مجموعه کتاب‌های علامه حلی

ریاضی دهم

• سیدمحمدصالح ارشاد

• حجت انصاری

شناسنامه کتاب

سرشناسه	:	ارشاد، سیدمحمدصالح، ۱۳۶۵
عنوان و نام پدیدآور	:	ریاضی دهم
مشخصات نشر	:	تهران: انتشارات حلی، ۱۳۹۶
مشخصات ظاهری	:	۲۹×۲۲ س م. ۱: مصور (رنگی)، جدول (رنگی)، نمودار (رنگی)؛ ص ۳۶۰
فروست	:	مجموعه کتاب علامه‌حلی
شابک	:	۳-۲۰۶-۴۹۶-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی	:	فیپای مختصر
شناسه افزوده	:	محمدی، حسام
شناسه افزوده	:	انصاری، حجت، ۱۳۵۹
شماره کتابشناسی ملی	:	۷۳۶۱۹۶۰

علامه حلی

عنوان کتاب	ریاضی دهم
ناشر	انتشارات حلی
مؤلفان	سیدمحمدصالح ارشاد، حجت انصاری
ویراستار علمی	حسام محمدی
مسئول هماهنگی	سمیه فاطمی
طراح جلد	سعید شمس
تصویرساز	محمدحسین صفدریان
صفحه‌آرا	راضیه سادات فرهانیان، عاطفه قلیچ‌خانی
رسام	عاطفه قلیچ‌خانی
سال چاپ	۱۳۹۹
نوبت چاپ	اول
شمارگان	۲۰۰۰ جلد
قیمت	۸۹۰۰۰ تومان
شماره شابک	۳-۲۰۶-۴۹۶-۶۰۰-۹۷۸
چاپ و صحافی	واژه‌پرداز اندیشه

تهران، خیابان انقلاب، میدان فردوسی، ابتدای کوچه براتی، پلاک ۱۶ واحد ۱۴
تلفن دفتر مرکزی: ۵-۶۶۷۴۴۳۸۴

فهرست مطالب

فصل ۱
مجموعه، الگو و دنباله

درسنامه ۹
تمرین ۳۳
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۴۵

فصل ۲
مثلثات

درسنامه ۵۷
تمرین ۸۲
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۹۳

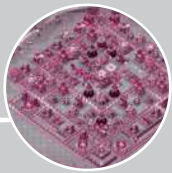
فصل ۳
توان‌های گویا و ...

درسنامه ۱۰۵
تمرین ۱۲۲
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۳۵

فصل ۴
معادله و نامعادله

درسنامه ۱۴۵
تمرین ۱۷۹
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۸۸

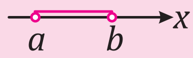
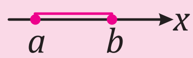
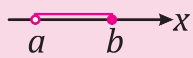
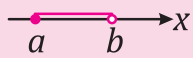
فصل ۵
تابع
درسنامه ۲۰۱
تمرین ۲۳۶
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۴۷



فصل ۶
شمارش بدون شمردن
درسنامه ۲۶۵
تمرین ۲۸۸
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۹۵

فصل ۷
آمار و احتمال
درسنامه ۳۰۵
تمرین ۳۲۶
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۳۳۲

پاسخ‌ها ۳۴۳

نامگذاری بازه	نمایش هندسی	نمایش با نماد بازه	نمایش به‌صورت مجموعه
بازهٔ باز		(a,b)	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
بازه‌ی بسته		$[a,b]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \le x \le b\}$
بازهٔ نیم‌باز		$(a,b]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \le b\}$
بازهٔ نیم‌باز		$[a,b)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \le x < b\}$
بازهٔ باز		$(a,+\infty)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x\}$
بازهٔ نیم‌باز		$[a,+\infty)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \le x\}$
بازهٔ باز		$(-\infty,a)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$
بازهٔ نیم‌باز		$(-\infty,a]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \le a\}$
بازهٔ باز		$(-\infty,+\infty)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

۱ ـ هر جا از نماد پرانتز استفاده شود، یعنی آن عدد عضو بازه نیست.

۲ ـ هر جا از نماد کروشه استفاده شود، یعنی آن عدد عضو بازه است.

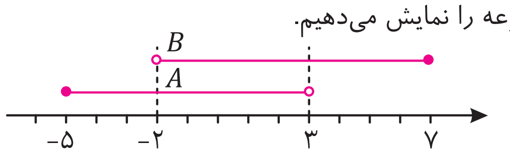
۳ ـ ازآنجاکه $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) یا $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) عدد نیستند و تنها نمادهایی برای نمایش مفهوم بی‌نهایت‌اند؛ برای آن‌ها از پرانتز استفاده می‌کنیم.

۴ ـ بازهٔ $(-\infty \,,\, +\infty)$ همان کل مجموعه اعداد حقیقی است که آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم.

یک بازه، نمادی برای نمایش یک مجموعه است. درنتیجه بازه‌ها مجموعه‌اند. پس اعمال مجموعه‌ها روی آن‌ها قابل انجام است. یعنی می‌توان دو بازه را اجتماع یا اشتراک گرفت و یا بازه‌ای را از بازه‌ای دیگر کم کرد. برای این کار بهتر است از محور اعداد حقیقی کمک بگیرید.

مثال ۲. اگر $A=[-۵\,,\,۳)$ و $B=(-۲\,,\,۷]$ باشد، مجموعه‌های $A\cap B$, $A\cup B$ و $A-B$ را به‌دست آورید.

پاسخ: ابتدا بر روی محور اعداد حقیقی این دو مجموعه را نمایش می‌دهیم.



اشتراک این دو بازه، مجموعه‌ای است که اعضای آن هم در A و هم در B هستند.

$A\cap B=(-۲\,,\,۳)$

اجتماع این دو بازه، مجموعه‌ای است که اعضای آن حداقل در یکی از دو مجموعه A یا B وجود دارند.

$A\cup B=[-۵\,,\,۷]$

اگر از بازهٔ مجموعهٔ A آن اعدادی که در اشتراک با مجموعهٔ B هستند حذف کنیم $A-B$ به دست می‌آید.

$A-B=[-۵\,,\,-۲]$

◄ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجوعهٔ متناهی: اگر تعداد عضوهای یک مجموعه را بتوان با یک عدد حسابی بیان کرد، آن مجموعه را مجموعهٔ متناهی می‌گوییم.

مجموعه نامتناهی: اگر تعداد عضوهای یک مجموعه را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد، آن مجموعه را مجموعهٔ نامتناهی می‌گوییم.

مثال ۳. متناهی و نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۵

ب) مجموعهٔ مورچه‌های روی کره زمین

ج) بازهٔ [۱ , ۵]

پاسخ: الف) نامتناهی است. زیرا هر عدد صحیح کمتر از ۵ یک عدد صحیح کوچک‌تر از خود دارد. مثلاً قبل از ۰، ۱- است و قبل از ۱-، ۲- و همین روند ادامه دارد. درنتیجه نمی‌توان گفت مثلاً این مجموعه ۱۰۰۰ عضوی است!

