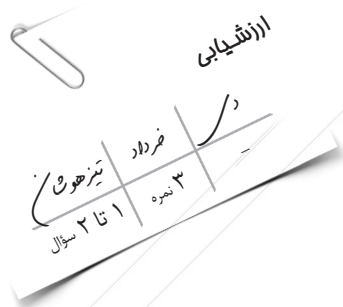
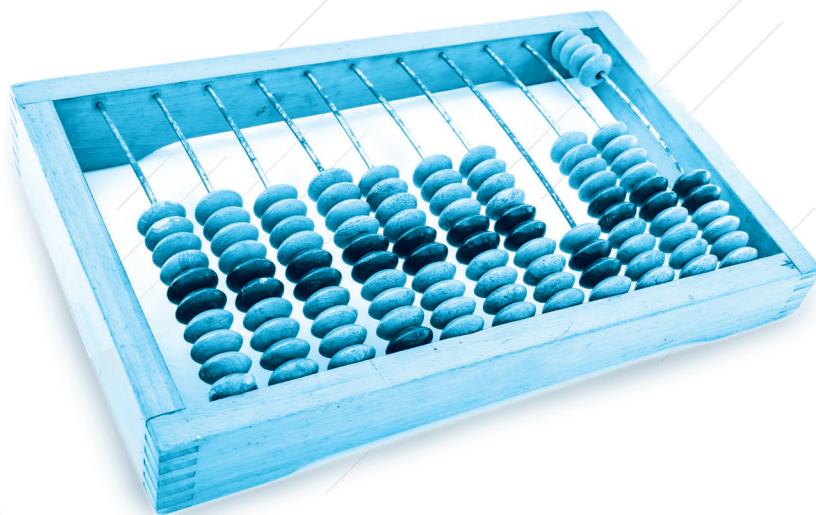


فصل دهم

عبارت‌های گویا

- ساده کردن عبارت‌های گویا
- ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا
- جمع و تفریق عبارت‌های گویا
- تقسیم چند جمله‌ای‌ها



عبارت‌های گویا

عبارتی کسری را که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشد، عبارتی گویا می‌نامیم؛ با این تعریف، هر چند جمله‌ای نیز عبارتی گویا محسوب می‌شود؛ یعنی چند جمله‌ای‌ها نیز زیر مجموعه‌ی عبارت‌های گویا هستند:

در نتیجه عبارت‌هایی مثل $\frac{2}{x}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{x}{11}$ ، $\frac{1-x}{x+2}$ ، عبارت گویا هستند، ولی عباراتی مثل $\frac{2^{x-1}}{x}$ یا $\sqrt{x+2}$ یا $\frac{\sqrt{x}}{5}$ گویا نیستند.

دامنه‌ی عبارت‌های گویا: همانطور که می‌دانید اگر مخرج کسر صفر باشد، عبارت تعریف نشده است؛ پس دامنه‌ی یک عبارت گویا، تمام مقادیر حقیقی‌ای است که مخرج را صفر نکند.

پرسش نمونه

دامنه‌ی هر عبارت گویای مقابل را به دست آورید.

الف) $\frac{1}{x^2 - x}$ ب) $\frac{1}{1 - \frac{2}{x}}$

راه‌حل:

الف): اگر مخرج را به شکل $x(x-1)$ بنویسیم، واضح است که به ازای $x=0$ و $x=1$ صفر می‌شود؛ پس دامنه‌ی آن برابر است با $D = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

ب): مخرج هیچ کسری، نباید صفر باشد؛ یعنی هم $x \neq 0$ و هم $1 - \frac{2}{x} \neq 0$ ؛ یعنی $x \neq 2$ ؛

پس: $D = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

تذکره: در مشابه دامنه‌ی عبارت‌های گویا قبل از تعیین دامنه فق نداریم ساره کنیم. (در مورد ب) اگر ساره می‌شد دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ به دست می‌آمد که جواب درست نبود!

ساده کردن عبارت‌های گویا: به کمک تجزیه ابتدا صورت و مخرج را به شکل ضرب چند جمله‌ای‌ها نوشته، سپس در صورت امکان، عوامل مشترک را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم.

پرسش نمونه

ساده شده‌ی عبارت $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5}$ را به دست آورید.

$$\frac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5} = \frac{(x-5)(x+5)}{(x-1)(x-5)} = \frac{x+5}{x-1}$$

راه‌حل:

با فرض $x \neq 5$ ساده کردیم!

در واقع اگر در فصل بپر، تجزیه را خوب یاد گرفته باشید، در اینجا مشکل خاصی نخواهید داشت.

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا: مثل ضرب و تقسیم اعداد صورت می‌گیرد. تنها فرقی که دارد این است که به جای عدد، با یک چند جمله‌ای طرف هستید. در ضرب‌ها، پس از تجزیه‌ی صورت و مخرج کسرها، هر مخرجی می‌تواند با هر صورتی ساده شود و در تقسیم، کافی است آن را به ضرب تبدیل کنیم، ادامه‌اش مشابه ضرب است.

پرسش نمونه

ساده شده‌ی عبارت $\frac{ab+3}{2a+1} \div \frac{a^2b^2+3ab}{4a^2-1}$ را به دست آورید.

$$\frac{ab+3}{2a+1} \times \frac{4a^2-1}{a^2b^2+3ab} = \frac{ab+3}{2a+1} \times \frac{(2a+1)(2a-1)}{ab(ab+3)} = \frac{2a-1}{ab}$$

راه حل:

جمع و تفریق عبارت‌های گویا: باید مخرج‌ها را کاملاً تجزیه کنیم؛ اگر ساده می‌شوند صورت را با مخرج ساده کنیم؛ سپس مخرج مشترک بگیریم. مخرج مشترک برابر است با ضرب عوامل مشترک با بیشترین توان در عوامل غیرمشترک با همان توانی که دارند:

$$\frac{1}{a+1} - \frac{a-1}{a^2-a+1} - \frac{2}{a^2+1} = \frac{a^2-a+1-(a^2-1)}{(a+1)(a^2-a+1)} - \frac{2}{a^2+1} = \frac{-a+2}{a^2+1} - \frac{2}{a^2+1} = \frac{-a}{a^2+1}$$

تقسیم چند جمله‌ای‌ها

تقسیم چند جمله بر یک جمله: می‌توان از عمل تفکیک کسر استفاده کرد. فرض کنید A, B, C و D یک چند جمله‌ای باشند:

$$\frac{A+B+C}{D} = \frac{A}{D} + \frac{B}{D} + \frac{C}{D}$$

پرسش نمونه

عبارت $2x^2y^4 + 6x^2y^5 + 4x^2y^2$ را بر $2xy$ تقسیم می‌کنیم، حاصل آن را بدست آورید.

$$\frac{2x^2y - 4x^2y^2 + 6x^2y^5}{2xy} = \frac{2x^2y}{2xy} - \frac{4x^2y^2}{2xy} + \frac{6x^2y^5}{2xy} = x^2 - 2xy + 3xy^4$$

تقسیم چند جمله بر چند جمله: مرحله به مرحله به صورت زیر، تقسیم را انجام می‌دهیم.

$$\frac{2x^2 - 3x^2 + x^2 - 1}{2 + x^2}$$

مرحله ۱: ابتدا مقسوم و مقسوم‌علیه را به شکل نزولی می‌نویسیم (یعنی از توان زیاد x به کم):

مرحله ۲: اولین جمله‌ی مقسوم را بر اولین جمله‌ی مقسوم‌علیه

$$\frac{x^2}{x^2} = x \text{ تقسیم می‌کنیم:}$$

$$x^2 - 3x^2 + 2x - 1 \overline{) x^2 + 2}$$

$$\underline{-(x^2 + 2x)} \quad x - 3 \text{ قسمت}$$

$$-3x^2 - 1$$

$$\underline{-(-3x^2 - 6)}$$

$$5 \text{ باقی‌مانده}$$

سپس در خارج‌قسمت می‌نویسیم. حال در کل مقسوم‌علیه ضرب کرده و عبارت حاصل را از مقسوم کم می‌کنیم و این کار را (هر ۲ مرحله را) آنقدر انجام می‌دهیم تا درجه‌ی باقی‌مانده از درجه‌ی مقسوم‌علیه کمتر شود.

پرسش نمونه

$$\frac{\cancel{x^3}y - 3\cancel{x^2}y - 4y^2}{xy - 3y} \left| \frac{x^2 - y^2}{xy - 3y} \right.$$

عبارت $x^2y - 3x^2y - 4y^2$ را بر $x^2 - y^2$ تقسیم کنید.

راه حل:

$$\frac{-\cancel{x^3}y + xy^2 - 4y^2}{xy^2 - 4y^2 - 3y^2}$$

$$\frac{3\cancel{x^3}y - 3y^2}{xy^2 - 4y^2 - 3y^2}$$

$$xy^2 - 4y^2 - 3y^2$$

نکته



اگر در تقسیم چند جمله‌ای‌ها مقسوم و مقسوم‌علیه بیش‌تر از یک متغیر وجود داشته باشد، یکی از متغیرها را متغیر اصلی فرض می‌کنیم و تقسیم را بر حسب آن انجام می‌دهیم.

باقی‌مانده‌ی تقسیم بدون انجام عمل تقسیم:

فرض کنید می‌خواهیم عبارتی مثل $p(x)$ را بر $x - a$ تقسیم کنیم، اگر تقسیم به شکل مقابل انجام شده باشد، داریم:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & x - a \\ \vdots & Q(x) \\ R & \end{array} \quad \begin{array}{l} p(x) = Q(x)(x - a) + R \\ p(a) = Q(a) \times 0 + R \\ \Rightarrow R = p(a) \end{array}$$

یعنی این‌که برای محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عبارت جبری بر $x - a$ ، کافی است مقدار آن عبارت را به ازای $x = a$ به دست آوریم.

پرسش نمونه

۱) باقی‌مانده‌ی تقسیم $7x^3 - 4x - 5$ بر $x - 2$ را به دست آورید.

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow R = 7(2)^3 - 4(2) - 5 = 56 - 8 - 5 = 43$$

راه حل:

۲) باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $x^3 + 4x - m$ بر $x + 2$ برابر است با ۱۰. مقدار m چقدر است؟

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \Rightarrow (-2)^3 + 4(-2) - m = 10 \Rightarrow -8 - 8 - m = 10 \Rightarrow m = -26$$

راه حل:



به طریق مشابه می‌توان نشان داد برای محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی هر عبارت جبری بر $x^n + b$ کافی است در عبارت جبری $x^n = -b$ را قرار دهیم.

پرسش نمونه

۱) باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 1$ بر $x^2 - 5$ را حساب کنید.

راه‌حل: $x^2 - 5 = 0$ پس $x^2 = 5$ ، بنابراین کافی است به جای x^2 در عبارت فوق عدد ۵ قرار دهیم:

$$(x^2)^2 x - 4(x^2)^2 - 2xx^2 + 1 = 5^2 \times x - 4(5)^2 - 2x(5) + 1 = 25x - 100 - 10x + 1 = 15x - 99$$

باقی‌مانده $15x - 99$ است.

۲) (برای مطالعه‌ی بیشتر) باقی‌مانده‌ی x^{73} بر $x^2 + x + 1$ را به دست آورید.

راه‌حل:

x^{73}	$x^2 + x + 1$
.	$Q(x)$
R	

ابتدا رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^{73} = (x^2 + x + 1)Q(x) + R$$

طرفین را در $(x-1)$ ضرب می‌کنیم:

$$(x-1)x^{73} = (x-1)(x^2 + x + 1)Q(x) + R \times (x-1)$$

$$(x-1)x^{73} = (x^3 - 1)Q(x) + (x-1)R$$

حالا $x^3 = 1$ را قرار می‌دهیم:

$$(x-1)x^{73} = (x^3 - 1)Q(x) + (x-1)R$$

$$(x-1)x^{73} = (x-1)R \Rightarrow x = R$$



مفاهیم اولیه، مقدار عددی، دامنه تعریف

۱ چند تا از عبارتهای زیر عبارت گویا هستند؟ $(a \neq -1, a \neq -x, a \in \mathbb{R})$

$\frac{2a}{a+1}, \frac{ax}{\sqrt{a+x}}, \frac{2a+\sqrt{2}}{3}, \frac{13}{y}, 1-x+x^2, (a-\sqrt{x})(a+\sqrt{x}), 2-a-x^{-1}$	تا ۲ (۴)	تا ۳ (۳)	تا ۴ (۲)	تا ۵ (۱)
---	----------	----------	----------	----------

۲ دامنه تعریف عبارت $\frac{3a-1}{a^2-5a-14}$ کدام است؟

$\mathbb{R} - \{+2, -7\}$ (۴)	$\mathbb{R} - \{7, -2\}$ (۳)	$\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}, 2\}$ (۲)	$\mathbb{R} - \{2\}$ (۱)
-------------------------------	------------------------------	---------------------------------------	--------------------------

۳ دامنه تعریف $A = x^{-1} - \frac{1}{1 - \frac{2}{x-1}}$ شامل چند عدد حقیقی نیست؟

چهار (۴)	سه (۳)	دو (۲)	یک (۱)
----------	--------	--------	--------

۴ مقدار عددی عبارت $\frac{1-(1-x)^2}{1-x}$ به ازای $x = -2$ برابر است با:

$\frac{8}{3}$ (۴)	$\frac{3}{8}$ (۳)	$\frac{9}{4}$ (۲)	$\frac{4}{9}$ (۱)
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

۵ دامنه تعریف کدام عبارت زیر همهی اعداد حقیقی است؟

$\frac{x^2+1}{x+1}$ (۴)	$\frac{x+1}{x^2+1}$ (۳)	$\frac{x^2}{x^2}$ (۲)	$1-2x^{-1}$ (۱)
-------------------------	-------------------------	-----------------------	-----------------

۶ اگر دامنه تعریف عبارت $\frac{1}{x^2+ax+b}$ برابر $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ باشد، مقدار $a-b$ چند است؟

-۳ (۴)	۳ (۳)	۵ (۲)	-۵ (۱)
--------	-------	-------	--------

۷ دامنه تعریف عبارت $P = \frac{x^2}{x(3^x-1)}$ چند عدد حقیقی را شامل نمی‌شود؟

۴ (۴)	۳ (۳)	۱ (۲)	۲ (۱)
-------	-------	-------	-------

۸ اگر دامنه تعریف عبارت $a = \frac{x-2}{x^2-2x+b}$ فقط شامل یک عدد حقیقی نباشد، مقدار b کدام است؟

۲ و ۰ (۴)	۱ و ۰ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
-----------	-----------	-------	-------



ساده کردن عبارتهای گویا

۹ حاصل عبارت $\frac{(x^2-y^2)(x^2+2x+1)}{(y-x)(x+1)^2}$ به ساده‌ترین شکل کدام است؟ $(y \neq x, x \neq -1)$

$y-x$ (۴)	$x-y$ (۳)	$x+y$ (۲)	$-x-y$ (۱)
-----------	-----------	-----------	------------

۱۰ اگر $a = 1395$ و $b = 1394$ باشد، حاصل $\frac{1}{(a^2-b^2)^2} \times \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab}$ کدام است؟

$\frac{1394}{1393}$ (۴)	$\frac{1395}{1391}$ (۳)	صفر (۲)	۱ (۱)
-------------------------	-------------------------	---------	-------

۱۱ مقدار عددی کسر $\frac{2x-y}{2x^2-xy}$ به ازای $x = \frac{1}{2015}$ چند است؟

- ۲۰۱۵ (۱) ۲۰۱۶ (۲) ۲۰۱۷ (۳) ۲۰۱۸ (۴)

