش خواهد بود. علاقه به تدریس و آن هم ریاضی را زمانی در خود کشف کردم که مادرم وقتی پنجم ابتدایی بودم، کتابی به نام «هزار مسئله در ریاضیات» برایم خرید، جلدی سبز رنگ داشت، سبز یشمی، همهٔ کتاب با خط تحریری، خوشنویسی شده بود، سؤال‌های قشنگی داشت از درصد و تناسب محاسبهٔ مساحت قسمت رنگ شده و ... معلم‌مان از اوایل اسفند به علت مصدومیت تا بعد از عید مدرسه نیامد. زنگ‌های ریاضی با کلاس پنجم دیگری ادغام می‌شدیم، تنگ هم می‌نشستیم و از معلم دیگری درس می‌گرفتیم و زنگ بعد در حضور ناظم مدرسه از همان کتاب هزار مسئله، برای همکلاسی‌هایم مسئله حل می‌کردم.

آن زمان کلاس پنجم، سال مهمی بود، امتحان نهایی داشت. هر شب تعدادی مسئله برای فردا، انتخاب و حل می‌کردم. بعد از عید و حتی با آمدن معلم‌مان، این داستان ادامه داشت... تا این‌که بعد از امتحان نهایی ریاضی که معلم‌مان هم به حوزهٔ امتحانی آمده بود، بچه‌ها از هر دو نفرمان تشکر می‌کردند که هیچ سؤال جدیدی در آزمون ندیده‌اند!...

اما در مورد این کتاب؛ دوست فرهیخته‌ام، دکتر هامون سبطی عزیز، مدیر مسئول نشر دریافت کتابی خواستند که هم مناسب جمع‌بندی و مرور کل مطالب و آمادگی برای کنکور باشد و هم بتواند به عنوان منبعی در طی سال برای آزمون‌های آزمایشی مورد استفاده قرار گیرد. در این راستا پروژه تألیف کتاب «هزار تست ریاضیات تجربی» را کلید زدیم.

از زحمات سرکار خانم‌ها مائده میرزایی (رتبهٔ ۵۷ کنکور تجربی ۱۴۰۰) و سارا فروزانی آذر و آقایان امیرحسین رحمتی (رتبهٔ ۲۳۰ کنکور ریاضی ۹۹)، اردلان گرامی (رتبه ۹۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۰)، کسری ناظمی و علی بیک‌زاده جهت ویراستاری علمی تشکر و قدردانی به عمل می‌آید.

از تلاش‌های سرکار خانم فرناز صفی، خانم نرگس اسودی و آقای محمد یوسفی که با صبر و حوصلهٔ فراوان امور تایپ و صفحه‌آرایی کتاب و آقای امیرحسین صفی که نمونه خوانی کتاب را انجام دادند صمیمانه سپاسگزارم.

و همچنین از مدیران تألیف انتشارات، آقایان علی امین‌صادقیه و یونس حمه‌صادقی عزیز به دلیل هموار ساختن مسیر تألیف این کتاب سپاسگزاری می‌کنم.

چقدر نوشتن در نشر دریافت دلنشین است، وقتی ادیبی چون دکتر هامون سبطی نازنین مدیر مسئول انتشارات باشد. دغدغهٔ آموزش پاک و مبارزه با هرزآموزی و پیگیری مطالبات دانش‌آموزان و داوطلبان کنکور، کارهایی است که تنها یک پدر برای فرزندان میهنش انجام می‌دهد.

و در آخر این کتاب را تقدیم می‌کنم به مادرم، نخستین معلمم، و خواهرم، نخستین مشوقم.

بهروز باشید

سامان سلامیان

معروف است که می‌گویند «ریاضیات» زبان خداست، البته خود «ریاضیات»، نه این ریاضیِ دبیرستان. به هر حال این ریاضیِ دبیرستان هم بد نیست، بچه همان «ریاضیات» است، شبیه‌اند یه جورایی! معنی این حرف این است که اگر ریاضی‌ات خوب باشد، جهان را بهتر می‌فهمی (حداقل احتمال فهمت بیشتر است)، چرا که ذهن ریاضی‌گونه منظم است، منسجم است، حرفش روشن است و مسیرش را می‌داند!... حرف در این باره زیاد است، بگذریم.

همیشه سعی کرده‌ام اصل حرف ریاضی را (اگر خودم فهمیده باشم) به شاگردان و اطرافیانم بگویم، راستش این کتاب را هم خیلی دوست دارم چون از همین حرف‌هاست، منسجم و روشن است و شبیه «ریاضیات»!

کتاب خوب هزار تست را برای این تالیف کرده‌ایم که «ریاضیات» را کمی و هم ریاضی کنکور را خیلی برایتان شیرین کنیم! ممنونم از استاد عزیزم دکتر سامان سلامیانِ رفیق، مهربان و استاد باتجربه که توفیق شد در این راه کنار ایشان حرف‌هایم را به شاگردان بیشتری بزنم.

همچنین ممنونم از دکتر هامون سبطی عزیز و انتشارات دریافت و تمام بچه‌های گل تولید، که کنارشان هم یاد گرفتیم و هم لذت بردیم.

این کتاب هدیه ناقابلی است برای آدمایی که قلبشان برای جهان کوچکمان یعنی "وطن" می‌تپد ... تقدیمشان!

سپاس بیکران

سیدعادل حسینی

---

۱. نرگس: ستاره   ۲. گل زرد: خورشید

نحوهٔ استفاده از کتاب

این کتاب شامل ۹ فصل است. هشت فصل عناوین اصلی کنکور و فصل نهم آزمون‌های جامع و کنکورهای سراسری. هر فصل شامل ۲۷ بستهٔ آزمونی است که در هر بسته تعداد سؤالات رایج آن فصل در کنکور سراسری طرح شده‌اند. هر بسته شامل تست‌هایی با درجهٔ دشواری متفاوت است و عموماً تست‌های بسته‌های بعدی تا حدی سخت‌تر از بسته‌های قبل از خود است.

از این بسته‌ها به ۲ روش می‌توان استفاده کرد:

الف) مرور فصل‌ها: با پاسخگویی به هر بسته در هر کدام از فصل‌ها، یک بار با تعداد محدودی سؤال، مطالب مهم آن فصل دوره خواهد شد.

ب) مرور کلی: با انتخاب یک بسته از هر یک از فصول یک تا هشت، یک آزمون جامع ۳۰ سؤالی خواهید داشت و می‌توانید، تمامی مباحث را جمع‌بندی کنید.

می‌توانید به سلیقهٔ خودتان، آزمون جامع بسازید: "Build your own test"

مثلاً وقتی برای ساخت آزمون اول سراغ فصل «تابع» می‌روید، ۲۷ انتخاب برای برداشتن یک بسته از ۲۷ بسته دارید، تا فصل هشتم نیز، تعداد انتخاب‌ها برای آزمون اول شما، ۲۷تاست که نهایتاً ۸ (۲۷) انتخاب خواهد بود.

برای ساختن آزمون دوم، چون از هر بسته یکی کم شده و در آزمون اول استفاده شده شما ۲۶ انتخاب دارید و چون از هر یک از ۸ فصل باید یک بسته بردارید ۸ (۲۶) انتخاب دارید برای ساخت آزمون سوم، ۸ (۲۵) انتخاب و ... (حالا شما حساب کنید که کلاً چند مدل آزمون می‌توان ساخت؟)

ویژگی‌های این کتاب

- در پاسخ‌های تشریحی سعی شده در صورت لزوم راه‌حل‌های دوم نیز نوشته شوند.
- در برخی تست‌ها برای درک بهتر، نمودار تابع را رسم کرده‌ایم. با این‌که مسئله بدون شکل و نمودار هم حل می‌شود.
- سعی شده مسائل «مادر» که از آن‌ها بچه مسئله تولید می‌شود، در کتاب آورده شود. مسائلی که به کمک ایدهٔ آن‌ها، می‌توان مسائل مشابه دیگر را حل کرد. (حل مسئله به کمک حل مسئله)
- درجهٔ سختی تست‌ها با شیب ملایم در بسته‌ها، افزایش یافته است.

در طرح تست‌ها برای آن‌که همهٔ نکات و مطالب را پوشش داده شود، وسواس زیادی بکار بردیم و بارها یک تست یا جای آن در یک بسته را تغییر دادیم. سعی کردیم در تست‌های یک بسته، مثل اتفاقی که در کنکور می‌افتد، هم تست ساده، هم متوسط و هم جدید و ایده‌دار طرح کنیم. هدف اصلی این کتاب، مرور کامل و پوشش دادن همهٔ عناوین و طبقه‌بندی موضوعات در ذهن داوطلب بوده است. در این کتاب علاوه بر ایده‌های رایج، تست‌هایی جدید و نونگاشت با توجه به منابع کتب درسی جدید و محتوای آن‌ها و همسنگ سؤالات کنکور دو سال اخیر طرح شده‌است. تست‌ها به گونه‌ای است که اعتماد به نفس مخاطب از بین نرود و در این میان ایده‌های جدید در طرح تست را نیز ببینند.

از صاحب‌نظران، دبیران و دانش‌آموزان گرامی تقاضا داریم در صورت مشاهده هر گونه کاستی یا نظری حتماً آن را از طریق پیام به واتساپ ۰۹۲۱۳۳۶۳۱۹۸ بیان کنند.

برای مشاهده کلیپ‌های آموزشی ریاضی می‌توانید به سایت www.samansalamian.ir و یا صفحه اینستاگرام salamianriazi یا کانال تلگرامی salamianriazi مراجعه نمایید.

فهرست

فصل اول: تابع

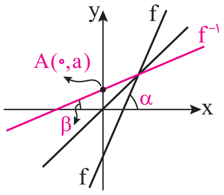
تعریف، انواع تابع، تابع (اکید) یکنوا، تابع یک‌به‌یک، تابع وارون، ترکیب توابع و تابع مرکب، تبدیل و انتقال توابع، تساوی دو تابع، دامنه و برد تابع، تابع نمایی و لگاریتمی

۱

۱. به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر a، رابطهٔ $f(x)=\begin{cases} f(۱-x) & ;\ x\le ۰ \\ ۲x^۲+ax+a & ;\ x\ge ۰ \end{cases}$ نمایش یک تابع است؟

۱) ۱   ۲) -۲   ۳) -۱   ۴) ۲

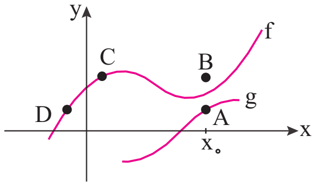
۲. تابع خطی $f(x)=mx+h$ و وارونش در شکل زیر رسم شده‌اند. زوج مرتب $(a,\cot\alpha)$ کدام است؟



۱) $(-\frac{m}{h},\frac{۱}{m})$ ۲) $(-\frac{h}{m},m)$

۳) $(-\frac{h}{m},\frac{۱}{m})$ ۴) $(\frac{m}{h},\frac{۱}{m})$

۳. اگر نمودار دو تابع f و g به صورت زیر باشد، نقطهٔ $(x_۰,fog(x_۰))$ کدام است؟



۱) A   ۲) B

۳) C   ۴) D

۴. اگر $\log ۲ = ۰/۳$ باشد، حاصل $\log(۶-۲\sqrt{۵})+۲\log(۱+\sqrt{۵})$ کدام است؟

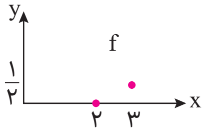
۱) ۰/۸   ۲) ۰/۹   ۳) ۱/۲   ۴) ۱/۵

۲

۱. اگر نمودار تابع $y=\frac{۲x+۳}{(m-۱)x+n}$ به صورت تابعی خطی با شیب $\frac{۱}{۲}$ باشد،حاصل $m+n$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۳   ۳) ۵   ۴) ۷

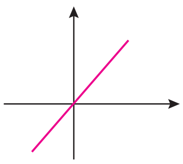
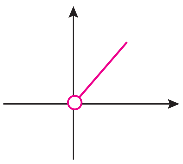
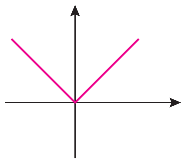
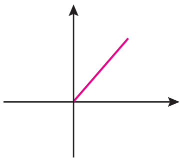
۲. اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، تابع $\frac{۲}{f}$ کدام است؟



۱) $\{(\frac{۱}{۲},۰),(\frac{۱}{۳},۲)\}$ ۲) $\{(۳,۴)\}$

۳) $\{(\frac{۱}{۳},۴)\}$ ۴) $\{(۳,۱)\}$

۳. اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲$ باشد، کدام گزینه قسمت‌های مشترک نمودارهای دو تابع fog و gof را به درستی نشان می‌دهد؟

۱)    ۲)    ۳)    ۴) 