ب) متناهی است. درست است که تعداد مورچه‌ها خیلی زیاد هستند و ما نمی‌توانیم همه آن‌ها را پیدا کنیم و بشماریم! اما به‌هرحال تعداد مشخصی مورچه وجود دارد. مثلاً 10^{10} مورچه؛ اما ما نمی‌دانیم دقیقاً چند مورچه روی کره زمین است.

ج) نامتناهی است. ازآنجاکه بین هر دو عدد گویا بی‌نهایت عدد گویا و بین هر دو عدد گنگ و هر عدد گویا و گنگ بی‌نهایت عدد گویا و گنگ است؛ تعداد اعضای هر بازه‌ای از اعداد حقیقی نامتناهی است.

جالب است بدانی

از نتایج مهم ریاضی در قرن نوزدهم و بیستم و از موفقیت‌های جالب‌توجه نظریه مجموعه‌ها این بوده است که ریاضیدانان این دوره برای اولین بار توانستند به‌طور دقیق در مورد مفهوم نامتناهی صحبت کنند. این در حالی است که بسیاری از ریاضیدانان این حوزه از ریاضی را نامفهوم می‌دانستند و آن را مورد انتقادات جدی قرار می‌دادند.

به‌عنوان مثالی از کارهای انجام شده در مورد نامتناهی‌ها به مقایسه اندازه چهار مجموعه نامتناهی (اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد گویا و اعداد حقیقی) می‌پردازیم.

کانتور نشان داد که اندازه سه مجموعه اعداد طبیعی، صحیح و گویا برابر است. این حرف شاید کمی عجیب به نظر برسد. چگونه اندازه مجموعه اعداد صحیح و مجموعه اعداد طبیعی برابر است، درحالی‌که مجموعه اعداد طبیعی زیرمجموعه مطلق مجموعه اعداد صحیح است (یعنی عضوی در اعداد صحیح هست که در اعداد طبیعی نیست و نه بالعکس)؟ اما کانتور مدعی است که به‌سادگی نمی‌توان در مورد نامتناهی‌ها قضاوت کرد. در مورد استدلال و روش کانتور در فصل پنجم بیشتر توضیح خواهیم داد.

اما سؤال بسیار مهمی که در دوره کانتور مطرح شد این بود که حالا که اندازه مجموعه اعداد طبیعی، صحیح و گویا برابر است، آیا مجموعه‌ای بزرگ‌تر از این مجموعه‌ها وجود دارد؟ کانتور نشان داد که اندازه مجموعه اعداد حقیقی از مجموعه اعداد طبیعی بزرگ‌تر است. اینکه آیا مجموعه‌ای با اندازه‌ای مابین اعداد حقیقی و اعداد طبیعی وجود دارد یا خیر از مسائل باز و جذاب ریاضی معاصر است.

شاید بین دو واژهٔ ناشمارا و نامتناهی همیشه دچار تردید شده‌اید. خوب است بدانید که مجموعه‌های شمارا و ناشمارا با مجموعه‌های متناهی و نامتناهی دارای تفاوت‌اند.

مجموعه‌های شمارا: اگر به ازای هر عضو از مجموعهٔ اعداد طبیعی دقیقاً ۱ عضو از مجموعه‌ای موجود بوده که بین آن‌ها تناظر وجود داشته باشد، آن مجموعه را شمارا گوییم. درواقع اگر بتوان به کمک اعداد طبیعی عضوهای یک مجموعه را شماره‌گذاری کرد آن مجموعه شمارا بوده و در غیر این صورت ناشمارا است.

جالب است بدانی

کانتور در سال ۱۸۴۵ در سن‌پترزبورگ به‌دنیا آمد. وی در ۱۸۶۰ با نمره بسیار عالی از دبیرستان فارغ‌التحصیل شد و آموزگارانش به مهارت‌های استثنایی وی در ریاضیات، به‌ویژه در مثلثات، اشاره داشتند. کانتور در ۱۸۶۲ وارد دانشگاه زوریخ شد سپس در دانشگاه برلین به مطالعات خود ادامه داد. در سال ۱۸۶۷ کانتور رساله دکتری خود را، که درباره نظریه اعداد بود، در دانشگاه برلین به پایان رساند. پس از یک دوره کوتاه تدریس در مدرسه‌ای دخترانه در برلین، شغلی در دانشگاه هاله پذیرفت و تمام دوره کاری خود را در همین دانشگاه گذراند.

فسفرسوزان

نشان دهید مجموعه اعداد صحیح شمارا هستند.

◄ عملیات مجموعه‌ها

یادآوری: در سال گذشته با عملیات اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه آشنا شده‌ایم.

در زیر این اعمال را یادآوری می‌کنیم.

هر عملگر مجموعه، یک مجموعهٔ جدید ایجاد می‌کند که به‌صورت زیر قابل تعریف‌اند:

اجتماع $(A\bigcup B)$: مجموعه‌ای است که هر عضو آن در حداقل یکی از مجموعه‌های A یا B است.

اشتراک $(A\bigcap B)$: مجموعه است که هر عضو آن هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B است.

تفاضل $A-B$: مجموعهٔ همه عضوهایی از A است که در B عضویت ندارد.

مجموعهٔ جهانی (مادر)

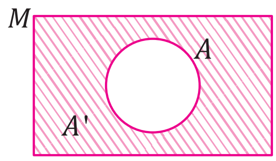
مجموعه‌ای که همه مجموعه‌های موردبحث، زیرمجموعهٔ آن هستند مجموعه جهانی یا مادر نامیده و معمولاً با نماد M و U نمایش داده می‌شود.

مثلاً وقتی در مورد هر زیرمجموعه اعداد حقیقی صحبت می‌کنیم مجموعه مرجع ما معمولاً اعداد حقیقی‌اند.

متمم یک مجموعه

مجموعه‌ای که شامل عضوهای مجموعه مرجع به‌غیراز مجموعه A باشد را متمم مجموعه A گوییم و با A' نمایش می‌دهیم:

$$A'=\{x\in M \mid x\notin A\}$$



$$A'=M-A$$

مثال ۴. اگر مجموعه اعداد طبیعی ۱ رقمی مجموعه مرجع باشد و آن را M بنامیم

و $A=\{x\in M \mid x=۲k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$، $B=\{۲\ ,\ ۳\ ,\ ۵\ ,\ ۷\}$ و $C=\{x\in M \mid x=۳k, k\in\mathbb{Z}\}$ مجموعه‌های زیر را به کمک اعضا نمایش دهید.

الف) A' ب) B' ج) C' د) $A\bigcap C'$

پاسخ:

الف) $A=\{۲,۴,۶,۸\}\rightarrow A'=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$

ب) $B=\{۲,۳,۵,۷\}\rightarrow B'=\{۱,۴,۶,۸,۹\}$

ج) $C=\{۳,۶,۹\}\rightarrow C'=\{۱,۲,۴,۵,۷,۸\}$

د) $A\cap C'=\{۲,۴,۸\}$

مثال ۵. هریک از مجموعه‌های زیر مساوی چه مجموعه‌ای هستند؟

الف) $(A')'$ ب) M' ج) ϕ'

پاسخ:

الف) $(A')'=A$ ب) $M'=\phi$ ج) $\phi'=M$

جالب است بدانی

کل ریاضی در قالب مجموعه‌ها

یکی از تحولات اساسی ریاضیات در دوره معاصر با ارائه نظریه مجموعه‌ها توسط گئورگ کانتور در اواخر قرن نوزدهم رخ داد. مفهوم مجموعه و احکام آن نقش بسیار بنیادی در ریاضیات دارد، به‌نحوی‌که نظریه مجموعه‌ها پایه و اساس ریاضیات معاصر محسوب می‌شود.