(انرژی اتمی ۱۵)

۱۲ حاصل عبارت $\frac{3x-6}{2x-4} - \frac{x+7}{3x+21}$ معادل کدام گزینه‌ی زیر است؟

- $\frac{5}{6}$ (۱) $\frac{14}{3}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴)

(انرژی اتمی ۷۵)

۱۳ حاصل عبارت $\frac{m^{-1}+n^{-1}}{ma+na}$ کدام است؟

- mn (۱) $m+n$ (۲) a^{-1} (۳) a (۴)

(علامه طباطبایی ۷۹)

۱۴ ساده‌ترین شکل عبارت $1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{1-x}}$ کدام است؟

- $x(x \neq 1)$ (۱) 1 (۲) $1-x$ (۳) $x(x \neq 0)$ (۴)

(انرژی اتمی ۱۴)

۱۵ اگر $a = 3^6$ و $b = 6^2$ باشد، حاصل $\frac{(2a^2-b)(2a^2+b)-b^2}{-2a^2+2b^2-2a^2}$ کدام است؟

- 1 (۱) -1 (۲) 3^6 (۳) 6^2 (۴)

۱۶ کسر $\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}$ با کدام عبارت زیر برابر است؟

- $a^{-6}-b^{-6}$ (۱) $a^{-2}+b^{-2}$ (۲) a^2+b^2 (۳) $a^{-2}-b^{-2}$ (۴)

۱۷ کدام عبارت زیر را در $\frac{x^2+4x+3}{x^2-9}$ ضرب کنیم تا حاصل برابر ۱ شود؟

- $\frac{x+3}{x-1}$ (۱) $\frac{x-3}{x+1}$ (۲) $\frac{x+3}{x+1}$ (۳) $\frac{x-3}{x-1}$ (۴)

۱۸ ساده شده‌ی عبارت $A = \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{(ab+1)^2 - (a+b)^2}$ کدام است؟

- 1 (۱) $\frac{a-1}{ab+b}$ (۲) $\frac{b-1}{ab+a}$ (۳) $\frac{a+1}{ab+a}$ (۴)

۱۹ اگر $a^2 + b^2 = 2$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{a^2+a+1}{b^2+b+1}$ برابر است با: ($a \neq 1, b \neq 1$)

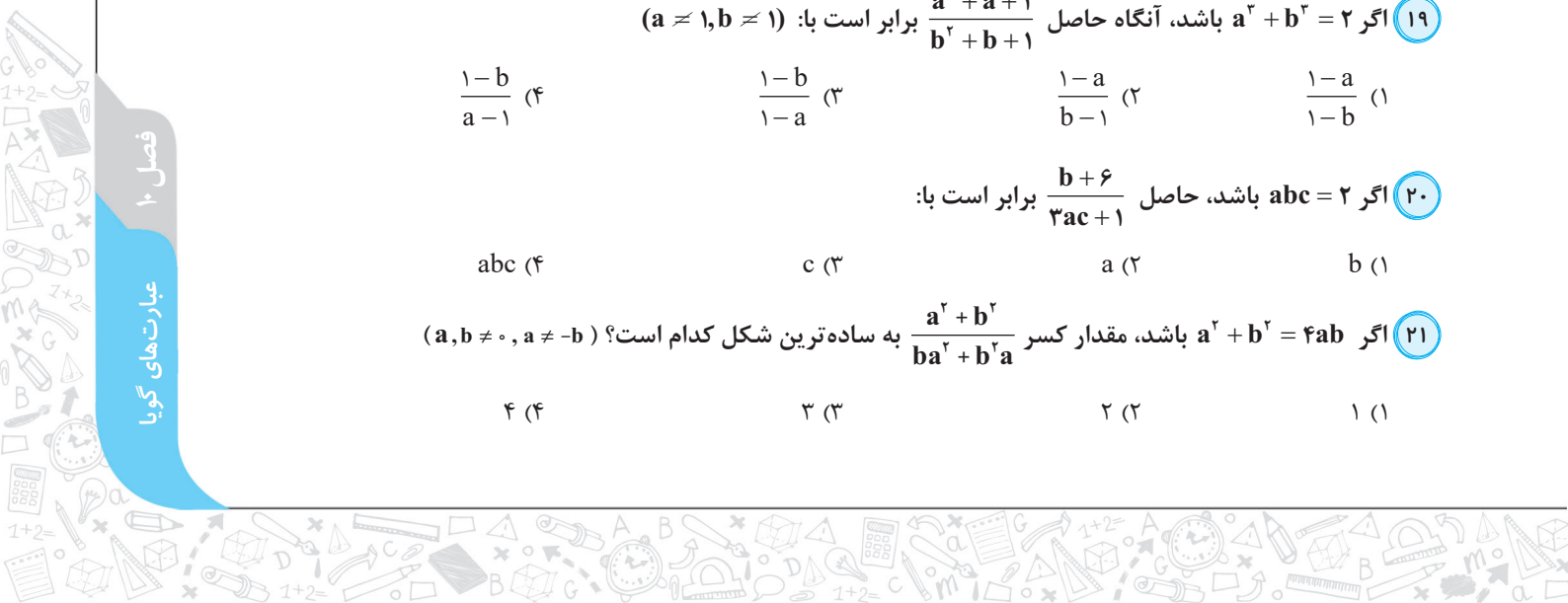
- $\frac{1-a}{1-b}$ (۱) $\frac{1-a}{b-1}$ (۲) $\frac{1-b}{1-a}$ (۳) $\frac{1-b}{a-1}$ (۴)

۲۰ اگر $abc = 2$ باشد، حاصل $\frac{b+6}{3ac+1}$ برابر است با:

- b (۱) a (۲) c (۳) abc (۴)

۲۱ اگر $a^2 + b^2 = 4ab$ باشد، مقدار کسر $\frac{a^2+b^2}{ba^2+b^2a}$ به ساده‌ترین شکل کدام است؟ ($a, b \neq 0, a \neq -b$)

- 1 (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴)



۲۲ ساده شده عبارت $\frac{c^2 - a^2 - b^2 - 2ab}{a + b + c}$ کدام است؟

(۱) $c - a - b$ (۲) $a + b + c$ (۳) $a - b + c$ (۴) $c - a + b$

۲۳ ساده شده عبارت $\frac{2a^2 - 3a + 1}{4a^2 - 1}$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $\frac{a+1}{2a-1}$ (۲) $\frac{a-1}{2a+1}$ (۳) $\frac{a-1}{2a-1}$ (۴) $\frac{2a+1}{2a-1}$

۲۴ ساده شده کسر $\frac{ab(a^{-r} + b^{-r} + 2a^{-1}b^{-1})}{a + b}$ برابر است با:

(۱) $\frac{(a+b)^r}{a^r b^r}$ (۲) $\frac{a^r \times b^r}{(a+b)^r}$ (۳) $\frac{ab}{a+b}$ (۴) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

۲۵ اگر $a^r b^r c^r = 1$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{c^r - 1}{1 + a^r b^r}$ کدام است؟

(۱) $c^r + 1$ (۲) $c^r - c^r$ (۳) $c^r + 1$ (۴) $c^r - 1$

۲۶ اگر $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4}$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{x+y-1}{x+y+z}$ کدام گزینه است؟

(۱) $\frac{5}{9}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{12}$

۲۷ ساده شده عبارت $\frac{x^r + x^r y^r + y^r}{x^r + xy + y^r}$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $\frac{x^r + xy + y^r}{x^r - xy + y^r}$ (۲) $x^r - xy + y^r$ (۳) $x^r + xy + y^r$ (۴) $\frac{x^r + xy + y^r}{x + y^r}$

۲۸ اگر $y + z + 2x$ باشد، حاصل $\frac{(x+y+z)^r - x^r}{xy + xz + x^r}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) ۴

۲۹ ساده شده عبارت $\frac{a^r b^r (a^{-r} + b^{-r} + 2a^{-1}b^{-1} + 2a^{-1}b^{-2})}{ab^{-1} + ab + 2}$ کدام است؟

(۱) $a + b$ (۲) $a - b$ (۳) $a^{-1} + b^{-1}$ (۴) $a^{-1} - b^{-1}$



ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا

۳۰ ساده شده عبارت $\frac{ax + bx}{a^r - b^r} \div \frac{2x^r}{ax - bx}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{2}{x}$ (۴) $\frac{x}{2}$

۳۱ اگر $a - b = 4$ باشد، حاصل $\frac{a^r - b^r}{6a} \times \frac{2a^r b^r}{a^r b + ab^r}$ برابر است با:

(۱) b (۲) $-b$ (۳) $2b$ (۴) $\frac{b}{2}$

۳۲ ساده شده‌ی عبارت $A = \frac{ax^2 + ax}{2x} \times \frac{x-3}{2x^2 - 4x - 6}$ برابر است با ۱۲. مقدار a چند است؟

- (۱) ۴۲ (۲) ۴۸ (۳) ۷۲ (۴) ۲۴

۳۳ ساده شده‌ی عبارت $K = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4} \div \frac{x-4}{x^2 + 6x + 8}$ برابر است با:

- (۱) $x-4$ (۲) $x+2$ (۳) $x-2$ (۴) $x+4$

۳۴ حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $\frac{a^2 + b^2 + 2ab - c^2}{a^2 - b^2 - 2ac + c^2} \div \frac{(b+c+a)}{b+c-a} = ?$

- (۱) ۱ (۲) $(a+b+c)^{-1}$ (۳) $a+b-c$ (۴) -1

۳۵ اگر $\frac{ax+b}{x^2 - 4x + 3} \div \frac{x^2 + x^2 + x}{(x^2 - 1)} = \frac{2}{x}$ باشد، مقدار $a-b$ چند است؟ ($x \neq 3, x \neq 1, x \neq 0$)

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۸

۳۶ در تساوی مقابل به جای A چه عبارتی قرار می‌گیرد؟ $\frac{c^2 - d^2}{c^2 + 4cd + 4d^2} \times A = \frac{c^2 + cd - 2d^2}{c^2 + cd - 6d^2}$

- (۱) $\frac{c+2d}{c-2d}$ (۲) $\frac{c-2d}{c+2d}$ (۳) $\frac{c+d}{c-d}$ (۴) $\frac{c-d}{c+2d}$

۳۷ ساده شده‌ی عبارت $A = \frac{x^2 - 4}{x+2}$ برابر است با $x-2$. مقدار A کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۰ (۳) -2 (۴) -4

۳۸ اگر ساده‌شده‌ی عبارت $\frac{x^2 + kx + 2}{x^2 - 3x + 2}$ عبارت $\frac{x^2 + x - 2}{x-2}$ باشد، ساده‌شده‌ی عبارت $\frac{x^2 + kx}{x-3}$ برابر است با:

- (۱) $x+a$ (۲) $x-a$ (۳) x^2 (۴) x

۳۹ ساده‌ترین شکل عبارت مقابل کدام است؟ $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \div \frac{a^2 + a^2b^2 + b^2}{a^2b + b^2} \times \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b} = ?$

- (۱) $\frac{a}{a^2 - b^2}$ (۲) $\frac{b}{a^2 - b^2}$ (۳) $\frac{a+b}{a-b}$ (۴) $\frac{a-b}{a+b}$

(مسابقات علمی)

۴۰ ساده شده‌ی عبارت مقابل در کدام گزینه آمده است؟ $K = \frac{a^2 - b^2}{ab} - \frac{ab - b^2}{ab - a^2}$

- (۱) $a-2b$ (۲) $-\frac{a}{b}$ (۳) $\frac{a}{b}$ (۴) $2ab - a$

(انرژی اتمی ۷۷)

۴۱ حاصل عبارت $A = \frac{x-1}{x-y} - \frac{1-y}{y-x}$ برابر است با:

- (۱) ۱ (۲) $\frac{x+y}{x-y}$ (۳) $\frac{x-y}{x+y}$ (۴) $\frac{x-y}{y-x}$

(انرژی اتمی ۷۸)

۴۲ حاصل عبارت $K = \frac{1}{x} - \frac{x-y}{y-x} - \frac{x+1}{x}$ کدام گزینه است؟ ($y \neq x, x \neq 0$)

- (۱) $\frac{2}{x}$ (۲) $\frac{2-2x}{x}$ (۳) صفر (۴) -2

(انرژی اتمی ۱۶)

۴۳ اگر $A = \frac{x^2 - 4}{2x + 4}$ باشد، حاصل $\frac{1}{A} + 1$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{x}$ (۲) $\frac{2}{x-2}$ (۳) $\frac{x}{x-2}$ (۴) $\frac{-2}{x}$

(پرتکرار - علامه طباطبائی - المپیاد)

۴۴ اگر x و y معکوس هم باشند، حاصل عبارت $x = \frac{x-7}{5x} + \frac{7y+4}{5}$ برابر است با:

(۱) ۴ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۳

۴۵ با فرض اینکه x و y و $2x + \frac{y}{2}$ مخالف صفر باشند، حاصل عبارت K کدام گزینه است؟

(۱) xy^{-1} (۲) $x^{-1}y$ (۳) $(xy)^{-1}$ (۴) $K = (2x + 2y)^{-1} \times (2x^{-1} + (\frac{y}{2})^{-1})$

(المپیاد ریاضی ۷۹)

۴۶ حاصل عبارت $(2a + b) \times \frac{a - \frac{a^2}{a+b}}{a + \frac{a^2}{a+b}}$ کدام گزینه است؟

(۱) ۱ (۲) a (۳) b (۴) $2a + b$

(علامه طباطبائی ۱۶)

۴۷ ساده‌شده‌ی عبارت $\frac{1 - \frac{x}{1-x}}{\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x}}$ کدام است؟

(۱) $1+x$ (۲) $1-x$ (۳) x (۴) ۱

۴۸ عبارت $\frac{1}{1-(1+x)^{-1}} + \frac{1}{(1-x)^{-1}-1}$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $(1-x)^2$ (۲) $\frac{1}{1-x^2}$ (۳) $\frac{2}{x}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۴۹ دو عدد x و y به نسبت a و b هستند. ($0 < a < b$) اگر $x + y + c$ آنگاه از x و y آنکه کوچک‌تر است، برابر است با:

(انرژی اتمی ۷۴)

(۱) $\frac{ac}{b}$ (۲) $\frac{bc}{a+b}$ (۳) $\frac{bc}{b-c}$ (۴) $\frac{ac}{a+b}$

۵۰ کدام عبارت را با $\frac{3}{x+4}$ جمع بزنیم تا حاصل برابر $\frac{7x+5}{x^2+4x}$ شود؟

(۱) $\frac{4x+5}{x+4}$ (۲) $\frac{4x+5}{x}$ (۳) $\frac{4x+5}{x(x+4)}$ (۴) $\frac{5x+4}{x(x+4)}$

۵۱ اگر $a = \frac{1}{x}$ و $b = \frac{1}{y}$ و $c = \frac{1}{z}$ و $\frac{2}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ باشد آنگاه کدام رابطه‌ی زیر برقرار است؟

(۱) $\frac{2}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ (۲) $x = \frac{y+z}{2}$ (۳) $\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{2}$ (۴) $\frac{x}{2} = y + z$

۵۲ حاصل عبارت $(\frac{m^2+3}{1-m} + 1 + m)(1-m)$ برابر است با:

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) $1-m^2$

۵۳ اگر $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\frac{x}{y-x} + \frac{x+y}{y}$ کدام گزینه است؟

- ۱ (۱) $\frac{x+y}{y-x}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{11}{3}$ (۴)

۵۴ اگر $\frac{2}{3x-3} - \frac{1}{2x+2} = \frac{x+a}{6x^2-6}$ باشد، آنگاه مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱) ۷ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۱

$$A = \frac{\frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x}}{\left(\frac{1}{1+x} - 1\right)\left(\frac{1+x}{1-x} - 1\right)}$$