۴. جواب معادلهٔ $۹^x-۳^x=۵۶$ کدام است؟

۱) $\log_۲ ۶$ ۲) $\log_۲ ۹$ ۳) $\log_۷ ۲$ ۴) $\log_۳ ۸$

۱۸

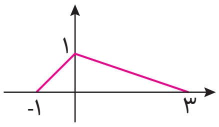
۱. معادلهٔ $3[x]-|x|=12$ چند جواب دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲. اگر $(fog)^{-1}(x)=f(x)$ باشد، وارون تابع $(gof)(x)$ کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $f^{-1}(x)$ ۳) $g(x)$ ۴) $g^{-1}(x)$

۳. نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر مساحت محدود به نمودار تابع $g(x)=af(ax)-1$ و محور x ها برابر $\frac{8}{9}$ باشد، مقدار مثبت a کدام است؟



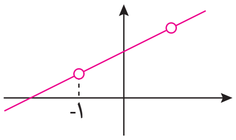
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۴

۴. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $(0/4)^{1+(\log x)^2}=6/25^{2-\log x^3}$ کدام است؟

۱) 10^6 ۲) 10^5 ۳) 10^4 ۴) 10^3

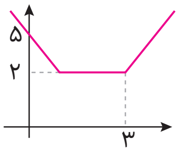
۱۹

۱. اگر نمودار $y=\frac{a^2x^3+2x^2-x+b}{x^2+c}$ به‌صورت شکل مقابل باشد، حاصل $a^2-b^2+c^2$ کدام است؟



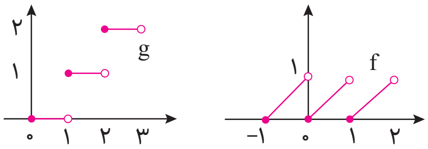
۱) -۲ ۲) -۴ ۳) ۲ ۴) صفر

۲. نمودار تابع f متقارن است و در شکل مقابل نشان داده شده است. ضابطهٔ وارون تابع در بازه‌ای که اکیداً نزولی است، کدام است؟



۱) $y=\frac{21-3x}{7}$ ۲) $y=\frac{15-3x}{7}$ ۳) $y=\frac{15-x}{7}$ ۴) $y=\frac{21-x}{7}$

۳. اگر نمودار f و g به صورت مقابل باشند، تابع $fog-gof$ با کدام تابع برابر است؟



۱) $2f$

۲) $2f-g$

۳) صفر

۴) ۱

۴. جواب معادلهٔ $\log(x^3+6x^2+12x+9)=1+\log(x+3)$ به صورت $\frac{1}{2}(-3+\sqrt{a})$ است. مقدار a کدام است؟

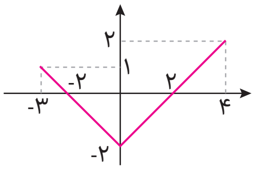
۱) ۲۳ ۲) ۲۹ ۳) ۳۱ ۴) ۳۷

۲۰

۱. اگر $f(x)=\frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x)=\frac{1-3x}{x+2}$ باشد، معادلهٔ $(gof)(x)=f(x)$ چند ریشهٔ منفی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

۲. اگر شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x-2)$ باشد، برد تابع $y=\sqrt{|4f(x)-1|}$ کدام است؟



۱) $[1,3]$ ۲) $[1,\sqrt{7}]$ ۳) $[0,\sqrt{7}]$ ۴) $[0,3]$

۳. کدام تابع روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است؟

۱) $y=-x([x]+[-x])$ ۲) $y=\frac{[x]+[-x]}{x}$ ۳) $y=\frac{1}{[x]+[-x]}$ ۴) $y=\frac{-x}{[x]+[-x]}$

۴. اگر $k=\log\sqrt[4]{19+8\sqrt{3}}+\log\sqrt[6]{100-51\sqrt{3}}$ باشد، حاصل 10^{2k} کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

فصل چهارم: حد و پیوستگی

محاسبهٔ حد چپ و راست، حد از روی نمودار، رفع ابهام $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$، پیوستگی در نقطه و بازه، حد در بی‌نهایت و حد بی‌نهایت

۱

۱. حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{1}{a}} \dfrac{a^2x^2-1}{a^2x^2-3ax+2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۲. تابع $f(x)=[x]^2-[x]$ روی کدام بازهٔ زیر پیوسته است؟

۱) $(1,3)$ ۲) $(0,3)$ ۳) $(1,5)$ ۴) $(0,2)$

۳. حاصل $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{|x^3+x-2|}{x^3-x^2-x+1}$ کدام است؟

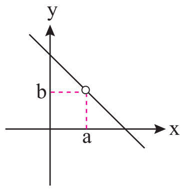
۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) ۱ ۴) صفر

۲

۱. حاصل $\lim\limits_{x\to0} \log[\sin x]$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۲. نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{2-x}$ در شکل روبه‌رو رسم شده‌است. حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲

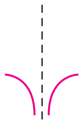
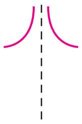
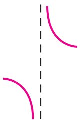
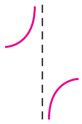
۳) ۳ ۴) ۴

۳. تابع $f(x)=\dfrac{2[x]}{x+m[2x]}$ در $x=-1$ پیوسته است. مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۳

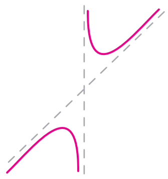
۱. تابع $f(x)=\dfrac{\cos 3x}{x^2-2x+1}$ حوالی $x=1$ به کدام صورت است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۲. تابع $f(x)=[x]-[\frac{x}{4}]$ در $x=8$ چه وضعیتی دارد؟

۱) فقط پیوستگی راست دارد. ۲) فقط پیوستگی چپ دارد. ۳) پیوسته است. ۴) پیوسته نیست.

۳. نمودار تابع $y=\dfrac{x^2+2ax+3}{x-1}$ به صورت مقابل است. حدود a کدام است؟



۱) $a>-1$ یا $a<-3$

۲) $a<-2$

۳) $a\neq-2$

۴) $a>-2$

۲۲

۱. حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan^2 x}{2-2\cos 2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) ۱

۲. مقدار a کدام باشد تا تابع $f(x)=\begin{cases} a & ; \ x=1 \\ \dfrac{3x-\sqrt{5x+4}}{x-\sqrt{3-2x}} & ; \ x\neq 1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد؟

۱) $\frac{12}{13}$ ۲) ۱- ۳) $\frac{13}{12}$ ۴) ۱

۳. اگر $f(x)=\dfrac{ax+1-\sqrt{x^2+1}}{bx|x|-x}$ در $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳- ۳) ۳ ۴) ۴-

۲۳

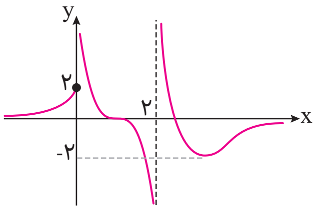
۱. حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sin\pi x}{[x]+\cos\pi x}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) $+\infty$

۲. تابع $f(x)=\begin{cases} a & ; \ x=1 \\ \dfrac{x^3+bx-4}{x-1} & ; \ x\neq 1\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۳. نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}[(fofof)(x)]$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲- ۳) ۱- ۴) صفر

۲۴

۱. اگر $f(x)=\begin{cases} [-x](x+4) & ; \ x\le 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & ; \ x>0\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^2-x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴- ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۳-

۲. تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{8}}-\sqrt{x-1}$ روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۳. در تابع $f(x)=\dfrac{x^n+3x}{ax^3-2x^2+1}$، اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) ۴- ۳) ۲- ۴) $+\infty$

۲۵

۱. خارج قسمت تقسیم عبارت $p(x)=x^3+ax^2+bx-5$ بر عبارت x^2-4 برابر $q(x)$ و باقی‌ماندهٔ آن برابر ۳ شده است. $q(1)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۴-

۲. تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2-7x+4}{2\sqrt[3]{x}-2} & ; \ x<1 \\ b\cos(\frac{x}{3}x) & ; \ x\ge 1\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار b کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۳-

۳. حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{\sin x+\cos x+1}{\cos 2x-1}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) صفر ۴) $+\infty$

فصل پنجم: مشتق و کاربرد مشتق

تعریف مشتق، قواعد مشتق‌گیری، مشتق‌پذیری و پیوستگی، آهنگ تغییر، تابع (اکیداً) یکنوا، نقاط بحرانی، اکسترمم‌های مطلق و نسبی، بهینه‌سازی

۱

۱. شیب خط واصلی که دو نقطه به طول‌های ۲ و x از نمودار تابع $y=f(x)$ را به هم وصل می‌کند، از دستور x^3-4x^2+1 محاسبه می‌شود. شیب خط مماس بر نمودار f در $x=2$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) -۲   ۳) -۴   ۴) -۷

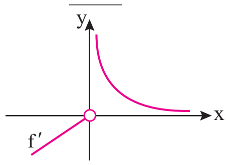
۲. تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع $f(x)=\begin{cases}|x-2| & ; \ x>1\\ \sqrt[5]{x^2-4x} & ; \ x\le 1\end{cases}$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۳. اگر $f(x)=\dfrac{x^3-2}{1+x^3}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ باشد، حاصل $f'(g(x)).g'(x)$ به ازای $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۴. تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است و مشتق آن در نمودار شکل روبه‌رو رسم شده است. در مورد نقطهٔ $x=0$ روی تابع f کدام مطلب زیر درست نیست؟



۱) نقطه بحرانی نیست.

۲) مینیمم مطلق و نسبی است.

۳) دو نیم مماس چپ و راست در $x=0$ بر هم عمودند.

۴) برای تابع f بی‌شمار جواب وجود دارد.

۵. می‌خواهیم یک صفحه چاپی شامل ۶۰ سانتی‌متر مربع مطلب چاپ شده باشد، ضمناً در هر طرف ۵ سانتی‌متر و در بالا و پایین ۳ سانتی‌متر حاشیه داشته باشیم. طول خطوط چاپ شده چقدر باشد که کاغذ به‌کاررفته مینیمم گردد؟

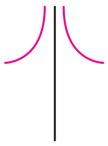
۱) ۵   ۲) ۷/۵   ۳) ۱۰   ۴) ۱۲/۵

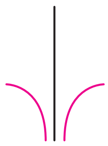
۲

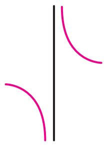
۱. اگر $f(x)=ax[5x]-2$ و $f'(\frac{2}{3})=2a-1$ باشد، مقدار a کدام است؟

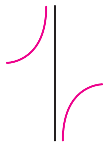
۱) ۱   ۲) -۱   ۳) ۲   ۴) -۲

۲. نمودار تابع مشتق $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ در همسایگی محور عرض‌ها به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳. نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-6x+2$ در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی است. اگر $b-a$ بیشینه باشد، نقطهٔ وسط بازه کدام است؟

۱) -۲/۵   ۲) ۳   ۳) ۳/۵   ۴) ۴

۴. تعداد نقاط بحرانی نمودار تابع $f(x)=|x-1|\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۳   ۳) ۲   ۴) ۱

۵. نمودار $y=x^2-3|x|+2$ چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۲۳

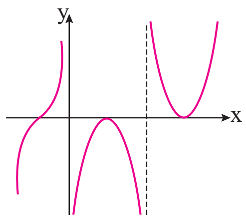
۱. آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ در نقطه‌ای با کدام طول با آهنگ متوسط تغییر آن در بازهٔ $[۲,۷]$ برابر است؟

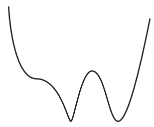
۱) ۲/۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۴/۲۵ ۴) ۵

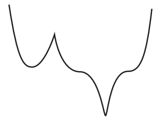
۲. تابع $f(x)=\begin{cases} ax-۲ & ; \ x<۰ \\ ۱-b\sqrt{x+۱} & ; \ x\geq ۰ \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. مقدار a کدام است؟

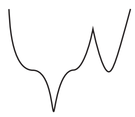
۱) -۳ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳

۳. نمودار مشتق تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار f در کدام شکل به درستی رسم شده است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴. اگر $f(x)=x^۲+\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{۴x}-x^۳$ باشد، مشتق تابع gof در $x=۱$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۷۵}{۶}$ ۲) $-\frac{۸۵}{۳}$ ۳) $-\frac{۱۶۵}{۶}$ ۴) $-\frac{۸۰}{۳}$

۵. برای تعدیل و بهبود نمرات یک کلاس نمرات را در تابع $y=\sqrt{۲۰x}$ قرار می‌دهند که x نمرهٔ خام و y نمرهٔ تعدیل شده است. در این نوع تعدیل، بیش‌ترین مقدار افزایش نمره کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۵

۲۴

۱. اگر $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳+x|x-۱|$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱-h)}{h}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

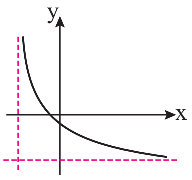
۲. تابع $f(x)=|kx^۴+(k+۲)x^۲+۲|$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. حدود k کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $[۰,+\infty)-\{۲\}$ ۳) $\mathbb{R}-[-۲,۰]$ ۴) $[۲,+\infty)$

