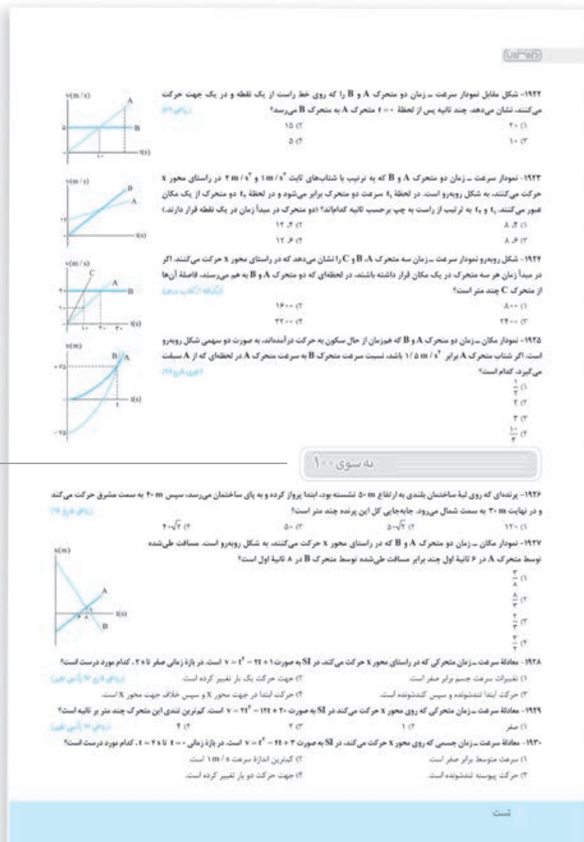
در کتاب کنکور فیزیک منتشران چه چیزهایی داریم؟

هر کدام از فصل‌های کتاب درسی را به چند بخش تقسیم کردیم. با این کار برنامه‌ریزی برای مطالعهٔ هر فصل برای شما آسان‌تر می‌شود.

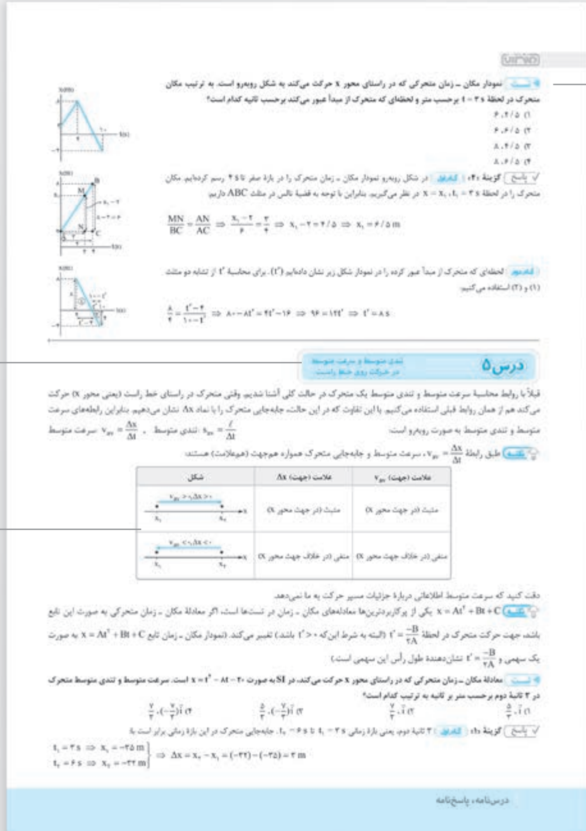
هر بخش را هم به چند درس تقسیم کردیم تا مطالب در ذهن شما دسته‌بندی شود.

هر جا لازم بود تست‌های هر درس را با این تیتر طبقه‌بندی کردیم.



در پایان هر فصل تست‌های دشواری با این عنوان می‌بینید. این تست‌ها مخصوص کسانی است که به درصد ۱۰۰ فکر می‌کنند.

در درس‌نامه هر جا لازم بود، تست‌هایی را به‌عنوان نمونه آورده‌ایم تا با روش‌های حل تست‌ها هم آشنا شوید.



متناظر با تست‌های هر درس، درس‌نامه هم وجود دارد. توصیه می‌کنیم قبل از حل تست‌های هر درس ابتدا درس‌نامهٔ آن را به دقت مطالعه کنید.

سعی کردیم در درس‌نامه‌ها تا حد ممکن از جدول و نمودار استفاده کنیم تا کار شما راحت‌تر شود.

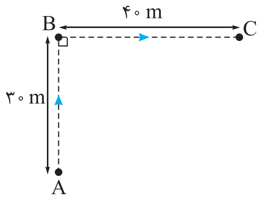
نکات تکمیلی درس‌نامه‌ها که برای حل برخی از تست‌ها کارساز هستند را می‌توانید در بین پاسخ تست‌ها ببینید.

تا حد ممکن تست‌ها را به صورت گام‌به‌گام حل کردیم تا شما روند حل هر تست را به طور دقیق یاد بگیرید.

بخش ۱
شناخت حرکت روی خط راست

درس ۱ مسافت و جابه‌جایی

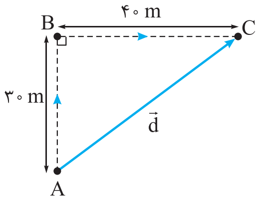
مسافت



به طول مسیری که یک متحرک طی می‌کند، مسافت پیموده‌شده یا به طور خلاصه مسافت می‌گوییم و آن را با حرف ℓ نشان می‌دهیم. مثلاً در شکل روبه‌رو که مسیر حرکت متحرکی با خط‌چین مشخص شده است، مسافت پیموده‌شده توسط متحرک برابر است با مجموع طول دو پاره‌خط AB و BC. یعنی داریم:

مسافت پیموده‌شده: $\ell = \overline{AB} + \overline{BC} = ۳۰ + ۴۰ = ۷۰\ \text{m}$

جابه‌جایی



به پاره‌خط جهت‌داری که مکان آغازین حرکت را به مکان پایانی حرکت وصل می‌کند، بردار جابه‌جایی یا به طور خلاصه جابه‌جایی می‌گوییم و آن را با نماد $\vec{d}$ نشان می‌دهیم. مثلاً در شکل روبه‌رو جابه‌جایی، برداری است که نقطهٔ A را به نقطهٔ C وصل می‌کند.

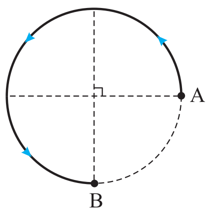
اندازهٔ جابه‌جایی برابر با طول بردار جابه‌جایی یا طول پاره‌خطی است که مکان آغازین و پایانی را به هم وصل می‌کند.

اندازهٔ جابه‌جایی را با حرف d نشان می‌دهیم.

در شکل بالا اندازهٔ جابه‌جایی متحرک را به کمک قضیهٔ فیثاغورس می‌توانیم حساب کنیم:

$$d = \sqrt{(\overline{AB})^۲ + (\overline{BC})^۲} = \sqrt{۳۰^۲ + ۴۰^۲} = ۵۰\ \text{m}$$

تست **در شکل زیر متحرکی روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع ۶m، در جهت نشان داده شده از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود. اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط متحرک به ترتیب چند متر است؟**

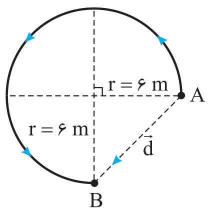


۱) $۱۲\sqrt{۲}$، ۳π

۲) $۱۲\sqrt{۲}$، ۹π

۳) $۶\sqrt{۲}$، ۳π

۴) $۶\sqrt{۲}$، ۹π



پاسخ **گزینهٔ «۴»** گام اول مسافت طی‌شده توسط متحرک، یعنی طول منحنی نشان داده شده در شکل روبه‌رو برابر است با $\frac{۳}{۴}$ محیط دایره‌ای به شعاع ۶ m؛ بنابراین داریم:

$$\ell = \frac{۳}{۴} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{۳}{۴} \times ۲\pi r = \frac{۳}{۴} \times ۲\pi \times ۶ = ۹\pi\ \text{m}$$

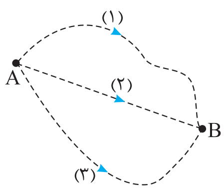
گام دوم اندازهٔ جابه‌جایی متحرک (یعنی d) با طول پاره‌خطی که دو نقطهٔ A و B را به هم وصل می‌کند برابر است. پس داریم:

$$d = \sqrt{r^۲ + r^۲} = \sqrt{۶^۲ + ۶^۲} = ۶\sqrt{۲}\ \text{m}$$

تفاوت جابه‌جایی و مسافت طی‌شده هر دو کمیت جابه‌جایی و مسافت از جنس طول هستند و یکای هر دو در SI متر (m) است. اما تفاوت‌های زیادی با هم دارند.

۱ جابه‌جایی کمیتی برداری است، اما مسافت نرده‌ای است. (در جهت محور x) $d = ۵\ \text{m}$

۲ مسافت به مسیر حرکت بستگی دارد اما جابه‌جایی خیر. یعنی اگر در شکل روبه‌رو چند متحرک از مسیرهای مختلف از نقطهٔ A به نقطهٔ B بروند، مسافت طی‌شده توسط آن‌ها می‌تواند متفاوت باشد، اما جابه‌جایی‌شان یکسان است. جابه‌جایی متحرک فقط به نقطهٔ آغازین و نقطهٔ پایانی مسیر حرکت وابسته است.



$\ell_۱ \neq \ell_۲ \neq \ell_۳$

$\vec{d}_۱ = \vec{d}_۲ = \vec{d}_۳ = \overrightarrow{AB}$

۳ اندازهٔ جابه‌جایی متحرک همواره کم‌تر یا مساوی مسافت طی‌شده توسط آن است. یعنی: $d \leq \ell$

نکته اندازهٔ جابه‌جایی متحرک و مسافت طی‌شده توسط آن به شرطی برابر است که:

اولاً: مسیر حرکت خط راست باشد. ثانیاً: جهت حرکت متحرک تغییر نکند.

به عبارتی متحرک باید در مسیر مستقیم و در یک جهت حرکت کند.