۵۵ ساده شده‌ی عبارت مقابل کدام گزینه است؟

- ۱ (۱) $2x$ (۲) $\frac{2}{x}$ (۳) $\frac{x}{2}$ (۴)

سوالات شرطی و خاص از جمع و تفریق

۵۶ حاصل $\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \dots + \frac{1}{2x(2x+2)}$ برابر است با:

- ۱ (۱) $\frac{x+2}{4x(x+1)}$ (۲) $\frac{2x+1}{4x(x+1)}$ (۳) $\frac{x+2}{2x(x+1)}$ (۴) $\frac{2x+1}{x(x+1)}$

۵۷ اگر حاصل کسر $\frac{(a+1)x^2 - (2a-b)y^2 + 3}{3x^2 + y^2 + 2}$ مستقل از x باشد، مقدار $a+b$ چند است؟

- ۱ (۱) $\frac{17}{2}$ (۲) $\frac{11}{2}$ (۳) $\frac{15}{2}$ (۴) ۱۲

(پرتکرار)

۵۸ اگر $xyz = 1$ باشد، حاصل عبارت $\frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{zx+x+1}$ کدام گزینه است؟

- ۱ (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۳

۵۹ اگر $x+y+z=0$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $A = \frac{x^2}{(y+z)^2} + \frac{2y^2}{(x+z)^2} + \frac{5z^2}{(x+y)^2}$ برابر است با:

- ۱ (۱) -5 (۲) xyz (۳) -4 (۴) $2xyz$

۶۰ حاصل عبارت $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$ برابر با کدام گزینه است؟

- ۱ (۱) abc (۲) $\frac{1}{abc}$ (۳) ۱ (۴) صفر

۶۱ اگر $\frac{1}{abc} = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$ برابر است با:

- ۱ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۶

۶۲ اگر $1 = A + \frac{ac}{(b-c)(b-a)} + \frac{bc}{(a-c)(a-b)}$ باشد، مقدار A کدام است؟

- (۱) $\frac{ab}{(c-a)(c-b)}$ (۲) $\frac{ab}{(c-a)(b-c)}$ (۳) $\frac{ab}{(a-b)(a-c)}$ (۴) abc

۶۳ حاصل K به ساده‌ترین شکل در کدام گزینه آمده است؟

- (۱) $\frac{a^2 + ab + b^2}{a+b} - \frac{a^2 - ab + b^2}{a-b} + \frac{2b^2 - b^2 + a^2}{a^2 - b^2}$ (۲) $a+b$ (۳) $a-b$ (۴) $2ab$

۶۴ اگر a و b و c عددهایی حقیقی باشد و $a+b+c=7$ و $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{7}{10}$ باشد، مقدار $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{19}{10}$ (۲) $\frac{17}{10}$ (۳) $\frac{9}{7}$ (۴) $\frac{30}{2}$

۶۵ با فرض $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 31$ (I) و $a+b+c=26$ (II)، مقدار عبارت $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c}$ برابر است با:

(پرتکرار - IMC - المپیاد ریاضی و...)

- (۱) 63 (۲) 793 (۳) 795 (۴) 803

۶۶ اگر $x+y+z=6$ و $xy+xz+yz=11$ و $xyz=6$ باشند، آنگاه $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy}$ برابر است با:

(آفریقای جنوبی ۲۰۰۵)

- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $\frac{13}{6}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{6}{11}$

۶۷ اگر رابطه‌ی مقابل نسبت به x یک اتحاد باشد، حاصل ضرب $N_1 N_2$ چند است؟

(مسابقات ریاضی آمریکا)

- (۱) -246 (۲) -210 (۳) -29 (۴) 210
- $$\frac{35x-29}{x^2-3x+2} = \frac{N_1}{x-1} + \frac{N_2}{x-2}$$

۶۸ کدام گزینه معادلی برای عبارت زیر است؟ ($x, y \neq 0$)

- (۱) $2xy$ (۲) $\frac{2xy}{xy} + 2$ (۳) $2x^2y^2 + 2$ (۴) $\frac{2xy}{xy} + \frac{2}{xy}$
- $$\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{y^2+1}{y}\right) + \left(\frac{x^2-1}{y}\right)\left(\frac{y^2-1}{x}\right)$$

(مسابقات ریاضی آمریکا)

۶۹ اگر تساوی روبه‌رو به ازای هر مقدار x یک اتحاد باشد، مقدار $a-b$ برابر است با:

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) 4 (۴) $\frac{11}{4}$
- $$\frac{a}{10^x-1} + \frac{b}{10^x+2} = \frac{2 \times 10^x + 3}{(10^x-1)(10^x+2)}$$

۷۰ اگر a و b دو عدد حقیقی غیر صفر باشند و $ab = a-b$ باشد. در این صورت $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$ کدام است؟ (AMC; ۲۰۰۰)

- (۱) -2 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) 2

۷۱) عبارت $\frac{x}{y} - 1$ را به شکل ضرب دو عبارت دیگر نوشته‌ایم؛ اگر یکی از دو عبارت $\frac{x}{y} + 1$ باشد، عبارت دیگر کدام است؟

(۱) $\frac{x}{x+y}$ (۲) $\frac{x+y}{x}$ (۳) $\frac{x-y}{x+y}$ (۴) $\frac{x+y}{x-y}$

۷۲) اگر $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ باشد، حاصل عبارت $\frac{a+b}{b+c} + \frac{a+c}{b+a} + \frac{b+c}{a+c}$ برابر است با:

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۳) با فرض $\frac{\lambda}{x^2 - 4x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}$ ، حاصل $a^2 + b^2 + c^2$ چند است؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۵۱ (۴) ۵۲

۷۴) اگر $\frac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 3x + 2} = A + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$ باشد، آنگاه حاصل $A - \frac{B}{2} - \frac{C}{3}$ برابر است با:

(۱) $\frac{6}{11}$ (۲) ۱۱ (۳) $\frac{11}{6}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۷۵) اگر تساوی $\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$ به ازای هر x برقرار باشد، مقدار B چیست؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(کنکور سراسری ۸۹)

۷۶) خلاصه شده عبارت $(x+3 + \frac{4}{x-2}) \div (2 + \frac{2}{x-2})$ کدام است؟ ($x \neq 0, x \neq 2$)

(۱) $\frac{1}{2}x - 2$ (۲) $\frac{1}{2}x + 1$ (۳) $\frac{1}{2}x + 2$ (۴) $x + \frac{1}{2}$

(کنکور سراسری ۸۳)

۷۷) اگر $A = x - \frac{5x-6}{x}$ و $B = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}$ باشد، آنگاه $\frac{A}{B} + 1$ برابر چند است؟

(۱) x^2 (۲) $(x+1)^2$ (۳) $(x-1)^2$ (۴) $(2x-1)^2$

(کنکور سراسری ۸۹)

۷۸) اگر $A = \frac{2x}{1-x^2}$ و $B = \frac{2x}{1+x^2}$ باشد، حاصل $1 + \frac{1}{A^2}$ برابر کدام گزینه است؟ ($x \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$)

(۱) B^2 (۲) $\frac{1}{B^2}$ (۳) $\frac{A}{B}$ (۴) $\frac{B}{A}$

تقسیم چند جمله‌ای‌ها

(علامه طباطبائی ۷۶)

۷۹) حاصل تقسیم $10x^2y^2 - 8x^2y^2 - 2x^2y^2$ بر $4xy - 5y$ کدام است؟

(۱) $4x - 5xy$ (۲) $4xy - 5y$ (۳) $-4xy + 5y$ (۴) $5xy - 4y$

(المیاد تهران)

۸۰) حاصل $\frac{A^2B^2 - B^2A^2 + A^2B^2}{A^2B^2}$ به ازای $A = 2x^2 + 1 - x$ و $B = x^2 + 1 - x$ چند است؟

(۱) $-x^2 + x$ (۲) $-x^2 + 1$ (۳) -1 (۴) x^2

۸۱) حاصل عبارت $\frac{(x-1)^5 - (x-1)^2}{(1-x)^2}$ کدام گزینه است؟

(۱) $x^2 - 2x$ (۲) $-x^2 + 2x$ (۳) $-x^2 - 2x - 2$ (۴) $x^2 - 2x - 2$

۸۲ خارج قسمت تقسیم عبارت $x^2 + x^2$ بر دو جمله‌ای $x - 1$ کدام است؟

- (۱) $x^2 - 2x + 2$ (۲) $x^2 + x + 1$ (۳) $x^2 + 2x - 2$ (۴) $x^2 + 2x + 2$

۸۳ باقی‌مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $5 - 3x - 2x^2 - x^3$ بر $x - 1$ چند است؟

- (۱) -6 (۲) -5 (۳) $+5$ (۴) 6

۸۴ باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^2 - x + 2$ بر سه جمله‌ای $x^2 - x + 1$ کدام است؟

- (۱) $-2x + 2$ (۲) $-2x - 2$ (۳) $-x - 2$ (۴) $-x + 2$

۸۵ عبارت $2x^2 + x^2 - 4x - 2$ بر کدامیک از عبارات زیر بخش پذیر است؟

- (۱) $2x - 1$ (۲) $x^2 + 2$ (۳) $x^2 - 2$ (۴) $x - 2$

۸۶ باقی مانده‌ی تقسیم $1 + a^6 - b^6 + a^6 - b^6$ بر عبارت $a^2 - b^2$ برابر است با:

- (۱) $a^2 - b^2$ (۲) 1 (۳) b^2 (۴) a^2

۸۷ اگر عبارت $x(x+1)^2$ بر عبارت درجه‌ی سوم $ax^2 + bx^2 + cx + 1$ بخش پذیر باشد، آنگاه $a + b + c$ برابر است با:

- (۱) 8 (۲) 7 (۳) 4 (۴) -7

۸۸ باقی‌مانده‌ی تقسیم $(x^2 + 3x + 1) + (x^2 + 8)$ بر $x^2 - 2x + 4$ چند است؟

- (۱) $3x - 3$ (۲) $3x + 1$ (۳) $5x - 3$ (۴) $5x + 3$

۸۹ عبارت $x^{2f} + 1$ بر کدام عبارت زیر، همواره بخش پذیر است؟

- (۱) $x^{2f} + 1$ (۲) $x^f + 1$ (۳) $x^f + 1$ (۴) $x^f + 1$

۹۰ باقی‌مانده‌ی تقسیم $3 + 2x + 2x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ بر $x^2 + 2$ برابر است با:

- (۱) 1 (۲) صفر (۳) 5 (۴) 4

۹۱ در تقسیم $x^2 - 3x^2 + 2x - 1$ بر $x - b$ ، خارج قسمت $x^2 + c$ و باقی‌مانده $b + c$ است. مقدار b چقدر است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 5 (۴) 6

۹۲ اگر $x^2 + 2x + 2$ یکی از عامل‌های $x^2 + 4$ باشد، عامل دیگر آن کدام است؟

- (۱) $x^2 - 2x + 2$ (۲) $x^2 - 2x - 2$ (۳) $x^2 + 2x - 1$ (۴) $x^2 - 2x - 1$

۹۳ در تقسیم $x^2 + x - k$ بر $x + k$ ، باقی‌مانده $3k$ شده است. مقدار k چقدر است؟

- (۱) 5 (۲) -2 (۳) صفر و 5 (۴) -3

۹۴ باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^2 + x^2y - 2x - y$ بر $x + y$ کدام است؟

- (۱) $3y$ (۲) $-3y$ (۳) y (۴) $-y$

۹۵ چند جمله‌ای $ax^4 - bx^2 + 4x^2 - x + 1$ بر عبارت $x + 2$ بخش پذیر است و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر عبارت $x + 1$ برابر

3 است. مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) -4 (۲) -3 (۳) 3 (۴) 4

۹۶ در تقسیم عبارت $(x-2)(x^2+1)$ بر دو جمله‌ای $x+2$ ، مجموع ضرایب در خارج قسمت آن کدام گزینه است؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

(المپیاد فیزیک)

۹۷ در تقسیم $x^5 + 51$ بر $x + 1$ باقی مانده برابر است با:

- ۰ (۱) ۱ (۲) ۴۹ (۳) ۵۰ (۴)

(آفریقای جنوبی ۲۰۱۰)

۹۸ به ازای چه مقدار صحیح، مقدار $\frac{n+3}{n-1}$ به عدد صحیح تبدیل می شود؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۱ (۳) ۶ (۴)

(المپیاد ریاضی ایران)

۹۹ چند جمله ای $x^2 + ax + 1$ بر $x^2 - 3x + b$ بخش پذیر است. $a + 2b$ چند است؟

- ۸ (۱) $-\frac{25}{3}$ (۲) ۱ (۳) صفر (۴)

۱۰۰ از تقسیم x^{100} بر $x^2 - 3x + 2$ باقی مانده R به صورت یک چند جمله ای با درجه کمتر از ۲ به دست می آید. R می تواند به

(مسابقات ریاضی آمریکا)

کدام صورت زیر نوشته شود؟

- $x^{100} - 1$ (۱) $x^{100}(x-1) - (x-2)$ (۲) $x^{100}(x-3)$ (۳) $x(2^{100} - 1) + 2(2^{99} - 1)$ (۴)

۱۰۱ باقی مانده تقسیم عبارت $x^2 - 3x^2 + 2x - 10$ بر دو جمله ای $x^2 + 2$ کدام است؟

- x (۱) $2x$ (۲) $x - 2$ (۳) $x + 2$ (۴)

۱۰۲ باقی مانده تقسیم عبارت $x^2 + x + 1 + bx^2 + ax^2 + x^2 - 1$ بر $x^2 - 1$ برابر صفر است. b کدام است؟

- ۳ (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

۱۰۳ عبارت $x^2 + ax - 6$ به حاصل ضرب دو عبارت تجزیه شده است که یکی از آن ها $(x - 2)$ می باشد، عامل دیگر کدام است؟

- $x^2 - 2x + 3$ (۱) $x^2 - 2x - 3$ (۲) $x^2 + 2x + 3$ (۳) $x^2 + 2x - 3$ (۴)

۱۰۴ کدام چند جمله ای بر $(x - 1)^2$ بخش پذیر است و باقی مانده تقسیم آن بر $x + 1$ برابر -40 است؟

- $(x - 1)^2(x + 5)$ (۱) $(x - 1)^2(x^2 + x + 12)$ (۲) $(x - 1)^2(x^2 - 1)$ (۳) $(x - 1)^2(x^2 - 6x + 5)$ (۴)

۱۰۵ عبارت $x^2 - x + 1 + \dots + x^{99} - x^{101} + x^{100}$ بر کدامیک از عبارت های زیر بخش پذیر است؟

- $x + 1$ (۱) x (۲) $x^2 + 1$ (۳) $x - 1$ (۴)

۱۰۶ اگر باقی مانده تقسیم عبارت $x^2 - x + 2a - b - fax^2 - (4 - 7a)x^2 + 7x^2$ بر $x - a$ برابر صفر باشد، مقدار $3a + 2b$ چند

برابر b است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۱۰۷ عبارت $(x + y + 1)^n - x^n - y^n - 1$ وقتی بر $x + y$ بخش پذیر است که:

- n زوج باشد. (۱) n فرد باشد. (۲) n مربع کامل باشد. (۳) همواره بخش پذیر است. (۴)

۱۰۸ برای آنکه $(x - a)(x - b) + k$ بر $(x - a - b)$ بخش پذیر باشد، مقدار k کدام است؟