۳. اگر $f(x)=x^۲+۲x$ و $g(x)=x-\sqrt{x+۱}$ باشد، مجموع طول نقاط بحرانی تابع gof کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) صفر

۴. بخشی از نمودار تابع $f(x)=\frac{(a^۲+۱)x+۱}{(a-۳)x-a}$ در شکل زیر رسم شده است. حدود a کدام است؟



۱) $(-۱,۳)$ ۲) $(۰,۱)$
۳) $(۰,۳)$ ۴) $(۱,۳)$

۵. برد تابع $f(x)=\frac{۶x}{۱+۲x\sqrt{x}}$ کدام است؟

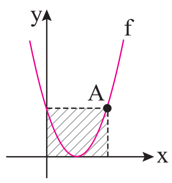
۱) $[۰,\sqrt{۶}]$ ۲) $[۰,۳]$ ۳) $[۰,۲]$ ۴) $[۰,\sqrt{۵}]$

۲۵

۱. مقدار a کدام باشد تا نیم‌مماس‌های نمودار تابع $f(x)=(x-۱)\sqrt[۳]{ax+۲[x]}$ در $x=۱$ بر هم عمود باشند؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) -۲ ۴) -۱

۲. در شکل زیر نمودار سهمی $f(x)=(x-۱)^۲$ رسم شده است و مساحت مستطیل هاشورخورده تابعی از طول نقطهٔ A است. آهنگ لحظه‌ای تغییر مستطیل مورد نظر در $x=۲$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر آن در بازهٔ $[۰,۲]$ است؟



۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ‌نامه فصل اول: تابع

۱

۱. $x=۰$ در دامنهٔ تعریف هر دو ضابطه قرار دارد، پس مقادیر هر دو ضابطه به ازای $x=۰$ باید برابر باشند:

$$\begin{cases} \text{ضابطهٔ بالایی}: f(۰)=f(۱) \\ \text{ضابطهٔ پایینی}: f(۰)=a \end{cases} \xlongequal{\text{ضابطه پایینی}} ۲(۱)^۲+a(۱)+a=۲a+۲ \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} ۲a+۲=a \Rightarrow a=-۲$$

۲. a، عرض نقطهٔ برخورد $f^{-۱}$ با محور y ها یا همان عرض از مبداء $f^{-۱}$ است. کافی است $f^{-۱}$ را یافته و در آن $x=۰$ قرار دهیم:

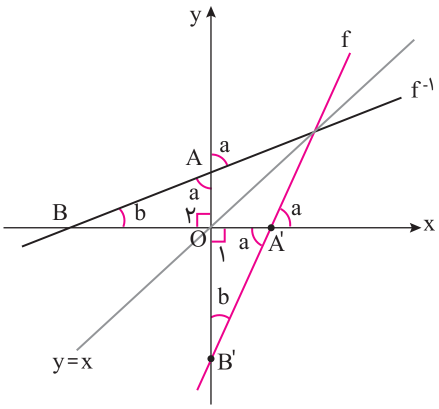
$$y=f(x)=mx+h \Rightarrow x=\frac{y-h}{m}=\frac{y}{m}-\frac{h}{m} \Rightarrow y=\frac{x}{m}-\frac{h}{m}=f^{-۱}(x) \xrightarrow{x=۰} f^{-۱}(۰)=-\frac{h}{m}$$

در تابع $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{m}x-\frac{h}{m}$ زاویه برخورد $f^{-۱}$ با محور طول‌ها β نام‌گذاری شده است. می‌دانیم شیب یک خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که با جهت مثبت محور x ها می‌سازد و لذا $\tan\beta=\frac{۱}{m}$ است. از طرفی اگر f تابعی خطی باشد، زاویهٔ برخورد آن و وارونش با محور طول‌ها متمم یکدیگرند. یعنی $\alpha+\beta=۹۰^\circ$ و

$$\cot\alpha=\tan\beta=\frac{۱}{m}$$

به شکل زیر دقت کنید:

زاویهٔ برخورد خط f و وارونش با محور طول‌ها متمم یکدیگرند و $\alpha+\beta=۹۰^\circ$

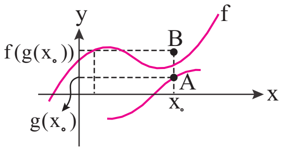


دو مثلث ΔOAB و $\Delta OA'B'$ به حالت دو ضلع و زاویه بین هم‌نهشت هستند.

$$(OA=OA',\ OB=OB',\ \widehat{O}_۱=\widehat{O}_۲=۹۰^\circ) \rightarrow \widehat{B}=\widehat{B'}=\beta$$

۳. نقطه طولی برابر $x_۰$ دارد، پس A یا B جواب است. در $f(g(x_۰))$، ابتدا $g(x_۰)$ را می‌یابیم، حال به اندازهٔ $g(x_۰)$ از مبداء دور می‌شویم و سپس $g(x_۰)$ را به عنوان ورودی، تحویل f می‌دهیم تا $f(g(x_۰))$ به دست آید.

به طول $x_۰$ و عرض $f(g(x_۰))$، نقطه‌ای در صفحه می‌گذاریم که B خواهد بود.



۴. می‌دانیم: $\log_c a+\log_c b=\log_c ab\ ,\ \log_b a^n=n\log_b a$

$$\log(۶-۲\sqrt{۵})+۲\log(۱+\sqrt{۵})=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۱+\sqrt{۵})^۲$$

$$=\log(۶-۲\sqrt{۵})(۱+\sqrt{۵})^۲=\log(۶-۲\sqrt{۵})(۱+۵+۲\sqrt{۵})=\log(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵})$$

$$=\log\left((۶)^۲-(۲\sqrt{۵})^۲\right)=\log(۳۶-۲۰)=\log۱۶=\log۲^۴=۴\log۲=۴(۰/۳)=۱/۲$$

۲

۱. برای این که خط باشد، باید به صورت $y=ax+b$ درآید، پس باید $m=۱$ باشد و داریم:

$$\Rightarrow y=\frac{۲x+۳}{n}=\frac{۲}{n}x+\frac{۳}{n}$$

$$\text{شیب خط}=\frac{۲}{n}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow n=۴$$

$$\Rightarrow m+n=۱+۴=۵$$

توجه تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ زمانی به خط تبدیل می‌شود که:

الف) $c=۰$ باشد:

$$f(x)=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$$

$f(x)$ به خط با شیب $\frac{a}{d}$ تبدیل می‌شود.

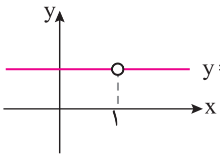
ب) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ باشد:

$$f(x)=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

تابع ثابت (خط افقی) که در ریشهٔ مخرج تو خالی است. مثل:

$$f(x)=\frac{۲x-۲}{x-۱}=\frac{۲(x-۱)}{x-۱}=۲(x\neq ۱)$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$$

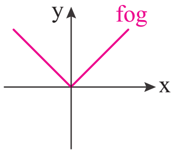


۲. (۲) باید در هر ایکس تابع f، عرض به صورت $\frac{۲}{\text{عرض نقطه}\ f}$ درآید به شرطی که عرض نقطه صفر نباشد:

$$f=\left\{(۲,۰),(۳,\frac{۱}{۲})\right\}\Rightarrow\frac{۲}{f}=\left\{\underbrace{(۲,\frac{۲}{۰})}_{\text{تعریف‌نشده}},(۳,\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}=۴)\right\}\Rightarrow\frac{۲}{f}=\{(۳,۴)\}$$

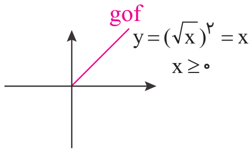
۳. (۴) ابتدا $y=f(g(x))$ رامی‌سازیم:

$$y=f\left(g(x)=x^۲\right)=\sqrt{x^۲}=|x|$$



حال $y=g(f(x))$ را می‌سازیم:

$$y=g\left(f(x)=\sqrt{x}\right)=(\sqrt{x})^۲=x$$
$$x\geq ۰$$



دقت کنید برای محاسبهٔ دامنه gof آن را ساده نمی‌کنیم ولی برای رسم آن، آن را تا حد امکان ساده می‌کنیم. بخش مشترک fog و gof قسمتی از $y=x$ است که در ناحیه اول قرار دارد. $y=x\,;x\geq ۰$

۴. (۴) ابتدا لازم است ۹^x را بنویسیم: $(۳^۲)^x=۳^{۲x}=(۳^x)^۲$ و داریم:

$$۹^x-۳^x-۵۶=۰\Rightarrow(۳^x)^۲-۳^x-۵۶=۰$$

حال به جای ۳^x، t قرار می‌دهیم:

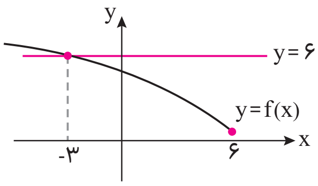
$$\xrightarrow{t=۳^x}t^۲-t-۵۶=(t-۸)(t+۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۸=۳^x\\t=-۷=۳^x\end{cases}$$

۳^x هرگز صفر یا منفی نمی‌شود، پس $۳^x=-۷$ جواب ندارد. برای حل $۳^x=۸$ چون متغیر در نما هست از دو طرف لگاریتم در پایه ۳ می‌گیریم و داریم:

$$۳^x=۸\Rightarrow\log_۳ ۳^x=\log_۳ ۸\Rightarrow x=\log_۳ ۸$$

۳

۱. (۳) از فرض سؤال معلوم می‌شود: $D_f:(-\infty,۶]$ و این که f در این بازه اکید نزولی است. پس می‌توان با توجه به داده‌های مسأله نمودار تقریبی آن را به صورت زیر کشید:



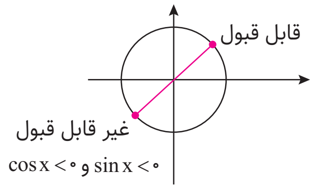
از طرفی چون $f^{-۱}(۶)=-۳$ پس: $f(-۳)=۶$ و طبق تعریف می‌توان دامنه fof را به صورت زیر نوشت:

$$D_{fof}=D_{f(fx)}=\{x\in D_f,f(x)\in D_f\}$$
$$x\leq ۶,f(x)\leq ۶$$

طبق شکل اول می‌بینیم که در بازه $-۳\leq x\leq ۶$ نامساوی $f(x)\leq ۶$ برقرار می‌شود و نمودار $f(x)$ زیر خط $y=۶$ قرار می‌گیرد، از اشتراک $x\leq ۶$ و $-۳\leq x\leq ۶$ داریم:

$$b-a=۹\ ,\ b=۶\ ,\ a=-۳\ ,\ D_{fof}=[-۳,۶]$$

روی دایرهٔ مثلثاتی تنها در ۲ نقطه $\sin x$ و $\cos x$ برابرند اما یکی از این نقطه‌ها در ناحیه سوم است و $\sin x$ و $\cos x$ منفی است و جلوی لگاریتم‌ها را در معادلهٔ اصلی منفی می‌کند. پس فقط یک بار تساوی برقرار می‌شود. آن هم در $x=\frac{\pi}{۴}$.



$$\begin{cases} t+\frac{۱}{t}=۲ \leftrightarrow t=۱ \\ t+\frac{۱}{t}=-۲ \leftrightarrow t=-۱ \end{cases}$$

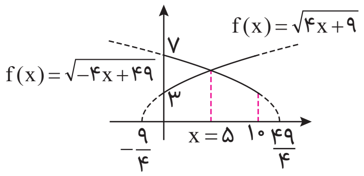
۱۷

۱. ۳ فرض کنیم تابع f اکیداً صعودی است. در این حالت $f(۰)=۳$ و $f(۱۰)=۷$ است:

$$\begin{cases} f(۰)=۳ \Rightarrow \sqrt{b}=۳ \Rightarrow b=۹ \\ f(۱۰)=۷ \Rightarrow \sqrt{۱۰a+۹}=۷ \Rightarrow a=۴ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\sqrt{۴x+۹}$$

و اگر $f(x)$ اکیداً نزولی فرض شود $f(۰)=۷$ و $f(۱۰)=۳$ است:

$$\begin{cases} f(۰)=۷ \Rightarrow \sqrt{b}=۷ \Rightarrow b=۴۹ \\ f(۱۰)=۳ \Rightarrow \sqrt{۱۰a+۴۹}=۳ \Rightarrow a=-۴ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\sqrt{-۴x+۴۹}$$



* گزینه‌های «۱» و «۴» تنها در تابع اکیداً نزولی صدق می‌کند و گزینهٔ «۲» تنها در تابع اکیداً صعودی اما $f(۵)=\sqrt{۲۹}$ در هر دو حالت برقرار است، زیرا:

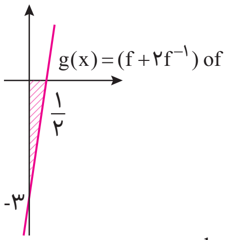
$$f_{\text{اکیداً صعودی}}=f_{\text{اکیداً نزولی}} \Rightarrow \sqrt{۴x+۹}=\sqrt{-۴x+۴۹} \Rightarrow ۴x+۹=-۴x+۴۹ \Rightarrow ۸x=۴۰ \Rightarrow x=۵; f(۵)=\sqrt{۲۹}$$

۲. ۳

$$y=f(x)=۲x-۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow (f+۲f^{-۱})(x)=h(x)=(۲x-۱)+۲(\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲})=۲x-۱+x+۱=۳x \Rightarrow hof(x)=h(۲x-۱)=۶x-۳ \Rightarrow g(x)=\left((f+۲f^{-۱})of\right)(x)$$

نمودار تابع g در شکل روبه‌رو رسم شده‌است.



$$\Rightarrow S_{\text{مثلث هاشورخورده}}=\frac{۳(\frac{۱}{۲})}{۲}=\frac{۳}{۴}$$

۳. ۲ توصیه می‌شود چند ضابطه‌ای‌ها را رسم کنیم. مختصات رأس یک سهمی به معادله $y=ax^۲+bx+c$ به صورت $S(\frac{-b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a})$ نوشته می‌شود.