در ابتدای قرن بیستم تلاش برای فرو کاستن کل ریاضیات به نظریه مجموعه‌ها آغاز شد. منظور از فرو کاستن در اینجا این است که بتوان کلیه احکام ریاضی در شاخه‌های مختلف مثل هندسه، جبر و آنالیز را از اصول نظریه مجموعه‌ها استخراج کرد. برای درک بهتر این موضوع یکی از شیوه‌های فرو کاستن اعداد طبیعی به مجموعه‌ها در زیر نمایش داده شده است:

$$۰\triangleq\varnothing$$

$$۱\triangleq\{\varnothing\}$$

$$۲\triangleq\{\{\varnothing\},\varnothing\}$$

$$۳\triangleq\{\{\{\varnothing\},\varnothing\},\{\varnothing\},\varnothing\}$$

و به همین ترتیب سایر اعداد بر اساس مجموعه‌ها تعریف می‌شوند. با اندکی دقت در تعریف اعداد داده شده می‌توان الگویی برای تعریف "جمع با ۱" پیدا کرد:

$$\boldsymbol{n}+۱\triangleq\boldsymbol{n}\cup\{\boldsymbol{n}\}$$

که در آن n یک عدد طبیعی است. به‌این‌ترتیب اعداد چیزی نیستند به‌جز مجموعه‌هایی که بر اساس تعریف جمع ساخته می‌شوند. ارنست زرملو، ریاضیدان آلمانی در قرن بیستم، به‌طور موفقیت‌آمیز نظریه مجموعه‌ها را اصل موضوعی کرد و درنهایت، جوزپه پئانو، ریاضیدان ایتالیایی، کل جبر و آنالیز را با تکیه به چند اصل موضوع متکی بر نظریه مجموعه‌ها بازسازی کرد. از نکات مهم این اصول موضوعه این است که این اصول هیچ تناقضی به بار نمی‌آورند و می‌توان نشان داد که اصل موضوع‌ها باهم سازگاری دارند. به‌این‌ترتیب این ادعا که همچنان موردتوجه ریاضیدانان است مطرح شد که تنها چیزی که از ریاضیات لازم داریم نظریه مجموعه‌هاست و سایر شاخه‌ها ریاضی بر آن تکیه دارند.

جبر مجموعه‌ها (محتوای تکمیلی)

با رسم نمودارهای وِن مناسب درستی روابط زیر بین مجموعه‌ها را می‌توان نشان دهید و آن‌ها را به خاطر بسپارید.

۱) (خاصیت شرکت‌پذیری مجموعه‌ها)
$$\begin{cases}(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)\\(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\end{cases}$$

۲) (خاصیت توزیع‌پذیری)
$$\begin{cases}A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\\A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\end{cases}$$

۳) (خاصیت جذب)
$$\begin{cases}A\cap(A\cup B)=A\\A\cup(A\cap B)=A\end{cases}$$

۴) $A-B=A\cap B'$

تذکر: رابطه ۴ نشان می‌دهد هر تفاضلی را می‌توان به اشتراک و هر اشتراکی را می‌توان به تفاضل تبدیل کرد.

به عنوان مثال:
$$\begin{cases}A-B'=A\cap(B')'=A\cap B\\A'-B=A'\cap B'\end{cases}$$

تذکر: رابطه ۴ نشان می‌دهد هرگاه بخواهیم اشتراک دو مجموعه را حساب کنیم می‌توانیم هریک از مجموعه‌ها را از متمم مجموعهٔ دیگر کم کنیم:
$$\begin{cases}A\cap B=A-B'\\A\cap B=B-A'\end{cases}$$

۵) (قوانین دمورگان)
$$\begin{cases}(A\cap B)'=A'\cup B'\\(A\cup B)'=A'\cap B'\end{cases}$$

مثال ۶. به کمک جبر مجموعه‌ها، تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'=B-A$

ب) $[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A'\cup B')]=B$

ج) $[A'\cap(A'\cup B)]\cup A=M$

پاسخ:

الف) $A-B=A\cap B'\ \Rightarrow\ (A-B)'=(A\cap B')'\ \Rightarrow\ A'\cup(B')'=A'\cup B$

$$\Rightarrow\ (A'\cup B)\cap(A\cup B)=B\cup(\underbrace{A'\cap A}_{\phi})=B\cup\phi=B$$

$$\Rightarrow\ (A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'=B\cap A'=B-(A')'=B-A$$

ب)
$$\begin{cases}A\cap(A'\cup B)=(\underbrace{A\cap A'}_{\phi})\cup(A\cap B)=\phi\cup(A\cap B)=A\cap B\\[2ex]B\cap(A'\cup B')=(B\cap A')\cup(\underbrace{B\cap B'}_{\phi})=(B\cap A')\cup\phi=B\cap A'\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ (A\cap B)\cup(B\cap A')=B\cap(\underbrace{A\cup A'}_{M})=B\cap M=B$$

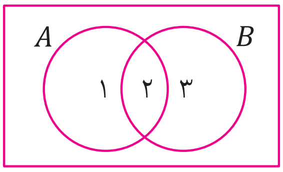
ج) $A'\cap(A'\cup B)=A'\ \Rightarrow\ [A'\cap(A'\cup B)]\cup A=A'\cup A=M$

◄ شمارش اعضای مجموعه‌ها

تعداد اعضای مجموعه A را با نماد $n(A)$ یا $|A|$ نمایش می‌دهند.

۱) شمارش اعضای اجتماع دو مجموعه

برای شمارش اعضای اجتماع دو مجموعه کافی است تعداد عضوهای دو مجموعه را جمع کنیم و سپس تعداد اعضای مشترک دو مجموعه را کم کنیم؛ زیرا هر عضو مشترک دو بار شمارش شده است:



$$n(A\bigcup B)=\underbrace{n(A)}_{۱,۲}+\underbrace{n(B)}_{۲,۳}-\underbrace{n(A\bigcap B)}_{۲}=۱,۲,۳$$

برای ۳ مجموعه A و B و C داریم:

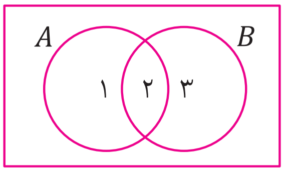
$$n(A\bigcup B\bigcup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\bigcap B)-n(A\bigcap C)-n(B\bigcap C)+n(A\bigcap B\bigcap C)$$

پاسخگوباش

به کمک نمودار وِن درستی رابطه بالا را نشان دهید.