درس ۲ — سرعت متوسط و تندی متوسط

اگر جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط متحرکی در مدت‌زمان Δt، به ترتیب $\vec{d}$ و ℓ باشد، سرعت متوسط $(\vec{v}_{av})$ و تندی متوسط (s_{av}) متحرک در این بازهٔ زمانی، به این صورت تعریف می‌شود:

$$\text{تندی متوسط} = \frac{\text{مسافت}}{\text{زمان جابه‌جایی}} \Rightarrow s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \qquad \text{سرعت متوسط} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان جابه‌جایی}} \Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

یکای هر دو کمیت سرعت متوسط و تندی متوسط در SI متر بر ثانیه (m/s) است.

تفاوت سرعت متوسط و تندی متوسط با توجه به تعریف این دو کمیت، تفاوتشان شبیه تفاوت جابه‌جایی و مسافت است. یعنی:

۱ سرعت متوسط جهت دارد و کمیتی برداری است اما تندی متوسط یک کمیت نرده‌ای است.

۲ تندی متوسط به مسیر حرکت وابسته است، اما سرعت متوسط خیر. سرعت متوسط تنها به مکان آغازین و پایانی متحرک بستگی دارد.

۳ در یک جابه‌جایی معین، اندازهٔ سرعت متوسط کم‌تر یا مساوی تندی متوسط است.

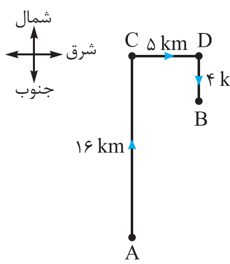
نکته اندازهٔ سرعت متوسط متحرک با تندی متوسط آن به شرطی برابر است که متحرک روی خط راست و بدون تغییر جهت در حال حرکت باشد.

نکته برای محاسبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط، باید اندازهٔ جابه‌جایی متحرک را بر زمان جابه‌جایی تقسیم کنیم. به زبان ریاضی: $v_{av} = \frac{d}{\Delta t}$

نکته سرعت متوسط و تندی متوسط علاوه بر متر بر ثانیه (m/s) یکای رایج دیگری به نام کیلومتر بر ساعت (km/h) هم دارند، به طوری که:
$۱\,m/s = ۳/۶\,km/h$

تست **خودرویی روی یک سطح افقی ابتدا ۱۶ km به طرف شمال، سپس ۵ km به طرف شرق و در نهایت ۴ km به سمت جنوب حرکت می‌کند. اگر تندی متوسط خودرو در این بازهٔ زمانی ۵۰ km / h باشد، اندازهٔ سرعت متوسط آن در این بازه چند کیلومتر بر ساعت است؟**

۱) ۲۶ ۲) ۱۳ ۳) ۵۰ ۴) ۲۵



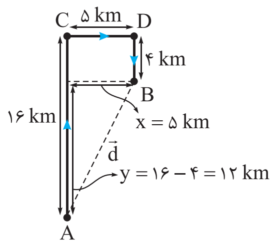
پاسخ **گزینهٔ «۱»** **گام اول** ابتدا مسیر حرکت خودرو را رسم کرده و مسافت طی‌شده توسط آن را حساب می‌کنیم:

$$\ell = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB} = ۱۶ + ۵ + ۴ = ۲۵\,km$$

گام دوم حالا به کمک رابطهٔ تندی متوسط، زمان حرکت خودرو (یعنی Δt) را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow ۵۰ = \frac{۲۵}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{۱}{۲}\,h$$

گام سوم در شکل روبه‌رو با توجه به مقدار x و y اندازهٔ جابه‌جایی خودرو را تعیین می‌کنیم:



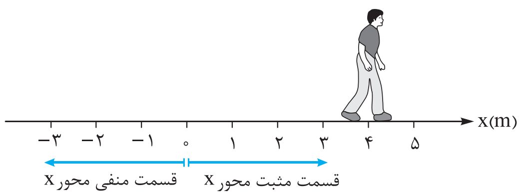
$$d = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{۵^۲ + ۱۲^۲} = ۱۳\,km$$

بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط خودرو برابر است با:

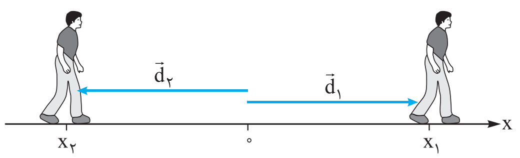
$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{۱۳}{\frac{۱}{۲}} = ۲۶\,km/h$$

درس ۳ — معرفی حرکت روی خط راست

از این‌جا به بعد قرار است حرکت متحرکی را بررسی کنیم که در راستای یک خط راست، یعنی در مسیری مستقیم، حرکت می‌کند. برای این کار فرض می‌کنیم متحرک به شکل روبه‌رو روی محور x در حال حرکت است.



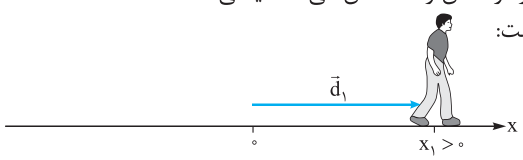
مبدأ مکان و بردار مکان به نقطهٔ $x = ۰$ روی محور x مبدأ مکان می‌گوییم. بردار مکان برداری است که مبدأ مکان را در هر لحظه به مکان متحرک وصل می‌کند. به عنوان مثال در شکل روبه‌رو بردار مکان متحرک در لحظه‌هایی که در مکان $x = x_۱$ و $x = x_۲$ قرار دارد به ترتیب $\vec{d}_۱$ و $\vec{d}_۲$ است. بنابراین داریم:



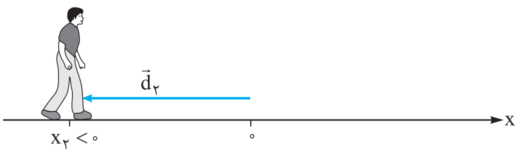
$$\vec{d}_۱ = x_۱\vec{i} \qquad \vec{d}_۲ = x_۲\vec{i}$$

نکته این‌که متحرک در قسمت مثبت محور x قرار دارد یا در قسمت منفی آن، جهت بردار مکان را مشخص می‌کند. یعنی:

۱ اگر متحرک در قسمت مثبت محور x قرار داشته باشد، بردار مکان آن در جهت محور x است:

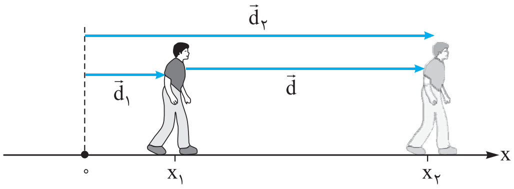


۲ اگر متحرک در قسمت منفی محور x قرار داشته باشد، بردار مکان آن در خلاف جهت محور x است:



دقت کنید که جهت بردار مکان به جهت حرکت متحرک ربطی ندارد.

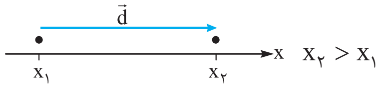
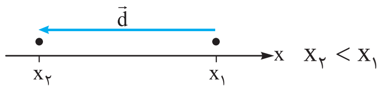
رابطهٔ جابه‌جایی با بردار مکان اگر در یک بازهٔ زمانی بردار مکان متحرک از $\vec{d}_۱$ به $\vec{d}_۲$ تغییر کند، جابه‌جایی متحرک $(\vec{d})$ در این بازهٔ زمانی برابر است با: $\vec{d} = \vec{d}_۲ - \vec{d}_۱$



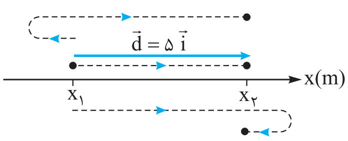
رابطهٔ بالا را می‌توانیم برحسب $x_۱$ و $x_۲$ بنویسیم. یعنی:

$$\vec{d} = \vec{d}_۲ - \vec{d}_۱ \xrightarrow[\vec{d}_۲ = x_۲\vec{i}]{\vec{d}_۱ = x_۱\vec{i}} \vec{d} = x_۲\vec{i} - x_۱\vec{i} \Rightarrow \vec{d} = (x_۲ - x_۱)\vec{i} \xrightarrow{x_۲ - x_۱ = \Delta x} \vec{d} = \Delta x\vec{i}$$

معمولاً در رابطهٔ $\vec{d} = \Delta x\vec{i}$، بردار یکه $\vec{i}$ را قرار نمی‌دهیم و می‌نویسیم $d = \Delta x$. علامت Δx نشان‌دهندهٔ جهت جابه‌جایی متحرک است. جدول زیر را ببینید:

علامت Δx	جهت بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$	شکل
مثبت	در جهت محور x	 $x_۲ > x_۱$
منفی	در خلاف جهت محور x	 $x_۲ < x_۱$

نکته بردار جابه‌جایی تنها وضعیت مکان آغازین و نهایی متحرک را نسبت به هم نشان می‌دهد و اطلاعاتی دربارهٔ مسیر حرکت نمی‌دهد. مثلاً اگر در یک حرکت جابه‌جایی، به صورت $\vec{d} = (۵\ m)\vec{i}$ باشد، مسیر حرکت متحرک به صورت هر یک از مسیرهای نشان داده شده در شکل روبه‌رو می‌تواند باشد.



تست **متحرکی که در راستای محور x در حال حرکت است، ابتدا از نقطهٔ A به نقطهٔ B، سپس از نقطهٔ B به نقطهٔ C می‌رود. جابه‌جایی متحرک در این دو مرحله به ترتیب $-۱۸\vec{i}$ و $۱۲\vec{i}$ است. اگر بردار مکان متحرک در نقطهٔ C به صورت $-۳\vec{i}$ باشد، بردار مکان متحرک در نقطه‌های A و B به ترتیب کدام است؟ (تمام کمیت‌ها برحسب یکای SI هستند.)**

۱) $-۳\vec{i}$، $-۱۵\vec{i}$ ۲) $-۳\vec{i}$، $-۹\vec{i}$ ۳) $۳\vec{i}$، $-۱۵\vec{i}$ ۴) $۳\vec{i}$، $-۹\vec{i}$

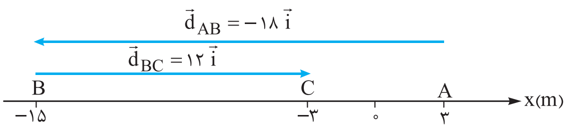
پاسخ **گزینهٔ «۳»** **گام اول** از نقطهٔ B تا C، جابه‌جایی متحرک $\vec{d}_{BC} = ۱۲\vec{i}$ است. پس داریم:

$$\vec{d}_{BC} = \vec{d}_C - \vec{d}_B \Rightarrow ۱۲\vec{i} = (-۳)\vec{i} - \vec{d}_B \Rightarrow \vec{d}_B = -۱۵\vec{i}$$

گام دوم حالا به سراغ مرحلهٔ اول حرکت می‌رویم. جابه‌جایی متحرک در این مرحله $\vec{d}_{AB} = -۱۸\vec{i}$ است. پس می‌نویسیم:

$$\vec{d}_{AB} = \vec{d}_B - \vec{d}_A \Rightarrow -۱۸\vec{i} = -۱۵\vec{i} - \vec{d}_A \Rightarrow \vec{d}_A = ۳\vec{i}$$

برای این‌که ماجرا را بهتر درک کنید، شکل زیر را ببینید:



مبدأ زمان به لحظهٔ شروع بررسی حرکت یک متحرک، مبدأ زمان می‌گوییم. در واقع مبدأ زمان لحظه‌ای است که زمان‌سنج را به کار می‌اندازیم تا مکان متحرک را در لحظه‌های مختلف تعیین کنیم.