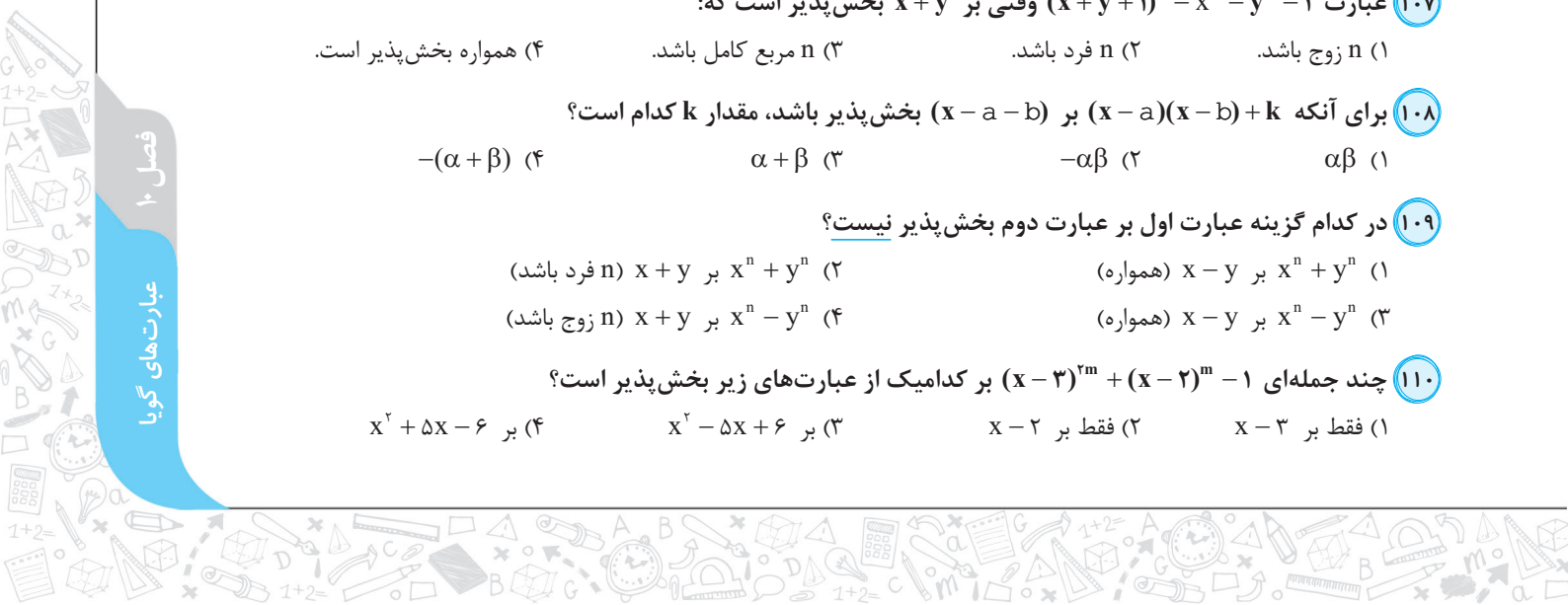
- $\alpha\beta$ (۱) $-\alpha\beta$ (۲) $\alpha + \beta$ (۳) $-(\alpha + \beta)$ (۴)

۱۰۹ در کدام گزینه عبارت اول بر عبارت دوم بخش پذیر نیست؟

- (۱) $x^n + y^n$ بر $x - y$ (همواره)
(۲) $x^n + y^n$ بر $x + y$ (n فرد باشد)
(۳) $x^n - y^n$ بر $x - y$ (همواره)
(۴) $x^n - y^n$ بر $x + y$ (n زوج باشد)

۱۱۰ چند جمله ای $x^3 - 1 + (x - 2)^m + (x - 3)^m$ بر کدامیک از عبارت های زیر بخش پذیر است؟

- فقط بر $x - 3$ (۱) فقط بر $x - 2$ (۲) بر $x^2 - 5x + 6$ (۳) بر $x^2 + 5x - 6$ (۴)



۱۱۱) در تقسیم چند جمله‌ای $nx^2 + mx^2 - nx$ بر $(x+1)(x-2)$ باقی‌مانده برابر است با $4x+2$ ؛ در این صورت مقدار $n-m$ چند است؟

- ۱ (۱) ۱۹ (۲) -۱۹ (۳) -۱ (۴)

۱۱۲) اگر $R(x)$ باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $x^{11} + x^{11} + x^{11} + x^{11} + x^{11}$ بر عبارت $x^2 - x$ باشد، $R(1)$ چند است؟

- ۳ (۱) ۶ (۲) ۱ (۳) ۵ (۴)

۱۱۳) باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7) + 2x - 1$ بر عبارت $x^2 + 9x + 20$ کدام گزینه است؟

- ۲x-1 (۱) ۲x+2 (۲) ۲x-13 (۳) ۲x+13 (۴)

۱۱۴) مجموع ضرایب خارج‌قسمت تقسیم عبارت $15x + x^{12} + x^{13} + \dots + x^{15}$ بر $x+1$ کدام است؟

- ۱۴ (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۱۳ (۴)



ترکیبی و خلاقیتی

۱۱۵) اگر فرمول محاسبه‌ی x به صورت $x = \frac{6R-2}{2R-3}$ باشد، با افزایش مقدار x ، R چه تغییری می‌کند؟

- ۱) زیاد می‌شود ۲) کم می‌شود ۳) به ۳ نزدیک می‌شود ۴) به صفر نزدیک می‌شود

۱۱۶) در رابطه‌ی $k = \frac{10x}{1+2x}$ ، x عددی مثبت و حقیقی است. با افزایش x ، مقدار k :

- ۱) کاهش می‌یابد ۲) افزایش می‌یابد
۳) ابتدا افزایش سپس کاهش می‌یابد ۴) ابتدا کاهش سپس افزایش می‌یابد

(علامه طباطبائی ۸۲)

۱۱۷) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ باشد، حاصل $\frac{(a+c)d}{(b+d)c}$ برابر با کدامیک از مقادیر زیر است؟

- ۱) $\frac{d}{c}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{a+c}{b}$ ۴) $\frac{ad}{bc}$

(انرژی اتمی ۸۳)

۱۱۸) اگر $\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{5}$ و $\frac{yz}{y+z} = \frac{1}{7}$ و $\frac{xz}{x+z} = \frac{1}{6}$ ، حاصل $\frac{1}{z} + \frac{2}{y} + \frac{3}{x}$ کدام است؟

- ۱) ۱۶ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) ۱۷ ۴) $\frac{1}{17}$

(انرژی اتمی ۷۸)

۱۱۹) هرگاه داشته باشیم: $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$ ، $(d+a \neq 0, b+c \neq 0)$ آنگاه...

- ۱) باید $a=3$ باشد. ۲) باید $a+b+c+d=1$ باشد.
۳) باید $a=3$ یا $a+b+c+d=0$ باشد. ۴) باید $a(b+c+d) = c(b+c+d)$ باشد.

(تیزهوشان ۸۸)

۱۲۰) می‌دانیم $x = \frac{2}{y}$ و $y = \frac{1}{1-x}$ ، در این صورت y چه عددی است؟

- ۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۱۲۱) اگر $ax^f = by^f = cz^f = x^f + y^f + z^f$ باشد، حاصل $ab + ac + bc$ کدام است؟

- (۱) xyz (۲) abc (۳) $\frac{1}{xyz}$ (۴) $\frac{1}{abc}$

۱۲۲) اگر $\frac{xz+1}{xz-1} = \frac{y+2}{-y+2}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{1+z}{xy+2}$ برابر است با:

- (۱) z (۲) xy (۳) $\frac{z}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}xy$

(کاتگور، ۲۰۰۶)

۱۲۳) اگر $\frac{2x-3y}{x+2y} = 3$ باشد، مقدار عبارت $\frac{2x+y}{3x+10y}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{19}{28}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{7}{9}$

۱۲۴) علی با سرعت متوسط x به کرج رفت و با سرعت y برگشت. میانگین سرعت کل مسیر چقدر است؟

- (۱) $\frac{xy}{2}$ (۲) $\frac{x+y}{2}$ (۳) $\frac{2x+2y}{xy}$ (۴) $\frac{2xy}{x+y}$

۱۲۵) اگر بین سه عدد حقیقی و مخالف صفر a و b و c روابط زیر برقرار باشد و $x < 0$ باشد، آنگاه مقدار x برابر است با:

(مسابقات آمریکا) $x = \frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{c}$

- (۱) -1 (۲) -2 (۳) -4 (۴) -6

۱۲۶) تعداد زوج‌های صحیح مثبت (p, q) که $p+q \leq 100$ در حالی که داشته باشیم: $\frac{p+q^{-1}}{p^{-1}+q} = 17$ برابر است با:

(fermat contest ۲۰۱۱)

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 5

(fermat contest ۲۰۱۰)

۱۲۷) اگر $\frac{x-y}{z-y} = -10$ باشد، آنگاه $\frac{x-z}{y-z}$ برابر است با:

- (۱) 11 (۲) -10 (۳) 9 (۴) -9

۱۲۸) اگر $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$ باشد، k چند مقدار مختلف حقیقی می‌تواند داشته باشد؟ (هیچ کدام از مخرج‌ها صفر نیست!)

(مسابقات IMC)

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

(تیزهوشان ۸۷)

۱۲۹) اگر $\frac{a}{b+c-d} = \frac{4}{3}$ و $\frac{2a+b+c}{b+c} = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\frac{d}{a}$ چیست؟

- (۱) -2 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{23}{4}$ (۴) $\frac{17}{4}$

سؤال چالشی

اگر x و y و z اعداد مثبتی باشند که $x + \frac{1}{y} = 4$ و $y + \frac{1}{z} = 1$ و $z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3}$ باشد، در این صورت xyz کدام گزینه است؟

(AMC, ۲۰۰۰)

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) 1 (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) 2 (۵) $\frac{7}{3}$

پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

۷ گزینه ۲

$$x(3^x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$3^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

پس فقط یک عدد حقیقی را شامل نمی‌شود.

۸ گزینه ۱

از آنجایی که مخرج فقط باید یک ریشه داشته باشد، باید به شکل مجذور کامل (اتحاد مربع) درآید:

$$x^2 - 2x + b = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow b = 1$$

۹ گزینه ۱

$$\frac{(x-y)(x+y)(x+1)^2}{(y-x)(x+1)^2} = -x-y$$

۱۰ گزینه ۱

ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم؛ سپس جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{1}{(a^2 - b^2)^2} \times \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{1}{(a-b)^2(a+b)^2} \times \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$$

$$= \frac{1}{(a-b)^4} = \frac{1}{(1395-1394)^4} = \frac{1}{1} = 1$$

۱۱ گزینه ۱

$$\frac{2x-y}{x(2x-y)} = \frac{1}{x} = 2015$$

۱۲ گزینه ۱

صورت و مخرج هر کسر را تا جایی که امکان دارد، ساده می‌کنیم:

$$\frac{3(x-2)}{2(x-2)} - \frac{x+7}{3(x+7)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

۱۳ گزینه ۳

$$\frac{m^{-1} + n^{-1}}{a\left(\frac{m+n}{mn}\right)} = \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{a\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)} = \frac{1}{a} = a^{-1}$$

۱۴ گزینه ۱

$$1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{1-x}} = 1 - \frac{1}{\frac{1-x+x}{1-x}} = 1 - \frac{1}{1} = 1 - (1-x)$$

$$= 1 - 1 + x = x$$

x نباید ۱ باشد؛ زیرا مخرج کسر صفر می‌شود!

۱۵ گزینه ۲

ابتدا ساده می‌کنیم:

۱ گزینه ۱

$$2-a-x^{-1}, 1-x+x^2, \frac{13}{7}, \frac{2a+\sqrt{2}}{3}, \frac{2a}{a+1}$$

عبارت گویا هستند. (چند جمله‌ای‌ها نیز زیر مجموعه‌ی عبارت‌های گویا هستند.)

۲ گزینه ۳

مخرج نباید صفر شود، مخرج فقط به ازای $a = -2$ و $a = 7$ صفر می‌شود.

اگر دقیق‌ترش را می‌فواهید. (با جایگذاری و امتحان گزینه‌ها)

۳ گزینه ۳

هر چند طبقه که باشد، باید مخرج تمام کسرها را قبل از ساده کردن بررسی کنیم:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$1 - \frac{2}{x-1} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x-1} = 1 \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow x=0 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0, 1, 3\}$$

یعنی ۳ عدد حقیقی در دامنه نیستند!

۴ گزینه ۴

$$\frac{1 - (1 - (-2))^{-2}}{1 - \frac{1}{-2+1}} = \frac{1 - \frac{1}{9}}{1 - (-1)} = \frac{\frac{8}{9}}{2} = \frac{4}{9}$$

۵ گزینه ۳

مخرج این کسر هیچ گاه صفر نمی‌شود!

۶ گزینه ۱

چون ۱ و ۲ در دامنه نیستند؛ یعنی جواب‌های معادله‌ی مخرج هستند:

راه اول: اعداد ۱ و ۲ باید در معادله صدق کنند؛ پس:

$$x=1 \Rightarrow 1+a+b=0 \Rightarrow a+b=-1$$

$$x=2 \Rightarrow 4+2a+b=0 \Rightarrow -2a-b=4$$

$$-a=3 \Rightarrow a=-3$$

$$-3+b=-1 \Rightarrow b=2$$

راه دوم: معادله باید به شکل $(x-1)(x-2)$ باشد؛ پس:

$$x^2 + ax + b = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

$$\Rightarrow a = -3, b = 2 \Rightarrow a - b = -5$$

گزینه ۲۲

$$\frac{c^r - (a^r + b^r + rab)}{a + b + c} = \frac{c^r - (a + b)^r}{a + b + c}$$

$$= \frac{(c + a + b)(c - (a + b))}{a + b + c} = c - a - b$$

گزینه ۲۳

تجزیه صورت:

$$ra^r - ra + 1 = ra^r - ra - a + 1$$

$$= ra(a - 1) - (a - 1) = (a - 1)(ra - 1)$$

حاصل عبارت:

$$\frac{ra^r - ra + 1}{ra^r - 1} = \frac{(a - 1)(ra - 1)}{(ra - 1)(ra + 1)} = \frac{a - 1}{ra + 1}$$

گزینه ۲۴

$$\frac{ab(a^{-1} + b^{-1})^r}{a + b} = ab\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^r \div (a + b)$$

$$= ab\left(\frac{a + b}{ab}\right)^r \div (a + b) = \frac{ab(a + b)^r}{(ab)^r} \times \frac{1}{(a + b)}$$

$$= \frac{a + b}{ab} = \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

گزینه ۲۵

صورت و مخرج را در c^f ضرب می‌کنیم:

$$\frac{c^a - 1}{1 + a^r b^r} = \frac{c^f (c^a - 1)}{c^f + a^r c^f b^r} = \frac{c^f (c^f - 1)(c^f + 1)}{(c^f + 1)} = c^a - c^f$$

گزینه ۲۶

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4} = k \Rightarrow$$

$$\frac{x}{3} = k \Rightarrow x = 3k$$

$$\frac{y-1}{2} = k \Rightarrow y-1 = 2k \Rightarrow y = 2k + 1$$

$$\frac{z+1}{4} = k \Rightarrow z+1 = 4k \Rightarrow z = 4k - 1$$

$$\Rightarrow \frac{x + y - 1}{x + y + z} = \frac{3k + 2k + 1 - 1}{3k + 2k + 1 + 4k - 1} = \frac{\Delta k}{9k}$$

$$= \frac{\Delta}{9}$$

گزینه ۲۷

یادآوری یک اتحاد از فصل جبر:

$$x^f + x^r y^r + y^f$$

$$= (x^r + xy + y^r)(x^r - xy + y^r)$$

پس عبارت ساده شده به شکل $x^r - xy + y^r$ در می‌آید.