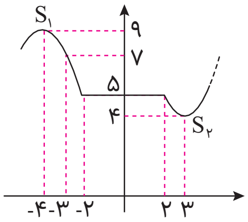
سهمی اول: $y=-x^۲-۸x-۷\ ;\ x_{S_۱}=\frac{-b}{۲a}=\frac{۸}{-۲}=-۴$

سهمی دوم: $y=x^۲-۶x+۱۳\ ;\ x_{S_۲}=\frac{-b}{۲a}=\frac{۶}{۲}=۳$

$f(x)$ روی بازهٔ $(-۴,۳)$ نزولی است، پس:

$$\begin{cases} a=-۴ \\ b=۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۲}+\frac{b}{۳}=-۲+۱=-۱$$



۴. ۳ می‌دانیم $\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$ لذا داریم:

$$\left(\frac{۱۶}{۹}=(\frac{۴}{۳})^۲\right)^{x^۲-۱}=(۰/۷۵=\frac{۳}{۴})^x \Rightarrow \left((\frac{۳}{۴})^{-۲}\right)^{x^۲-۱}=(\frac{۳}{۴})^x \Rightarrow (\frac{۳}{۴})^{۲-۲x^۲}=(\frac{۳}{۴})^x$$

$$۲-۲x^۲=x \Rightarrow ۲x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱۷}}{۲(۲)} \xrightarrow{x<۰} x=\frac{-۱-\sqrt{۱۷}}{۴} \simeq -\frac{۵}{۴}=-۱/۲۵$$

دقت کنید که به جای جواب معادله بازهٔ حضور جواب را خواستیم که تست با عددگذاری حل نشود. عدد $-۱/۲۵$ در بازه $x\in(-\frac{۳}{۲},-۱)$ هست.

۱۸

۱. ۲ معادله را به صورت $۳[x]-۱۲=|x|$ می‌نویسیم:

می‌دانیم سمت چپ معادله عددی صحیح است، زیرا $[x]$ عدد صحیح است. اگر عددی صحیح را در عدد ۳ ضرب کنیم و از آن ۱۲ واحد کم کنیم باز هم عدد صحیح خواهیم داشت. پس $|x|$ هم باید صحیح باشد. $x\in\mathbb{Z}$ حال داریم:

$$\begin{cases} x<۰ \ :\ ۳x-۱۲=-x \Rightarrow x=۳ \quad \text{غ ق ق} \\ x\geq۰ \ :\ ۳x-۱۲=x \Rightarrow x=۶ \quad \checkmark \end{cases}$$

و معادله فقط یک جواب دارد.

۲. طبق فرض مسأله داریم: $(fog)^{-1}(x)=f(x)$

الف) $\xrightarrow{\text{دو طرف را وارون می‌کنیم}} f^{-1}(x)=fog(x)$

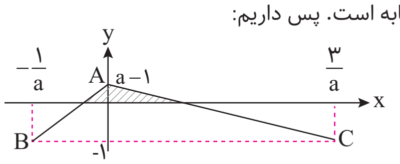
خواستهٔ مسأله: $(gof)^{-1}(x)=f^{-1}og^{-1}(x)$

می‌دانیم ترکیب یک تابع با وارونش، تابع همانی است.

$$f^{-1}og^{-1}(x) \underset{\text{طبق (الف)}}{=} \overbrace{fog}^{f^{-1}}\underbrace{og^{-1}(x)}_{x}=f(x)$$

$$f^{-1}og^{-1}(x)=(gof)^{-1}(x)=f(x)$$

۳. با ضرب عرض نقاط f در a و تقسیم طول نقاط آن بر a و سپس انتقال به پائین به اندازهٔ یک واحد، نمودار تابع g به دست می‌آید: مثلث هاشور خورده، سطح مورد نظر سؤال است که مساحت آن را S می‌نامیم. این مثلث با مثلث ABC متشابه است. پس داریم:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=(\frac{4}{a}\times a)\times\frac{1}{2}=2\Rightarrow\frac{S}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{\frac{8}{9}}{2}=(\frac{a-1}{a})^2=\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{a-1}{a}=\pm\frac{2}{3}\xrightarrow{a>0}a=3$$

نسبت مساحت دو مثلث متشابه، مربع نسبت تشابه آن‌هاست. (در این‌جا نسبت ارتفاعات را گرفتیم.)

۴. ابتدا پایه‌های دو طرف را ساده می‌کنیم تا شبیه هم شوند:

$$(\frac{4}{10}=\frac{2}{5})^{1+(\log x)^2}=(\frac{625}{100}=\frac{125}{20}=\frac{25}{4})^{2-\log x^3}\Rightarrow(\frac{2}{5})^{1+(\log x)^2}=(\frac{5}{2})^{2(2-\log x^3)}$$

$$\Rightarrow(\frac{2}{5})^{1+(\log x)^2}=(\frac{2}{5})^{-2(2-\log x^3)}\Rightarrow 1+(\log x)^2=-4+2\log x^3$$

$$\Rightarrow(\log x)^2-2\log x^3+5=0\Rightarrow(\log x)^2-6\log x+5=0$$

$$\xrightarrow{\log x=t}t^2-6t+5=0\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}}\begin{cases}t_1=1\Rightarrow\log x_1=1\Rightarrow x_1=10\\ t_2=5\Rightarrow\log x_2=5\Rightarrow x_2=10^5\end{cases}\Rightarrow x_1x_2=10^6$$

۱۹

۱. **راه اول:** تابع خطی است که در $x=\pm1$ تعریف نشده است. لذا این دو عدد ریشه مخرج هستند.

$$x^2+c=0$$

$$\xrightarrow{x=-1}(1)^2+c=0\Rightarrow c=-1\Rightarrow c^2=1$$

چون نمودار تابع حاصل خطی است، صورت بر مخرج بخش‌پذیر است، صورت را بر مخرج (x^2-1) تقسیم کرده و باقی‌مانده را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{l|l} a^2x^3+2x^2-x+b & x^2-1 \\ \cline{2-2} \underline{-a^2x^3+a^2x} & a^2x+2 \\ 2x^2+a^2x-x+b & \\ \underline{-2x^2+2} & \end{array}$$

باقی‌مانده: $(a^2-1)x+b+2=0\Rightarrow a^2=1\ ;\ b+2=0\Rightarrow b=-2\ ,\ b^2=4\Rightarrow a^2-b^2+c^2=1-4+1=-2$

راه دوم: در این تابع طول (ایکس) حفره، هم صورت و هم مخرج را صفر می‌کند.

(ریشه مشترک صورت و مخرج است) کافی است ۱ و $x=-1$ را در صورت کسر قرار داده و حاصل را برابر صفر بگذاریم.

$$\begin{array}{ll}\xrightarrow{x=1}\ a^2(1)^3+2(1)^2-1+b=0 & \Rightarrow\\ \xrightarrow{x=-1}\ a^2(-1)^3+2(-1)^2+1+b=0 & \Rightarrow\end{array}\begin{cases}a^2+b=-1\\ -a^2+b=-3\end{cases}\xrightarrow{\text{دو رابطه را جمع می‌کنیم}}2b=-4\Rightarrow b=-2$$

$$a^2+(b=-2)=-1\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a^2-b^2+c^2=1-(4)+1=-2$$

۲. نمودار تابع f متقارن است و با توجه به شکل آن، می‌فهمیم که ضابطهٔ آن به صورت ضابطهٔ توابع گلدانی یعنی $f(x)=k(|x-a|+|x-3|)$ است.

$$\begin{cases}f(a)=f(3)=2\Rightarrow k|a-3|=2\\ f(0)=5\Rightarrow k(|a|+3)=5\end{cases}\xrightarrow[\text{تقسیم کنیم}]{0<a<3}\frac{3-a}{a+3}=\frac{2}{5}\Rightarrow a=\frac{9}{7}\Rightarrow k=\frac{7}{6}\Rightarrow f(x)=\frac{7}{6}(|x-\frac{9}{7}|+|x-3|)$$

تابع f روی بازهٔ $(-\infty,\frac{9}{7}]$ اکیداً نزولی است که ضابطهٔ آن به صورت $y=-\frac{7}{3}x+5$ است. ضابطهٔ وارون این خط به صورت $y=\frac{15-3x}{7}$ است.

۳. با توجه به شکل می‌بینیم:

$$f(x)=x-[x]\ ;\ g(x)=[x]$$

$$\Rightarrow fog-gof=f(g(x))-g(f(x))=([x]-[[x]])-[x-[x]]\Rightarrow[x]-[x]-[x]+[x]=0$$

توجه داریم که عدد صحیح از براکت خارج می‌شود، پس $[x]$ و $-[x]$ از داخل [ ] ها خارج می‌شوند.

۴. (۴) ابتدا معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$\log(x^3+6x^2+12x+9)-\log(x+3)=1 \Rightarrow \log\frac{x^3+6x^2+12x+9}{x+3}=1$$

در کسر داده شده صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم داریم:

$$(x^3+6x^2+12x+9)=(x+3)(x^2+3x+3)$$

$$\Rightarrow \log\frac{(x^2+3x+3)(x+3)}{x+3}=\log(x^2+3x+3)=1 \Rightarrow x^2+3x+3=(10)^1=10 \Rightarrow x^2+3x-7=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{(3)^2-4(-7)}}{2}$$

که جواب مورد نظر $x=\frac{1}{2}(-3+\sqrt{37})$ و $a=37$ است.

۲۰

۱. (۱) برای محاسبهٔ $g(f(x))$ کافی است در تابع $g(x)$ به جای همهٔ xها $f(x)$ بگذاریم:

$$g(x)=\frac{1-3x}{x+2} \xrightarrow{x\to f(x)} g(f(x))=\frac{1-3f(x)}{f(x)+2} \xrightarrow{f(x)=\frac{2x+3}{2-x}} g(f(x))=\frac{1-3(\frac{2x+3}{2-x})}{\frac{2x+3}{2-x}+2}$$

$$\xlongequal{\text{مخرج‌مشترک}} \frac{\frac{2-x-6x-9}{\cancel{2-x}}}{\frac{2x+3+4-2x}{\cancel{2-x}}} \xlongequal{\text{ساده‌سازی}} \frac{-7x-7}{7}=-x-1$$

حال معادلهٔ $f(x)=\frac{2x+3}{2-x}$ را برابر $(gof)(x)=-x-1$ قرار می‌دهیم:

$$-x-1=\frac{2x+3}{2-x} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} -2x-2+x^2+x=2x+3 \Rightarrow x^2-3x-5=0$$

چون $\frac{c}{a}=-5<0$ است، یکی از ریشه‌ها مثبت و دیگری هم منفی است و معادله یک ریشهٔ منفی دارد.

۲. (۴) **راه اول:** برد دو تابع $y=f(x)$ و $y=f(x-2)$ یکسان است؛ زیرا انتقال افقی فقط در تغییر دامنه تأثیر دارد.

حال از روی نمودار مشخص است که برد تابع f بازهٔ $[-2,2]$ است. داریم:

$$-2\le f(x)\le 2 \Rightarrow -9\le 4f(x)-1\le 7 \Rightarrow 0\le|4f(x)-1|\le 9 \Rightarrow 0\le\sqrt{|4f(x)-1|}\le 3$$

برد تابع مورد نظر $[0,3]$ است. دقت کنیم که اگر $a\le u\le b$ باشد. آن‌گاه $0\le|u|\le \mathrm{Max}\{|a|,|b|\}$ یعنی:

$$-9\le 4f(x)-1\le 7 \to 0\le|4f(x)-1|\le \mathrm{Max}\{|-9|,|7|\}=9$$

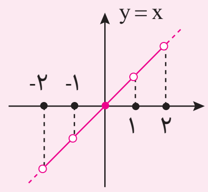
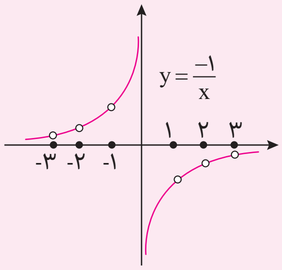
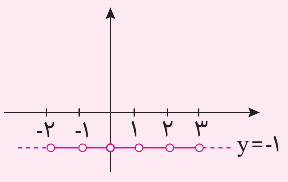
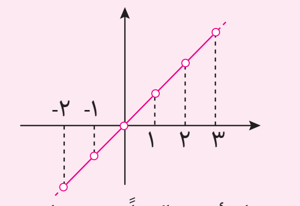
راه دوم: کافی است تابع $y=f(x-2)$ را دو واحد به سمت چپ ببریم تا $f(x)$ حاصل شود.