از آن‌جایی که در این لحظه زمان‌سنج $t = ۰$ را نشان می‌دهد، لحظهٔ $t = ۰$ مبدأ زمان است.

نکته از آن‌جایی که از لحظهٔ $t = ۰$ به بعد حرکت متحرک را بررسی می‌کنیم، t هیچ‌گاه منفی نیست. بنابراین همواره $t \geq ۰$ است.

چند اصطلاح مهم زمانی

در تست‌های این فصل، چند اصطلاح زمانی کاربرد زیادی دارد. این اصطلاح‌ها را در جدول زیر مرتب کرده‌ایم.

اصطلاح	معنی (تمام مقادیر برحسب ثانیه هستند.)	مثال
$t = k$	یعنی لحظه‌ای که زمان‌سنج مقدار k را نشان می‌دهد.	لحظهٔ $t = ۲\,s$ یعنی لحظه‌ای که زمان‌سنج $۲\,s$ را نشان می‌دهد.
ثانیهٔ nاُم	یعنی بازهٔ زمانی $t_۱ = n - ۱$ تا $t_۲ = n$	ثانیهٔ چهارم یعنی بازهٔ زمانی $t_۱ = ۳\,s$ تا $t_۲ = ۴\,s$
m ثانیهٔ اول	یعنی بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = m$	۸ ثانیهٔ اول یعنی بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۸\,s$
m ثانیهٔ nاُم	یعنی بازهٔ زمانی $t_۱ = m(n-۱)$ تا $t_۲ = mn$	۳ ثانیهٔ چهارم یعنی بازهٔ زمانی $t_۱ = ۹\,s$ تا $t_۲ = ۱۲\,s$
شروع ثانیهٔ nاُم	یعنی لحظهٔ $t = n - ۱$	شروع ثانیهٔ ششم یعنی لحظهٔ $t = ۵\,s$
پایان ثانیهٔ nاُم	یعنی لحظهٔ $t = n$	پایان ثانیهٔ ششم یعنی لحظهٔ $t = ۶\,s$

معادلهٔ مکان ـ زمان

به معادله‌ای که مکان متحرک (x) را به صورت تابعی از زمان (t) نشان می‌دهد، معادلهٔ مکان ـ زمان یا معادلهٔ حرکت می‌گوییم. تابع‌های زیر همگی می‌توانند معادلهٔ حرکت متحرکی باشند که در راستای محور x حرکت می‌کند. $x = t^۳ - t$ $\quad x = ۵\cos(۲۰t)$ $\quad x = ۵t^۲ - ۴t + ۱$

مکان اولیه به مکان متحرک در مبدأ زمان، یعنی در لحظهٔ $t = ۰$، مکان اولیهٔ متحرک می‌گوییم. مکان اولیه را با نماد $x_۰$ نشان می‌دهیم. با جای‌گذاری $t = ۰$ در معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک مکان اولیهٔ آن را می‌توانیم تعیین کنیم.

نکته با داشتن معادلهٔ مکان ـ زمان، برای تعیین لحظه‌هایی که متحرک روی مبدأ قرار دارد، در این معادله $x = ۰$ را قرار می‌دهیم.

تست **معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = t^۲ - ۲t - ۳$ است. به ترتیب از راست به چپ مکان اولیهٔ متحرک برحسب متر کدام است و متحرک چند مرتبه از مبدأ عبور می‌کند؟**

۱) ۳، ۲   ۲) ۳، ۱   ۳) ۳-، ۲   ۴) ۳-، ۱

پاسخ **گزینهٔ «۴»** **گام اول** برای تعیین مکان اولیهٔ متحرک کافی است در معادلهٔ مکان ـ زمان، $t = ۰$ را جای‌گذاری کنیم:

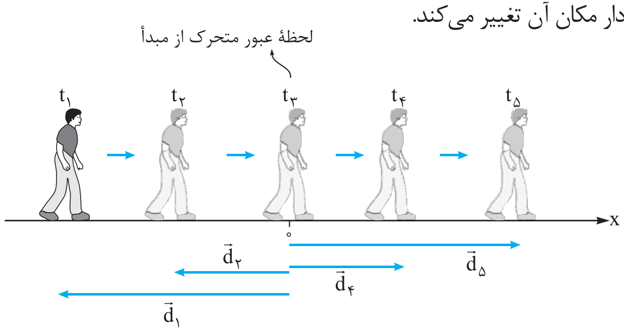
$$t = ۰ \Rightarrow x_۰ = (۰)^۲ - ۲ \times (۰) - ۳ \Rightarrow x_۰ = -۳\,m$$

گام دوم حالا برای تعیین تعداد دفعات عبور متحرک از مبدأ داریم:

$$x = ۰ \Rightarrow t^۲ - ۲t - ۳ = ۰ \Rightarrow (t-۳)(t+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۱\,s & \text{غیر قابل قبول} \\ t = ۳\,s \end{cases}$$

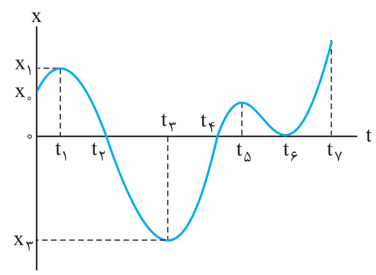
متحرک در لحظهٔ $t = ۳\,s$ در مکان $x = ۰$ قرار گرفته است. از آن‌جایی که علامت x قبل و بعد از لحظهٔ $t = ۳\,s$ متفاوت است، متحرک قبل و بعد از این لحظه در دو طرف مبدأ قرار دارد. یعنی متحرک در لحظهٔ $t = ۳\,s$ از مبدأ عبور کرده است. دقت کنید که قرارگرفتن متحرک در مبدأ با عبور متحرک از مبدأ متفاوت است.

نکته همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، در لحظهٔ عبور متحرک از مبدأ، جهت بردار مکان آن تغییر می‌کند.



درس ۴ نمودار مکان ـ زمان

نمودار مکان ـ زمان دربارهٔ حرکت متحرک اطلاعات زیادی به ما می‌دهد. این اطلاعات عبارت‌اند از: (نمودار شکل روبه‌رو به عنوان یک نمونه است و مثالی از هر مورد از این اطلاعات را در این نمودار خواهیم زد.)



۱ این نمودار مکان متحرک را در هر لحظه نشان می‌دهد. به عنوان مثال در نمودار بالا، در لحظهٔ $t_۱$ متحرک در مکان $x_۱$ قرار دارد.

۲ نقطهٔ برخورد نمودار با محور عمودی (محور x)، مکان اولیهٔ متحرک را مشخص می‌کند. در نمودار بالا مکان اولیهٔ متحرک $x_۰$ است.

۳ در بازه‌هایی که نمودار بالای محور افقی (محور t) قرار دارد، متحرک در مکان‌های مثبت ($x > ۰$) و در بازه‌هایی که نمودار پایین محور افقی قرار دارد، متحرک در مکان‌های منفی ($x < ۰$) قرار دارد. در نمودار صفحهٔ قبل متحرک در بازه‌های زمانی $(۰, t_۲)$، $(t_۴, t_۶)$ و $(t_۶, t_۷)$ در قسمت مثبت محور x و در بازهٔ $(t_۲, t_۴)$ در قسمت منفی محور x قرار دارد.

۴ در لحظه‌هایی که نمودار محور افقی را قطع می‌کند، متحرک به مبدأ رسیده و از آن عبور می‌کند. مثل لحظه‌های $t_۲$ و $t_۴$ در نمودار صفحهٔ قبل.

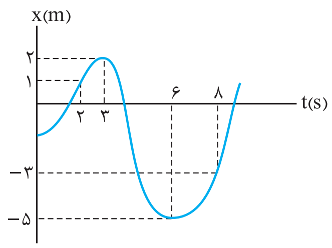
۵ در لحظه‌هایی که نمودار بر محور افقی مماس است، متحرک به مبدأ می‌رسد، ولی از آن عبور نمی‌کند. یعنی به مبدأ رسیده و بازمی‌گردد. مثل لحظهٔ $t_۶$ در نمودار صفحهٔ قبل. دقت کنید که در این نمودار در سه لحظهٔ $t_۲$، $t_۴$ و $t_۶$ مکان متحرک برابر صفر شده، اما تنها در دو لحظهٔ $t_۲$ و $t_۴$ متحرک از مبدأ عبور کرده است. در لحظهٔ $t_۶$ متحرک از قسمت مثبت محور x به مبدأ رسیده، اما وارد قسمت منفی محور x نشده و بازگشته است.

۶ در بازه‌هایی که نمودار صعودی است متحرک در جهت محور x و در بازه‌هایی که نمودار نزولی است متحرک در خلاف جهت محور x در حال حرکت است. مثلاً در نمودار صفحهٔ قبل در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۳$ متحرک در خلاف جهت محور x و در بازهٔ $t_۳$ تا $t_۵$ متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.

۷ در نقطه‌های اکسترمم نمودار (قله یا دره‌ها) جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند. مثل لحظه‌های $t_۱$، $t_۳$، $t_۵$ و $t_۶$ در نمودار صفحهٔ قبل.

۸ فاصلهٔ نمودار از محور افقی نشان‌دهندهٔ فاصلهٔ متحرک از مبدأ است. به عنوان مثال در نمودار بالا در بازهٔ $t_۲$ تا $t_۳$ فاصلهٔ نمودار از محور افقی و در نتیجه فاصلهٔ متحرک از مبدأ در حال افزایش است. همچنین در این نمودار در لحظهٔ $t_۳$ فاصلهٔ نمودار از محور افقی بیشینه است، پس فاصلهٔ متحرک از مبدأ هم در لحظهٔ $t_۳$ بیشینه و برابر $|x_۳|$ است.