$$\frac{(ra^r - b)(ra^r + b) - b^r}{-ra^r + rb^r}$$

$$= \frac{ra^r - b^r - b^r}{-ra^r + rb^r} = \frac{ra^r - 2b^r}{-(ra^r - rb^r)} = -1$$

گزینه ۱۶

$$\frac{a^{-r} - b^{-r}}{a^{-r} - b^{-r}} = \frac{(a^{-r} - b^{-r})(a^{-r} + b^{-r})}{a^{-r} - b^{-r}}$$

$$= a^{-r} + b^{-r}$$

گزینه ۱۷

نکته: هر عدد را در معکوس خودش ضرب کنیم، برابر ۱ می‌شود. معکوس عبارت به صورت زیر است:

$$\frac{x^r - 9}{x^r + 4x + 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 3)(x + 1)} = \frac{x - 3}{x + 1}$$

گزینه ۱۸

$$A = \frac{(a^r - 1)(b^r - 1)}{(ab + 1 + a + b)(ab + 1 - a - b)}$$

$$= \frac{(a - 1)(a + 1)(b - 1)(b + 1)}{a^r b^r - a^r - b^r + 1}$$

$$= \frac{(a - 1)(a + 1)(b - 1)(b + 1)}{a^r (b^r - 1) - (b^r - 1)}$$

$$= \frac{(a - 1)(a + 1)(b - 1)(b + 1)}{(a^r - 1)(b^r - 1) = (1 + a)(1 + b)(1 - a)(1 - b)} = 1$$

گزینه ۱۹

صورت و مخرج را در $(a - 1)(b - 1)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{(a - 1)(b - 1)(a^r + a + 1)}{(a - 1)(b - 1)(b^r + b + 1)} = \frac{(b - 1)(a^r - 1)}{(a - 1)(b^r - 1)}$$

از صورت سؤال:

$$a^r = 2 - b^r$$

$$= \frac{(b - 1)(2 - b^r - 1)}{(a - 1)(b^r - 1)} = \frac{1 - b}{a - 1}$$

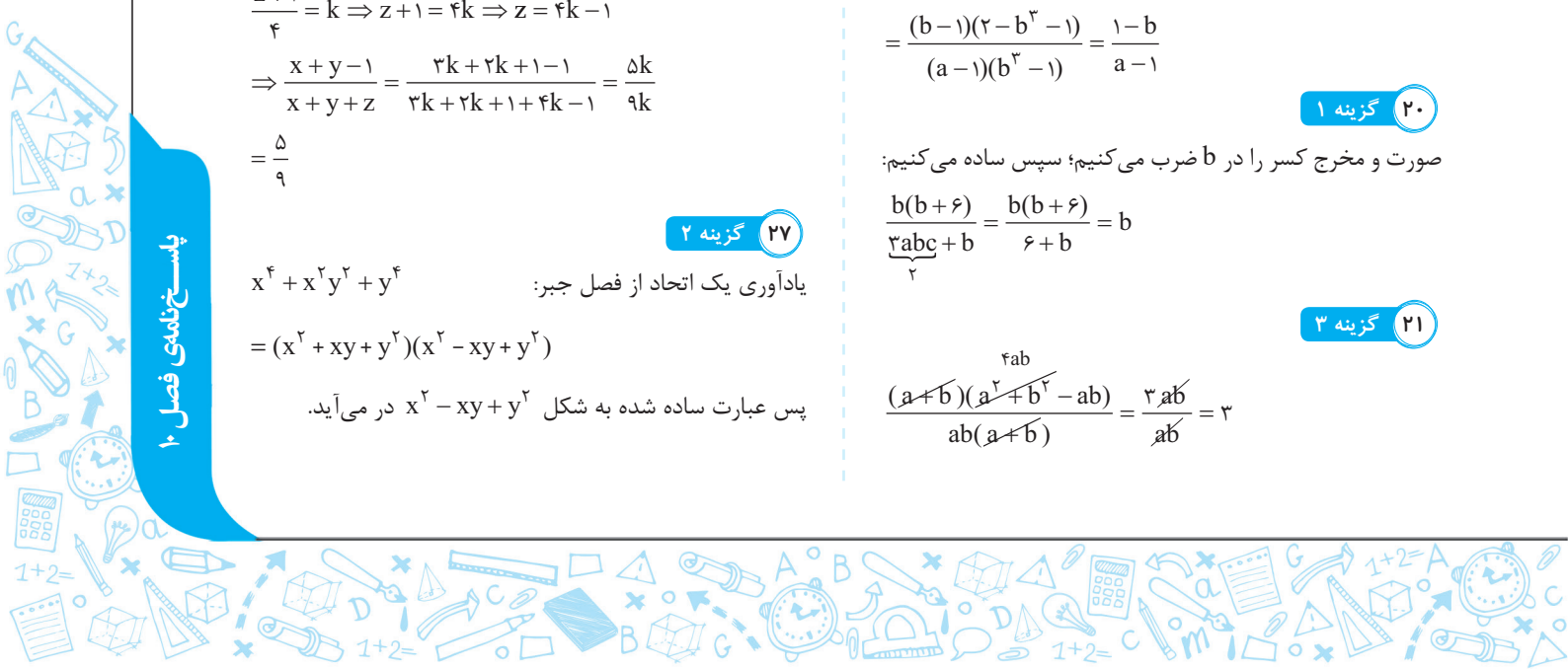
گزینه ۲۰

صورت و مخرج کسر را در b ضرب می‌کنیم؛ سپس ساده می‌کنیم:

$$\frac{b(b + 6)}{\frac{3abc}{2} + b} = \frac{b(b + 6)}{6 + b} = b$$

گزینه ۲۱

$$\frac{fab}{(a + b)(a^r + b^r - ab)} = \frac{3ab}{ab(a + b)} = 3$$



گزینه ۲۸

هر جا $y+z$ هست، $۲x$ قرار می دهیم:

$$\frac{(x+(y+z))^2 - x^2}{x(y+z)+x^2} = \frac{9x^2 - x^2}{3x^2} = \frac{8x^2}{3x^2} = \frac{8}{3}$$

گزینه ۲۹

$$\begin{aligned} \frac{a^r b^r (a^{-1} + b^{-1})^r}{ab^{-1} + a^{-1}b + 2} &= \frac{a^r b^r \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^r}{ab^{-1} + a^{-1}b + 2} \\ &= \frac{a^r b^r (a+b)^r}{a^r b^r} = \frac{(a+b)^r}{ab^{-1} + a^{-1}b + 2} \\ &= \frac{(a+b)^r}{ab(ab^{-1} + a^{-1}b + 2)} \\ &= \frac{(a+b)^r}{a^r + b^r + 2ab} = \frac{(a+b)^r}{(a+b)^r} = a+b \end{aligned}$$

گزینه ۳۰

$$\frac{ax+bx}{a^2-b^2} \div \frac{2x^2}{ax-bx} = \frac{x(a+b)}{(a-b)(a+b)} \times \frac{x(a-b)}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۳۱

$$\begin{aligned} \frac{(a^r - b^r)}{6a} \times \frac{ra^r b^r}{a^r b + ab^r} &= \frac{(a-b)(a+b)}{6a} \times \frac{ra^r b^r}{ab(a+b)} \\ &= \frac{(a-b) \times rab}{6a} = rb \end{aligned}$$

گزینه ۳۲

$$\begin{aligned} A &= \frac{ax^r + ax}{2x} \times \frac{x-3}{2x^2 - 4x - 6} \\ &= \frac{ax(x+1)}{2x} \times \frac{x-3}{2(x^2 - 2x - 3)} \\ &= \frac{a(x+1)}{2} \times \frac{(x-3)}{2(x+1)(x-3)} = \frac{a}{4} = 12 \Rightarrow a = 48 \end{aligned}$$

گزینه ۳۳

$$\begin{aligned} k &= \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4} \div \frac{x-4}{x^2 + 6x + 8} \\ &= \frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \times \frac{(x+2)(x+4)}{(x-4)} = x+4 \end{aligned}$$

گزینه ۳۴

$$\begin{aligned} \frac{(a^r + b^r + rab) - c^r}{(a^r - rac + c^r) - b^r} &\div \frac{b+c+a}{b+c-a} \\ &= \frac{(a+b)^r - c^r}{(a-c)^r - b^r} \times \frac{b+c-a}{b+c+a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(a+b-c)(a+b+c)}{(a-c-b)(a-c+b)} \times \frac{b+c-a}{b+c+a} \\ &= \frac{b+c-a}{a-b-c} = -1 \end{aligned}$$

گزینه ۳۵

$$\begin{aligned} \frac{ax+b}{x^2-4x+3} \div \frac{x^r+x^r+x}{(x^r-1)} &= \frac{2}{x} \\ \Rightarrow \frac{ax+b}{(x-1)(x-3)} \times \frac{(x-1)(x^r+x+1)}{x(x^r+x+1)} &= \frac{2}{x} \\ \Rightarrow \frac{ax+b}{x(x-3)} &= \frac{2}{x} \\ \Rightarrow \frac{ax+b}{x-3} = 2 &\Rightarrow ax+b = 2x-6 \\ a=2, b=-6 &\Rightarrow a-b=8 \end{aligned}$$

گزینه ۳۶

$$\begin{aligned} \frac{c^r-d^r}{c^r+4cd+3d^r} \times A &= \frac{c^r+cd-2d^r}{c^r+cd-6d^r} \\ \Rightarrow A &= \frac{c^r+cd-2d^r}{c^r+cd-6d^r} \times \frac{c^r+4cd+3d^r}{c^r-d^r} \\ &= \frac{(c+2d)(c-d)}{(c+2d)(c-2d)} \times \frac{(c+d)(c+3d)}{(c-d)(c+d)} = \frac{c+2d}{c-2d} \end{aligned}$$

گزینه ۳۷

اگر $x-2$ برابر با -4 باشد، یعنی در عبارت A عدد -2 را به جای x قرار داده‌ایم و این امکان پذیر نیست؛ چون عدد -2 در دامنه‌ی A نیست (مخرج کسر A صفر می‌شود).

گزینه ۳۸

$$\begin{aligned} \frac{x^r+kx+2}{x^r-3x+2} &= \frac{x^r+x-2}{x-2} \\ x^r+kx+2 &= \frac{(x^r-3x+2) \times (x^r+x-2)}{x-2} \\ &= \frac{(x-1)(x-2)(x+2)(x-1)}{x-2} \\ \Rightarrow x^r+kx+2 &= (x-1)^2(x+2) \\ &= (x^2-2x+1)(x+2) \\ \Rightarrow x^r+kx+2 &= x^3-2x+2 \Rightarrow k=-3 \\ \frac{x^r+kx}{x-3} &= \frac{x^3-3x}{x-3} = \frac{x(x-3)}{x-3} = x \end{aligned}$$

گزینه ۳ ۴۶

صورت و مخرج کسر اولی را در $a+b$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{a - \frac{a^r}{a+b}}{a + \frac{a^r}{a+b}} \times (ra+b) &= \frac{a(a+b) - a^r}{a(a+b) + a^r} \times (ra+b) \\ &= \frac{a^r + ab - a^r}{a^r + ab + a^r} \times (ra+b) \\ &= \frac{ab}{ra^r + ab} \times \frac{(ra+b)}{1} \\ &= \frac{ab \times (ra+b)}{a(ra+b)} = b \end{aligned}$$

گزینه ۴ ۴۷

صورت و مخرج را در $(1-x)(1+x)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{(1+x) - x(1-x)}{(1-x) + x(1+x)} = \frac{1+x-x+x^2}{1-x+x+x^2} = 1$$

گزینه ۳ ۴۸

صورت و مخرج اولی را در $1+x$ و دومی را در $1-x$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \\ 1 - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{1+x}{1+x-1} + \frac{1-x}{1-(1-x)} \\ &= \frac{1+x}{x} + \frac{1-x}{x} = \frac{1+x+1-x}{x} = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

گزینه ۴ ۴۹

چون $a < b$ و $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ پس $x < y$

پس؛ منظور سؤال محاسبه‌ی x است برحسب a و b و c :

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} = \frac{a}{b} &\Rightarrow y = \frac{b}{a}x \\ x + y = c &\Rightarrow x + \frac{b}{a}x = c \\ x\left(1 + \frac{b}{a}\right) = c &\Rightarrow x = \frac{c}{1 + \frac{b}{a}} \\ &= \frac{ac}{a+b} \end{aligned}$$

گزینه ۳ ۵۰

$$\begin{aligned} A + \frac{3}{x+4} = \frac{7x+5}{x^2+4x} \quad A &= \frac{7x+5}{x^2+4x} - \frac{3}{x+4} \\ &= \frac{7x+5-3x}{x^2+4x} = \frac{4x+5}{x(x+4)} \end{aligned}$$

گزینه ۲ ۳۹

$$\begin{aligned} \frac{a^r+b^r}{a^r-b^r} \times \frac{a^r b + b^r}{a^r + a^r b^r + b^r} \times \frac{a^r + ab + b^r}{a+b} \\ &= \frac{(a^r+b^r)(a^r-ab+b^r)}{(a^r-b^r)(a^r+b^r)} \times \frac{b(a^r+b^r)}{(a^r+ab+b^r)(a^r-ab+b^r)} \\ &\times \frac{a^r+ab+b^r}{a+b} = \frac{b}{a^r-b^r} \end{aligned}$$

گزینه ۳ ۴۰

$$\begin{aligned} k &= \frac{(a^r-b^r)}{ab} - \frac{b(a-b)}{a(b-a)} \\ &= \frac{a^r-b^r}{ab} + \frac{b}{a} = \frac{a^r-b^r+b}{ab} = \frac{a^r}{ab} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

گزینه ۱ ۴۱

$$A = \frac{x-1}{x-y} + \frac{1-y}{x-y} = \frac{x-1+1-y}{x-y} = \frac{x-y}{x-y} = 1$$

گزینه ۳ ۴۲

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{x} - (-1) - \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x} - \frac{x+1}{x} \\ &= \frac{1+x-x-1}{x} = \frac{0}{x} = 0 \end{aligned}$$

گزینه ۳ ۴۳

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x-2)(x+2)}{2(x+2)} = \frac{x-2}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{A} + 1 &= \frac{2}{x-2} + 1 = \frac{2+x-2}{x-2} = \frac{x}{x-2} \end{aligned}$$

گزینه ۲ ۴۴

x و y معکوس هستند، یعنی $xy = 1$
صورت و مخرج کسر اولی را در y ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} M &= \frac{xy-7y}{5xy} + \frac{7y+4}{5} = \frac{1-7y}{5} + \frac{7y+4}{5} \\ &= \frac{1-7y+7y+4}{5} = \frac{5}{5} = 1 \end{aligned}$$

گزینه ۴ ۴۵

توجه کنید که $2x^{-1} = \frac{2}{x}$ بلکه $2x^{-1} \neq \frac{1}{2x}$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2x+2y} \times \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right) \\ &= \frac{1}{2x+2y} \times \frac{2y+2x}{xy} \\ \frac{1}{xy} &= (xy)^{-1} \end{aligned}$$

گزینه ۵۱

$$= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x+2}\right)$$

$$= \dots = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x+2} = \frac{2x+2-x}{2x(x+1)} = \frac{x+2}{2x(x+1)}$$

حالا باید بر ۲ تقسیم کنیم (چرا؟)

$$A = \frac{x+2}{2x(x+1)} \div 2 = \frac{x+2}{4x(x+1)}$$

گزینه ۴ ۵۷

نکته: در عبارتی به شکل $\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$ اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد، مقدار کسر به x و y بستگی ندارد و مقدار ثابتی بدست می‌آید:

$$\frac{a+1}{3} = \frac{-(2a-b)}{1} = \frac{3}{2} \Rightarrow a+1 = \frac{9}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{2} (*)$$

$$-2a+b = \frac{3}{2} \rightarrow -7+b = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{17}{2}$$

$$a+b = \frac{7}{2} + \frac{17}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

گزینه ۱ ۵۸

این سؤال خیلی قشنگ است (!)؛ یعنی راه حل خیلی قشنگی دارد. صورت و مخرج کسر دومی را در x ضرب کنیم؛

$$\frac{y}{yz+y+1} = \frac{xy}{xyz+xy+x} = \frac{xy}{xy+x+1}$$

مخرج همان کسر اولی شد!