۲) شمارش اعضای تفاضل دو مجموعه

برای شمارش تعداد عضوهای مجموعهٔ $A-B$ کافی است تعداد عضوهای مجموعه A را منهای تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\bigcap B$ کنیم:



$$n(A-B)=n(A)-n(A\bigcap B)$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$۱,۲\;-\;۲\rightarrow ۱$$

مثال ۷. اگر A مجموعه‌ای ۱۰ عضوی و B مجموعه‌ای ۱۲ عضوی باشد و اجتماع آن‌ها ۱۷ عضو داشته باشد، تعداد اعضای مجموعه‌های زیر را حساب کنید.

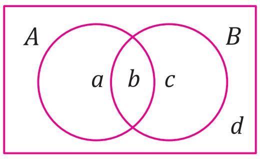
الف) $A-B$ ب) $A'\bigcap B$

پاسخ:

الف) $n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)$

$\Rightarrow ۱۷=۱۰+۱۲-n(A\bigcap B) \Rightarrow n(A\bigcap B)=۵$

$\Rightarrow n(A-B)=n(A)-n(A\bigcap B)=۱۰-۵=۵$



ب) برای محاسبه تعداد اعضای این مجموعه از نمودار وِن کمک می‌گیریم:
می‌توان تعداد اعضای مناطق a، b، c و d را به دست آورد.
می‌دانیم $n(A\bigcap B)=۵$ است. درنتیجه منطقه b، ۵ عضوی است.

از طرفی چون B دارای ۱۲ عضو است درنتیجه منطقه c، ۷ عضوی است. A' شامل مناطق c و d است که اشتراک آن با مجموعه B منطقه C است. درنتیجه مجموعه $A'\bigcap B$ دارای ۷ عضو است.

تذکر: در قسمت قبل نشان دادیم، $A'\bigcap B=B\bigcap A'=B-A$ است.

درنتیجه:

$$n(B-A)=n(B)-n(A\bigcap B)=۱۲-۵=۷$$

مثال ۸. یک مدرسه ۱۱۷ دانش‌آموز دارد. از این ۱۱۷ نفر، ۵۵ نفر علاقه‌مند به فوتبال، ۴۶ نفر علاقه‌مند به والیبال و ۴۰ نفر هم به بسکتبال علاقه‌مند هستند. ۱۱ نفر هم به فوتبال و هم به والیبال، ۱۰ نفر هم به فوتبال و هم به بسکتبال و ۱۳ نفر هم به والیبال و هم به بسکتبال علاقه دارند. اگر بدانیم ۴ نفر به، هیچ ورزشی علاقه‌ای ندارند:

الف) چند نفر به هر سه ورزش علاقه‌مندند؟

ب) چند نفر فقط به فوتبال علاقه‌مندند؟

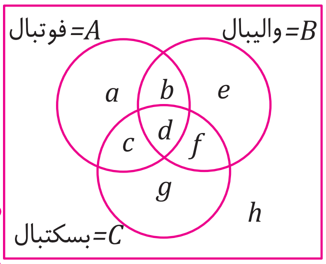
ج) چند نفر حداقل به ۲ ورزش علاقه‌مندند؟

پاسخ: الف) به کمک رابطهٔ زیر می‌توان تعداد اعضای منطقه d که همان کسانی هستند که به هر سه ورزش علاقه‌مند هستند را به دست آورد:

$$n(A\bigcup B\bigcup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\bigcap B)-n(A\bigcap C)-n(B\bigcap C)+n(A\bigcap B\bigcap C)$$

$$۱۱۷-۴=۵۵+۴۶+۴۰-۱۱-۱۰-۱۳+n(A\bigcap B\bigcap C)\ \Rightarrow\ n(A\bigcap B\bigcap C)=۶$$

ب) با توجه به نمودار وِن زیر، تعداد اعضایی که عضو مناطق a، e، g هستند فقط به یک ورزش علاقه‌مند می‌باشند. اشتراک مجموعه A و B دو منطقه b و d بوده که دارای n عضو است. ازآنجاکه منطقه d دارای ۶ عضو است پس منطقه b، ۵ عضوی می‌باشد. اشتراک مجموعه‌های A و C دو منطقهٔ d و c بوده که دارای ۱۰ عضو است. ازآنجاکه منطقه d، ۶ عضوی است پس منطقه c، ۴ عضوی می‌باشد. اشتراک مجموعه‌های B و C دو منطقهٔ d و f است از آن‌جا که منطقه d، ۶ عضوی است. منطقه f، ۷ عضوی است. بنابراین:



$$n(A)=n(a)+n(b)+n(c)+n(d)$$

$$۵۵=n(a)+۵+۴+۶\ \Rightarrow n(a)=\ ۴۰$$

ج) کافی است مجموع تعداد اعضای b، c، d، f را جمع کنیم:

$$n(b)+n(c)+n(d)+n(f)=۵+۴+۶+۷=۲۲$$

◄ دنباله‌ها

تعریف: به هر تعداد از اعداد که آن‌ها را پشت سر هم نوشته باشیم، یک دنباله از اعداد گوییم. هر عددی که در یک دنباله قرار گرفته باشد، یک جملهٔ آن دنباله نام دارد. مثلاً اعداد روبه‌رو یک دنباله را تشکیل می‌دهند: ۱، ۳، ۵، ۷

در دنبالهٔ فوق اعداد ۱، ۳، ۵ و ۷ به ترتیب جملات اول، دوم، سوم و چهارم دنباله نامیده می‌شوند.

مفهوم دنباله به‌عنوان یک ماشین: یک دنباله - اعداد درواقع دستگاهی است که ورودی‌های آن اعداد طبیعی و خروجی‌های آن اعداد حقیقی‌اند. حال اگر خروجی‌های این دستگاه را به ترتیب پشت سر هم قرا دهیم، به عدد نخست نوشته شده جملهٔ اول دنباله، به عدد دوم نوشته شده جملهٔ دوم دنباله و به‌طورکلی به عدد n اُم حاصل از این دنباله، جملهٔ nاُم این دنباله گوییم.

مثال ۹. فرض کنید دستگاهی داریم که مجموعهٔ اعداد طبیعی را به ترتیب از ۱ دریافت و عملیات خاصی بر روی آن انجام می‌دهد. این دستگاه عدد دریافتی را به توان ۲ می‌رساند و یک واحد از آن کم می‌کند و سپس عدد حاصل را به‌عنوان خروجی به ما تحویل می‌دهد.

الف) ۵ خروجی اول این دستگاه را به‌عنوان دنباله‌ای از اعداد بنویسید.

ب) جمله‌های ۱۵اُم و ۱۶اُم این دنبالهٔ اعداد را مشخص کنید.

★ ۱۰۸. مجموع سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی ۳۵ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۰۰۰ است. این دنباله را مشخص کنید.

۱۰۹. اگر در یک دنباله هندسی داشته باشیم $\frac{a_4 + a_5}{a_3} = 6$، قدرنسبت دنباله را حساب کنید.

۱۱۰. در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی a_n، اگر $a_3 - a_1 = 6$ و $a_5 - a_1 = 30$ باشد، جملهٔ عمومی دنباله را بنویسید.

★ ۱۱۱. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع دو جملهٔ اول و چهارم ۵۶ و مجموع دو جملهٔ دوم و سوم ۲۴ است. قدرنسبت دنباله را حساب کنید.

