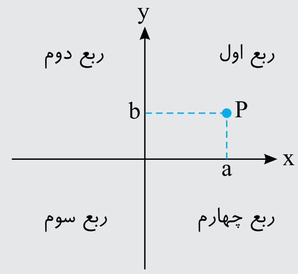
# فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

## درس اول: هندسه‌ی تحلیلی

**یادآوری:**

**محورهای مختصات در صفحه، دو محور با مبدأ مشترک هستند که هر یک بر دیگری عمود است. محورهای مختصات، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کند که هر یک از آن‌ها را یک ربع می‌نامند (شکل را ببینید). نقطه‌های روی محورهای مختصات در هیچ ربعی نیستند.**




**هر نقطه در صفحه مانند P متناظر زوج مرتبی از عددی حقیقی مانند $(a, b)$ است. a را طول نقطه‌ی P می‌نامند و معمولاً آن را با $x_P$ نشان می‌دهند. b را عرض نقطه P می‌نامند و معمولاً آن را با $y_P$ نشان می‌دهند. a و b را مختصات نقطه‌ی P می‌نامند و گاهی این نقطه را به شکل $P(a, b)$ می‌نویسند، که یعنی نقطه P $(a, b)$ است.**

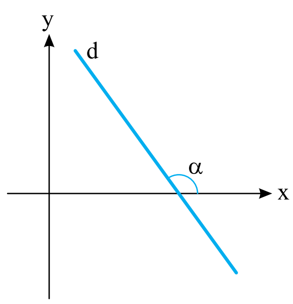
### مطالب تکمیلی درباره‌ی معادله‌ی خط

از هر دو نقطه در صفحه‌ی مختصات فقط یک خط می‌گذرد. فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه باشند و

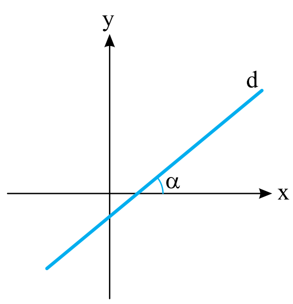
$$x_A \neq x_B$$

شیب خطی که از نقطه‌های A و B می‌گذرد برابر است با

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$




شیب خط $d = \tan \alpha$




شیب خط $d = \tan \alpha$

فرض کنید خط l از نقطه‌های $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ بگذرد و $x_1 \neq x_2$. اگر $C(x, y)$ نقطه‌ای به‌جز این نقطه‌ها و روی این خط باشد، چون شیب خطی که از A و C می‌گذرد با شیب خطی که از A و B می‌گذرد برابر است، پس

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

در نتیجه

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

چـــون مختصـــات نقطه‌های A و B هم در این معادله صدق می‌کنند. پس مختصات هر نقطه روی خط l در این معادله صدق می‌کند.

**نتیجه** معادله‌ی خطی که از نقطه‌های $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ می‌گذرد (که در این‌جا $x_۱ \neq x_۲$)، به صورت زیر است:

$$y - y_۱ = \frac{y_۱ - y_۲}{x_۱ - x_۲}(x - x_۱)$$

اگر دو طرف معادله‌ی خط راست

$$y - y_۱ = \frac{y_۱ - y_۲}{x_۱ - x_۲}(x - x_۱)$$

را در $x_۱ - x_۲$ ضرب کنیم به دست می‌آید

$$(x_۱ - x_۲)y - (x_۱ - x_۲)y_۱ = (y_۱ - y_۲)x - (y_۱ - y_۲)x_۱$$

اگر عبارت‌های ســـمت چپ را به سمت راســـت ببریم، معلوم می‌شود که معادله‌ی خط راست به صورت $ax + by + c = ۰$ است.