صورت و مخرج کسر سومی را در xy ضرب می‌کنیم. ببینید چه اتفاقات جالبی می‌افتد:

$$\frac{z}{zx+z+1} = \frac{xyz}{xyz+xy+xy}$$

$$= \frac{1}{xy+x+1}$$

مخرج همان مخرج اولی شد!

حالا سه کسر را با هم جمع می‌زنیم؛ چون مخرج‌ها مساوی شده، کار سختی نیست و حاصل برابر ۱ می‌شود.

یادآوری به‌یاد و موع؛

با حل این سؤال و برقی از سؤالات قبل، قطعاً فیلی‌ها می‌پرسن؛ (از یه همپین راه‌ل‌هایی کجا به ذهنمون برسه)؟!

در واقع پنین نیست که توی هر کدوم از این پرسش‌ها، راه‌ل کوتاه و سرعتی قشنگ! فیلی، راحت در همون اول به ذهن من می‌رسه. من هم گاهی اوقات روش‌های مختلف رو امتحان می‌کنم و بیراهه‌ها رو تشریح می‌دهم و کنار می‌گذارم تا به راه‌ل کوتاه و فلاقانه برسم!

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow 2x = z + y \Rightarrow x = \frac{z+y}{2}$$

$$\left(\frac{m^2+3}{1-m} + \frac{1+m}{1}\right)(1-m)$$

$$= (m^2+3) + (1+m)(1-m)$$

$$= m^2+3+1-m^2 = 4$$

گزینه ۱ ۵۲

گزینه ۴ ۵۳

x, y به نسبت ۲ به ۳ هستند، آن‌ها را $2k$ و $3k$ فرض می‌کنیم:

$$\frac{x}{y-x} + \frac{x+y}{y} = \frac{2k}{3k-2k} + \frac{2k+3k}{3k}$$

$$= \frac{2k}{k} + \frac{5k}{3k} = 2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$$

گزینه ۱ ۵۴

سمت چپ را مخرج مشترک گرفته و جمع می‌زنیم:

$$\frac{2}{3(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

$$= \frac{4(x+1) - 3(x-1)}{6(x-1)(x+1)} = \frac{4x+4-3x+3}{6(x^2-1)}$$

$$= \frac{x+7}{6(x^2-1)} = \frac{x+a}{6x^2-6} \Rightarrow x+7 = x+a \Rightarrow a=7$$

گزینه ۳ ۵۵

$$A = \left(\frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x}\right) \div \left(\left(\frac{1}{1+x} - 1\right)\left(\frac{1+x}{1-x} - 1\right)\right)$$

$$= \frac{(1-x)^2 - (1+x)^2}{(1+x)(1-x)} \div \left(\left(\frac{1-1-x}{1+x}\right)\left(\frac{1+x-1+x}{1-x}\right)\right)$$

$$= \frac{-4x}{1-x^2} \div \frac{-2x^2}{1-x^2} = \frac{-4x}{-2x^2} = \frac{2}{x}$$

مواستان باشد، در تقسیم کسرها اگر مخرج‌ها مساوی باشند، کافی است صورت‌ها را بر هم تقسیم کنیم.

گزینه ۱ ۵۶

اگر تمام کسرها را در ۲ ضرب کنیم (یعنی کل عبارت در ۲ ضرب شود)، کسرها تسکوی می‌شوند! و چنین ساده می‌شوند:

$$A = \frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \dots + \frac{1}{2x(2x+2)}$$

$$2A = \frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \dots + \frac{2}{2x(2x+2)}$$

$$k = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)} - \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a-b)}$$

$$+ \frac{2b^2 - b^2 + a^2}{a^2 - b^2}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} + \frac{2b^2 - b^2 + a^2}{a^2 - b^2}$$

$$= \frac{a^2 - b^2 - a^2 - b^2 + 2b^2 - b^2 + a^2}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2} = 1$$

گزینه ۱ ۶۴

از فرض $a+b+c=7$ نتیجه می‌شود: $a=7-(b+c)$ و $b=7-(a+c)$ و $c=7-(a+b)$

بنابراین:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} =$$

$$= \frac{7-(b+c)}{b+c} + \frac{7-(a+c)}{a+c} + \frac{7-(a+b)}{a+b}$$

$$= \frac{7}{b+c} - 1 + \frac{7}{a+c} - 1 + \frac{7}{a+b} - 1$$

$$= 7\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 = \frac{49}{10} - 3 = \frac{19}{10}$$

گزینه ۴ ۶۵

دو عبارت را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(I) \times (II) \Rightarrow (a+b+c) \times \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 26 \times 31$$

$$1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1 = 806$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = 803$$

گزینه ۱ ۶۶

عبارت مورد پرسش حاصل $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy}$ است که ساده شده‌اش به شکل زیر است:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} = ?$$

مخرج این کسر که معلوم است (صورت سؤال: $xyz=6$) برای محاسبه‌ی صورت، از معلومات سؤال استفاده می‌کنیم:

$$x + y + z = 6$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 36$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + zy + zx) = 36$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

$$\frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

حالا عبارت مورد نظر برابر است با:

گزینه ۳ ۵۹

از $x+y+z=0$ نتیجه می‌شود: $x+z=-y$ و $y+z=-x$ و جایگذاری می‌کنیم:

$$A = \frac{x^2}{(-x)^2} + \frac{2y^2}{(-y)^2} + \frac{5z^2}{(-z)^2}$$

$$= -1 + 2 - 5 = -4$$

گزینه ۳ ۶۰

مخرج مشترک شامل ۶ پرانتز نیست. برخی از پرانتزها قرینه‌ی هم هستند و با یک قرینه کردن مثل هم می‌شوند:

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

به جای $b-a$ می‌توان نوشت $-(a-b)$ و به جای $(c-a)(c-b)$

می‌توان نوشت $(a-c)(b-c)$ یعنی هر دو پرانتز قرینه شده است! و حاصل ضرب تغییر نمی‌کند:

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

حالا اگر در صورت و مخرج ضرب‌ها را انجام دهیم، صورت و مخرج مساویند و حاصل کسر برابر ۱ می‌شود.

گزینه ۳ ۶۱

مشابه قبلی، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)} - \frac{1}{b(a-b)(b-c)} + \frac{1}{c(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{bc(b-c) - ac(a-c) + ab(a-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

حال به جای abc مقدار $\frac{1}{3}$ را قرار می‌دهیم. بقیه عبارت مخرج با عبارت صورت برابر است (ضرب‌ها را انجام دهید) پس حاصل برابر ۳ می‌شود.

گزینه ۱ ۶۲

طبق الگوهایی که در سؤالات قبل هم دیدیم، اگر به جای A عبارت

$$\frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

را قرار دهیم، تساوی متقارن و درست می‌شود! ولی راه حل تشریحی نیست. آن را به عهده‌ی شما می‌گذارم! مشابه قبلی‌ها حل کنید.

گزینه ۱ ۶۳

صورت و مخرج اولین کسر را در $a-b$ و دومی را در $a+b$ ضرب می‌کنیم:

گزینه ۱ ۶۷

عبارت سمت راست را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{x-1} + \frac{N_2}{x-2} &= \frac{N_1x - 2N_1 + N_2x - N_2}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{(N_1 + N_2)x + (-2N_1 - N_2)}{x^2 - 3x + 2} = \frac{35x - 29}{x^2 - 3x + 2} \end{aligned}$$

چون مخارج‌ها یکی است، صورت‌ها باید متحد باشند؛ یعنی ضریب x در هر دو مساوی و مقدار ثابت‌ها هم مساوی باشند (مخارج‌ها که مساوی هست!)

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = 35 \\ -2N_1 - N_2 = -29 \end{cases}$$

$$-N_1 = 6 \Rightarrow N_1 = -6$$

$$-6 + N_2 = 35 \Rightarrow N_2 = 41$$

$$N_1N_2 = -6 \times 41 = -246$$

گزینه ۴ ۶۸

برخلاف راه‌های خلاقانه سؤالات قبلی در اینجا خیلی عادی ضرب و ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{(x^2+1)(y^2+1)}{xy} + \frac{(x^2-1)(y^2-1)}{xy} \\ &= \frac{x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 + x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1}{xy} \\ &= \frac{2x^2y^2 + 2}{xy} = \frac{2x^2y^2}{xy} + \frac{2}{xy} = 2xy + \frac{2}{xy} \end{aligned}$$

گزینه ۱ ۶۹

سمت چپ را ساده می‌کنیم، با سمت راست متحد قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{a}{10^x - 1} + \frac{b}{10^x + 2} &= \frac{a(10^x + 2) + b(10^x - 1)}{(10^x - 1)(10^x + 2)} \\ &= \frac{(a+b)10^x + 2a - b}{(10^x - 1)(10^x + 2)} = \frac{2 \times 10^x + 3}{(10^x - 1)(10^x + 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a - b = 3 \end{cases}$$

$$3a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{5}{3} + b = 2$$

$$a - b = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

گزینه ۴ ۷۰

راه اول: می‌توان از تساوی $a = ab + b$ را بر حسب b به‌دست آورده و در کل عبارت جایگذاری کرد. می‌توان از راه دوم رفت!

راه دوم:

$$ab = a - b \Rightarrow a = ab + b, a - ab = b$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{ab+b}{b} + \frac{a-ab}{a} - ab$$

$$\frac{ab}{b} + \frac{b}{b} + \frac{a}{a} - \frac{ab}{a} - ab = a + 1 + 1 - b - ab = 2$$

گزینه ۳ ۷۱

$$\left(\frac{x}{y} - 1\right) = \left(\frac{x}{y} + 1\right) \times A$$

$$A = \frac{\frac{x}{y} - 1}{\frac{x}{y} + 1} = \frac{x - y}{x + y}$$

گزینه ۳ ۷۲

طرفین عبارت را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + a^2 + c^2 - 2ac + b^2 + c^2 - 2bc = 0$$

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$$

یادآوری: جمع سه عبارت نامنفی صفر شده پس تک‌تک آنها صفر است.

$$a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$a - c = 0 \Rightarrow a = c$$

در عبارت داده شده به جای تمام حروف، حرف a را قرار دهیم. مقدار هر کسر ۱ می‌شود:

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{a+c}{b+a} + \frac{b+c}{a+c} = 1 + 1 + 1 = 3$$

گزینه ۲ ۷۳

چند تست بعدی را می‌توان به نوعی تحت سر فصل «تجزیه کسر» قرار داد. در اینجا کلمه‌ی تجزیه اصلاً به معنی تبدیل به ضرب نیست؛ بلکه برعکس؛ کسر اصلی به حاصل چند کسر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2} &= \\ &= \frac{a(x-2)(x+2) + bx(x+2) + cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{ax^2 - 2ax + bx^2 + 2bx + cx^2 - 2cx}{x(x^2 - 4)}$$

$$= \frac{(a+b+c)x^2 + (2b-2c)x - 2a}{x^3 - 4x} = \frac{\lambda}{x^3 - 4x}$$

می‌دانیم صورت‌ها باید متحد باشند، $\lambda = (0)x^2 + (0)x + \lambda$

$$\begin{aligned} & \frac{(x+3)(x-2)+4}{x-2} \div \left(\frac{2x-4+2}{x-2} \right) \\ &= \frac{x^2+x-6+4}{x-2} \times \frac{x-2}{2x-2} = \frac{x^2+x-2}{x-2} \times \frac{x-2}{2(x-1)} \\ &= \frac{(x+2)(x-1)}{2(x-1)} = \frac{x+2}{2} = \frac{x}{2} + 1 \end{aligned}$$

گزینه ۷۷

ابتدا A و B را ساده می‌کنم:

$$A = x - \frac{\Delta x - 6}{x} = \frac{x^2 - \Delta x + 6}{x} = \frac{(x-2)(x-3)}{x}$$

$$B = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x-2}{x^2}$$

$$\frac{A}{B} = A \div B = \frac{(x-2)(x-3)}{x} \times \frac{x^2}{x-2} = x(x-3)$$

$$\frac{A}{B} + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

گزینه ۷۸

$$A = \frac{2x}{1-x^2} \Rightarrow \frac{1}{A} = \frac{1-x^2}{2x}$$

$$1 + \frac{1}{A^2} = 1 + \left(\frac{1-x^2}{2x} \right)^2 = 1 + \frac{(1-x^2)^2}{4x^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 1 + x^4 - 2x^2}{4x^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2} = \left(\frac{x^2+1}{2x} \right)^2 = \frac{1}{B^2}$$

گزینه ۷۹

$$\frac{\lambda x^r y^f - 1 \cdot x^r y^f}{-2x^r y^r} = \frac{\lambda x^r y^f}{-2x^r y^r} + \frac{-1 \cdot x^r y^f}{-2x^r y^r} = -\frac{\lambda}{2} xy + \frac{\Delta y}{2}$$

گزینه ۸۰

$$\begin{aligned} \frac{A^r B^r - B^r A^r + A^r B^r}{A^r B^r} &= \frac{A^r B^r}{A^r B^r} - \frac{B^r A^r}{B^r A^r} + \frac{A^r B^r}{A^r B^r} \\ &= B - A + 1 = x^2 + 1 - x - 2x^2 - 1 + x + 1 = -x^2 + 1 \end{aligned}$$

گزینه ۸۱

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)^{\Delta} - (x-1)^r}{(1-x)^r} &= \frac{(x-1)^{\Delta}}{(1-x)^r} - \frac{(x-1)^r}{(1-x)^r} \\ &= -(x-1)^r + 1 = -x^r + 2x - 1 + 1 = -x^r + 2x \end{aligned}$$

گزینه ۸۲

$$\begin{array}{r} x^r + x^r \quad | \quad x-1 \\ -(x^r - x^r) \quad | \quad x^r + 2x + 2 \\ \hline 2x^r \\ -(2x^r - 2x) \\ \hline 2x \\ -(2x - 2) \\ \hline 2 \end{array}$$

پس:

$$\begin{cases} -4a = 8 \Rightarrow a = -2 \\ 2b - 2c = 0 \Rightarrow b = c \\ a + b + c = 0 \Rightarrow -2 + b + b = 0 \Rightarrow b = 1 = c \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^r + b^r + c^r = 4 + 1 + 1 = 6$$

گزینه ۷۴

ابتدا کسر سمت چپ را چنین ساده می‌کنیم:

$$1 + \frac{-x+4}{x^2-2x+2} = A + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \Rightarrow A = 1$$

و ادامه، مشابه قبلی است:

$$\frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} = \frac{B(x-2) + C(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{Bx - 2B + Cx - C}{x^2 - 2x + 2}$$

$$= \frac{(B+C)x - 2B - C}{x^2 - 2x + 2} = \frac{-x+4}{x^2 - 2x + 2}$$

$$\begin{cases} B+C = -1 \\ -2B-C = 4 \end{cases} \Rightarrow B = -3, C = +2$$

$$A - \frac{B}{2} - \frac{C}{3} = 1 + \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{6+9-4}{6} = \frac{11}{6}$$

گزینه ۷۵

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$= \frac{A(x^2+x-2) + Bx + 2B + C(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+2)}$$

صورت را مرتب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & Ax^2 + Ax - 2A + Bx + 2B + C(x^2 - 2x + 1) \\ &= (A+C)x^2 + (A+B-2C)x + 2B+C-2A \end{aligned}$$

این عبارت باید با صورت کسر سمت چپ تساوی؛ یعنی $2x+1$ متحد باشد:

$$(A+C)x^2 + (A+B-2C)x + 2B+C-2A \equiv 2x+1$$

$$\begin{cases} A+C = 0 \Rightarrow A = -C \\ A+B-2C = 2 \Rightarrow -C+B-2C = 2 \Rightarrow \\ -2A+2B+C = 1 \Rightarrow 2C+2B+C = 1 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B-2C = 2 \\ 2B+3C = 1 \end{cases} \Rightarrow B = 1$$

گزینه ۷۶

$$\left((x+3) + \frac{4}{x-2} \right) \div \left(2 + \frac{2}{x-2} \right)$$

گزینه ۸۳

راه اول: تقسیم معمولی

راه دوم: $x-1=0$ آنگاه $x=1$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$(1)^5 - (1)^4 + 2(1)^2 - 3(1) - 5 = -6$$

گزینه ۸۴

راه اول: تقسیم

راه دوم: $x^2 - x + 1 = 0$ پس $x^2 = x - 1$ و جایگذاری می‌کنیم:

$$x^4 - x + 2 = (x^2)^2 - x + 2 = (x-1)^2 - x + 2$$

$$= x^2 - 2x + 1 - x + 2 = x^2 - 3x + 3$$

دوباره به جای x^2 مقدار $x-1$ را قرار می‌دهیم:

$$R = x - 1 - 3x + 3 = 2 - 2x = -2x + 2$$

این راه طولانی شد. شاید تقسیم راه کوتاه‌تری باشد؛ امتحان کنید.