$y=|4f(x)-1|$ را رسم کنیم و ببینیم که $0\le|4f(x)-1|\le 9$ خواهد شد و در آخر از طرفین جذر بگیریم.

۳. (۴)

$$y=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & ; x\in\mathbb{Z}\\ -1 & ; x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

اگر مخرج کسری صفر مطلق شود، تابع کسری به ازای آن نقاط، تعریف نشده است.

۱	۲	۳	۴
 صعودی و اکیداً صعودی نیست	 صعودی و اکیداً صعودی نیست	 اکیداً صعودی نیست	 روی دامنهٔ خود اکیداً صعودی است و در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ تعریف نمی‌شود

پاسخ‌نامه فصل چهارم: حد و پیوستگی

۱

۱. ۴

روش اول:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{a}}\frac{a^{۲}x^{۲}-۱}{a^{۲}x^{۲}-۳ax+۲}=\frac{\cancel{(ax-۱)}(ax+۱)}{(ax-۲)\cancel{(ax-۱)}}=\frac{ax+۱}{ax-۲}=\frac{a(\frac{۱}{a})+۱}{a(\frac{۱}{a})-۲}=\frac{۲}{-۱}=-۲$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{a}}\frac{a^{۲}x^{۲}-۱}{a^{۲}x^{۲}-۳ax+۲}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to\frac{۱}{a}}\frac{۲a^{۲}x}{۲a^{۲}x-۳a}=\frac{۲a^{۲}(\frac{۱}{a})}{۲a^{۲}(\frac{۱}{a})-۳a}=\frac{۲a}{۲a-۳a}=\frac{۲a}{-a}=-۲$$

نکته: اگر دو تابع پیوسته و مشتق‌پذیر f و g در $x=a$ به گونه‌ای باشند که $f(a)=g(a)=۰$ باشد؛ داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یعنی در حد $\frac{۰}{۰}$، کافی است مشتق‌های صورت و مخرج را حساب کنید و در محاسبهٔ حد لحاظ کنید. به این قضیه، قضیهٔ هوپیتال (HOP) می‌گوییم.

اگر باز هم مبهم $\frac{۰}{۰}$ بود به عمل مشتق‌گیری مستقل از صورت و مخرج (هوپیتال) ادامه می‌دهیم.

۲. ۴ بازه‌های گزینه‌های «۱» تا «۳» شامل عدد ۲ هستند، اما بازهٔ گزینهٔ «۴» شامل عدد ۲ نیست. پس پیوستگی تابع f در $x=۲$ بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=[۲^{-}]^{۲}-[۲^{-}]=۱^{۲}-۱=۰\\ f(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=۲^{۲}-۲=۲\end{cases}$$

پس f در $x=۲$ ناپیوسته است و از بازه‌های داده شده، فقط در $(۰,۲)$ پیوسته است. تابع f در این بازه، تابع ثابت صفر است.

۳. ۲ **روش اول:** عبارت $\frac{|x^{۳}+x-۲|}{x^{۳}-x^{۲}-x+۱}$ را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{|x^{۳}+x-۲|}{x^{۳}-x^{۲}-x+۱}=\frac{|x-۱||x^{۲}+x+۲|}{(x-۱)^{۲}(x+۱)}=\frac{|x^{۲}+x+۲|}{|x-۱|(x+۱)}$$

در $x=۱$ ، حد صورت برابر ۴ و حد مخرج نیز صفر است. پس حاصل حد حتماً نامتناهی است. از آنجا که مخرج نیز مقداری مثبت دارد، حاصل حد $+\infty$ است.

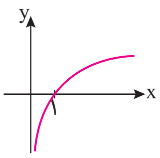
روش دوم: در دو طرف $x=۱$ قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم و داریم:

$$\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{|\overbrace{x^{۳}+x-۲}^{+}|}{x^{۳}-x^{۲}-x+۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x^{۳}+x-۲}{x^{۳}-x^{۲}-x+۱}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{۳x^{۲}+۱}{۳x^{۲}-۲x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{۴}{۳(x-۱)(x+\frac{۱}{۳})}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{۴}{۳(۰^{+})(۱+\frac{۱}{۳})}=\frac{۴}{۰^{+}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{|\overbrace{x^{۳}+x-۲}^{-}|}{x^{۳}-x^{۲}-x+۱}=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{-x^{۳}-x+۲}{x^{۳}-x^{۲}-x+۱}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{-۳x^{۲}-۱}{۳x^{۲}-۲x-۱}=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{-۴}{۳(x-۱)(x+\frac{۱}{۳})}=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{-۴}{۳(۰^{-})(۱+\frac{۱}{۳})}=\frac{-۴}{۰^{-}}=+\infty$$

۲

۱. ۴ می‌دانیم تابع $y=\log x$ به صورت مقابل است و در $x\in(۰,+\infty)$ تعریف می‌شود.



$$\lim_{x\to ۰}\log[\sin x]\begin{cases}x\to ۰^{-} & y=\log[\sin(۰^{-})=۰^{-}]=\log(-۱)\ \text{تعریف‌نشده}\\ x\to ۰^{+} & y=\log[\sin(۰^{+})=۰^{+}]=\log(\text{صفرمطلق})\ \text{تعریف‌نشده}\end{cases}$$

۲. ۳ از نمودار می‌بینیم $x=a$ در دامنه نیست، پس باید ریشه مخرج کسر $f(x)=\frac{x^{۲}-۵x+۶}{۲-x}$ باشد، پس $a=۲$ است. می‌بینیم حد تابع در $x=۲$ برابر b است:

$$\lim_{x\to ۲}f(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{(x-۲)}(x-۳)}{-\cancel{(x-۲)}}=\lim_{x\to ۲}(-x+۳)=۱=b\xrightarrow{a=۲}a+b=۳$$

هرگاه با حفره در نمودار یک تابع کسری مواجه شویم، عموماً (*) یعنی با یک حد $\frac{۰}{۰}$ سر و کار داریم. طول حفره، هم‌ریشه مخرج کسر است، هم‌ریشه صورت آن. عرض حفره، جواب حد کسر در ریشهٔ مشترک صورت و مخرج است.

* کسر $y=\frac{۱}{[x]+[-x]}$ در $x\in\mathbb{Z}$ تعریف نمی‌شود و حفره دارد. تابع ثابت $y=-۱$ است.

۳. (۲) شرط پیوستگی در نقطهٔ x_0:

$$x_0 \text{ حد راست } = x_0 \text{ حد چپ } = f(x_0)$$

$$\lim_{x\to -1} f(x):\begin{cases} x\to(-1)^- & : \ y=\dfrac{-4}{-1-3m} \\ x\to(-1)^+ & : \ y=\dfrac{-2}{-1-2m}=f(x_0)\end{cases}$$

حد چپ و راست را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{-4}{-1-3m}=\frac{-2}{-1-2m}\xrightarrow{\text{طرفین} \div (-2)}\frac{2}{-1-3m}=\frac{1}{-1-2m}\Rightarrow -2-4m=-1-3m\Rightarrow m=-1$$

۳

۱. (۱) صورت کسر به ازای $x=1$ برابر کسینوس سه رادیان می‌شود. چون هر رادیان حدوداً $57/3^\circ$ است. $\cos\big(3(57/3^\circ)=171/90^\circ\big)$ و با توجه به دایره مثلثاتی در ربع دوم و عددی منفی است. حال حد چپ و راست را در $x=1$ حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1} y=\frac{\cos 3x}{(x-1)^2}\begin{cases} x\to 1^+ & y=\dfrac{\text{عددمنفی}}{(1^+-1=0^+)^2=0^+}=-\infty \\ x\to 1^- & y=\dfrac{\text{عددمنفی}}{(1^--1=0^-)^2=0^+}=-\infty\end{cases}$$

یعنی در دو طرف $x=1$ به منفی بی‌نهایت می‌رود و گزینه یک درست است.

۲. (۳) باید حد چپ و حد راست و مقدار تابع را مقایسه کنیم:

$$\lim_{x\to 8^-} f(x)=\lim_{x\to 8^-}\left([x]-[\tfrac{x}{4}]\right)=[8^-]-[2^-]=7-1=6$$

$$\lim_{x\to 8^+} f(x)=f(8)=8-2=6$$

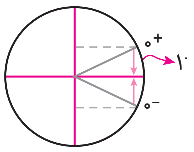
پس f در $x=8$ پیوسته است.

۳. (۴) با توجه به نمودار، می‌بینیم که باید $x=1$ ریشه مخرج باشد و $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty$ است. پس باید حد عبارت صورت وقتی $x\to 1^+$، مقداری مثبت داشته باشد:

$$\lim_{x\to 1}(x^2+2ax+3)>0\Rightarrow 2a+4>0\Rightarrow a>-2$$

۴

۱. (۳) می‌دانیم معادلهٔ محور عرض‌ها $x=0$ است، کافی است حد چپ و راست را در $x=0$ پیدا کنیم.



$$\lim_{x\to 0} y=\begin{cases} x\to 0^+ & y=\dfrac{\pi+\cancel{\sin 0}}{1^--1}=\dfrac{3/14}{0^-}=-\infty \\ x\to 0^- & y=\dfrac{\pi+\cancel{\sin 0}}{1^--1}=\dfrac{3/14}{0^-}=-\infty\end{cases}$$

در دو طرف $x=0$ تابع به منفی بی‌نهایت می‌رود و گزینه ۳ درست است.

۲. (۱) کافی است تابع در $x=0$ پیوسته باشد، یعنی a و b را چنان حساب کنیم $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+a}-b}{x}=\dfrac{1}{3}$ شود.

در حد بالا، حد مخرج برابر صفر است، پس برای اینکه حاصل حد عددی حقیقی شود، حد صورت نیز باید برابر صفر شود، پس داریم:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x+a}-b=0\Rightarrow \sqrt[3]{a}=b\Rightarrow a=b^3$$

در ادامه یکی از دو راه زیر را ادامه می‌دهیم:

روش اول:

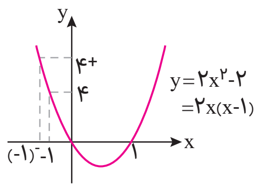
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+a}-b}{x}=\frac{1}{3}\xrightarrow{a=b^3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+b^3}-b}{x}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+b^3}-b}{x}\times\frac{\sqrt[3]{(x+b^3)^2}+b\sqrt[3]{x+b^3}+b^2}{\sqrt[3]{(x+b^3)^2}+b\sqrt[3]{x+b^3}+b^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x+b^3-b^3}{x(3b^2)}=\frac{1}{3b^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow b^2=1\Rightarrow b=\pm 1$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+a}-b}{x}=\frac{1}{3}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+a)^2}}}{1}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\sqrt[3]{a^2}=1\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm 1\xrightarrow{b=\sqrt[3]{a}}b=\pm 1$$

۲. ۲



$$f(-1)=\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=3(-1)+1=-2$$

حد چپ نیز باید با این مقدار برابر باشد:

$$\lim_{x\to(-1)^-} a[2x^2-2x]=\lim_{x\to(-1)^-} a[2x(x-1)]=\lim_{x\to(-1)^-} a[4^+]=4a=-2\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۳. ۴ ابتدا مقدار تابع f را به ازای $x=1$ می‌یابیم:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{7+x}-3}\to f(1)=-2\quad A(1,-2)$$

برای محاسبهٔ حد داده شده داریم:

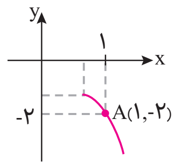
$$\lim_{x\to1^-}\frac{x+1}{f(x)+2}=\frac{2}{\text{صفر نسبی}}=?$$

حال باید مشخص کنیم تابع f در سمت چپ $x=1$ برابر $(-2)^-$ است یا $(-2)^+$ می‌توان مشتق تابع f را در $x=-1$ تعیین علامت کرد که مشخص شود f در همسایگی $x=1$ صعودی است یا نزولی

$$f'(x)=\frac{2x(\sqrt[3]{7+x}-3)-(\frac{1}{3\sqrt[3]{(7+x)^2}})(x^2+1)}{(\sqrt[3]{7+x}-3)^2}$$

$$f'(1)=\frac{-2-\frac{1}{6}}{(\sqrt[3]{7+x}-3)^2}<0$$

مطابق شکل می‌بینیم که f در $x\to1^-$ از -2 بیش‌تر است. پس:



$$\lim_{x\to1^-}\frac{x+1}{f(x)+2}=\frac{2}{(-2)^++2}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