**نتیجه** معادله‌ی هر خط راست به صورت $ax + by + c = ۰$ است. شیب این خط برابر با $-\frac{a}{b}$ است.

اگر شیب خطی را که از نقطه‌های $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ می‌گذرد $(x_۱ \neq x_۲)$، یعنی $\frac{y_۱ - y_۲}{x_۱ - x_۲}$ را با m نشان دهیم، معلوم می‌شود که معادله‌ی خط را می‌توان به صورت زیر نوشت

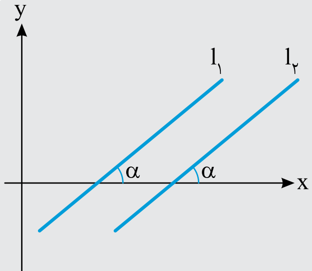
$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

اگر این معادله را ســـاده کنیم معلوم می‌شـــود که می‌توان آن را به شـــکل $y = mx + b$ نوشـــت $(b = y_۱ - mx_۱)$. توجـــه کنیـــد که نقطه‌ی $(۰, b)$ محل برخورد این خط با محور y اســـت و b را **عرض از مبدأ** این خط می‌نامند. در ضمن، اگر نقطه‌ی $(a, ۰)$ محل برخورد خط با محور x باشـــد، a را **طول از مبدأ** خط می‌نامند.

**نتیجه** معادله‌ی خطی که شیب آن برابر m و عرض از مبدأ آن برابر b است به صورت $y = mx + b$ است.

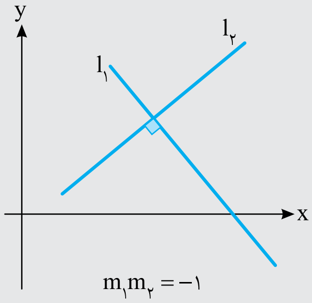
## خط‌های موازی و خط‌های عمود بر هم

الف) فرض کنید $l_۱$ و $l_۲$ دو خط غیرموازی با محور y با شیب‌های $m_۱$ و $m_۲$ باشند. در این صورت $l_۱$ و $l_۲$ موازی‌اند، اگر و فقط اگر $m_۱=m_۲$.




$m_۱=m_۲$

ب) فرض کنید $l_۱$ و $l_۲$ دو خط غیرموازی با محورهای مختصات باشند. در این صورت $l_۱$ و $l_۲$ بر هم عمودند، اگر و فقط اگر $m_۱m_۲=-۱$.




$m_۱m_۲=-۱$

**مسئله ۱** **معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $(۲,۱)$ بگذرد و بر خط $۲x-۴y+۷=۰$ عمود باشد.**

راه‌حل: شیب خط $۲x-۴y+۷=۰$ برابر است با $-\frac{۲}{-۴}=\frac{۱}{۲}$.

اگر شیب خط موردنظر m باشد، آن‌گاه $\frac{۱}{۲}m=-۱$، پس $m=-۲$.

معادله‌ی خطی که شیب آن $-۲$ است و از نقطه‌ی $(۲,۱)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-۱=-۲(x-۲)$$

$$y+۲x-۵=۰$$

**تست ۱** **اگر خطی که از نقطه‌های $(۳,a)$ و $(۲,۷)$ می‌گذرد بر خطی که از نقطه‌های $(-۱,۴)$ و $(۱,۸)$ می‌گذرد عمود باشد، مقدار a چقدر است؟**

**۱)** $۷$ **۲)** $-\frac{۱۳}{۲}$ **۳)** $\frac{۱۳}{۲}$ **۴)** $-۷$

**پاسخ**: شیب خطی که از نقطه‌های $(۳,a)$ و $(۲,۷)$ می‌گذرد برابر است با

$$\frac{a-۷}{۳-۲}=a-۷$$

شیب خطی که از نقطه‌های $(-۱,۴)$ و $(۱,۸)$ می‌گذرد برابر است با

$$\frac{۴-۸}{-۱-۱}=۲$$

اگر دو خط بر هم عمود باشند، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر $-۱$ است، پس

$$(a-۷)(۲)=-۱$$

$$a=\frac{۱۳}{۲}$$

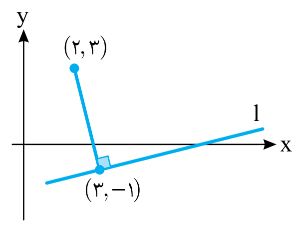
**مسئله ۲** **معادله‌ی خط راستی را بنویسید که از نقطه‌ی $(-۳,۵)$ می‌گذرد و بر خطی که از نقطه‌های $(۲,۵)$ و $(-۳,۶)$ می‌گذرد عمود است.**