۱۱۲. توپی را از ارتفاع ۲۵۰ سانتی‌متری زمین رها می‌کنیم. می‌دانیم این توپ پس از برخورد به زمین مقداری از انرژی خود را از دست می‌دهد و به اندازهٔ ۶۰ درصد ارتفاع قبلی بالا می‌آید:

الف) این توپ پس از ۴ بار برخورد به زمین تا چه ارتفاعی بالا خواهد آمد؟

ب) این توپ پس از حداقل چند بار برخورد با زمین تا ارتفاعی کم‌تر از ۲۰ سانتی‌متری زمین بالا می‌آید؟

۱۱۳. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع جملات اول و سوم $\frac{4}{5}$ مجموع جملات دوم و چهارم است. قدرنسبت دنباله را حساب کنید.

۱۱۴. اعداد $3, b, c$ به ترتیب تشکیل دنباله حسابی و اعداد $3, b-1, c+1$ به ترتیب تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. قدرنسبت دنباله حسابی چند برابر قدرنسبت دنباله هندسی است؟

۱۱۵. جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، جمله چندم دنباله حسابی صفر است؟

۱۱۶. جملات دوم و سوم از یک دنباله حسابی به ترتیب ۱۴ و ۱۶ است. مجموع سه جمله‌ای اول از یک دنباله هندسی با مجموع سه جمله اول این دنباله حسابی برابر است. اگر قدرنسبت هر دو دنباله برابر باشند، جمله اول دنباله هندسی را بیابید.

۱۱۷. جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنبالهٔ حسابی، می‌توانند سه جمله متوالی از دنبالهٔ هندسی باشند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

★ ۱۱۸. اگر a، b و c جملات پنجم، هفدهم و سی‌وهفتم یک دنباله حسابی و یک دنباله هندسی باشند، ثابت کنید:
$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = 1$.

مجموع جملات دنباله هندسی (محتوای تکمیلی)

۱۱۹. مجموع چند جمله از دنبالهٔ هندسی $6, -12, 24, \ldots$ برابر ۱۰۲۶ است؟

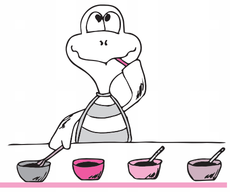
۱۲۰. اگر جمله سوم یک دنباله هندسی ۱۸ و قدرنسبت آن ۳ باشد، مجموع چند جمله آن ۷۲۸ است؟

۱۲۱. حاصل عبارت $(1+x+x^2+\ldots+x^8)(1-x+x^2-\ldots+x^8)$ را به ازای $x=\sqrt{2}$ به دست آورید.

۱۲۲. بین دو عدد ۲ و $16\sqrt{2}$ شش عدد چنان درج کردیم که هشت عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند. مجموع این ۸ عدد را به دست آورید.

۱۲۳. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع سه جملهٔ اول ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول ۱۵۳ است. جمله اول چند برابر جملهٔ پنجم است؟

۱۲۴. نسبت مجموع شش جمله اول یک دنباله هندسی به مجموع سه جمله اول همان دنباله ۲۸ است. قدرنسبت دنباله را بیابید.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

مجموعه‌ها

۱. اگر $A=\{x|x\in \mathbb{R},۲\le x<۶\}$ و $A\cap B=(۳,۶)$ و $A\cup B=[۲,۷]$ باشند، مجموعهٔ B کدام است؟

۱) $(۳,۷)$ ۲) $(۳,۷]$ ۳) $[۳,۷]$ ۴) $(۲,۷)$

۲. اگر $A=[۱,۴]$ و $B=(-۲,۳]$ و $C=[۱,۵)$ حاصل $B\cup(A\cap C)$ کدام است؟

۱) $(-۲,۳]$ ۲) $(-۲,۴]$ ۳) $(-۲,۵]$ ۴) $[۱,۳]$

۳. عدد ۳ در بازهٔ $(m+۱,۲m+۵)$ قرار دارد . حدود m کدام است؟

۱) $m>-۴$ ۲) $-۱<m<۲$ ۳) $m<۲$ ۴) $-۴<m<۲$

۴. مجموعهٔ $\{x\mid x\in \mathbb{R},x^۲\le ۴,x-۱>-۲\}$ بیانگر کدام بازه است؟

۱) $[-۲,۲]$ ۲) $[۰,۲]$ ۳) $(-۱,۲]$ ۴) $[-۱,۲]$

۵. اگر $A=[-۳,۴)$ و $B=\{x|-x\in A\}$ آنگاه مجموعهٔ $A-B$ کدام بازه است؟

۱) $(۳,۴)$ ۲) $(-۴,-۳)$ ۳) $(-۳,۳)$ ۴) $(-۴,۴)$

۶. اگر $A\cap B=\{۱,۲\}$ و $A\cap B'=\{۳,۴\}$ باشند،آنگاه مجموعهٔ A کدام است؟

۱) $\{۱,۲\}$ ۲) $\{۳,۴\}$ ۳) ϕ ۴) $\{۱,۲,۳,۴\}$

۷. اگر $A\subset B$ و $C'\subset B'$ باشد، آنگاه:

۱) $A\subset C$ ۲) $C\subset A$ ۳) $C\subset B$ ۴) $B\subset A$

۸. اگر A و B دو مجموعهٔ غیر تهی باشند، حاصل مجموعهٔ زیر برابر کدام است؟

$$\left[A\cup(A\cap B)\right]'\cap\left[(B\cap A)\cup(B-A)\right]$$

۱) $A'-B'$ ۲) $(A-B)'$ ۳) A' ۴) $\varnothing$

۹. اگر A و B دو مجموعه باشند، $A'-B$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) $A-B'$ ۲) $A'\cap B$ ۳) $A\cup B'$ ۴) $B'-A$

۱۰. اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، حاصل $(A'-B)'$ برابر کدام است؟

۱) $A\cup B'$ ۲) $A'\cup B$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

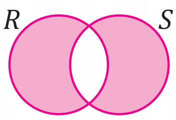
۱۱. اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعهٔ $A'\cap\left[(B\cup A)\cup B\right]$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) $A'\cap B$ ۲) $A\cap B'$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A'\cap B'$

۱۲. مجموعهٔ $(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'$ برابر کدام است؟

۱) $B-A$ ۲) B ۳) $\varnothing$ ۴) A'

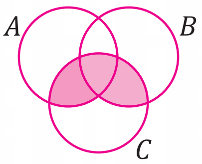
۱۳. قسمت هاشور زده در شکل مقابل تصویر ون مربوط به کدام مجموعه نیست؟



۱) $(R\cup S)\cap(S'\cup R')$ ۲) $(R\cup S)-(R\cap S)$

۳) $(R-S)\cup(S-R)$ ۴) $(R-S)\cap(S-R)$

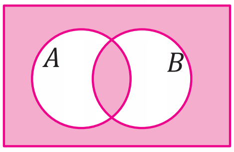
۱۴. قسمت هاشور خوردهٔ شکل زیر، تصویر ون کدام مجموعه است؟