تعیین جابه‌جایی و مسافت به کمک نمودار مکان ـ زمان



برای تعیین جابه‌جایی متحرک در یک بازهٔ زمانی به کمک نمودار مکان ـ زمان، کافی است مکان متحرک در انتهای بازه را منهای مکان متحرک در ابتدای بازه کنیم. به عنوان مثال در نمودار شکل روبه‌رو جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۲\,s$ تا $t_۲ = ۸\,s$ برابر است با:

$$\begin{cases} t_۱ = ۲\,s \Rightarrow x_۱ = ۱\,m \\ t_۲ = ۸\,s \Rightarrow x_۲ = -۳\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = (-۳) - ۱ = -۴\,m$$

اما برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده توسط متحرک به کمک نمودار، باید لحظه‌هایی که متحرک تغییر جهت می‌دهند را هم در نظر بگیریم. در نمودار بالا متحرک در لحظه‌های $t = ۳\,s$ و $t = ۶\,s$ تغییر جهت داده است. پس برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده توسط آن در بازهٔ $(۲\,s, ۸\,s)$ باید اندازهٔ جابه‌جایی متحرک را در بازه‌های $(۲\,s, ۳\,s)$، $(۳\,s, ۶\,s)$ و $(۶\,s, ۸\,s)$ به طور جداگانه حساب کرده و سپس با هم جمع کنیم. یعنی:

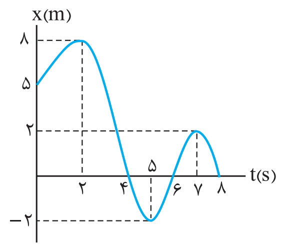
بازهٔ $(۲\,s, ۳\,s)$: $\Delta x_{۲۳} = ۲ - ۱ = ۱\,m \Rightarrow |\Delta x_{۲۳}| = ۱\,m$

بازهٔ $(۳\,s, ۶\,s)$: $\Delta x_{۳۶} = (-۵) - ۲ = -۷\,m \Rightarrow |\Delta x_{۳۶}| = ۷\,m$

بازهٔ $(۶\,s, ۸\,s)$: $\Delta x_{۶۸} = (-۳) - (-۵) = ۲\,m \Rightarrow |\Delta x_{۶۸}| = ۲\,m$

$\ell_{۲۸} = |\Delta x_{۲۳}| + |\Delta x_{۳۶}| + |\Delta x_{۶۸}| = ۱ + ۷ + ۲ = ۱۰\,m$

تست **نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل روبه‌رو است. در لحظهٔ $t_۱$ متحرک در بیشترین فاصله از مبدأ قرار دارد و در لحظهٔ $t_۲$ برای دومین مرتبه از مبدأ عبور می‌کند. در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ مسافت طی‌شده توسط متحرک چند برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن است؟**



۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲

۴) ۳

پاسخ **گزینهٔ «۲»** **گام اول** با توجه به نمودار مکان ـ زمان، در لحظهٔ $t_۱ = ۲\,s$ فاصلهٔ متحرک از مبدأ بیشینه است و در لحظهٔ $t_۲ = ۶\,s$ متحرک برای دومین بار از مبدأ عبور کرده است. پس باید اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط متحرک را در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۲\,s$ تا $t_۲ = ۶\,s$ به دست آوریم.

گام دوم در لحظه‌های $t_۱ = ۲\,s$ و $t_۲ = ۶\,s$ متحرک به ترتیب در مکان‌های $x_۱ = ۸\,m$ و $x_۲ = ۰$ قرار دارد. پس اندازهٔ جابه‌جایی آن در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$\Delta x_{۲۶} = x_۲ - x_۱ = ۰ - ۸ = -۸\,m \Rightarrow |\Delta x_{۲۶}| = ۸\,m$$

گام سوم از آن‌جایی که متحرک در لحظهٔ $t = ۵\,s$ تغییر جهت داده است، برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده توسط آن در بازهٔ $t_۱ = ۲\,s$ تا $t_۲ = ۶\,s$ داریم:

بازهٔ $(۲\,s, ۵\,s)$: $\Delta x_{۲۵} = (-۲) - ۸ = -۱۰\,m \Rightarrow |\Delta x_{۲۵}| = ۱۰\,m$

بازهٔ $(۵\,s, ۶\,s)$: $\Delta x_{۵۶} = ۰ - (-۲) = ۲\,m \Rightarrow |\Delta x_{۵۶}| = ۲\,m$

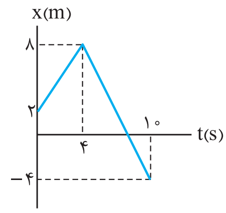
$$\ell_{۲۶} = |\Delta x_{۲۵}| + |\Delta x_{۵۶}| = ۱۰ + ۲ = ۱۲\,m$$

بنابراین نسبت مسافت طی‌شده به اندازهٔ جابه‌جایی برابر است با:

$$\frac{\ell_{۲۶}}{|\Delta x_{۲۶}|} = \frac{۱۲}{۸} = \frac{۳}{۲}$$

نکته گاهی برای تعیین مکان متحرک در بعضی از لحظه‌ها، لازم است از روابط هندسی ساده‌ای مثل قضیهٔ تالس یا تشابه مثلث‌ها استفاده کنیم.

تست نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند به شکل روبه‌رو است. به ترتیب مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۳\,s$ برحسب متر و لحظه‌ای که متحرک از مبدأ عبور می‌کند برحسب ثانیه کدام است؟



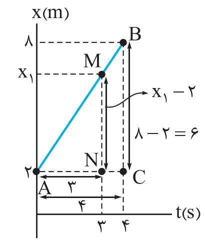
۱) ۶ ،۴/۵

۲) ۶ ،۶/۵

۳) ۸ ،۴/۵

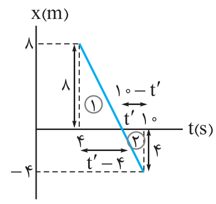
۴) ۸ ،۶/۵

پاسخ **گزینهٔ «۴»** گام اول در شکل روبه‌رو نمودار مکان ـ زمان متحرک را در بازهٔ صفر تا ۴ s رسم کرده‌ایم. مکان متحرک را در لحظهٔ $t_۱ = ۳\,s$ ، $x = x_۱$ در نظر می‌گیریم. بنابراین با توجه به قضیهٔ تالس در مثلث ABC داریم:



$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{x_۱ - ۲}{۶} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow x_۱ - ۲ = ۴/۵ \Rightarrow x_۱ = ۶/۵\,m$$

گام دوم لحظه‌ای که متحرک از مبدأ عبور کرده را در نمودار شکل زیر نشان داده‌ایم (t'). برای محاسبهٔ t' از تشابه دو مثلث (۱) و (۲) استفاده می‌کنیم:



$$\frac{۸}{۴} = \frac{t' - ۴}{۱۰ - t'} \Rightarrow ۸۰ - ۸t' = ۴t' - ۱۶ \Rightarrow ۹۶ = ۱۲t' \Rightarrow t' = ۸\,s$$

درس ۵ تندی متوسط و سرعت متوسط در حرکت روی خط راست

قبلاً با روابط محاسبهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط یک متحرک در حالت کلی آشنا شدیم. وقتی متحرک در راستای خط راست (یعنی محور x) حرکت می‌کند هم از همان روابط قبلی استفاده می‌کنیم. با این تفاوت که در این حالت، جابه‌جایی متحرک را با نماد Δx نشان می‌دهیم. بنابراین رابطه‌های سرعت متوسط و تندی متوسط به صورت روبه‌رو است:

سرعت متوسط: $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، تندی متوسط: $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$

نکته طبق رابطهٔ $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، سرعت متوسط و جابه‌جایی متحرک همواره هم‌جهت (هم‌علامت) هستند:

علامت (جهت) v_{av}	علامت (جهت) Δx	شکل
مثبت (در جهت محور x)	مثبت (در جهت محور x)	$v_{av} > ۰, \Delta x > ۰$ ؛ $x_۱$ ، $x_۲$ ، x
منفی (در خلاف جهت محور x)	منفی (در خلاف جهت محور x)	$v_{av} < ۰, \Delta x < ۰$ ؛ $x_۱$ ، $x_۲$ ، x

دقت کنید که سرعت متوسط اطلاعاتی دربارهٔ جزئیات مسیر حرکت به ما نمی‌دهد.

نکته $x = At^۲ + Bt + C$ یکی از پرکاربردترین‌ها معادله‌های مکان ـ زمان در تست‌ها است، اگر معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی به صورت این تابع باشد، جهت حرکت متحرک در لحظهٔ $t' = \frac{-B}{۲A}$ (البته به شرط این‌که $t' > ۰$ باشد) تغییر می‌کند. (نمودار مکان ـ زمان تابع $x = At^۲ + Bt + C$ به صورت یک سهمی و $t' = \frac{-B}{۲A}$ نشان‌دهندهٔ طول رأس این سهمی است.)

تست معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = t^۲ - ۸t - ۲۰$ است. سرعت متوسط و تندی متوسط متحرک در ۳ ثانیهٔ دوم برحسب متر بر ثانیه به ترتیب کدام است؟

۱) $\vec{i}$ ، $\frac{۵}{۳}$

۲) $\vec{i}$ ، $\frac{۷}{۳}$

۳) $(-\frac{۷}{۳})\vec{i}$ ، $\frac{۵}{۳}$

۴) $(-\frac{۷}{۳})\vec{i}$ ، $\frac{۷}{۳}$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** گام اول ۳ ثانیهٔ دوم، یعنی بازهٔ زمانی $t_۱ = ۳\,s$ تا $t_۲ = ۶\,s$. جابه‌جایی متحرک در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l} t_۱ = ۳\,s \Rightarrow x_۱ = -۳۵\,m \\ t_۲ = ۶\,s \Rightarrow x_۲ = -۳۲\,m \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = (-۳۲) - (-۳۵) = ۳\,m$$

بنابراین با محاسبهٔ سرعت متوسط متحرک داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۳}{۳}\ m/s \Rightarrow \vec{v}_{av} = (۱\ m/s)\vec{i}$$

گام دوم برای این‌که مسافت طی‌شده توسط متحرک را تعیین کنیم، باید عوض شدن یا نشدن جهت حرکت متحرک را در این بازه تعیین کنیم. با توجه به نکتهٔ بالا می‌نویسیم:

$$t' = \frac{-B}{۲A} = \frac{-(-۸)}{۲\times۱} = ۴\ s$$

$t' = ۴\ s$ در بازهٔ $t_۱ = ۳\ s$ تا $t_۲ = ۶\ s$ قرار دارد. بنابراین در این بازه متحرک تغییر جهت داده است.