راه‌حل: شیب خطی که از نقطه‌های $(۲,۵)$ و $(-۳,۶)$ می‌گذرد برابر است با $-\frac{۱}{۵}=\frac{۵-۶}{۲+۳}$.
اگر شیب خط موردنظر برابر m باشد، چون بر این خط عمود است، پس $m(-\frac{۱}{۵})=-۱$، در نتیجه $m=۵$. معادله‌ی خطی که شیب آن ۵ است و از نقطه‌ی $(-۳,۵)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-۵=۵(x+۳)$$

$$y-۵x-۲۰=۰$$

**مسئله ۳** **پای عمود وارد از نقطه‌ی $(۲,۳)$ بر خط l نقطه‌ی $(۳,-۱)$ است. معادله‌ی این خط را بنویسید.**




راه‌حل: خط موردنظر بر خطی که از نقطه‌های $(۲,۳)$ و $(۳,-۱)$ می‌گذرد عمود است (شکل را ببینید). شیب خطی که از نقطه‌های $(۲,۳)$ و $(۳,-۱)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{۳+۱}{۲-۳}=-۴$.
اگر m شیب خط موردنظر باشد، آن‌گاه $m(-۴)=-۱$، پس $m=\frac{۱}{۴}$.
شیب خط موردنظر $\frac{۱}{۴}$ است و از نقطه‌ی $(۳,-۱)$ می‌گذرد، بنابراین معادله‌ی آن به صورت زیر است:

$$y+۱=\frac{۱}{۴}(x-۳)$$

$$x-۴y-۷=۰$$

**تست ۲** **پای عمود وارد از نقطه‌ی $(۳,۴)$ بر خط $۲x+y-۷=۰$ کدام نقطه است؟**

۱) $(\frac{۹}{۵},\frac{۱۷}{۵})$ ۲) $(۱,۵)$ ۳) $(۱,-۵)$ ۴) $(-۵,۱)$

**پاسخ**: شیب خط $۲x+y-۷=۰$ برابر است با $-\frac{۲}{۱}=-۲$. بنابراین اگر شیب خط موردنظر برابر m باشد، آن‌گاه $m(-۲)=-۱$، یعنی

$$m=\frac{۱}{۲}$$

معادله‌ی خطی که شیب آن $\frac{۱}{۲}$ است و از نقطه‌ی $(۳,۴)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-۴=\frac{۱}{۲}(x-۳)$$

$$x-۲y+۵=۰$$

پای عمود موردنظر محل برخورد خط‌های زیر است:

$$۲x+y-۷=۰$$

$$x-۲y+۵=۰$$

اگر این دستگاه معادله‌ها را حل کنیم به دست می‌آید $x=\frac{۹}{۵}$ و $y=\frac{۱۷}{۵}$.

بنابراین نقطه‌ی موردنظر $(\frac{۹}{۵},\frac{۱۷}{۵})$ است.

**مسئله ۴** **ثابت کنید نقطه‌های $A\,(۳,۴)$، $B\,(-۲,-۱)$ و $C\,(۴,۱)$ رأس‌های مثلثی قائم‌الزاویه هستند.**

راه‌حل: شیب خط‌هایی که ضلع‌های مثلث ABC روی آن‌ها قرار دارند برابر است با

$$m_{AB}=\frac{۴+۱}{۳+۲}=۱\,,\quad m_{BC}=\frac{-۱-۱}{-۲-۴}=\frac{۱}{۳}\,,\quad m_{AC}=\frac{۴-۱}{۳-۴}=-۳$$

چون $m_{BC}\times m_{AC}=\frac{۱}{۳}\times(-۳)=-۱$، پس ضلع‌های BC و AC بر هم عمودند و مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

**مسئله ۵** **نقطه‌های $A\,(۱۰,۴)$ ، $B\,(-۴,۹)$ و $C\,(-۲,-۱)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. معادله‌ی خطی را که ارتفاع وارد از رأس A روی آن قرار دارد بنویسید.**

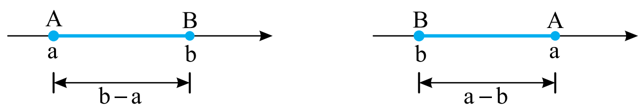
راه‌حل: ارتفاع وارد از رأس A بر ضلع BC عمود است. شیب خطی که از نقطه‌های B و C می‌گذرد برابر است با $\frac{۹+۱}{-۴+۲}=-۵$. بنابراین اگر شیب خطی که ارتفاع روی آن قرار دارد برابر m باشد، آن‌گاه $m(-۵)=-۱$، پس $m=\frac{۱}{۵}$.