۱) $A\cap(B\cup C)$ ۲) $(A\cap B)\cup C$

۳) $A\cup(B\cap C)$ ۴) $(A\cup B)\cap C$

۱۵. در شکل مقابل، مجموعهٔ سایه زده شده، با کدام مجموعه برابر است؟ (M مجموعهٔ مرجع است)



۱) $(A\cap B')\cup(B\cap A')$ ۲) $(A-B)\cup(B-A)$

۳) $(A\cup B)-(B\cap A)$ ۴) $(A\cup B')\cap(B\cup A')$

۱۶. اگر $A\cup B=A-B$ باشد، آنگاه کدام درست است؟

۱) $B=M$ ۲) $B=\varnothing$ ۳) $A=M$ ۴) $A=\varnothing$

۱۷. اگر A و B دو مجموعهٔ غیر تهی باشند و $A-B=B-A$ آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $A=B$ ۲) $A=B'$ ۳) $A\subseteq B'$ ۴) $B'\subseteq A$

۱۸. اگر به ازای هر دو مجموعهٔ A و B داشته باشیم $(A\cup B)\subset(A\cap B')$ آنگاه همواره:

۱) $A=B'$ ۲) $A=\varnothing$ ۳) $B=\varnothing$ ۴) $A'=B$

۱۹. اگر $A\cup(B-A)=B$ باشد، آنگاه:

۱) $A\subseteq B$ ۲) $B\subseteq A$ ۳) $A=\varnothing$ ۴) $B=\varnothing$

۲۰. A و B دو مجموعهٔ غیر تهی هستند. اگر $(A\cup B)\subset B$ باشد، آنگاه:

۱) $B\subset A$ ۲) $A\cap B=\varnothing$ ۳) $A\cap B=B$ ۴) $A\cap B=A$

۲۱. اگر $B'\subseteq A$ باشد، آنگاه حاصل $\left[(A'-B)\cup(B\cap A)\right]$ کدام است؟

۱) $A\cap B$ ۲) B ۳) A ۴) $A\cup B$

۲۲. A و B و C مجموعه‌هایی هستند که $A\subset(B\cap C)$ است. حاصل $(A-B)\cup(A\cap C)$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) A ۳) $B-C$ ۴) $C-B$

۲۳. اگر $A-B'=B'$ باشد، آنگاه مجموعهٔ $B-(A\cap B)$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) A ۲) A' ۳) B' ۴) B

۲۴. اگر $A\cap B'=A\cap C'$ باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $A\neq\varnothing$ ۲) $B=C=\varnothing$ ۳) $A'\cap B'=A'\cap C'$ ۴) $A'\cup B'=A'\cup C'$

۲۵. اگر A و B دو مجموعهٔ غیر تهی باشند و $(B-A)\cup A=A$ باشد، کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) $B\subset B-A$ ۲) $A-B=\varnothing$ ۳) $B-A=\varnothing$ ۴) $B-A=B$

۲۶. مجموعهٔ A دارای ۱۴ و مجموعهٔ B دارای ۱۷ و مجموعهٔ $A\cap B$ دارای ۵ عضو است. مجموعهٔ $(A-B)\cup(B-A)$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۲۷. ۲۷ نفر از ساکنین یک روستا در دو کارگاه ریسندگی و بافندگی ثبت نام کرده‌اند. اگر ۱۵ نفر در کارگاه ریسندگی و ۱۹ نفر در بافندگی شرکت کرده باشند، چند نفر فقط ریسندگی را انتخاب کرده‌اند؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲۸. ۲۳ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس در رشتهٔ فوتبال، و ۲۹ نفر در رشتهٔ والیبال فعالیت می‌کنند. اگر ۴۰ نفر در فوتبال یا والیبال فعالیت کنند، چند نفر در هر دو رشته بازی می‌کنند؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۷

۲۹. اگر مجموعه‌های A و B چنان باشند که $(A-B)\bigcup(B-A)$ دارای ۱۷ عضو و A دارای ۱۲ عضو باشد، آنگاه مجموعهٔ B چند عضو می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۳۰. اگر A و B و C به ترتیب دارای ۱۲، ۱۹ و ۲۷ عضو و $A\bigcap B\bigcap C$ نیز دارای ۷ عضو باشد، آنگاه $(A\bigcup B\bigcup C)-(A\bigcap B\bigcap C)$ حداکثر دارای چند عضو است؟

۱) ۵۱ ۲) ۴۴ ۳) ۳۷ ۴) ۳۰

۳۱. اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشد،چه تعداد از مجموعه‌های $A-B$ و $A\bigcap B$ و $A\bigcup B$ الزاماً نامتناهی هستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۲. فرض کنید $M=\{x\in \mathrm{Q} \mid ۰<x<۱\}$ یعنی مجموعه اعداد گویای بین صفر ویک باشد. چه تعداد از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟

الف) $A\subseteq M$، مجموعه اعدادی که مخرج آن‌ها از ۱۰ کوچک‌تر باشد.

ب) $B\subseteq M$، مجموعه اعدادی که اختلاف صورتو مخرج آن‌ها از ۱۰ کمتر باشد.

پ) $C=\{x \mid ۲x\in M, ۳x\notin M\}$

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۳۳. اگر مجموعه A متناهی و مجموعه‌های B و C نامتناهی باشند، در مورد هر یک از مجموعه‌ها ی $A\bigcap(B\bigcup C)$ و $B-(A\bigcap C)$، به ترتیب از راست به چپ، از نظر متاهی بودن با نبودن چه می‌توان گفت؟

۱) متناهی – متناهی ۲) نامتناهی – نامتناهی ۳) متناهی – نامتناهی ۴) نامتناهی – متناهی

۳۴. اگر $A\subseteq B$ و B مجموعه‌ای نامتناهی باشند، چه تعداد از مجموعه‌های زیر قطعاً متناهی است؟

$A-B, B-A, A\bigcup B, A\bigcap B$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵. اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام مجموعه نامتناهی است؟

۱) $A\bigcap B$ ۲) $B-A$ ۳) $A-B$ ۴) $(A-B)-A$

۳۶. اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند، کدام یک از گزینه‌های زیر درباره این دو مجموعه نادرست است؟

۱) مجموعه $A\bigcap B$ ممکن است نامتناهی باشد. ۲) مجموعه $A\bigcup B$ لزوماً نامتناهی است.

۳) مجموعه $A\bigcap B$ ممکن است متناهی باشد. ۴) مجموعه $A-B$ لزوماً نامتناهی است.

۳۷. کدام گزینه همواره درست است؟

۱) اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند، $A\cap B$ نیز نامتناهی است.

۲) اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند، $A-B$ نیز نامتناهی است.

۳) اگر A و B دو مجموعه باشند که $A\subseteq B$ و B نامتناهی باشد، A نیز نامتناهی است.

۴) اگر A و B دو مجموعه باشند که $A\subseteq B$ و A نامتناهی باشد، B نیز نامتناهی است.