پس ابتدا اندازهٔ جابه‌جایی متحرک را در بازه‌های $t_۱ = ۳\ s$ تا $t' = ۴\ s$ و $t' = ۴\ s$ تا $t_۲ = ۶\ s$ به طور جداگانه حساب می‌کنیم تا مسافت طی‌شده توسط متحرک به دست آید:

$$\begin{cases} t_۱ = ۳\ s \Rightarrow x_۱ = -۳۵\ m \\ t' = ۴\ s \Rightarrow x' = -۳۶\ m \\ t_۲ = ۶\ s \Rightarrow x_۲ = -۳۲\ m \end{cases} \begin{array}{l} \Rightarrow \Delta x_۱ = (-۳۶) - (-۳۵) = -۱\ m \Rightarrow |\Delta x_۱| = ۱\ m \\ \Rightarrow \Delta x_۲ = (-۳۲) - (-۳۶) = ۴\ m \Rightarrow |\Delta x_۲| = ۴\ m \end{array} \Rightarrow \ell = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| = ۱ + ۴ = ۵\ m$$

بنابراین تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $(۳\ s, ۴\ s)$ برابر است با:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۵}{۳}\ m/s$$

پاسخ‌نامهٔ بخش ۱

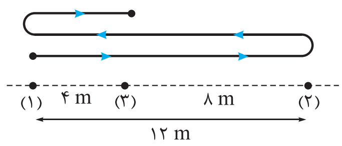
۱۶۲۵- گزینه ۴ اندازهٔ جابه‌جایی برابر است با طول پاره‌خطی که نقطهٔ A را به نقطهٔ B وصل می‌کند. پس اندازهٔ جابه‌جایی ورزشکار برابر با طول پاره‌خط AB یعنی ۳۰ m است، نه کم‌تر، نه بیشتر (رد ۱ و ۲).

از طرفی از آن‌جایی که مسیر حرکت خط راست نیست، مسافت طی‌شده توسط ورزشکار حتماً از اندازهٔ جابه‌جایی آن، یعنی ۳۰ m، بیشتر است. پس باید گزینهٔ (۴) را انتخاب کنیم. خلاصه این‌که: $d = ۳۰\,m \ ,\ \ell > ۳۰\,m$

۱۶۲۶- گزینه ۱ شرط این‌که مسافت طی‌شده توسط یک متحرک با اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر باشد، این است که متحرک روی خط راست و بدون تغییر جهت حرکت کند. در شکل (ب) متحرک تغییر جهت داده پس این شرط برقرار نیست! در نتیجه: در شکل (الف) اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط شخص برابر یکدیگرند، اما در شکل (ب)، خیر!

۱۶۲۷- گزینه ۴ | گام اول | جابه‌جایی متحرک به مسیر حرکت آن بستگی ندارد و تنها به مکان‌های آغازین و نهایی آن وابسته است. در این‌جا متحرک ابتدا در نقطهٔ (۱) و در پایان در نقطهٔ (۳) قرار دارد؛ پس اندازهٔ جابه‌جایی در این حرکت برابر با فاصلهٔ دو نقطهٔ (۱) و (۳) یعنی ۴ m است.

| گام دوم | برای تعیین مسافت طی‌شده توسط متحرک باید مسیر آن را مشخص کنید. مسیر متحرک به شکل زیر است:

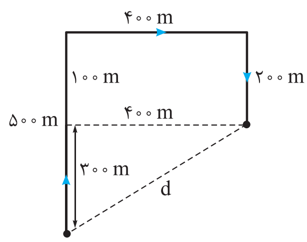


در این شکل، مسافت طی‌شده توسط شخص برابر است با:

$$\ell = ۱۲ + ۱۲ + ۴ = ۲۸\,m$$

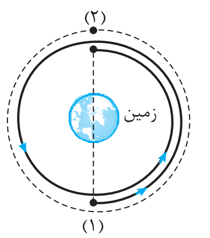
۱۶۲۸- گزینه ۱ | گام اول | مسافت طی‌شده توسط دانش‌آموز برابر کل طول مسیر طی‌شده توسط آن است، یعنی: $\ell = ۵۰۰ + ۴۰۰ + ۲۰۰ = ۱۱۰۰\,m$

| گام دوم | برای محاسبهٔ اندازهٔ جابه‌جایی آن، مبدأ و مقصد دانش‌آموز را با خط راست به هم وصل کرده و طول این پاره‌خط را حساب می‌کنیم. با توجه به شکل روبه‌رو داریم:



$$d = \sqrt{۳۰۰^۲ + ۴۰۰^۲} = ۵۰۰\,m$$

۱۶۲۹- گزینه ۲ مسیر حرکت ماه به دور زمین را دایره‌ای به شعاع R در نظر می‌گیریم؛ پس اندازهٔ جابه‌جایی ماه در این حرکت برابر با قطر این دایره یعنی ۲R است:



$$d = ۲R$$

مسافت طی‌شده توسط ماه برابر است با محیط این دایره به اضافهٔ نصف محیط این دایره؛ یعنی با توجه به شکل روبه‌رو داریم:

$$\ell = (۲\pi R) + \frac{۱}{۲}(۲\pi R) = ۳\pi R$$

در نتیجه:

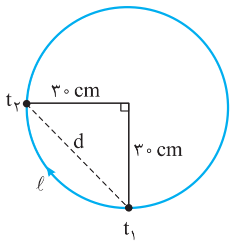
$$\frac{\ell}{d} = \frac{۳\pi R}{۲R} = \frac{۳\pi}{۲}$$

۱۶۳۰- گزینه ۲ با توجه به شکل داده‌شده، مسافت طی‌شده توسط جسم ۸۸ km و اندازهٔ جابه‌جایی آن ۶۰ km است. پس داریم:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{۶۰ \times ۱۰^۳}{۸۰ \times ۶۰} = ۱۲/۵\,m/s$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۸۸ \times ۱۰^۳}{۸۰ \times ۶۰} = \frac{۵۵}{۳}\,m/s$$

۱۶۳۱- گزینه ۱ در بازهٔ زمانی ′۶:۳۰ تا ′۶:۴۵ عقربهٔ دقیقه‌شمار، مطابق شکل مقابل، °۹۰ دوران می‌کند. پس نوک این عقربه روی دایره‌ای به شعاع ۳۰ cm به اندازهٔ °۹۰ می‌چرخد. در این مسیر، اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط نوک عقربه برابرند با:



$$d = \sqrt{۳۰^۲ + ۳۰^۲} = ۳۰\sqrt{۲}\ cm$$

$$\ell = \frac{۱}{۴} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{۱}{۴} \times ۲\pi R = \frac{۱}{۲}\pi R = ۱۵\pi\ cm$$

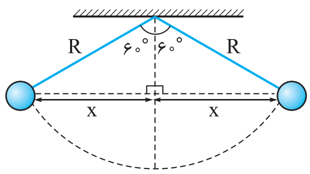
حالا داریم:

$$\Delta t = ۱۵\ min$$

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{۳۰\sqrt{۲}}{۱۵} = ۲\sqrt{۲}\ cm/min$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۱۵\pi}{۱۵} = \pi\ cm/min$$

۱۶۳۲- گزینه ۲ | گام اول | ابتدا مسیر حرکت گلولهٔ آونگ را که بخشی از یک دایره است رسم کرده و اندازهٔ جابه‌جایی (d) و مسافت طی‌شده توسط آن (ℓ) را برحسب شعاع این دایره (R) که همان طول آونگ است به دست می‌آوریم:



$$\sin ۶۰^\circ = \frac{x}{R} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{x}{R} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R$$

اندازهٔ جابه‌جایی: $d = ۲x = \sqrt{۳}R$

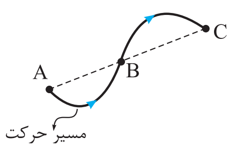
مسافت: $\ell = \frac{۱}{۳}(\text{محیط دایره}) = \frac{۱}{۳} \times ۲\pi R = \frac{۲\pi}{۳}R$

| گام دوم | حالا دربارهٔ نسبت تندی متوسط به اندازهٔ سرعت متوسط گلولهٔ آونگ در این مسیر می‌توانیم بنویسیم:

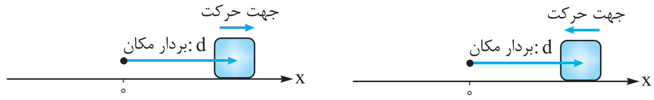
$$\begin{cases} s_{av} = \dfrac{\ell}{\Delta t} \\ v_{av} = \dfrac{d}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \frac{s_{av}}{v_{av}} = \frac{\ell}{d} \Rightarrow \frac{s_{av}}{۱/۵} = \frac{\frac{۲\pi}{۳}R}{\sqrt{۳}R}$$

$$\Rightarrow \frac{s_{av}}{۱/۵} = \frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}} \Rightarrow s_{av} = \frac{\pi}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}\pi\ m/s$$

۱۶۳۳- گزینه ۴ برای این‌که اندازهٔ سرعت متوسط متحرک با تندی متوسط آن برابر باشد، باید اندازهٔ جابه‌جایی متحرک با مسافت طی‌شده توسط آن برابر شود. می‌دانیم این اتفاق به شرطی می‌افتد که متحرک روی خط راست و بدون تغییر جهت حرکت کند؛ پس باید گزینهٔ (۴) را انتخاب کنیم. شکل روبه‌رو مثال نقضی برای گزینه‌های (۱) و (۲) را نشان می‌دهد. در این شکل اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط متحرک با هم برابر نیستند.



۱۶۳۴- گزینه ۴ به برداری که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند، بردار مکان می‌گوییم. همان‌طور که در شکل‌های زیر می‌بینید، اگر این بردار در جهت محور x باشد، یعنی متحرک در قسمت مثبت محور x قرار دارد که می‌تواند در جهت محور x یا در خلاف جهت محور x در حال حرکت باشد.