معادله‌ی خطی که شیب آن $\frac{۱}{۵}$ است و از نقطه‌ی $A\,(۱۰,۴)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-۴=\frac{۱}{۵}(x-۱۰)\Rightarrow x-۵y+۱۰=۰$$

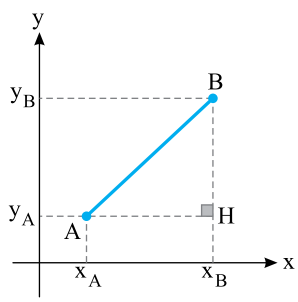
## فاصله‌ی بین دو نقطه

فرض کنید A و B دو نقطه روی محور باشند. در این صورت، **فاصله‌ی** بین A و B برابر با طول پاره‌خط AB است. اگر نقطه‌های A و B متناظر با عددهای a و b باشند، از روی شکل‌های زیر معلوم است که طول پاره‌خط AB (بر حسب این‌که $a>b$ یا $a<b$) برابر با $a-b$ یا $b-a$ است که با نمادگذاری قدرمطلقی می‌شود $|a-b|$. اگر a و b را با $x_A$ و $x_B$ نشان دهیم، نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید.




**نتیجه** اگر نقطه‌های A و B روی محور متناظر با عددهای $x_A$ و $x_B$ باشند، فاصله‌ی بین A و B برابر با $|x_A-x_B|$ است.

اکنون فرض کنید $A\,(x_A,y_A)$ و $B\,(x_B,y_B)$ دو نقطه در صفحه‌ی مختصات باشند. از روی شکل زیر معلوم است که




$$AH=|x_A-x_B|\,,\quad BH=|y_A-y_B|$$

در نتیجه، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث AHB ،

$$AB^۲=AH^۲+BH^۲=|x_A-x_B|^۲+|y_A-y_B|^۲$$

بنابراین،

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

منظورمان از **فاصله‌ی** دو نقطه‌ی A و B طول پاره‌خط AB است. بنابراین نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید.

**نتیجه** فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_A, y_B)$ و $B(x_B, y_B)$ در صفحه‌ی مختصات برابر است با

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

**مثال:** فاصله‌ی نقطه‌های $(۱,-۲)$ و $(-۲,۲)$ در صفحه‌ی مختصات برابر است با

$$\sqrt{(۱-(-۲))^۲+(-۲-۲)^۲}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

**تست ۳** **فاصله‌ی نقطه‌ی $A(a,۱)$ از نقطه‌های $B(-۱,۱)$ و $C(۳,۵)$ برابر است. مقدار a چقدر است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ:** توجه کنید که

$$AB=AC$$

$$\sqrt{(a+۱)^۲+(۱-۱)^۲}=\sqrt{(a-۳)^۲+(۱-۵)^۲}$$

$$\sqrt{a^۲+۲a+۱+۰}=\sqrt{a^۲-۶a+۹+۱۶}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم به دست می‌آید

$$a^۲+۲a+۱=a^۲-۶a+۲۵\Rightarrow ۸a=۲۴\Rightarrow a=۳$$

**مسئله ۶** **نقطه‌ای روی محور x پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(۱,۳)$ و $(۲,-۵)$ برابر باشد.**

راه‌حل: فرض کنید نقطه‌ی موردنظر $(a,۰)$ باشد. در این صورت فاصله‌اش تا نقطه‌ی $(۱,۳)$ برابر است با