گزینه ۸۵

راه اول: امتحان گزینه‌ها.

راه دوم: تجزیه عبارت:

$$2x^4 + x^3 - 4x - 2 = x^3(2x+1) - 2(2x+1)$$

$$= (2x+1)(x^3 - 2)$$

بر $x^3 - 2, 2x+1$ بخش پذیر است.

گزینه ۸۶

راه اول: تقسیم

راه دوم: جایگذاری $a^2 = b^2$ در عبارت، a را متغیر اصلی

می‌گیریم:

$$a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2$$

$$R = (a^2)^3 - b^6 + (a^2)^2 - b^4 + 1$$

$$= b^6 - b^6 + b^4 - b^4 + 1 = 1$$

راه سوم: واضح است $a^6 - b^6$ و $a^4 - b^4$ بر $a^2 - b^2$

بخش پذیرند. (اگر واضح نیست این عبارت را تجزیه کنید!)

یعنی باقی‌مانده این‌ها صفر است؛ پس باقی‌مانده نهایی همان عدد

۱ است. (این راه بهتر بود!)

گزینه ۸۷

قسمت درجه ۳ عبارت $(x+1)^3$ است که باید با

$ax^3 + bx^2 + cx + 1$ متحد باشد:

$$ax^3 + bx^2 + cx + 1 = (x+1)^3$$

$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$a=1, b=3, c=3$$

$$\Rightarrow a+b+c=1+3+3=7$$

گزینه ۸۸

عبارت $x^3 + 8$ بر $x^2 - 2x + 4$ بخش پذیر است. چرا؟ چون:

$$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

پس باقی‌مانده در این قسمت صفر است.

قسمت بعدی $x^2 + 3x + 1$ است که باقی‌مانده‌اش بر $x^2 - 2x + 4$

رابطه دست می‌آوریم.

$$x^2 + 3x + 1 \overline{) x^2 - 2x + 4}$$

$$\underline{x^2 - 2x + 4}$$

$$5x - 3$$

پس باقی‌مانده همان $5x - 3$ است.

گزینه ۸۹

$$x^{24} + 1 = (x^8)^3 + 1 = (x^8 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)$$

پس بر $x^8 + 1$ بخش پذیر است.

گزینه ۹۰

قرار می‌دهیم $x^3 + 2 = 0$ ، مقدار $x^3 = -2$ را در عبارت

جایگذاری می‌کنیم تا باقی‌مانده به دست آید:

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

$$\Rightarrow (x^3)^2 + x^3 x^2 + x^3 \cdot x + x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

$$R = (-2)^2 + (-2)x^2 + (-2)x - 2 + 2x^2 + 2x + 3$$

$$= 4 - 2x^2 - 2x - 2 + 2x^2 + 2x + 3 = 5$$

گزینه ۹۱

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \overline{) x - b}$$

$$\underline{ x^2 + c}$$

$$b + c$$

$$(x-b)(x^2+c) + b+c = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

$$x^3 - bx^2 + cx - bc + b+c = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

$$x^3 - bx^2 + cx + (b+c-bc) = x^3 + 3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow b=3$$

گزینه ۹۲

تجزیه می‌کنیم:

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$$

$$= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

گزینه ۹۳

$$x+k=0 \Rightarrow x=-k$$

$$R \Rightarrow x^2 + x - k = (-k)^2 + (-k) - k$$

$$= k^2 - 2k$$

و طبق فرض $R = 3k$

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + b = 0 &\Rightarrow x^2 = 3x - b \\ x^2 + ax + 1 &= x(x^2) + ax + 1 \\ &= x(3x - b) + ax + 1 = 3x^2 - bx + ax + 1 \\ &= 3(3x - b) - bx + ax + 1 \\ &= 9x - 3b - bx + ax + 1 \\ &= (a - b + 9)x + 1 - 3b = 0 \end{aligned}$$

این عبارت باید به ازای هر x صفر باشد؛ پس:

$$1 - 3b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{3} \quad a = -\frac{26}{3}$$

$$a - b + 9 = 0 \rightarrow a - \frac{1}{3} + 9 = 0$$

$$a + 2b = \frac{-26}{3} + \frac{2}{3} = \frac{-24}{3} = -8$$

گزینه ۱۰۰

از اینجا به بعد تست‌ها سفت‌تر می‌شوند و تیپ اونوا کمی دیرستانی‌تره!
(منظورم متوسطه ۲ است.)

x^{100} بر $x^2 - 3x + 2$ باقی‌مانده‌اش درجه ۱ است؛ پس باقی‌مانده را $ax + b$ فرض می‌کنیم. از طرفی:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

تساوی زیر را ببینید تا بقیه‌ی راه‌حل را توضیح دهم:

$$x^{100} = (x^2 - 3x + 2) \times Q(x) + ax + b$$

$$\Rightarrow x^{100} = (x - 1)(x - 2)Q(x) + ax + b$$

حالا مقادیر $x = 1$ و $x = 2$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$x = 1 \Rightarrow 1^{100} = 0 + a + b \Rightarrow a + b = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow 2^{100} = 0 + 2a + b \Rightarrow 2a + b = 2^{100}$$

از حل دستگاه به دست می‌آید: $a = 2^{100} - 1$ و $b = 2 - 2^{100}$ و با جایگذاری این‌ها در عبارت $ax + b$ باقی‌مانده به دست می‌آید:

$$R = (2^{100} - 1)x + 2 - 2^{100}$$

و با مرتب کردن R داریم:

$$R = 2^{100}(x - 1) - (x - 2)$$

که همان گزینه (۲) صحیح است.

تست سفتی بود! کشتی گرفتن با یک تست سفت، لذت بخش‌تره، مثل بازی فوتبال ایران و برزیله!!

گزینه ۱۰۱

$$x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$$

$$x^4 - 3x^2 + 2x - 10$$

$$R = (x^2)^2 - 3x^2 + 2x - 10 = (-2)^2 - 3(-2) + 2x - 10$$

$$= 4 + 6 + 2x - 10 \Rightarrow R = 2x$$

$$k^2 - 2k = 3k \Rightarrow k^2 - 5k = 0$$

$$k(k - 5) = 0 \Rightarrow k = 0 \quad \text{و} \quad k = 5$$

گزینه ۹۴

همان عملیات و نکات قبل را استفاده می‌کنیم:

$$x + y = 0 \Rightarrow x = -y$$

$$R = x^3 + x^2y - 2x - y$$

$$\Rightarrow R = (-y)^3 + (-y)^2y - 2(-y) - y$$

$$= -y^3 + y^3 + 2y - y = y$$

گزینه ۹۵

حاصل عبارت به ازای $x = -2$ باید صفر شود (بخش پذیر) و به ازای $x = -1$ برابر ۳ شود:

$$x = -1 \Rightarrow a(-1)^4 - b(-1)^3 + 4(-1)^2 - (-1) + 1 = 3$$

$$\Rightarrow a + b + 4 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow a + b = -3$$

دیگر نیاز به جایگذاری $x = -2$ نیست؛ زیرا صورت سؤال، $a + b$ را خواسته است.

گزینه ۹۶

$$(x - 2)(x^2 + 1) = x^3 + x - 2x^2 - 2$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x - 2 \quad | \quad x + 2 \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ -4x^2 + x - 2 \\ \underline{-4x^2 - 8x} \\ 9x - 2 \\ \underline{9x + 18} \\ -20 \end{array}$$

$$-4x^2 + x - 2$$

$$\underline{-4x^2 - 8x}$$

$$9x - 2$$

$$\underline{9x + 18}$$

$$-20$$

$$1x^2 - 4x + 9 \Rightarrow 1 - 4 + 9 = 6$$

گزینه ۹۷

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \mathbb{R} = (-1)^{51} + 51 = 50$$

گزینه ۹۸

ابتدا باید عبارت را به شکل زیر ساده کنیم:

$$\frac{n+3}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} + \frac{4}{n-1} + \frac{4}{n-1}$$

حالا واضح است که $n - 1$ باید مقسوم علیه صحیحی از ۴ باشد. یعنی ± 1 یا ± 2 یا ۴ یعنی ۶ جواب برای n یافت می‌شود!

گزینه ۹۹

بخش‌پذیر است، یعنی باقی‌مانده صفر است.

گزینه ۱۰۲

بر $x^2 - 1$ بخش پذیر است یعنی هم برابر $x - 1$ بخش پذیر است و هم بر $x + 1$ ، یعنی اگر $x = 1$ یا $x = -1$ را جایگذاری کنیم عبارت صفر می شود و دو معادله دو مجهولی به دست می آید و با حل آن $a = -1$ ، $b = -2$ به دست می آید.

گزینه ۱۰۳

یک عامل $(x - 2)$ است؛ یعنی بر $x - 2$ بخش پذیر است؛ پس اگر $x = 2$ را جایگذاری کنیم، باید حاصل صفر شود!

$$\begin{aligned} x - 2 = 0 &\Rightarrow x = 2 \\ x^3 + ax - 6 &\Rightarrow R(2)^3 + a \times 2 - 6 \\ &= 2a + 2 \Rightarrow R = 0 \Rightarrow 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

پس عبارت اصلی $x^3 - x - 6$ بوده است و آن را بر $x - 2$ تقسیم می کنیم:

$$\begin{array}{r} x^3 - x - 6 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ 2x^2 - x - 6 \\ \underline{-(2x^2 - 4x)} \\ 3x - 6 \\ \underline{-(3x - 6)} \\ 0 \end{array}$$

گزینه ۱۰۴

در گزینه های (۱)، (۳) و (۴) عامل $(x - 1)^3$ وجود دارد:

$$\begin{aligned} (1) \quad &(x - 1)^3(x + 5) \\ (3) \quad &(x - 1)^2(x - 1)(x + 1) = (x - 1)^3(x + 1) \\ (4) \quad &(x - 1)^2(x - 1)(x + 6) = (x - 1)^3(x + 6) \end{aligned}$$

گزینه (۳) بر $x + 1$ بخش پذیر است و باقی مانده اش صفر است؛ می ماند (۱) و (۴). حالا باید دید کدام یک از این دو، بر $x + 1$ باقی مانده اش (-40) می شود. باید در هر دو $x = -1$ را جایگذاری کنیم:

$$\begin{aligned} (1) \quad &x = -1 \rightarrow (-2)^3 \times 4 = -32 \\ (4) \quad &x = -1 \Rightarrow (-2)^2 \times (-10) = -40. \end{aligned}$$

گزینه ۱۰۵

راه اول: از فاکتورگیری و تجزیه استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} -x^{101} + x^{100} - x^{99} - \dots + x^2 - x + 1 &= \\ = -x^{100}(x - 1) - \dots - (x - 1) &= \\ = (x - 1)(-x^{100} - x^{99} - \dots - x^2 - 1) & \end{aligned}$$

بر $(x - 1)$ بخش پذیر است.

راه دوم: امتحان گزینه ها: $x = 1$ را قرار دهیم، حاصل صفر می شود؛ پس بر $(x - 1)$ بخش پذیر است.

گزینه ۱۰۶

$$\begin{aligned} x - a = 0 &\Rightarrow x = a \\ vx^f + (f - va)x^r - fax^2 - x + 2a - b &\stackrel{x=a}{=} \\ R = va^f + (f - va)a^r - faa^2 - a + 2a - b &= 0 \\ \Rightarrow va^f + fa^r - va^f - fa^r + a - b &= 0 \\ \Rightarrow a - b = 0 &\Rightarrow a = b \\ 2a + 2b = 2b + 2b & \end{aligned}$$

یعنی ۵ برابر b است.

گزینه ۱۰۷

$$\begin{aligned} x + y = 0 &\Rightarrow x = -y \\ (x + y + 1)^n - x^n - y^n - 1 & \\ R = (-y + y + 1)^n - (-y)^n - y^n - 1 & \\ = 1 - (-y)^n - y^n - 1 = -(-y)^n - y^n & \end{aligned}$$

واضح است اگر n فرد باشد، حاصل باقی مانده صفر می شود.

گزینه ۱۰۸

$$\begin{aligned} x - \alpha - \beta = 0 &\Rightarrow x = \alpha + \beta \\ (x - \alpha)(x - \beta) + k & \\ \Rightarrow R = (\alpha + \beta - \alpha)(\alpha + \beta - \beta) + k = 0 & \\ \Rightarrow \beta\alpha + k = 0 &\Rightarrow k = -\alpha\beta \end{aligned}$$

گزینه ۱۰۹

گزینه ها را بررسی می کنیم:

$$\begin{aligned} (1) \quad x - y = 0 &\Rightarrow x = y \Rightarrow R = x^n + x^n \neq 0 \\ (2) \quad x + y = 0 &\Rightarrow x = -y \Rightarrow R = (-y)^n + y^n = 0 \\ &\text{چون } n \text{ فرد است، صفر می شود.} \\ (3) \quad x - y = 0 &\Rightarrow x = y \Rightarrow R = (y)^n - y^n = 0 \end{aligned}$$

همواره درست است.

$$(4) \quad x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow R = (-y)^n - y^n = 0$$

زمانی که n زوج است، درست است؛ پس فقط گزینه (۱) درست نیست که بخش پذیر نیست!

گزینه ۱۱۰

با حوصله بررسی می کنیم:

$$\begin{aligned} x - 3 = 0 &\Rightarrow x = 3 \\ R = (x - 3)^{2m} + (x - 2)^m - 1 & \\ = (3 - 3)^{2m} + (3 - 2)^m - 1 = 1^m - 1 = 0 & \end{aligned}$$

همواره بر $x - 3$ بخش پذیر است.