۱۶۳۵- گزینه ۱ در لحظهٔ $t_۲$ متحرک در مکان $x_B=-۳\,m$ قرار دارد؛ پس بردار مکان متحرک به صورت $\vec{d}_B=(-۳m)\vec{i}$ و اندازهٔ بردار مکان ۳ m است.

در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۳$ متحرک از مکان $x_A=۲\,m$ به مکان $x_C=۶\,m$ جابه‌جا شده است؛ پس اندازهٔ بردار جابه‌جایی متحرک در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$\Delta x_{AC}=x_C-x_A=۶-۲=۴\,m$$

بنابراین داریم:

$$\frac{d_B}{\Delta x_{AC}}=\frac{۳}{۴}$$

۱۶۳۶- گزینه ۳ برای به دست آوردن بردار مکان اولیه و بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t_۱=۳\,s$ کافی است در معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده به ترتیب $t_۰=۰$ و $t_۱=۳\,s$ را جای‌گذاری کنیم: $x=۳\cos(\frac{\pi}{۲}t)+۱$

$$\Rightarrow\begin{cases}t_۰=۰\Rightarrow x_۰=۳\overbrace{\cos(۰)}^{۱}+۱=۴\,m\Rightarrow \vec{d}_۰=۴\vec{i}\\ t_۱=۳s\Rightarrow x_۱=۳\underbrace{\cos(\frac{۳\pi}{۲})}_{۰}+۱=۱\,m\Rightarrow \vec{d}_۱=\vec{i}\end{cases}$$

در رابطهٔ بالا $\vec{d}_۰$ و $\vec{d}_۱$ برحسب متر هستند.

۱۶۳۷- گزینه ۲ | گام اول | ۲ ثانیهٔ اول حرکت یعنی بازهٔ زمانی صفر تا ۲ s؛ پس مکان متحرک را در این دو لحظه به دست می‌آوریم:

$$x=t^۳-۸t+۲\Rightarrow\begin{cases}t_۱=۰\Rightarrow x_۱=۲\,m\\ t_۲=۲s\Rightarrow x_۲=-۶\,m\end{cases}$$

| گام دوم | در لحظهٔ $t_۲=۲\,s$ متحرک در مکان $x_۲=-۶\,m$ قرار دارد، پس فاصلهٔ متحرک تا مبدأ در این لحظه برابر $|x_۲|=|-۶|=۶\,m$ است.

| گام سوم | اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ برابر است با:

$$\Delta x=x_۲-x_۱=(-۶)-(۲)=-۸\,m\Rightarrow |x|=۸\,m$$

بنابراین خواستهٔ مسئله برابر است با:

$$\frac{|x_۲|}{|\Delta x|}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

۱۶۳۸- گزینه ۴ | گام اول | منظور از ثانیهٔ دوم، بازهٔ زمانی $t_۱=۱\,s$ تا $t_۲=۲\,s$ است، پس ابتدا مکان متحرک را در این دو لحظه به دست می‌آوریم:

پس جابه‌جایی در این بازه برابر است با: $\Delta x_{۱۲}=x_۲-x_۱=۴-۱=۳\,m$

| گام دوم | دو ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ $t_۳=۴\,s$ تا $t_۴=۶\,s$، پس به طور مشابه با گام اول داریم:

$$x=t^۲+\sin(\pi t)\Rightarrow\begin{cases}t_۳=۴s\Rightarrow x_۳=۱۶+\overbrace{\sin(۴\pi)}^{۰}=۱۶\,m\\ t_۴=۶s\Rightarrow x_۴=۳۶+\underbrace{\sin(۶\pi)}_{۰}=۳۶\,m\end{cases}$$

$$\Delta x_{۳۴}=x_۴-x_۳=۳۶-۱۶=۲۰\,m$$

| گام سوم | در پایان داریم:

$$\frac{\Delta x_{۱۲}}{\Delta x_{۳۴}}=\frac{۳}{۲۰}$$

۱۶۳۹- گزینه ۴ | گام اول | ابتدا با جای‌گذاری $t_۰=۰$ در معادلهٔ مکان ـ زمان، مکان اولیهٔ متحرک را تعیین می‌کنیم:

$$x=t^۲-۲t-۸\xrightarrow{t_۰=۰}x_۰=-۸\,m$$

| گام دوم | مکان متحرک در لحظهٔ $t_۱$ برابر $-۸\,m$ است، پس:

$$x=-۸\Rightarrow t_۱^۲-۲t_۱-۸=-۸\Rightarrow t_۱^۲-۲t_۱=۰$$

$$\Rightarrow t_۱(t_۱-۲)=۰\Rightarrow t_۱=۲\,s$$

البته $t_۱=۰$ هم جواب دیگر و بدیهی معادلهٔ بالاست که کاری به کارش نداریم.

| گام سوم | در لحظهٔ $t_۲$ متحرک از مبدأ عبور می‌کند، پس در این لحظه $x=۰$ است؛ یعنی:

$$x=۰\Rightarrow t_۲^۲-۲t_۲-۸=۰\Rightarrow (t_۲-۴)(t_۲+۲)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t_۲=-۲\,s \quad \text{غ‌ق‌ق}\\ t_۲=۴\,s\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{۴}{۲}=۲$$

۱۶۴۰- گزینه ۴ درستی یا نادرستی تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱: نادرست؛ بردار مکان، **مبدأ** را به مکان متحرک در هر لحظه وصل می‌کند؛ نه مکان اولیه را! ۲: نادرست؛ اگر در بازه‌ای متحرک تغییر جهت دهد، اندازهٔ جابه‌جایی آن با مسافت طی‌شده توسط آن برابر نیست. ۳: نادرست؛ وقتی متحرک در قسمت مثبت محور x قرار دارد، بردار مکان آن در جهت محور x و وقتی متحرک در قسمت منفی محور x قرار دارد، بردار مکان آن در خلاف جهت محور x است؛ پس وقتی متحرک از مبدأ عبور می‌کند، جهت بردار مکان آن تغییر می‌کند، نه بردار سرعت آن.

۴: درست؛ این عبارت تعریف بردار جابه‌جایی در یک بازهٔ زمانی است.

۱۶۴۱- گزینه ۳ | گام اول | در طول بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ متحرک در قسمت مثبت محور x قرار دارد، پس بردار مکان آن همواره در جهت محور x است؛ پس (الف) درست و (ب) نادرست است.

| گام دوم | فاصلهٔ متحرک از مبدأ ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد، پس طول بردار مکان آن هم ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد؛ یعنی (پ) درست است.

۱۶۴۲- گزینه ۴ | گام اول | متحرک از لحظهٔ $t_۱$ تا لحظهٔ عبور از مبدأ (نقطهٔ O) در قسمت مثبت محور x و بعد از آن در قسمت منفی محور x قرار دارد، پس بردار مکان متحرک ابتدا در جهت محور x و سپس در خلاف جهت محور x است، یعنی عبارت (الف) نادرست و عبارت (ب) درست است.

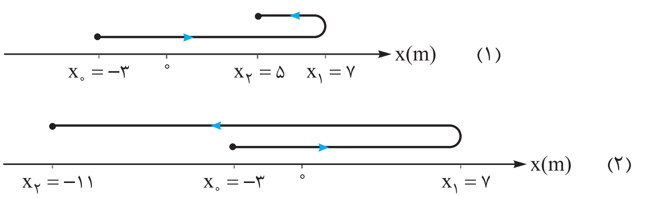
| گام دوم | فاصلهٔ متحرک از مبدأ ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد، پس اندازهٔ بردار مکان متحرک در این بازهٔ زمانی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد؛ یعنی عبارت (پ) درست است.

۱۶۴۳- گزینه ۳ از آن‌جایی که اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در این بازهٔ زمانی ۸ m است، مکان متحرک در پایان این بازه برابر است با:

حالت اول: $\Delta x=۸\,m\Rightarrow x_۲-(-۳)=۸\Rightarrow x_۲=۵\,m$

حالت دوم: $\Delta x=-۸\,m\Rightarrow x_۲-(-۳)=-۸\Rightarrow x_۲=-۱۱\,m$

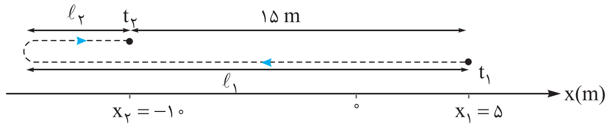
متحرک یک بار در مکان $x_۱=۷\,m$ تغییر جهت داده است، پس مسیر حرکت آن در بازهٔ زمانی صفر تا T به صورت یکی از شکل‌های زیر است:



مسافت طی‌شده توسط متحرک در این دو شکل برابر است با:

شکل (۱): $\ell_۱=۱۰+۲=۱۲\,m$ شکل (۲): $\ell_۲=۱۰+۱۸=۲۸\,m$

۱۶۴۴- گزینه ۳ متحرک در لحظهٔ t_1 در مکان $x_1 = 5\,m$ و در لحظهٔ t_2 در مکان $x_2 = -10\,m$ قرار دارد و در این بازهٔ زمانی تنها یک مرتبه تغییر جهت می‌دهد. از آن‌جایی که در لحظهٔ t_1 متحرک در خلاف جهت محور x در حال حرکت است، مسیر حرکت آن باید به صورت شکل زیر باشد.



با توجه به شکل بالا داریم: $\ell_1 = \ell_2 + 15$

همچنین چون مسافت طی‌شده ۲/۴ برابر اندازهٔ جابه‌جایی است، می‌نویسیم:

$\ell = 2/4 \times |\Delta x| \Rightarrow \ell_1 + \ell_2 = 2/4 \times 15 = 36\,m$

بنابراین:

$$\begin{cases} \ell_1 = \ell_2 + 15 \\ \ell_1 + \ell_2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \ell_1 = 25/5\,m\ ,\ \ell_2 = 10/5\,m$$

در نتیجه حداکثر فاصلهٔ متحرک از نقطهٔ شروع حرکت برابر با ℓ_1 یعنی $25/5\,m$ است.

۱۶۴۵- گزینه ۴ ابتدا معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را به صورت زیر می‌نویسیم:

$x = t^3 - 6t^2 + 9t = t(t^2 - 6t + 9) = t(t-3)^2$

معادلهٔ بالا نشان می‌دهد همواره $x \geq 0$ است، یعنی متحرک هیچ‌گاه وارد قسمت منفی محور x نمی‌شود، بنابراین هرگز از مبدأ عبور نمی‌کند. با توجه به معادلهٔ بالا نتیجه می‌گیریم، متحرک در دو لحظهٔ $t_1 = 0$ و $t_2 = 3\,s$ در مبدأ قرار دارد، ولی در هیچ‌کدام از این دو لحظه از مبدأ عبور نکرده است (عبورکردن از مبدأ به معنی این است که متحرک از یک سمت مبدأ به سمت دیگر آن برود).