$$\sqrt{(a-۱)^۲+(۰-۳)^۲}=\sqrt{(a-۱)^۲+۹}=\sqrt{a^۲-۲a+۱۰}$$

و فاصله‌اش از نقطه‌ی $(۲,-۵)$ برابر است با

$$\sqrt{(a-۲)^۲+(۰-(-۵))^۲}=\sqrt{(a-۲)^۲+۲۵}=\sqrt{a^۲-۴a+۲۹}$$

در نتیجه باید

$$\sqrt{a^۲-۲a+۱۰}=\sqrt{a^۲-۴a+۲۹}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$a^۲-۲a+۱۰=a^۲-۴a+۲۹$$

$$۲a=۱۹$$

$$a=\frac{۱۹}{۲}$$

**مسئله ۷** **ثابت کنید مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $A(۰,۶)$، $B(-۵,۳)$ و $C(۳,۱)$ هستند، متساوی‌الساقین است.**

راه‌حل: توجه کنید که

$$AB=\sqrt{(۰+۵)^۲+(۶-۳)^۲}=\sqrt{۲۵+۹}=\sqrt{۳۴}$$

$$AC=\sqrt{(۰-۳)^۲+(۶-۱)^۲}=\sqrt{۹+۲۵}=\sqrt{۳۴}$$

بنابراین $AB=AC$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

**تست ۴** **نقطه‌های $B(1,3)$ و $C(-2,7)$ دو سر قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین $ABC$ هستند. رأس $A$ کدام نقطه می‌تواند باشد؟**

**۱)** $(1,6)$ **۲)** $(-\frac{1}{3},5)$ **۳)** $(\frac{5}{6},6)$ **۴)** $(\frac{1}{6},7)$

**پاسخ:** فرض کنید $A$ نقطه‌ی $(a,b)$ باشد. در این صورت

$$AB=AC\Rightarrow\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}=\sqrt{(a+2)^2+(b-7)^2}$$

$$(a-1)^2+(b-3)^2=(a+2)^2+(b-7)^2$$

$$a^2-2a+1+b^2-6b+9=a^2+4a+4+b^2-14b+49$$

$$-6a+8b=43$$

مختصات نقطه‌ی $(\frac{5}{6},6)$ در این تساوی صدق می‌کند و مختصات بقیه‌ی نقطه‌ها صدق نمی‌کنند.

بنابراین $A$ می‌تواند نقطه‌ی $(\frac{5}{6},6)$ باشد.

**مسئله ۸** **نقطه‌های $A(0,0)$، $B(3,0)$ و $C(a,b)$ رأس‌های مثلثی متساوی‌الاضلاع هستند. $a$ و $b$ را پیدا کنید.**

**راه‌حل:** توجه کنید که

$$AB=\sqrt{(0-3)^2+(0-0)^2}=3$$

بنابراین

$$AC=3\Rightarrow\sqrt{(0-a)^2+(0-b)^2}=3\Rightarrow a^2+b^2=9 \quad (1)$$

$$BC=3\Rightarrow\sqrt{(3-a)^2+(0-b)^2}=3\Rightarrow(3-a)^2+b^2=9\Rightarrow 9-6a+a^2+b^2=9 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $9-6a=0$، پس $a=\frac{3}{2}$. در نتیجه از تساوی (۱) به دست می‌آید

$$b^2=9-a^2=9-\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$$

بنابراین $b=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

**مسئله ۹** **نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(-1,0)$ و $(2,4)$ به ترتیب برابر با ۱ و ۴ باشد.**

**راه‌حل:** نقطه‌ی موردنظر را $(x,y)$ می‌نامیم. در این صورت

$$\begin{cases}\sqrt{(x+1)^2+(y-0)^2}=1\\ \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+1)^2+y^2=1\\ (x-2)^2+(y-4)^2=16\end{cases}$$

اگر این تساوی‌ها را ساده کنیم به دست می‌آید

$$x^2+2x+y^2=0 \qquad (1)$$

$$x^2-4x+4+y^2-8y=0 \quad (2)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، به دست می‌آید $y=\frac{-3x+2}{4}$. اگر این مقدار $y$ را در تساوی (۱) قرار دهیم و ساده کنیم به دست می‌آید

$$25x^2+20x+4=0\Rightarrow(5x+2)^2=0$$

بنابراین $x=-\frac{2}{5}$ و در نتیجه $y=\frac{-3x+2}{4}=\frac{4}{5}$. بنابراین نقطه‌ی موردنظر $(-\frac{2}{5},\frac{4}{5})$ است.