۲۲

۱. ۲

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\tan^2x}{2-2\cos2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{2-2(1-2\sin^2x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2x}{\cos^2x(4\sin^2x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{4\cos^2x}=\frac{1}{4}$$

۲. ۳ حد تابع و مقدار آن در $x=1$ باید برابر باشد:

$$a=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{3x-\sqrt{5x+4}}{x-\sqrt{3-2x}}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to1}\frac{3-\frac{5}{2\sqrt{5x+4}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3-2x}}}=\frac{3-\frac{5}{2\times3}}{1+\frac{1}{1}}=\frac{3-\frac{5}{6}}{2}=\frac{13}{12}$$

۳. ۱

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+1-|x|}{-bx^2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a+1)x+1}{-bx^2-x}=2$$

برای این‌که حاصل حد عددی حقیقی شود، عبارات صورت و مخرج در حد بالا باید هم‌درجه باشند. بنابراین $b=0$ است.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(a+1)x+1}{-x}=-(a+1)=2\Rightarrow a=-3\Rightarrow f(x)=\frac{-3x+1-\sqrt{x^2}+1}{-x}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+1-|x|}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+1}{-x}=4$$

۲۳

۱. ۱ در همسایگی راست $x=1$ ، عبارت $[x]$ برابر ۱ است. پس داریم:

$$\lim_{x\to1^+}=\frac{\sin\pi x}{[x]+\cos\pi x}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sin\pi x}{1+\cos\pi x}=\lim_{x\to1^+}\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to1^+}\tan\frac{\pi x}{2}=-\infty$$

۲. ۴ کافی است پیوستگی را در $x=1$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3+bx-4}{x-1}=f(1)=a$$

برای این‌که حاصل حد بالا موجود باشد، لازم است صورت عبارت نیز به ازای $x=1$ صفر شود:

$$(1)^3+b(1)-4=b-3=0\Rightarrow b=3$$

حال مقدار a را که همان حاصل حد است، با استفاده از قضیهٔ هوپیتال به دست می‌آوریم:

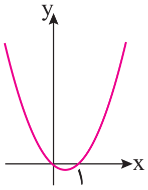
$$a=\lim_{x\to1}\frac{x^3+3x-4}{x-1}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to1}\frac{3x^2+3}{1}=6$$

۳. (۳) برای به دست آوردن حاصل حد، باید از داخلی‌ترین تابع شروع کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۰^+\\ \lim\limits_{x\to۰^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۰^-\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}[(fofof)(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=[۰^-]=-۱$$

۲۴

۱. (۳) سهمی $y=x^۲-x$ که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، در نظر بگیرید:



در یک همسایگی چپ $x=۰$ مقادیر سهمی مثبت است و $\lim\limits_{x\to۰^-}(x^۲-x)=۰$ است، پس می‌توانیم بگوییم:

$$\lim\limits_{x\to۰^-} f(x^۲-x)=\lim\limits_{x\to۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to۰^+}\frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x}\ \underset{\text{صورت ضرب می‌کنیم}}{\overset{\text{صورت و مخرج را در مزدوج}}{=\!=\!=\!=}}\ \lim\limits_{x\to۰^+}\frac{x}{x(\sqrt{x+۴}+۲)}=\lim\limits_{x\to۰^+}\frac{۱}{\sqrt{x+۴}+۲}=\frac{۱}{۴}$$

راه دوم: می‌دانیم چند جمله‌ای‌ها در همسایگی صفر هم‌ارز جمله کم‌توان هستند، پس $x^۲-x \underset{x\to۰}{\sim} -x$.

$$\lim\limits_{x\to۰^-}(x^۲-x)=\lim\limits_{x\to۰^-} f\big(-x=-(۰^-)=۰^+\big)=f(۰^+)$$

پس کافی است حد f را در سمت چپ $x=۰$ بیابیم.

$$\lim\limits_{x\to۰^-} f\frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x}=\frac{۰}{۰}\overset{HOP}{=\!=}\lim\limits_{x\to۰^-}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۴}}}{۱}=\frac{۱}{۴}$$

۲. (۳) تابع f روی دامنه‌اش پیوسته است، پس کافی است دامنهٔ آن را پیدا کنیم:

$$\begin{cases}\frac{۱}{x^۳}-\frac{۱}{۸}\geq ۰\Rightarrow \frac{۱}{x^۳}\geq\frac{۱}{۸}\Rightarrow ۰<x^۳\leq ۸\Rightarrow ۰<x\leq ۲\\ x-۱\geq ۰\Rightarrow x\geq ۱\end{cases}\Rightarrow D_f=[۱,۲]$$

بیش‌ترین مقدار $b-a$ نیز $۲-۱=۱$ است.

۳. (۱) وقتی حاصل حد در بی نهایت عددی حقیقی است، چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج ضابطهٔ f، باید هم‌درجه باشند، تنها حالت قابل قبول $n=۳$ است؛ زیرا در حالت $n=۲$ (و طبیعتاً $a=۰$)، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{۱}{۲}\neq ۱$ است که غیر قابل قبول است. پس داریم:

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^۳+۳x}{ax^۳-۲x^۲+۱}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^۳}{ax^۳}=\frac{۱}{a}=۱\Rightarrow a=۱\Rightarrow f(x)=\frac{x^۳+۳x}{x^۳-۲x^۲+۱}=\frac{x(x^۲+۳)}{(x-۱)(x^۲-x-۱)}$$

در یک همسایگی راست $x=۱$ ، مخرج عبارت بالا منفی و صورت آن مثبت است. از آن‌جا که حد مخرج صفر است، داریم:

$$\lim\limits_{x\to۱^+} f(x)=\frac{\text{عدد مثبت}}{۰^-}=-\infty$$

۲۵

۱. (۲) قضیهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$p(x)=(x^۲-۴)q(x)+۳\Rightarrow x^۳+ax^۲+bx-۵=(x-۲)(x+۲)q(x)+۳$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲: ۸+۴a+۲b-۵=۰+۳\Rightarrow ۲a+b=۰ & (۱)\\ x=-۲: -۸+۴a-۲b-۵=۰+۳\Rightarrow ۲a-b=۸ & (۲)\end{cases}\xrightarrow{(۱),(۲)} a=۲, b=-۴$$

$$\Rightarrow x^۳+۲x^۲-۴x-۵=(x^۲-۴)q(x)+۳$$

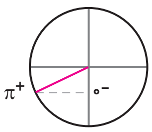
حال $x=۱$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۱+۲-۴-۵=(۱-۴)q(۱)+۳\Rightarrow q(۱)=۳$$

۲. (۴) ضابطه‌های روی دامنه‌هایشان پیوسته هستند، پس کافی است پیوستگی را در $x=۱$ بررسی کنیم:

$$\begin{cases}\text{مقدار و حد راست}: f(۱)=\lim\limits_{x\to۱^+} f(x)=b\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{b}{۲}\\ \text{حد چپ}: \lim\limits_{x\to۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to۱^-}\frac{۳x^۲-۷x+۴}{۲\sqrt[۳]{x}-۲}\overset{HOP}{=\!=}\lim\limits_{x\to۱^-}\frac{۶x-۷}{\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}=\frac{-۱}{\frac{۲}{۳}}=-\frac{۳}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\text{پیوستگی}}\frac{b}{۲}=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow b=-۳$$

۳. (۴) می‌دانیم: $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$



$$\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{\sin x+\cos x+۱}{\cos ۲x-۱}=\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{\sin x+\cos x+۱}{(۲\cos^۲ x-۱)-۱}=\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{\sin x+۱+\cos x}{۲\cos^۲ x-۲}$$

$$\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{\sin x+(۱+\cos x)}{۲(\cos^۲ x-۱)}=\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{\sin x+(۱+\cos x)}{-۲\sin^۲ x}$$

$$\underset{\text{می‌کنیم}}{\overset{\text{کسر را تفکیک}}{=\!=\!=\!=}}\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{\sin x}{-۲\sin^۲ x}+\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{۱+\cos x}{-۲(۱-\cos^۲ x)}=\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{۱}{-۲\sin x}+\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{\cancel{۱+\cos x}}{-۲\,\cancel{(۱+\cos x)}\,(۱-\cos x)}$$

$$=\Big(\frac{۱}{-۲(۰^-)=۰^+}=+\infty\Big)+\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{۱}{-۲(۱-\cos x)}=+\infty+\frac{۱}{۴}=+\infty$$

پاسخ‌نامه فصل پنجم: مشتق و کاربرد مشتق

۱. (۴) رابطهٔ شیب خط واصل نقاط $(۲,f(۲))$ و $(x,f(x))$ به‌صورت زیر است:

$$\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=x^۳-۴x^۲+۱$$

حال با توجه به این رابطه، شیب خط مماس بر نمودار f در $x=۲$ که همان مشتق تابع در $x=۲$ یا $f'(۲)$ است، به صورت زیر به دست می‌آید:

باید از دستور محاسبه شیب خط واصل، حد در $x=۲$ بگیریم.

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x^۳-۴x^۲+۱)=-۷$$

۲. (۳) می‌دانیم توابع قدرمطلقی در ریشه ساده داخل قدرمطلق و توابع رادیکالی در ریشه زیر رادیکال مشتق‌ناپذیرند (به شرطی که مرتبه تکرار ریشه از فرجه بیش‌تر نباشد). پس ضابطه اول در $x=۲$ و ضابطهٔ دوم $\left(\sqrt[۵]{x(x-۴)}\right)$ در $x=۰$ و $x=۴$ مشتق‌ناپذیر است، اما وقتی ضابطه دوم به ازای $x\leq ۱$ برقرار است، تنها $x=۰$ را به حساب می‌آوریم.

هم‌چنین f در $x=۱$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است؛ زیرا:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\sqrt[۵]{x^۲-۴x}=\sqrt[۵]{-۳}\\ \lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}|x-۲|=۱\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-}f(x)\neq\lim_{x\to ۱^+}f(x)$$

۳. (۲) برای محاسبهٔ حاصل عبارت داده شده، به سادگی می‌توان طبق قضیه مشتق تابع مرکب از $(fog)(x)$ مشتق بگیریم، لذا $(fog)(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

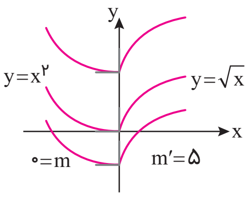
$$y=(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt[۳]{x}-۱)=\frac{x-۱-۲}{۱+x-۱}=\frac{x-۳}{x}=۱-\frac{۳}{x}$$

حال از $(fog)(x)=۱-\frac{۳}{x}$ مشتق می‌گیریم:

$$(fog)'(x)=۰-(-\frac{۳}{x^۲})=\frac{۳}{x^۲}\Rightarrow(fog)'(۲)=\frac{۳}{۴}$$

۴. (۱) طبق نمودار تابع f'، می‌بینیم تابع مشتق در $x=۰$ تعریف نشده است. پس تابع پیوسته f در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست و $x=۰$ برای f نقطهٔ بحرانی محسوب می‌شود و گزینه ۱ جواب است. می‌بینیم $f'(۰^-)=۰\neq f'(۰^+)=+\infty$ پس $x=۰$ نقطهٔ بحرانی از نوع گوشه است. چون در $x=۰$ مشتق از منفی به مثبت تغییر علامت داده است، پس $x=۰$ نقطهٔ مینیمم است. این نقطه هم نسبت به همسایهٔ چپ و راست خود پایین‌تر است و هم نسبت به سراسر دامنه پس هم مینیمم مطلق است و هم مینیمم نسبی و می‌توان تابع را به صورت یکی از توابع زیر در نظر گرفت که در راستای محور yها بالا یا پایین می‌روند. این توابع فقط در عدد ثابت متفاوتند.

دقت کنید اگر دو یا چند تابع فقط در عدد ثابت متفاوت باشند (یک دستهٔ منحنی که در راستای محور yها بالا و پایین می‌روند) دارای مشتق یکسان هستند، ضابطهٔ پیشنهادی f را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

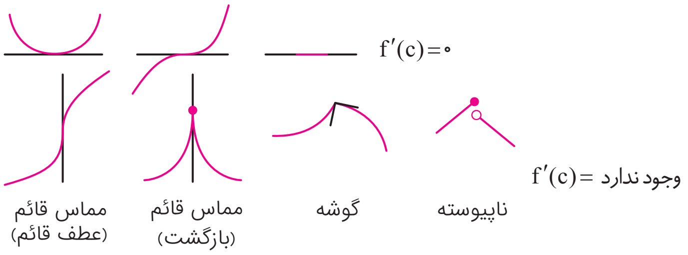


$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq ۰\\ x^۲ & x<۰\end{cases}\qquad f'(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲\sqrt{x}} & x>۰\\ ۲x & x<۰\end{cases}$$

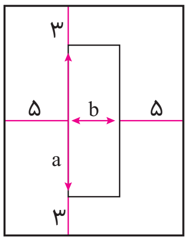
$$m'=f'(۰^+)=+\infty\neq f'(۰^-)=۰=m$$

هر خط شیب صفر، بر هر خط شیب بی‌نهایت عمود است.