۱۶۴۶- گزینه ۳ بردار مکان متحرک در لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که علامت مکان متحرک عوض شود، پس کافی است معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را تعیین علامت کنیم. در معادلهٔ $x = t(t-1)(t-2)^2$ عبارت‌های $(t-2)^2$ و t همواره نامنفی هستند؛ پس علامت x تنها به علامت عبارت $(t-1)$ بستگی دارد. این عبارت به ازای $t > 1$ مثبت و به ازای $t < 1$ منفی است، پس علامت عبارت $(t-1)$ و در نتیجه علامت x تنها یک مرتبه عوض می‌شود؛ در نتیجه جهت بردار مکان متحرک تنها یک مرتبه و در لحظهٔ $t = 1\,s$ عوض می‌شود.

دقت کنید که متحرک در سه لحظهٔ $t = 0$، $t = 1\,s$ و $t = 2\,s$ در مبدأ قرار دارد، اما فقط در لحظهٔ $t = 1\,s$ از مبدأ عبور کرده است.

۱۶۴۷- گزینه ۴ فاصلهٔ متحرک از مبدأ در دو مکان $x_1 = 6\,m$ و $x_2 = -6\,m$ برابر $6\,m$ است، پس داریم:

حالت اول: $x_1 = 6\,m \Rightarrow 6t_1 - t_1^2 - 5 = 6 \Rightarrow t_1^2 - 6t_1 + 11 = 0$

در معادلهٔ درجهٔ دو بالا، $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(11) = -8$ منفی است، پس معادله جواب ندارد.

حالت دوم: $x_2 = -6\,m \Rightarrow 6t_2 - t_2^2 - 5 = -6 \Rightarrow t_2^2 - 6t_2 - 1 = 0$

برای حل معادلهٔ بالا داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(-1) = 36 + 4 = 40$$

$$t_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{40}}{2}$$

این معادله دو جواب دارد که یکی از آن‌ها یعنی $\frac{6 - \sqrt{40}}{2}$ به خاطر منفی‌بودن غیر قابل قبول است، پس این معادله تنها یک جواب قابل قبول دارد. دو حالت بالا نشان می‌دهد متحرک هیچ‌گاه از مکان $x_1 = 6\,m$ عبور نمی‌کند و تنها یک مرتبه از مکان $x_2 = -6\,m$ می‌گذرد، پس فاصلهٔ متحرک از مبدأ فقط یک مرتبه برابر $6\,m$ می‌شود.

۱۶۴۸- گزینه ۴ کافی است مکان دو متحرک را برابر قرار دهیم، یعنی:

$$x_A = x_B \Rightarrow t^2 + t = 2t^2 - 3t - 5 \Rightarrow t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (t-5)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1\,s & \text{غ‌ق‌ق} \\ t = 5\,s & \text{ق‌ق} \end{cases}$$

۱۶۴۹- گزینه ۲ در نمودار مکان ـ زمان یک متحرک نباید هیچ خط عمود بر محور افقی (محور t)، نمودار را در دو نقطه (یا بیشتر) قطع کند، زیرا در این صورت، متحرک در یک لحظه در دو مکان (یا بیشتر) قرار دارد!!! به عبارتی نمودار مکان ـ زمان متحرک نمودار یک تابع ریاضی است؛ بنابراین در این شکل‌ها، نمودارهای (الف)، (ب) و (ت) نمی‌توانند نشان‌دهندهٔ نمودار مکان ـ زمان یک متحرک باشند.

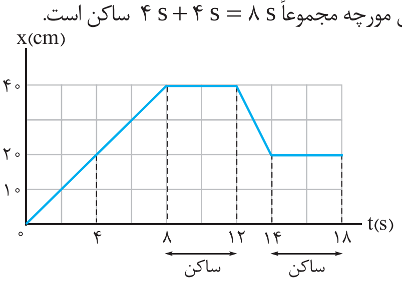
۱۶۵۰- گزینه ۱ مکان اولیهٔ متحرک در قسمت مثبت محور xها قرار دارد (همین جا گزینهٔ درست لو رفته) و متحرک پس از عبور از مبدأ در قسمت منفی محور x تغییر جهت داده و به مبدأ برمی‌گردد. این ویژگی‌ها فقط در شکل گزینهٔ (۱) وجود دارد.

۱۶۵۱- گزینه ۱ درستی یا نادرستی تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱: نادرست؛ می‌دانیم در لحظه‌هایی که در نمودار مکان ـ زمان قله و دره (نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی) وجود دارد، متحرک تغییر جهت می‌دهد؛ پس با توجه به نمودار، جهت حرکت متحرک تنها در لحظهٔ t_1 و t_3 تغییر می‌کند. ۲: درست؛ لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان، همان لحظهٔ عبور متحرک از مبدأ یا لحظه‌ای است که نمودار مکان ـ زمان متحرک محور افقی را قطع می‌کند. با این حساب، جهت بردار مکان متحرک در دو لحظهٔ t_2 و t_4 تغییر می‌کند. ۳: درست؛ در این بازه، متحرک در حال دورشدن از محور افقی است، پس در حال دورشدن از مبدأ مکان، یعنی $x = 0$ است. ۴: درست؛ با توجه به محور عمودی، مکان اولیهٔ متحرک در این نمودار ۲ واحد مثبت است. در بازهٔ (t_4, t_5) متحرک از مبدأ مکان به سمت مکان‌های مثبت در حال حرکت است و در لحظهٔ t_5 به مکان ۲ واحد مثبت می‌رسد، پس در این بازه در حال نزدیک‌شدن به مکان اولیه‌اش است.

۱۶۵۲- گزینه ۴ درستی یا نادرستی تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱: نادرست؛ همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، مورچه در بازه‌های زمانی $(8\,s, 12\,s)$ و $(14\,s, 18\,s)$ ساکن است، پس مورچه مجموعاً $4\,s + 4\,s = 8\,s$ ساکن است.

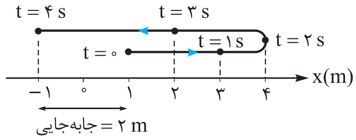


۲: نادرست؛ در این بازهٔ زمانی مورچه $40\,cm$ در جهت محور x و $20\,cm$ در خلاف جهت محور x حرکت کرده است، پس اندازهٔ جابه‌جایی آن $20\,cm$ و مسافت طی‌شده توسط آن $60\,cm$ است. ۳: نادرست؛ مکان مورچه در لحظه‌های $t_1 = 0$، $t_2 = 8\,s$ و $t_3 = 16\,s$ به ترتیب برابر $x_1 = 0$، $x_2 = 40\,cm$ و $x_3 = 20\,cm$ است، پس اندازهٔ جابه‌جایی مورچه در ۸ ثانیهٔ اول برابر $40 - 0 = 40\,cm$ و در ۸ ثانیهٔ دوم برابر $40 - 20 = 20\,cm$ است. ۴: درست؛ در نمودار بالا، واضح است که در بازهٔ زمانی $(4\,s, 14\,s)$ که مدت زمان آن برابر $10\,s$ است، فاصلهٔ مورچه از مبدأ مکان بیش از $20\,cm$ است.

۱۶۵۳- گزینه ۲ به سراغ بررسی گزینه‌ها می‌رویم: ۱: نادرست؛ نمودار محور افقی را فقط یک مرتبه (در لحظهٔ t_1) قطع کرده است، پس متحرک فقط یک مرتبه از مبدأ مکان عبور می‌کند. ۲: درست؛ در بازهٔ زمانی صفر تا T نمودار دو اکسترمم نسبی دارد (قله یا دره)، پس دو مرتبه تغییر جهت می‌دهد. ۳: نادرست؛ در این بازه، متحرک ابتدا $20\,m$ در جهت محور x، سپس $10\,m$ در خلاف جهت محور x و در نهایت باز هم $10\,m$ در جهت محور x حرکت کرده است؛ پس مسافت طی‌شده توسط آن برابر است با: $\ell = 20 + 10 + 10 = 40\,m$

۴: نادرست؛ در هر دو لحظهٔ t_1 و t_2 متحرک در مبدأ مکان قرار دارد؛ پس جابه‌جایی آن در بازهٔ t_1 تا t_2 برابر صفر است.

۱۶۵۴- گزینه ۴ ابتدا مسیر حرکت متحرک را در این بازهٔ زمانی رسم می‌کنیم:



حالا به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم: ۱: درست؛ جهت حرکت متحرک فقط یک بار و در لحظهٔ $t = ۲\,s$ تغییر کرده است. ۲: درست؛ متحرک فقط یک بار از مبدأ عبور کرده، پس جهت بردار مکان آن هم فقط یک بار تغییر کرده است. ۳: درست؛ در این بازه مسافت طی‌شده توسط متحرک برابر $\ell = ۳+۵ = ۸\,m$ و اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر $۲\,m$ است. ۴: نادرست؛ در بازهٔ $(۰, ۳\,s)$ متحرک $۱\,m$ در جهت محور x جابه‌جا شده است.

۱۶۵۵- گزینه ۲ ابتدا متحرک از مکان $x = x_۰$ به مکان $x = ۸\,m$ رسیده و سپس در ادامه به مکان $x = ۰$. پس طول مسیر طی‌شده توسط متحرک در مرحلهٔ اول برابر $(۸-x_۰)$ متر و در مرحلهٔ دوم برابر $۸\,m$ است؛ بنابراین:

$\ell = (۸-x_۰)+۸ = ۱۶-x_۰$

از طرفی واضح است که اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در این $۱۰\,s$ برابر $x_۰$ است (زیرا از مکان $x = x_۰$ به مبدأ رسیده است.)؛ بنابراین داریم:

$\ell = ۳d \Rightarrow ۱۶-x_۰ = ۳(x_۰) \Rightarrow x_۰ = ۴\,m$

۱۶۵۶- گزینه ۴ برای این‌که مسافت طی‌شده توسط متحرک را در یک بازهٔ زمانی حساب کنیم باید بدانیم که جهت حرکت متحرک در این بازهٔ زمانی تغییر کرده است یا نه! برای دانستن این موضوع، نمودار مکان ـ زمان متحرک را در بازهٔ زمانی صفر تا $t = ۵\,s$ رسم می‌کنیم.