**مسئله ۱۰** **نقطه‌ی P را طوری پیدا کنید که از نقطه‌های $A(1,3)$، $B(-3,5)$ و $C(5,-1)$ به یک فاصله باشد.**

راه‌حل: فرض کنید P نقطه‌ی $(a,b)$ باشد. در این صورت

$$PA=PB \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}=\sqrt{(a+3)^2+(b-5)^2}$$

$$(a-1)^2+(b-3)^2=(a+3)^2+(b-5)^2$$

$$a^2-2a+1+b^2-6b+9=a^2+6a+9+b^2-10b+25$$

$$-2a+b=6 \qquad (1)$$

$$PA=PC \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}=\sqrt{(a-5)^2+(b+1)^2}$$

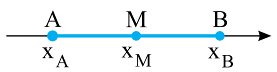
$$(a-1)^2+(b-3)^2=(a-5)^2+(b+1)^2$$

$$a^2-2a+1+b^2-6b+9=a^2-10a+25+b^2+2b+1$$

$$a-b=2 \qquad (2)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم به دست می‌آید $a=-8$ و $b=-10$. بنابراین P نقطه‌ی $(-8,-10)$ است.

## مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط



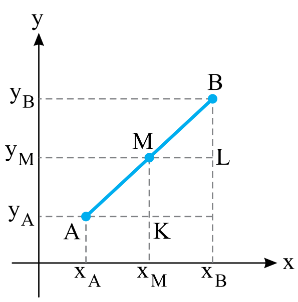

فرض کنید A و B دو نقطه روی محور باشند و نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB باشد (شکل روبه‌رو را ببینید).

در این صورت

$$AM=BM$$

$$x_M-x_A=x_B-x_M$$

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$$




اکنون فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه‌ی مختصات باشند و نقطه‌ی $M(x_M, y_M)$ وسط پاره‌خط AB باشد (شکل روبه‌رو را ببینید).

در این صورت از همنهشتی مثلث‌های AMK و MBL نتیجه می‌شود

$$AK=ML$$

$$x_M-x_A=x_B-x_M$$

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

**نتیجه** فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه باشند و نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB باشد. در این صورت، مختصات نقطه‌ی M برابر با

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$$

**مثال:** مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $A(-۱, ۴)$ و $B(۳, ۶)$ برابرند با

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{-۱+۳}{۲} = ۱$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۴+۶}{۲} = ۵$$

**مثال:** مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(a-۱, ۳-۲b)$ و $(۳-a, ۲b+۵)$ برابرند با

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{a-۱+۳-a}{۲} = ۱$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۳-۲b+۲b+۵}{۲} = ۴$$

**مسئله ۱۱** **نقطه‌های $A(۱۰, ۴)$، $B(-۴, ۹)$ و $C(-۲, -۱)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. طول میانه‌ای را که از رأس A می‌گذرد حساب کنید.**

راه‌حل: نقطه‌ی M وسط ضلع BC ، نقطه‌ی زیر است:

$$\left(\frac{x_B + x_C}{۲}, \frac{y_B + y_C}{۲}\right) = \left(\frac{-۴-۲}{۲}, \frac{۹-۱}{۲}\right) = (-۳, ۴)$$

بنابراین

$$AM = \sqrt{(۱۰+۳)^۲ + (۴-۴)^۲} = \sqrt{۱۳^۲} = ۱۳$$

**مسئله ۱۲** **اگر نقطه‌ی $(۱, ۱)$ رأسی از یک مثلث باشد و $(-۲, ۳)$ و $(۵, ۲)$ نقطه‌های وسط ضلع‌هایی که از این رأس می‌گذرند باشند، مختصات دو رأس دیگر را پیدا کنید.**