نکته **نقطهٔ بحرانی:** $C\in D_f$ بحرانی است اگر $f'(c)=۰$ باشد (مماس افقی) یا $f'(c)$ موجود نباشد. (مشتق‌ناپذیر) نقاط سر و ته بسته بازه را هم بحرانی می‌گیریم:



۵. ۳ ابعاد کاغذ را $a+۶$ و $b+۱۰$ در نظر می‌گیریم و داریم:



$$\begin{cases} y=(b+۲(۵))(a+۲(۳)) \\ ab=۶۰ \end{cases}$$

$$y=\underbrace{\cancel{ab}}_{۶۰}+۶b+۱۰a+۶۰=۱۲۰+۶b+۱۰(\frac{۶۰}{b})\Rightarrow y(b)=۶b+\frac{۶۰۰}{b}+۱۲۰$$

در نقطه‌ای $y(b)$، مینیمم می‌شود که $y'(b)=۰$ باشد:

$$\Rightarrow y'=۶-\frac{۶۰۰}{b^۲}=۰\Rightarrow b^۲=۱۰۰\Rightarrow \boxed{b=۱۰}$$

۲

۱. ۲ کافی است در یک همسایگی $x=\frac{۲}{۳}$ حاصل عددی $[۵x]$ را پیدا کنیم:

$$[۵(x=\frac{۲}{۳})=\frac{۱۰}{۳}=۳/۳۳]=۳$$

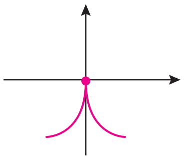
پس ضابطهٔ تابع f در همسایگی $x=\frac{۲}{۳}$ به صورت روبه‌رو است:

$$f(x)=ax\underbrace{[۵x]}_{۳}-۲=۳ax-۲$$

$$f'(\frac{۲}{۳})=۳a=۲a-۱\Rightarrow a=-۱$$

۲. ۴ تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۳-۳x^۲}$ در همسایگی $x=۰$ هم‌ارز جملهٔ کم‌توان‌خودبه‌صورت $f(x)\underset{x\to ۰}{\sim}\sqrt[۳]{-۳x^۲}=\sqrt[۳]{(-۱)^۳x^۲}=-\sqrt[۳]{x^۲}$

و به شکل روبه‌روست:



و می‌بینیم: $f'(۰^+)=-\infty\neq f'(۰^-)=+\infty$ تابع مشتق در سمت چپ صفر مثبت و در سمت راست منفی و گزینهٔ «۴» درست است.

۳. ۱ باید مشتق تابع f در بازهٔ $[a,b]$ نامثبت باشد:

$$f'(x)=x^۲+۵x-۶\xrightarrow{f'(x)\leq ۰}x^۲+۵x-۶=(x+۶)(x-۱)\leq ۰\Rightarrow x\in[-۶,۱]$$

اگر $b-a$ بیشینه باشد، بازهٔ مورد قبول همین $[-۶,۱]$ خواهد بود که نقطهٔ میانی آن $-۲/۵$ است.

۴. ۲ دامنهٔ تابع، $\mathbb{R}$ است و داریم:

$$f(x)=\begin{cases} (-x+۱)\sqrt[۳]{x^۲} & ; \quad x<۱ \\ (x-۱)\sqrt[۳]{x^۲} & ; \quad x\geq ۱ \end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \frac{۲-۵x}{۳\sqrt[۳]{x}} & ; \quad x<۱ \\ \frac{۵x-۲}{۳\sqrt[۳]{x}} & ; \quad x\geq ۱ \end{cases}$$

واضح است که تابع در $x=۰$ مماس قائم دارد و مشتق‌ناپذیر است. همچنین در $x=\frac{۲}{۵}$ مشتق برابر صفر دارد. در $x=۱$ نیز که طول نقطهٔ مرزی ضابطه است، مشتق‌های چپ و راست نابرابر دارد، پس در این نقطه نیز مشتق‌ناپذیر است. در نتیجه نمودار تابع f، ۳ نقطهٔ بحرانی دارد.

راه دوم: در تابع $f(x)=|x-۱|\sqrt[۳]{x^۲}$ عدد $x=۱$ ریشهٔ ساده داخل قدرمطلق طول نقطهٔ مشتق‌ناپذیر و گوشه است. عدد $x=۰$ ریشهٔ مضاعف زیر رادیکال فرجهٔ فرد و طول نقطهٔ مشتق‌ناپذیر با مشتق ∞ و مماس قائم (بازگشت) است. در موارد $y=|f(x)|g(x)$ می‌توان از قدرمطلق صرف‌نظر و f را در g ضرب کرد و سپس مشتق را برابر صفر گذاشت تا نقاطی که مماس بر تابع افقی است را یافت.

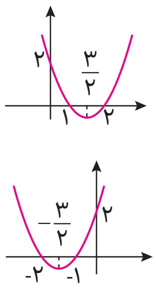
$$y=(x-۱)\sqrt[۳]{x^۲}=(x-۱)x^{\frac{۲}{۳}}=x^{\frac{۵}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$y'=\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۵}{۳}\sqrt[۳]{x^۲}-\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}\to y'=۰$$

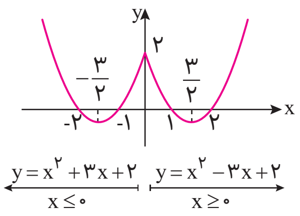
$$\frac{۵}{۳}\sqrt[۳]{x^۲}=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}\to\sqrt[۳]{x^۳}=\frac{۲}{۵}\to x=\frac{۲}{۵}$$

۵. ۳ بهتر است تابع را با تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق رسم کنیم.

$$y=x^۲-۳|x|+۲=\begin{cases} x^۲-۳x+۲ & ; \quad x\geq ۰ \\ x^۲+۳x+۲ & ; \quad x<۰ \end{cases}$$



$\Rightarrow$

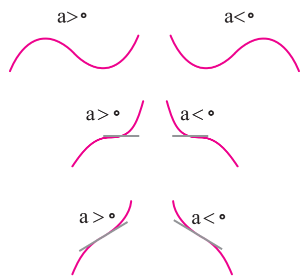


می‌بینیم نمودار تابع دارای سه اکسترمم نسبی به طول‌های $x=\pm\frac{۳}{۲}$ و $x=۰$ است.

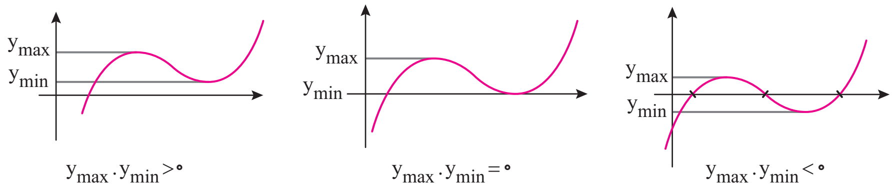
شکل‌های مختلف تابع درجهٔ سوم در حالت کلی:

$$f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$$
$$f'(x)=۳ax^{۲}+۲bx+c=۰$$

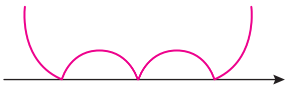
$\Delta_{y'}<۰$ ، $\Delta_{y'}>۰$ ، $\Delta_{y'}<۰$



وقتی مشتق تابع درجه سوم دو ریشه دارد و تابع دو اکسترمم دارد و ممکن است به صورت‌های زیرمحور xها را قطع کند.



در این تست نمودار باید سه ریشه بدهد که قدرمطلق آن ۵ نقطهٔ بحرانی داشته باشد.



۵. ارتفاع جعبهٔ روباز همان x است و ابعاد قاعده $۱۲-۲x$ و $۹-۲x$ است، پس حجم جعبه به دست می‌آید.

$$V(x)=x(۱۲-۲x)(۹-۲x)\Rightarrow V(x)=۴x^{۳}-۴۲x^{۲}+۱۰۸x$$

مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$V'(x)=۱۲x^{۲}-۸۴x+۱۰۸=۱۲(x^{۲}-۷x+۹)\xrightarrow{V'(x)=۰}x=\frac{۷\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$$

واضح است که $x=\frac{۷-\sqrt{۱۳}}{۲}$ قابل قبول است.

۲۳

۱. آهنگ متوسط برابر است با:

$$\frac{f(۷)-f(۲)}{۷-۲}$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ متوسط}=\frac{\sqrt{۹}-\sqrt{۴}}{۵}=\frac{۳-۲}{۵}=\frac{۱}{۵}$$

آهنگ لحظه‌ای نیز همان مشتق تابع است:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای در } x=a = f'(a)=\frac{۱}{۲\sqrt{a+۲}}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow\sqrt{a+۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a+۲=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow a=\frac{۱۷}{۴}=۴/۲۵$$

آهنگ متوسط مورد نظر با آهنگ لحظه‌ای تابع در $x=۴/۲۵$ برابر است.

۲. هر کدام از ضابطه‌ها روی دامنه‌هایشان مشتق‌پذیرند، پس کافی مشتق‌پذیری در $x=۰$ را بررسی می‌کنیم. در ابتدا باید پیوسته باشد:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}(ax-۲)=-۲\\ \lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=f(۰)=۱-b\sqrt{۱}=۱-b\end{cases}\xrightarrow{\text{پیوستگی}}۱-b=-۲\Rightarrow b=۳$$

حال مشتق‌های چپ و راست تابع را در $x=۰$ بررسی می‌کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases}a & ; \ x<۰\\ \frac{-۳}{۲\sqrt{x+۱}} & ; \ x\geq ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_-(۰)=a\\ f'_+(۰)=-\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

شرط مشتق‌پذیری آن است که $a=-\frac{۳}{۲}$ باشد.

۳. ریشه‌های سادهٔ f' اکسترمم‌های نسبی f هستند، بنابراین تابع f یک مینیمم نسبی (مشتق‌پذیر) در چپ‌ترین قسمت نمودار دارد.

همچنین اگر $\lim\limits_{x\to x_۰}f'(x)=\pm\infty$ باشد، $x=x_۰$ نقطهٔ بازگشتی نمودار f است. در نتیجه نمودار گزینهٔ «۲» درست‌ترین نمودار است.

۴. ۱

$$(gof)'(۱)=f'(۱)g'(f(۱))\quad (*)$$

$$\begin{cases} f(۱)=۲ \\ f'(x)=۲x+\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۱)=۲+\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{۵}{۲} \\ g'(x)=\dfrac{۱}{۳}\sqrt[۳]{\dfrac{۴}{x^۲}}-۳x^۲\Rightarrow g'(۲)=\dfrac{۱}{۳}-۱۲=-\dfrac{۳۵}{۳} \end{cases}\qquad \xrightarrow{(*)}(gof)'(۱)=\dfrac{۵}{۲}\times(-\dfrac{۳۵}{۳})=-\dfrac{۱۷۵}{۶}$$

۵. ۴ (*) می‌توانیم فاصلهٔ نمرهٔ تعدیل شده از نمرهٔ خام را $f(x)$ در نظر بگیریم:

$$f(x)=\sqrt{۲۰x}-x\quad ;\quad ۰\le x\le ۲۰$$

نقطهٔ بحرانی تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{۱۰}{\sqrt{۲۰x}}-۱\xrightarrow{f'(x)=۰}\sqrt{۲۰x}=۱۰\Rightarrow ۲۰x=۱۰۰\Rightarrow x=۵$$

بیش‌ترین افزایش نمره به ازای نمرهٔ ۵ رخ می‌دهد که برابر $f(۵)=۵$ است.