(ب) بر $x - 2$:

$$(x+2)(x+7)(x+3)(x+6)(x+4)(x+5)+2x-1$$

$$(x^2+9x+14)(x^2+9x+18)(x^2+9x+20)+2x-1$$

حالا برای محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی $x^2+9x+20$ ، کافی است:

$$x^2+9x+20=0 \Rightarrow x^2+9x=-20$$

را قرار دهیم:

$$(-20+14)(-20+18)(-20+20)+2x-1$$

$$0+2x-1=2x-1 \Rightarrow \text{باقی‌مانده}$$

می‌توانستیم از همان اول بگوییم از آنجایی که در عبارت تجزیه‌شده‌ی اولی سه جمله‌ای $x^2+9x+20$ وجود دارد؛ پس، باقی‌مانده‌ی حاصل ضرب آن‌ها بر $x^2+9x+20$ ، صفر است که با $2x-1$ جمع می‌شود و باقی‌مانده $2x-1$ می‌شود.

۱۱۴ گزینه ۲

به جای تقسیم کردن مستقیم، عبارت را به شکل زیر دسته‌بندی و تجزیه می‌کنیم. با عدد ۱۵ هم کاری نداشته باشید!

$$x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+\dots+x^2+x+15$$

$$x^{14}(x+1)+x^{13}(x+1)+\dots+x^2(x+1)+(x+1)+14$$

$$(x+1)(x^{14}+x^{13}+x^{12}+\dots+1)+14$$

واضح است که در تقسیم این عبارت بر $x+1$ خارج قسمت $x^{14}+x^{13}+x^{12}+\dots+1$ است و باقی‌مانده ۱۴ است.

مجموع ضرایب خارج قسمت، مجموع ۸ تا عدد ۱ است؛ یعنی ۸.

۱۱۵ گزینه ۳

هم در صورت و هم در مخرج R وجود دارد. با افزایش خیلی زیاد R ، از مقادیر عددی در صورت و مخرج صرف‌نظر می‌کنیم:

$$x = \frac{6R-2}{2R-3} \approx \frac{6R}{2R} = \frac{6}{2} = 3$$

۱۱۶ گزینه ۲

برای دیدن زیاد شدن k یا کم شدنش باید کاری کنیم مقدار x فقط در صورت یا مخرج دیده شود؛ پس صورت و مخرج را بر x تقسیم می‌کنیم:

$$k = \frac{\frac{10x}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{2x}{x}} = \frac{10}{1+2} = \frac{10}{3}$$

حالا با افزایش مقدار x ، حاصل $\frac{10}{3}$ کم می‌شود و کم شدن $\frac{10}{3}+2$

باعث زیاد شدن k می‌شود!

۱۱۷ گزینه ۲

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

از صورت سؤال:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$(2-3)^{2m} + (2-2)^m - 1 = (-1)^{2m} + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

پس بر $x-2$ هم بخش‌پذیر است.

اگر چندجمله‌ای بر $x-3$ و بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد حتماً بر ضرب آن‌ها نیز بخش‌پذیر است.

$$(x-3)(x-2) = x^2 - 5x + 6$$

نکته: اگر $p(x)$ بر $x-a, x-b, x-c$ و ... بخش‌پذیر باشد، بر حاصل ضرب آن‌ها نیز بخش‌پذیر است.

۱۱۱ گزینه ۲

$$(x-2)(x+1) = x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 2$$

با جایگذاری در عبارت $x^6 + mx^2 - nx$ باقی‌مانده بدست می‌آید و متحد با $2x+4$ قرار می‌دهیم.

$$(x^2)^3 + m(x^2) - nx = (x+2)^3 + m(x+2) - nx$$

$$= (x+2)^2(x+2) + mx + 2m - nx$$

$$= (x^2 + 4x + 4)(x+2) + mx + 2m - nx$$

$$= (5x+6)(x+2) + mx + 2m - nx$$

$$= 5x^2 + 10x + 6x + 12 + mx + 2m - nx$$

$$= 5x + 10 + 16x + 12 + mx + 2m - nx$$

$$= (21+m-n)x + 22 + 2m \equiv 2x + 4$$

$$2m + 22 = 4 \Rightarrow 2m = -18 \Rightarrow m = -9$$

$$21 + m - n = 2 \Rightarrow 21 - 9 - n = 2 \Rightarrow n = 10$$

$$n - m = 10 - (-9) = 19$$

۱۱۲ گزینه ۴

باید $x^3 = x$ را جایگذاری کنیم:

$$x^{81} = (x^3)^{27} = x^{27} = (x^3)^9 = x^9 = (x^3)^3 = x^3 = x$$

$$x^{61} = (x^3)^{13} x^2 = x^{13} x^2 = x^{15} = (x^3)^5$$

$$= x^5 = x^3 \times x^2 = x \times x^2$$

$$= x^3 = x$$

$$x^{21} = (x^3)^7 = x^7 = (x^3)^2 x = x^2 \times x = x^3 = x$$

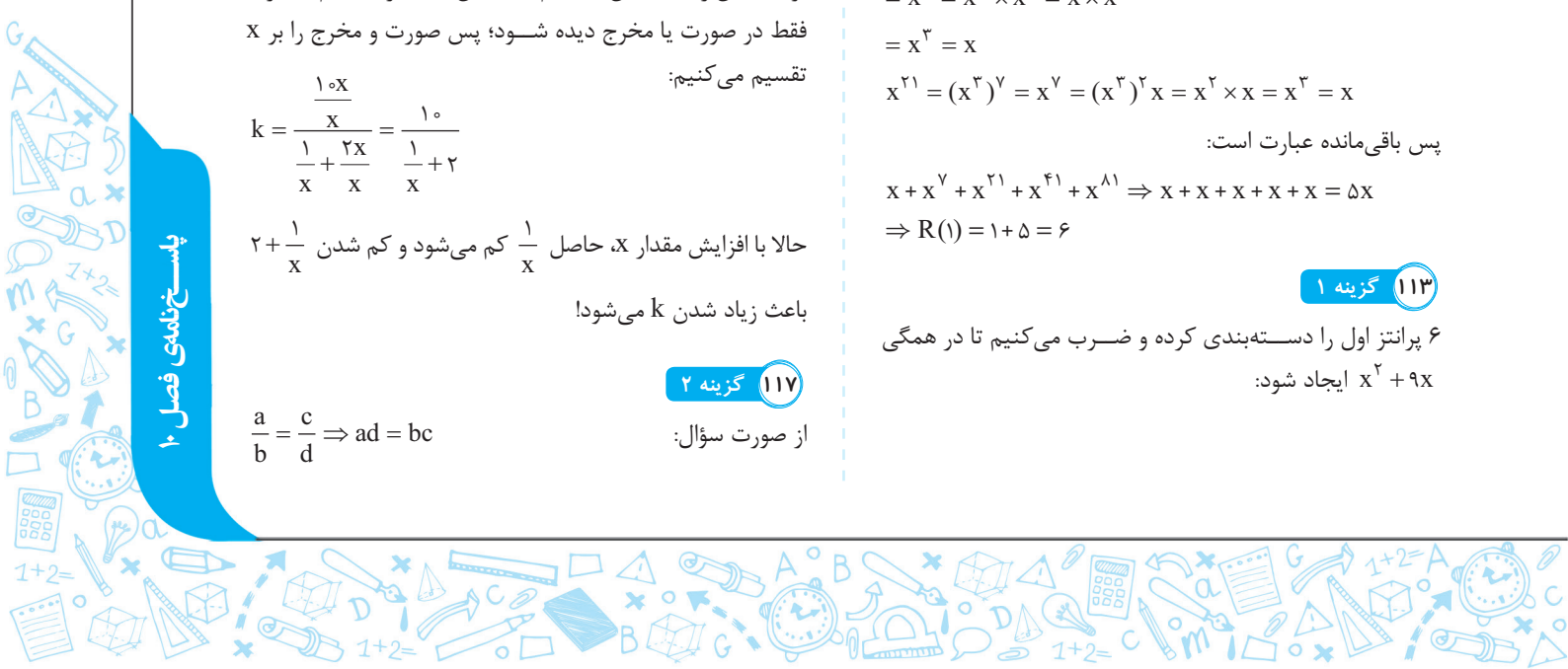
پس باقی‌مانده عبارت است:

$$x + x^7 + x^{21} + x^{61} + x^{81} \Rightarrow x + x + x + x + x = 5x$$

$$\Rightarrow R(1) = 1 + 5 = 6$$

۱۱۳ گزینه ۱

۶ پیرانتز اول را دسته‌بندی کرده و ضرب می‌کنیم تا در همگی x^2+9x ایجاد شود:



و در عبارت جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{(a+c)d}{(b+d)c} = \frac{ad+cd}{bc+dc} = \frac{bc+cd}{bc+cd} = 1$$

۱۱۸ گزینه ۱

یک حل زیبا و حرفه‌ای هدیه‌ی من به شماست!

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = 5 \Rightarrow \frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 5$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 7, \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 6$$

به همین ترتیب:

حالا عبارت $\frac{1}{z} + \frac{2}{y} + \frac{3}{x}$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$= 6 + 5 + 5 = 16$$

۱۱۹ گزینه ۳

$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$$

کمی دقت کنید به این تساوی:

واضح است اگر $a=c$ باشد، دو طرف تساوی هر دو کسر برابر با ۱ می‌شوند و با هم مساویند.

پس گزینه (۱) یا (۳) درست است.

اگر $a+b+c+d=0$ باشد، نتیجه می‌شود:

$$a+b = -(c+d)$$

$$b+c = -(a+d)$$

و این دو عبارت را در کسر سمت چپی قرار می‌دهیم:

$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{-(c+d)}{-(a+d)} = \frac{c+d}{a+d}$$

پس گزینه (۳) درست است.

۱۲۰ گزینه ۴

$$x = \frac{2}{y} \Rightarrow xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$$

از طرفی $y = \frac{1}{1-x}$ ، پس:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow 2 - 2x = x \Rightarrow 3x = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{x} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3 \Rightarrow y = 3$$

۱۲۱ گزینه ۲

این سؤال هم فیلی جالب است!

$$ax^f = by^f = cz^f = x^f + y^f + z^f$$

$$a = \frac{x^f + y^f + z^f}{x^f}, b = \frac{x^f + y^f + z^f}{y^f}, c = \frac{x^f + y^f + z^f}{z^f}$$

کمی به قیافه‌ی این سه نفر (!) نگاه کنید. اگر این ۳ تا را برعکس کنیم و جمع بزنیم، حاصل ۱ می‌شود:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{x^f}{x^f + y^f + z^f} + \frac{y^f}{x^f + y^f + z^f}$$

$$+ \frac{z^f}{x^f + y^f + z^f} = \frac{x^f + y^f + z^f}{x^f + y^f + z^f} = 1$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow \frac{ab+ac+bc}{abc} = 1$$

$$\Rightarrow ab+ac+bc = abc$$

۱۲۲ گزینه ۳

$$\frac{xz+1}{xz-1} = \frac{y+2}{-y+2} \Rightarrow$$

$$(xz+1)(-y+2) = (xz-1)(y+2)$$

$$\Rightarrow -xyz + 2xz - y + 2 = xyz + 2xz - y - 2$$

$$\Rightarrow 2xyz = 4 \Rightarrow xyz = 2$$

حالا عبارت $\frac{1+z}{xy+2}$ را باید ساده کنیم. کافی است صورت و

مخرج را در Z ضرب کنیم، گرچه ضرب صورت را انجام نمی‌دهیم!

$$\frac{z(1+z)}{z(xy+2)} = \frac{z(1+z)}{xyz+2z} = \frac{z(1+z)}{2(1+z)} = \frac{z}{2}$$

۱۲۳ گزینه ۳

$$\frac{2x-3y}{x+2y} = 3 \Rightarrow 2x+6y = 2x-3y$$

$$x = -9y$$

و این را در عبارت مورد نظر جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{2x+y}{2x+10y} = \frac{-18y+y}{-27y+10y} = \frac{-17y}{-17y} = 1$$

طراح سؤال پی فکر کرده! به جای ۱ در گزینه (۳) مقدار $\frac{2}{3}$ را گذاشته است! واقعاً که!

۱۲۴ گزینه ۴

کل مسافت طی شده تقسیم بر کل زمان، میانگین سرعت کل است. اگر مسافت طی شده در رفت را d فرض کنیم، زمان رفت

$\frac{d}{x}$ و زمان برگشت $\frac{d}{y}$ است پس داریم:

$$V = \frac{d+d}{\frac{d}{x} + \frac{d}{y}} = \frac{2d}{d\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)} = \frac{2xy}{y+x}$$

گزینه ۳ ۱۲۹

$$\frac{a}{b+c-d} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3a = 4b + 4c - 4d$$

$$3a = 4(b+c) - 4d \quad (1)$$

$$\frac{2a+b+c}{b+c} = \frac{2}{5} \Rightarrow 10a + 5b + 5c = 2b + 2c$$

$$\Rightarrow 10a = -2(b+c)$$

$$b+c = -5a \quad (2)$$

(۲) را در (۱) قرار می‌دهیم:

$$3a = 4(-5a) - 4d \Rightarrow 3a = -20a - 4d$$

$$\Rightarrow 4d = -23a \Rightarrow \frac{d}{a} = -\frac{23}{4}$$

گزینه ۲ ۱۲۵

دو کسر را طرفین وسطین می‌کنیم

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b}$$

$$\Rightarrow ab + b^2 + bc = ac - bc + c^2$$

$$\Rightarrow ab - ac = c^2 - b^2$$

$$\Rightarrow a(b-c) = (c-b)(c+b)$$

$$\Rightarrow -a = b+c$$

حالا این را در سومی جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{-a+b+c}{a} = \frac{-a-a}{a} = \frac{-2a}{a} = -2$$

گزینه ۴ ۱۲۶

$$\frac{p + \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} + q} = 17 \Rightarrow \frac{p^2q + p}{q + pq^2} = 17$$

$$\Rightarrow \frac{p(pq+1)}{q(1+pq)} = 17 \Rightarrow \frac{p}{q} = 17$$

دو عدد صحیح مثبت (یعنی طبیعی) که جمع آن‌ها کمتر از ۱۰۰ باشد و نسبت آن‌ها ۱۷ باشد:

$$q=1 \rightarrow p=17$$

$$q=2 \rightarrow p=34, \dots$$

$$q=5 \rightarrow p=85 \quad 85+5 < 100$$

پس ۵ مقدار مختلف می‌توانند بگیرند.

گزینه ۱ ۱۲۷

$$\frac{x-y}{z-y} = -10 \Rightarrow x-y = 10y - 10z$$

$$\Rightarrow x = 11y - 10z$$

جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{x-z}{y-z} = \frac{11y - 10z - z}{y-z} = \frac{11y - 11z}{y-z}$$

$$= \frac{11(y-z)}{y-z} = 11$$

خدا رو شکر که جواب داد و گرنه نمی‌دانستم باید چه کنم!!

گزینه ۱ ۱۲۸

یک نکته‌ی خیلی قشنگ گفته بودم که الان یادم آمد!

فکرش را هم نمی‌کنید این سؤال با چه نکته‌ای حل می‌شود!

اگر صورت کسرهایی که با هم مساویند، با هم جمع کنیم و در صورت بنویسیم و جمع مخرج‌ها را در مخرج بنویسیم، کسری به دست می‌آید که با کسر اصلی مساوی است!

$$K = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c+a+c+a+b} = \frac{1}{2}$$

پس فقط k می‌تواند $\frac{1}{2}$ باشد؛ یعنی فقط یک مقدار می‌تواند باشد.

A series of horizontal dotted lines for writing.