دنباله‌ها

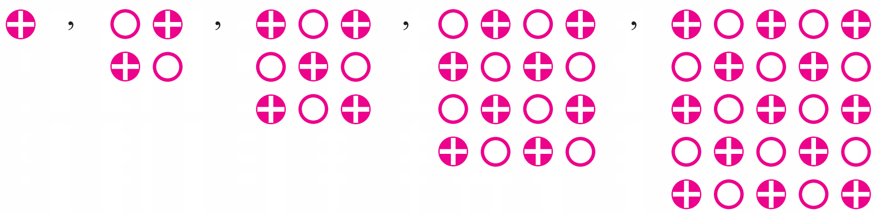
۳۸. رابطهٔ $U_{n+2}=U_{n+1}+U_n$ بین جملات یک دنباله برقرار است. اگر $U_1=U_2=1$ جمله نهم دنباله کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۴ ۳) ۳۳ ۴) ۳۲

۳۹. جملهٔ $2n+1$ ام یک دنباله به‌صورت $\dfrac{4n^2+1}{2n-1}$ است، مقدار جملهٔ سوم این دنباله کدام است؟

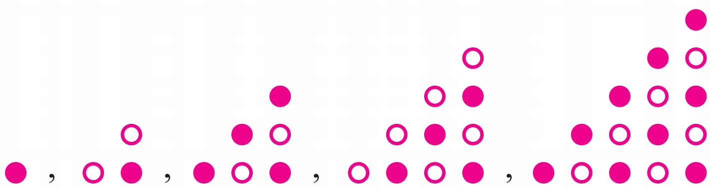
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۰. در آرایهٔ زیر تعداد دوایر توخالی در جمله سیزدهم چه تعداد است؟



۱) ۸۲ ۲) ۸۳ ۳) ۸۴ ۴) ۸۵

۴۱. با توجه به شکل در پانزدهمین شکل چند نقطهٔ توپر بکار رفته است؟



۱) ۳۶ ۲) ۶۴ ۳) ۸۱ ۴) ۱۲۰

۴۲. دنبالهٔ $a_n=(-1)^n\dfrac{3n-4}{2n-19}$ چند جمله منفی دارد؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

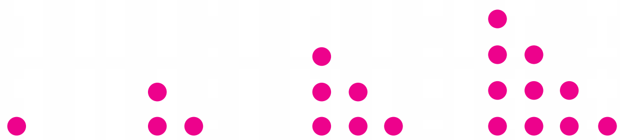
۴۳. در الگوی زیر، تعداد نقاط چندمین شکل برابر ۵۰۵۰ است؟

۱) ۵۰ اُمین

۲) ۱۵۱ اُمین

۳) ۱۰۰ اُمین

۴) ۱۰۱ اُمین

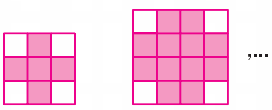


(۱) (۲) (۳) (۴)

۴۴. در الگوی زیر،تعداد مربع‌های رنگی در شکل nام را برابر با t_n در نظر می‌گیریم. حاصل t_n-t_{n-1} کدام است؟

۱) $2n+3$ ۲) $3n+3$

۳) $3n+1$ ۴) $5n-3$



۱ ۲

۴۵. اگر دنباله با جمله عمومی $a_n = an(2-n)+4n^2-a$ یک دنباله خطی و جمله دوم دنباله $t_n = (\frac{b}{2})n+a^2$ برابر a_3 باشد، b کدام است؟

۱) -6 ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۳۶

۴۶. دو الگوی c_n و d_n خطی هستند به‌طوری که $c_3=8$ و $d_5=0$ و برای هر عدد طبیعی مانند k داریم $c_k-d_k=10$

اگر دنباله t_n را به صورت $t_n=d_n.c_n$ تعریف کنیم، t_8 کدام است؟

۲) ۲۴ ۲) ۳۹ ۳) ۱۱ ۴) ۹۶

۴۷. جمله چندم دنباله خطی $a_n = mn(n-1)+2(n^2-1)$ برابر ۴۶ است؟ $(m\in \mathrm{R})$

۱) ۲۳ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶

دنبالهٔ حسابی

۴۸. در دنبالهٔ حسابی $a_1=1$ و $a_2=\frac{5}{3}$، حاصل $\frac{a_{15}+a_{17}+a_{19}}{a_{33}+a_{35}+a_{37}}$ کدام است؟

۱) $\frac{35}{71}$ ۲) $\frac{105}{71}$ ۳) $\frac{7}{17}$ ۴) $\frac{21}{17}$

۴۹. در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ اول برابر ۱۰ و مجموع جملات پنجم و ششم (a_5+a_6) برابر ۱۱ است. جملهٔ چهارم کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۳

۵۰. تفاضل جملهٔ دهم ازجملهٔ دوازدهم یک دنبالهٔ حسابی، ۵ و مجموع دو جملهٔ دهم و دوازدهم، ۲۵ است، جملهٔ بیست و یکم این دنباله کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷/۵ ۴) ۳۸/۵

۵۱. در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات اول، دوم و سوم برابر ۱۲ و مجموع جملات هفتم، هشتم و نهم برابر ۴۸است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۵۲. چند جمله از دنبالهٔ حسابی $a_1=170$ و $a_2=161$ مثبت است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹

۵۳. دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۶۳ و قدرنسبت (۴−)، چند جملهٔ مثبت دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۵۴. اعداد $1, x, y, \frac{5}{2}, \dots$، چهار جملهٔ اول یک دنبالهٔ عددی‌اند، مجموع پانزده جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۵۷ ۲) ۶۲/۵ ۳) ۶۷/۵ ۴) ۶۸

۵۵. اعداد $2p+3, 3p+4, 5p-1$ سه جمله متوالی یک دنباله عددی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۵۶. در دنبالهٔ حسابی به صورت‌های $2,7,12,\dots$ و $8,11,14,\dots$ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

۱) ۵۸ ۲) ۵۹ ۳) ۶۰ ۴) ۶۱

۵۷. با توجه به دنباله حسابی، مجموع $\frac{1}{2\times 5}+\frac{1}{5\times 8}+\frac{1}{8\times 11}+\dots+\frac{1}{17\times 20}$ کدام است؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۰/۲۴ ۴) ۰/۲۵

۵۸. اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد،یعنی $\{۱\},\{۲,۳,۴\},...$ در دسته نهم واسطه حسابی بین دو عدد اول و آخر، کدام است؟

۱) ۷۱ ۲) ۷۲ ۳) ۷۳ ۴) ۷۴

۵۹. جمله $n-۲$اُم یک دنباله حسابی به‌صورت $-۳n+۷$ است. $a_۱-d$ کدام است؟ $(n\geq ۳)$

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۵ ۴) -۵

۶۰. بین دو عدد ۲۳ و ۱۰۰، n واسطه حسابی درج می‌کنیم. اگر اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین واسطه درج شده برابر با ۶۳ باشد، سومین واسطه درج شده کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۳ ۳) ۳۷ ۴) ۴۴

۶۱. مجموع ۳ جمله متوالی یک دنباله حسابی، براب ر ۲۱ و مجموع مربعات این ۳ جمله، برابر ۱۶۵ است. عدد کوچک‌تر برابر کدام گزینه است؟

۱) ۷ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۴

مجموع جملات دنباله حسابی (محتوای تکمیلی)