راه‌حل: فرض کنید نقطه‌ی $(۱, ۱)$ رأس A ، نقطه‌ی $(-۲, ۳)$ وسط ضلع AB و نقطه‌ی $(۵, ۲)$ وسط ضلع AC باشند. توجه کنید که

$$\text{وسط ضلع } AB = \left(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}\right) = \left(\frac{۱ + x_B}{۲}, \frac{۱ + y_B}{۲}\right)$$

پس

$$-۲ = \frac{۱ + x_B}{۲} \Rightarrow x_B = -۵, \quad ۳ = \frac{۱ + y_B}{۲} \Rightarrow y_B = ۵$$

بنابراین مختصات رأس B نقطه‌ی $(-۵, ۵)$ است. به همین ترتیب،

$$\text{وسط ضلع } AC = \left(\frac{x_A + x_C}{۲}, \frac{y_A + y_C}{۲}\right) = \left(\frac{۱ + x_C}{۲}, \frac{۱ + y_C}{۲}\right)$$

پس

$$۵ = \frac{۱ + x_C}{۲} \Rightarrow x_C = ۹, \quad ۲ = \frac{۱ + y_C}{۲} \Rightarrow y_C = ۳$$

بنابراین مختصات رأس C نقطه‌ی $(۹, ۳)$ است.

**تست ۵** **وسط پاره‌خطی که دو سر آن نقطه‌های برخورد خط $l$ با محورهای مختصات هستند، نقطه‌ی $(5,2)$ است. معادله‌ی خط $l$ کدام است؟**

۱) $5x+2y=29$ ۲) $2x+5y=20$ ۳) $3x-2y=11$ ۴) $2x+3y=16$

**پاسخ:** فرض کنید خط $l$ محورهای مختصات را در نقطه‌های $(a,0)$ و $(0,b)$ قطع می‌کند. در این صورت وسط پاره‌خطی که دو سرش این دو نقطه هستند، نقطه‌ی $\left(\frac{a+0}{2},\frac{0+b}{2}\right)$ یعنی

$$\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$$

بنابراین

$$\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=(5,2)\Rightarrow\frac{a}{2}=5,\quad \frac{b}{2}=2$$

$$a=10,\quad b=4$$

معادله‌ی خطی که از نقطه‌های $(10,0)$ و $(0,4)$ می‌گذرد، به صورت زیر است:

$$y-0=\frac{0-4}{10-0}(x-10)\Rightarrow y=-\frac{2}{5}(x-10)\Rightarrow 5y+2x=20$$

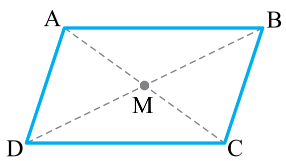
**مسئله ۱۳** **معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط میان نقطه‌های $(3,4)$ و $(-1,2)$ را بنویسید.**

راه‌حل: وسط پاره‌خط موردنظر نقطه‌ی $\left(\frac{3-1}{2},\frac{4+2}{2}\right)$، یعنی $(1,3)$ است. شیب خطی که از نقطه‌های $(3,4)$ و $(-1,2)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{4-2}{3+1}=\frac{1}{2}$. بنابراین اگر شیب عمودمنصف موردنظر برابر $m$ باشد، آن‌گاه $m\times\frac{1}{2}=-1$، پس $m=-2$.

معادله‌ی خطی که شیب آن $-2$ است و از نقطه‌ی $(1,3)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-3=-2(x-1)$$

$$2x+y-5=0$$




فرض کنید نقطه‌های $A(x_A,y_A)$، $B(x_B,y_B)$، $C(x_C,y_C)$ و $D(x_D,y_D)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع ABCD و نقطه‌ی $M(x_M,y_M)$ محل برخورد قطرهای این متوازی‌الاضلاع باشند. چون در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، پس نقطه‌ی M هم وسط پاره‌خط AC است، هم وسط پاره‌خط BD. در نتیجه

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2},\quad x_M=\frac{x_B+x_D}{2}$$

بنابراین

$$x_A+x_C=x_B+x_D$$

به همین ترتیب،

$$y_M=\frac{y_A+y_C}{2},\quad y_M=\frac{y_B+y_D}{2}$$

بنابراین

$$y_A+y_C=y_B+y_D$$