با توجه به معادلهٔ مکان ـ زمان می‌دانیم نمودار مکان ـ زمان باید به صورت یک سهمی باشد. با پیداکردن رأس سهمی آن را رسم می‌کنیم.

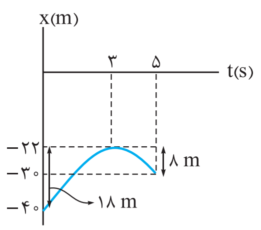
$$x = \underset{A}{-۲}t^۲ \underset{B}{+۱۲}t \underset{C}{-۴۰} \Rightarrow t_{رأس} = \frac{-B}{۲A} = \frac{-۱۲}{۲(-۲)} = ۳\,s$$

$$t_{رأس} = ۳\,s \Rightarrow x_{رأس} = -۲(۳)^۲+۱۲(۳)-۴۰ = -۲۲\,m$$

حالا به سراغ لحظه‌های $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = ۵\,s$ می‌رویم:

$t_۱ = ۰ \Rightarrow x_۱ = -۴۰\,m \qquad t_۲ = ۵\,s \Rightarrow x_۲ = -۳۰\,m$

بنابراین نمودار مکان ـ زمان در بازهٔ صفر تا $t_۲ = ۵\,s$ به شکل زیر است:



با توجه به نمودار در این بازه متحرک ابتدا $(-۲۲)-(-۴۰) = ۱۸\,m$ در جهت محور x و در ادامه $(-۲۲)-(-۳۰) = ۸\,m$ در خلاف جهت محور x حرکت کرده است. در نتیجه مسافت طی‌شده توسط آن برابر است با:

$\ell = ۱۸+۸ = ۲۶\,m$

بد نیست بدانید در ادامهٔ کار روش ساده‌تری برای حل این نوع مسئله یاد خواهیم گرفت.

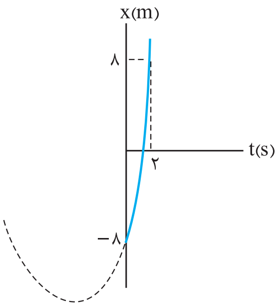
۱۶۵۷- گزینه ۱ برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده توسط متحرک، نمودار مکان ـ زمان آن را که به صورت یک سهمی است رسم می‌کنیم.

$$x = \underset{A}{۲}t^۲ \underset{B}{+۴}t - ۸ \Rightarrow t_{رأس} = \frac{-B}{۲A} = \frac{-۴}{۲(۲)} = -۱$$

منفی‌بودن $t_{رأس}$ نشان می‌دهد رأس سهمی در قسمت $t > ۰$ قرار ندارد. حالا با توجه به دو لحظهٔ $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = ۲\,s$ داریم:

$t_۱ = ۰ \Rightarrow x_۱ = -۸\,m \qquad t_۲ = ۲\,s \Rightarrow x_۲ = ۸\,m$

پس نمودار $x-t$ به شکل روبه‌رو است:



با توجه به نمودار در بازهٔ $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۲\,s$ تغییر جهت در کار نیست و مسافت طی‌شده توسط متحرک (ℓ) با اندازهٔ جابه‌جایی آن (d) برابر است:

$\ell = d \Rightarrow \frac{\ell}{d} = ۱$

۱۶۵۸- گزینه ۳ طبق رابطهٔ $\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ بردارهای سرعت متوسط $(\vec{v}_{av})$ و جابه‌جایی $(\Delta\vec{x})$ همواره هم‌جهت هستند (دقت کنید که همواره $\Delta t > ۰$ است.) پس پاسخ تست گزینهٔ (۳) است. همچنین دربارهٔ گزینه (۱) نیز باید بدانیم که در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ ممکن است متحرک پیوسته در جهت محور x حرکت کند یا هم در جهت محور x و هم در خلاف جهت آن در حال حرکت باشد، به طوری که در نهایت بردار جابه‌جایی آن بین این دو لحظه در جهت محور x باشد.

۱۶۵۹- گزینه ۳ کافی است داده‌های مسئله را در رابطهٔ زیر قرار دهیم:

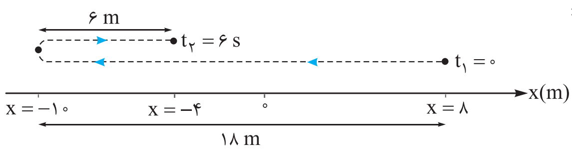
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۷۸-(-۴۲)}{۵۲-۴} = \frac{۱۲۰}{۴۸} = ۲/۵\,cm/s$$

$v_{av} > ۰$ است، پس بردار سرعت متوسط برحسب سانتی‌متر بر ثانیه به صورت $\vec{v}_{av} = ۲/۵\vec{i}$ است.

۱۶۶۰- گزینه ۳ سرعت متوسط متحرک تنها به موقعیت ابتدایی و نهایی متحرک وابسته است. یعنی برای حل این تست تنها با مبدأ زمان و لحظهٔ $t_۲ = ۱۰\,s$ سروکار داریم، یعنی:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲-x_۰}{t_۲-۰} = \frac{۲۰-(-۴۰)}{۱۰-۰} = \frac{۶۰}{۱۰} = ۶\,m/s$$

۱۶۶۱- گزینه ۲ در بازهٔ زمانی صفر تا $۶\,s$ مسیر حرکت متحرک به شکل زیر است:



با توجه به شکل بالا مسافت طی‌شده توسط متحرک برابر $\ell = ۱۸+۶ = ۲۴\,m$ است، پس داریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۲۴}{۶} = ۴\,m/s$$

۱۶۶۲- گزینه ۱ ابتدا بردار جابه‌جایی متحرک را در دو بازهٔ زمانی داده شده به دست می‌آوریم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} -۶\vec{i} = \frac{\Delta\vec{x}_{۱۲}}{۴-۲} \Rightarrow \Delta\vec{x}_{۱۲} = -۱۲\vec{i} \\ ۱۸\vec{i} = \frac{\Delta\vec{x}_{۲۳}}{۸-۴} \Rightarrow \Delta\vec{x}_{۲۳} = ۷۲\vec{i} \end{cases}$$

پس بردار جابه‌جایی کل متحرک برحسب متر برابر است با:

$$\Delta\vec{x}_{۱۳} = \Delta\vec{x}_{۱۲}+\Delta\vec{x}_{۲۳} = (-۱۲\vec{i})+(۷۲\vec{i}) = ۶۰\vec{i}$$

بنابراین سرعت متوسط متحرک در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۳$ برابر است با:

$$\vec{v}_{av_{۱۳}} = \frac{\Delta\vec{x}_{۱۳}}{\Delta t_{۱۳}} = \frac{۶۰\vec{i}}{۸-۲} = ۱۰\vec{i}$$

۱۶۶۳- گزینه ۲ | گام اول | به کمک رابطهٔ $\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$، بردار جابه‌جایی متحرک‌های A و B را در بازهٔ زمانی داده شده برحسب متر به دست می‌آوریم:

$$\vec{v}_{av_A} = \frac{\Delta\vec{x}_A}{\Delta t} \Rightarrow -۵\vec{i} = \frac{\Delta\vec{x}_A}{۴} \Rightarrow \Delta\vec{x}_A = -۲۰\vec{i}$$

$$\vec{v}_{av_B} = \frac{\Delta\vec{x}_B}{\Delta t} \Rightarrow -۳\vec{i} = \frac{\Delta\vec{x}_B}{۴} \Rightarrow \Delta\vec{x}_B = -۱۲\vec{i}$$

| گام دوم | حالا می‌توانیم خواسته تست را به دست آوریم:

$$\Delta\vec{x}_A = \vec{d}_{۲A} - \vec{d}_{۱A} \Rightarrow -۲۰\vec{i} = (-۱۲\vec{i}) - \vec{d}_{۱A} \Rightarrow \vec{d}_{۱A} = ۸\vec{i}$$

$$\Delta\vec{x}_B = \vec{d}_{۲B} - \vec{d}_{۱B} \Rightarrow -۱۲\vec{i} = \vec{d}_{۲B} - ۴\vec{i} \Rightarrow \vec{d}_{۲B} = -۸\vec{i}$$

۱۶۶۴- گزینه ۳ مکان متحرک را در لحظه‌های $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = ۲\,s$ تعیین می‌کنیم:

$$t_۱ = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۴\,m \qquad t_۲ = ۲\,s \Rightarrow x_۲ = ۰$$

بنابراین داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۰-۴}{۲-۰} = -۲\,m/s$$

۱۶۶۵- گزینه ۱ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی $t_۱ = ۱\,s$ تا $t_۲ = ۲\,s$، پس داریم:

$$\begin{cases} t_۱ = ۱\,s \Rightarrow x_۱ = ۰/۰۲ \times \overbrace{\sin(۲\pi)}^{\text{صفر}} = ۰ \\ t_۲ = ۲\,s \Rightarrow x_۲ = ۰/۰۲ \times \overbrace{\sin(۴\pi)}^{\text{صفر}} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta x = ۰$$

در این بازه جابه‌جایی متحرک و در نتیجه سرعت متوسط آن برابر صفر است.

۱۶۶۶- گزینه ۲ | گام اول | منظور از ثانیهٔ دوم بازهٔ زمانی $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۲\,s$ است. در این بازهٔ زمانی داریم:

$$\begin{cases} t_۱ = ۱\,s \Rightarrow x_۱ = b + ۵ \\ t_۲ = ۲\,s \Rightarrow x_۲ = ۸ + ۲b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = (۸ + ۲b) - (b + ۵) = ۳ + b$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۲ = \frac{۳+b}{۱} \Rightarrow b = -۱$$

پس معادلهٔ مکان ـ زمان به صورت $x = t^۲ - t + ۴$ است.

| گام دوم | ۳ ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی $t_۱ = ۶\,s$ تا $t_۲ = ۹\,s$. محاسبهٔ سرعت متوسط در این بازهٔ زمانی کار ساده‌ای است:

$$\begin{cases} t_۱ = ۶\,s \Rightarrow x_۱ = ۳۴\,m \\ t_۲ = ۹\,s \Rightarrow x_۲ = ۷۶\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = ۷۶ - ۳۴ = ۴۲\,m$$

$$\Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = ۷۶ - ۳۴ = ۴۲\,m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۴۲}{۳} = ۱۴\,m/s$$

چون $v_{av} > ۰$ است باید گزینهٔ (۲) را انتخاب کنیم.