* قطعاً شنیده‌اید که گاهی وقتی نمرات شاگردان یک کلاس خیلی پایین می‌شود، نمرات را روی نمودار یا منحنی می‌برند. این منحنی می‌تواند $y=\sqrt{۲۰x}$ باشد که x نمرهٔ خام و y نمرهٔ تعدیل شده و بهبود یافته است. مثلاً اگر شخصی در آزمون نمرهٔ یک از بیست نمره بگیرد با این تعدیل نمره جدیدش $y=\sqrt{۲۰(۱)}=\sqrt{۲۰}=۴/۴۷$ خواهد شد و اختلاف نمرهٔ جدید و قدیمش از هم $f(x)=\sqrt{۲۰x}-x=۴/۴۷-۱=۳/۴۷$ می‌باشد، بدیهی است که اشخاصی که نمرهٔ $x=۰$ یا $x=۲۰$ گرفته‌اند نمراتشان عوض نمی‌شود. سؤال اینجاست که به کدامیک از بچه‌های کلاس نمرهٔ بیشتری اضافه می‌شود و اختلاف نمرهٔ قدیم و جدیدش از بقیهٔ بچه‌ها بیشتر است که با محاسبهٔ انجام شده، مربوط به فردی است که ۵ گرفته که بعد از تعدیل نمره‌اش $y=\sqrt{۲۰(۵)}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$ شده و قبول می‌شود! بیشترین مقدار افزایش نمره برای اوست و داریم:

$$f(x)=\sqrt{۲۰x}-x\to f(۵)=\sqrt{۲۰(۵)}-۵=۱۰-۵=۵$$

۲۴

۱. ۴ با اضافه و کم کردن $f(۱)$ در صورت کسر داریم:

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱-h)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱)-[f(۱-h)-f(۱)]}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}-\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱-h)-f(۱)}{h}$$

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}+\lim_{H\to ۰^-}\frac{f(۱+H)-f(۱)}{H}=f'_+(۱)+f'_-(۱)$$

دقت کنید که در حد دوم، $-h$ را H در نظر گرفته‌ایم. پس مشتق‌های چپ و راست f را در $x=۱$ به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۳}x^۳-x^۲+x & ; & x<۱\\ \dfrac{۱}{۳}x^۳+x^۲-x & ; & x\ge ۱\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}x^۲-۲x+۱ & ; & x<۱\\ x^۲+۲x-۱ & ; & x>۱\end{cases}\Rightarrow f'_+(۱)=۰,f'_-(۱)=۲$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱-h)}{h}=f'_+(۱)+f'_-(۱)=۲$$

روش دوم:

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱-h)}{h}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to ۰^+}\frac{۱f'(۱+h)-(-۱)f'(۱-h)}{۱}=f'(۱^+)+f'(۱^-)=۲+۰=۲$$

$$f(x)=\frac{x^۳}{۳}+x|x-۱|=\begin{cases}\dfrac{x^۳}{۳}+x^۲-x & x\ge ۱\\ \dfrac{x^۳}{۳}-x^۲+x & x<۱\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}x^۲+۲x-۱ & x>۱ & f'_+(۱)=۲\\ x^۲-۲x+۱ & x<۱ & f'_-(۱)=۰\end{cases}$$

۲. ۱ برای این‌که تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، تابع $y=kx^۴+(k+۲)x^۲+۲$ نباید ریشه ساده داشته باشد یا حداکثر ریشهٔ مضاعف داشته باشد. با تغییر متغیر $x^۲=t$ تابع درجهٔ ۴ بالا را به سهمی $y=kt^۲+(k+۲)t+۲$ تبدیل می‌کنیم، در نتیجه این سهمی جدید یا باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد یا باید دو ریشهٔ منفی داشته باشد تا شرایط لازم در مورد تابع درجهٔ ۴ برقرار باشد. پس داریم:

$$(۱)\ \Delta=(k+۲)^۲-۴(k)(۲)=۰\Rightarrow k^۲-۴k+۴=(k-۲)^۲=۰\Rightarrow k=۲$$

$$(۲)\ \begin{cases}\Delta>۰\Rightarrow k\ne ۲\\ S<۰\Rightarrow -\dfrac{k+۲}{k}<۰\Rightarrow \dfrac{k+۲}{k}>۰\Rightarrow k\in\mathbb{R}-[-۲,۰]\\ P>۰\Rightarrow \dfrac{۲}{k}>۰\Rightarrow k>۰\end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های حالت دوم $k\in(۰,+\infty)-\{۲\}$ به دست می‌آید.

حال اگر اجتماع این جواب را با $k=۲$ در نظر بگیریم، جواب کلی به دست می‌آید: $k\geq ۰$

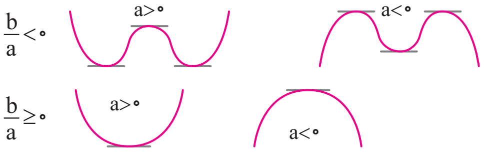
دقت کنید که به ازای $k=۰$ نیز تابع $f(x)=۲(x^۲+۱)$ به دست می‌آید که باز هم روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

بد نیست اشکال مختلف تابع $f(x)=ax^۴+bx^۲+c$ که به تابع دومجذوری معروف است را بدانیم:

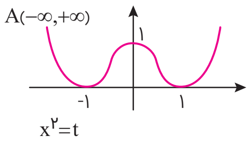
$$f(x)=ax^۴+bx^۲+c$$

$$f'(x)=۴ax^۳+۲bx=۰\to ۲x(۲ax^۲+b)=۰\to x=۰,x=\pm\sqrt{\frac{-b}{۲a}}$$

دقت کنید اگر $\frac{b}{a}<۰$ باشد، $x=\pm\sqrt{\frac{-b}{۲a}}$ تعریف شده است و تابع ۳ مماس افقی موازی محور xها دارد. در غیر این صورت فقط در $x=۰$ مماس افقی دارد.



لازم نیست علامت $\frac{b}{a}$ و a را حفظ کنید بلکه برای تشخیص نمودار $f(x)=ax^۴+bx^۲+c$ کافی است با عمل $f'(x)=۰$ تعداد مماس‌های افقی را یافته و سپس به تابع (به جملهٔ پرتوان) $-\infty$ بدهیم تا مشخص شود که از کدام ناحیهٔ مختصات تابع شروع می‌شود. مثلاً تابع $f(x)=x^۴-۲x^۲+۱$ با $f'(x)=۴x^۳-۴x=۰$ در $x=۰,\pm۱$ سه مماس افقی دارد وچون $A(-\infty,+\infty)$ در تابع صادق است، از ناحیهٔ دوم می‌آید و نمودارش به صورت زیر است:



برای حل کردن $ax^۴+bx^۲+c=۰$ نیز می‌دانیم که با تغییر متغیر $x^۲=t$ به یک معادلهٔ درجه دوم تبدیل شده و قابل حل است.

در این تست که گفته شده تابع $f(x)=|kx^۴+(k+۲)x^۲+۲|$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، عبارت داخل قدرمطلق نباید ریشهٔ ساده بدهد یعنی یا ریشه ندهد یا ریشهٔ مضاعف بدهد. چون اگر عبارت داخل قدرمطلق ریشهٔ ساده داشته باشد، تابع f در آن نقاط گوشه داشته و مشتق‌ناپذیر است.

۳.

$$f(x)=(x+۱)^۲-۱\quad;\quad\begin{cases}D_f=\mathbb{R}\\ \mathbb{R}_f=[-۱,+\infty)\end{cases}$$

$$g(x)=x-\sqrt{x+۱}\quad;\quad D_g=[-۱,+\infty)$$

با توجه به اطلاعات بالا، دامنهٔ تابع gof کل مجموعهٔ اعداد حقیقی به دست می‌آید. حال ضابطهٔ آن را به دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=f(x)-\sqrt{f(x)+۱}=(x+۱)^۲-۱-\sqrt{(x+۱)^۲}\Rightarrow(gof)(x)=(x+۱)^۲-|x+۱|-۱$$

$$\Rightarrow(gof)(x)=\begin{cases}x^۲+۳x+۱ & ; & x<-۱\\ x^۲+x-۱ & ; & x\geq-۱\end{cases}\Rightarrow(gof)'(x)=\begin{cases}۲x+۳ & ; & x<-۱\\ ۲x+۱ & ; & x>-۱\end{cases}\xrightarrow{(gof)'=۰}\begin{cases}x=-\frac{۳}{۲}<-۱\\ x=-\frac{۱}{۲}>-۱\end{cases}$$

در $x=-۱$ نیز واضح است که مشتق وجود ندارد، پس مجموع طول نقاط بحرانی برابر ۳- است.

۴. با توجه به نمودار، ریشهٔ مخرج منفی است؛ زیرا مجانب قائم در سمت چپ محور y قرار دارد:

$$(a-۳)x-a=۰\Rightarrow x=\frac{a}{a-۳}<۰\Rightarrow ۰<a<۳\quad(*)$$

همچنین $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<۰$ است:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{a^۲+۱}{a-۳}<۰\Rightarrow a<۳$$

پس تا این‌جا حدود a به صورت $۰<a<۳$ است. از طرفی نمودار داده شده اکیداً نزولی است، پس $f'<۰$ است.

$$f'(x)=\frac{-a(a^۲+۱)-(a-۳)}{\text{مخرج}^۲}=\frac{-a^۳-۲a+۳}{\text{مخرج}^۲}<۰\Rightarrow a^۳+۲a-۳\overset{*}{=}(a-۱)\underbrace{(a^۲+a+۳)}_{\Delta<۰}>۰\Rightarrow a>۱$$

* جمع ضرایب صفر است و یک ریشه $a=۱$ است و عبارت بر $a-۱$ بخش‌پذیر است.

با در نظر گرفتن شرط $۰<a<۳$ حدود نهایی a، $۱<a<۳$ به دست می‌آید.

۵. دامنهٔ تابع بازهٔ $[۰,+\infty)$ است. $f(۰)=۰$ و حد تابع در $+\infty$ نیز برابر صفر است:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۶x}{۲x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳}{\sqrt{x}}=۰$$

حال مختصات نقطهٔ بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{6(1+2x\sqrt{x})-6x(3\sqrt{x})}{(1+2x\sqrt{x})^2}=\frac{6-6x\sqrt{x}}{(1+2x\sqrt{x})^2}\xrightarrow{f'(x)=0}x\sqrt{x}=1\Rightarrow x=1\Rightarrow f(1)=\frac{6}{3}=2$$

پس برد تابع f بازهٔ $[0,2]$ است.

برای درک بهتر تابع را هم رسم کرده‌ایم:

$$f(x)=\frac{6x}{1+2x\sqrt{x}}\qquad D_f:x\geq 0$$

چون $x\geq 0$ است، صورت و مخرج تابع هر دو، مثبت و تابع بالای محور xها بوده و ارزش آن همواره مثبت است.

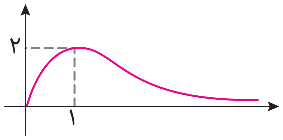
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\frac{6x}{2x\sqrt{x}}=\frac{3}{\sqrt{x}}=0^+=0$$

با توجه به حد کسر در $+\infty$ می‌بینیم که وقتی $x\to+\infty$ تابع از مقادیر بیشتر و بالاتر به سمت صفر میل می‌کند و بالای محور xهاست.

$$\lim_{x\to 0}f(x)\overset{\text{کم‌توان}}{=\!=}\frac{6x}{1}=6x$$

در حوالی $x=0$ شبیه خط $y=6x$ است. جالب است که $f'(0)=6$. یعنی اگر مشتق تابع را در $x=0$ بخواهند، می‌توانیم از هم‌ارز آن در $x=0$ مشتق بگیریم.

x	0		1		$+\infty$
y'	6	+	0	−	
y	0	↗	2	↘	0^+



با توجه به شکل $R_f:[0,2]$ است.

۲۵

۱. (۴) از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)\sqrt[3]{ax+2[x]}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\sqrt[3]{ax+2[x]}=\sqrt[3]{a}$$

به‌طور مشابه برای نیم‌مماس راست داریم:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\sqrt[3]{ax+2[x]}=\sqrt[3]{a+2}$$

برای این‌که نیم‌مماس‌ها عمود باشند، باید $f'_-(1)f'_+(1)=-1$ باشد:

$$\sqrt[3]{a(a+2)}=-1\Rightarrow a^2+2a+1=(a+1)^2=0\Rightarrow a=-1$$

۲. (۲) تابع مساحت مستطیل هاشورخورده برابر $S(x)=xf(x)$ است:

$$S(x)=x(x-1)^2=x^3-2x^2+x\Rightarrow\begin{cases}x=2\ \text{آهنگ لحظه‌ای در}=S'(2)=(3x^2-4x+1)\big|_{x=2}=5\\ [0,2]\ \text{آهنگ متوسط در}=\dfrac{S(2)-S(0)}{2}=\dfrac{2-0}{2}=1\end{cases}\Rightarrow\frac{\text{آهنگ لحظه‌ای}}{\text{آهنگ متوسط}}=5$$

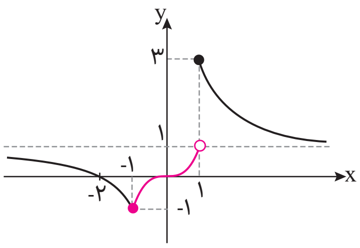
۳. (۱) با توجه به نمودار $f'(3)=\frac{1}{6}$ و $f(3)=1$ است.

$$f'(3)=x=3\ \text{در}\ f\ \text{شیب مماس بر}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{6}$$

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}f(x^2+2)-\sqrt[3]{x}(2x)f'(x^2+2)}{(f(x^2+2))^2}\Rightarrow g'(1)=\frac{\frac{1}{3}-(2\times\frac{1}{6})}{1^2}=0$$

۴. (۲) بهتر است نمودار تابع را رسم می‌کنیم. ضابطه اول یک تابع درجه ۳ و ضابطه دوم همان $y=\frac{2}{x}$ است که یک واحد به بالا رفته است.

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & -1<x<1\\ 1+\dfrac{2}{x} & x\leq-1\ \text{یا}\ x\geq1\end{cases}$$



با توجه به نمودار بالا، بیش‌ترین مقدار تابع (ماکزیمم مطلق) برابر ۳ و کم‌ترین مقدار آن (مینیمم مطلق) برابر ۱- است که اختلاف آن‌ها برابر ۴ است.