۶۲. در دنبالهٔ حسابی $a_۱=۳+\sqrt{۲}$ و $a_۲=۵+\sqrt{۲}$، مجموع چهار جمله چهارم چقدر از مجموع چهار جمله دوم بیش‌تر است؟

۱) ۸ ۲) ۶۴ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۶۳. در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع چهار جملهٔ اول ۱۵ و مجموع پنج جملهٔ بعدی آن ۳۰ می‌باشد، جملهٔ یازدهم این دنباله کدام است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۸ ۳) ۸/۵ ۴) ۹

۶۴. در یک دنبالهٔ عددی جملهٔ nام به‌صورت $a_n=\frac{۳}{۲}n-۵$ است. مجموع ۱۵ جملهٔ اول این دنباله، کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

۶۵. در دنبالهٔ $a_n=n^۲-(n+۱)^۲$، مجموع ۱۹ جملهٔ اول کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۳۹۹ ۳) ۴۰۱ ۴) -۴۰۰

۶۶. در یک دنبالهٔ عددی جملهٔ پنجم برابر ۳ و هر جمله ازجملهٔ ماقبل خود به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ کم‌تر است. مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن کدام است؟

۱) ۲۲/۵ ۲) ۲۵ ۳) ۲۷/۵ ۴) ۳۰

۶۷. در بیست جملهٔ اول از یک دنبالهٔ عددی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد، جملهٔ اول کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۸. در یک دنبالهٔ عددی با جملهٔ اول $a_۱$ اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آنگاه به مجموع ۲۰ جملهٔ اول چقدر افزوده خواهد شد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۰

۶۹. در یک دنباله عددی مجموع بیست جملهٔ اول سه برابر مجموع دوازده جملهٔ اول آن است. اگر جملهٔ سوم برابر ۶ باشد، جملهٔ دهم کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۷۰. اگر مجموع هشت جمله از دنباله حسابی $a_۱ = ۱ + ۲p$ و $a_۲ = p - ۱$ برابر ۶۰ باشد $(S_۸ = ۶۰)$ قدرنسبت دنباله چقدر است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۹- ۴) ۷-

۷۱. در یک دنبالهٔ عددی، جملهٔ هفتم نصف جملهٔ سوم است، مجموع چند جملهٔ اول از این دنباله، صفر است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۷۲. مجموع چند جمله از دنبالهٔ عددی ...,۲,۶,۱۰ برابر جملهٔ سیزدهم است؟

۱) ۱۰ جمله ۲) ۶ جمله ۳) ۵ جمله ۴) ۸ جمله

۷۳. مجموع اعداد دو رقمی مضرب ۹ کدام است؟

۱) ۱۱۹۰ ۲) ۵۸۵ ۳) ۴۹۵ ۴) ۹۹۰

۷۴. مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش‌پذیر بر ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۱ کدام است؟

۱) ۸۱۶ ۲) ۸۵۲ ۳) ۸۶۷ ۴) ۸۸۴

۷۵. اعداد طبیعی را به‌گونه‌ای دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جملهٔ هر دسته مربع کامل باشد، ...,(۵,۶,۷,۸,۹),(۲,۳,۴),(۱) . مجموع جملات دستهٔ دهم کدام است؟

۱) ۱۶۹۱ ۲) ۱۷۱۰ ۳) ۱۷۲۹ ۴) ۱۷۴۸

۷۶. اعداد طبیعی فرد را به‌گونه‌ای دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد. ...,(۷,۹,۱۱),(۳,۵),(۱) مجموع دو جملهٔ اول و آخر دستهٔ ۳۰ کدام است؟

۱) ۱۷۰۰ ۲) ۱۷۵۰ ۳) ۱۸۰۰ ۴) ۱۸۵۰

دنبالهٔ هندسی

۷۷. در یک دنبالهٔ هندسی $a_۲a_۴ = ۲a_۵$، جملهٔ اول کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۷۸. در یک دنباله هندسی، مجموع سه جملهٔ متوالی ۱۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۱۶ است. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۷۹. در یک دنبالهٔ هندسی صعودی جملهٔ سوم ۱۰ و جملهٔ هفتم ۴۰ است. جملهٔ اول کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) ۲۵ ۳) ۵ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۸۰. در یک دنبالهٔ عددی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جملهٔ متوالی از دنباله هندسی باشند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۸۱. اعداد ۲^a، $۴\sqrt{۲}$ و ۲^b سه جمله متوالی از دنباله هندسی‌اند، واسطهٔ عددی بین a و b کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) $\sqrt{۲}$

۸۲. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح نیست؟

۱) اگر جملات یک دنباله هندسی را به توان ۲ برسانیم، دنباله حاصل نیز یک دنباله هندسی است.
۲) اگر جملات ی دنباله هندسی را در عددی ضری کنیم، ددنباله حاصل نیز یک دنبله هندسی است.
۳) اگر جملات یک دنباله هندسی را با عدد ثابتی مخالف صفر جمع کنیم، دنباله حاصل نیز یک دنباله هندسی است.
۴) اگر قدر نسبت یک دنباله هندسی را با عدد ثابتی جمع کنیم،دنباله حاصل نیز یک دنباله هندسی است.

۸۳. در یک دنباله هندسی نزولی، مجموع جملات پنجم و ششم برابر ۲ و تفاضل جمله هفتم از پنجم برابر ۱ است. جمله هفتم آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۸۴. در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، جمله دوم ۷ واحد بیشتر از جمله اول و جمله چهارم ۶۳ واحد بیشتر از جمله سوم است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۲ ۴) ۴

۸۵. جمله بیستم از دنباله حسابی ...,۳,۰,۳− ، با جمله چندم ا زدنباله هندسی ...,۲,۶,۱۸ برابر است؟

۱) چهارم ۲) پنجم ۳) هفتم ۴) هشتم

۸۶. در یک دنباله هندسی جمله سوم ۱۶ و جمله ششم ۱۲۸ است. حاصل ضرب دوازده جمله اول دنباله کدام است؟

۱) $۲^{۹۰}$ ۲) ۳×۲^{۷۰} ۳) ۳×۲^{۷۲} ۴) $۲^{۷۸}$

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

۸۷. در دنبالهٔ هندسی $...,\frac{۱}{۲},x,۲$ غیر نزولی است، مجموع شش جملهٔ اول آن کدام است؟

۱) $\frac{۴۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۲۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۱}{۸}$ ۴) $\frac{۲۳}{۱۶}$

۸۸. در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله اول برابر با $\frac{۳}{۴}$ و مجموع سه جمله بعدی ۶− است. جمله اول دنباله کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲− ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۸۹. در یک دنباله هندسی، مجموع جملات جهارم و پنجم برابر با ۱۵ و جمله ششم از چهارم، ۶۰ تا بیشتر است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۰. حاصل $A=(۱+x+x^{۲}+\cdots+x^{۸})(۱-x+x^{۲}-\cdots+x^{۸})$ به ازای $x=\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) ۵۰۷ ۲) ۵۱۱ ۳) ۵۱۲ ۴) ۵۱۶

۹۱. در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جملهٔ اول آن ۳ می‌باشد، مجموع شش جملهٔ اول کدام است؟

۱) ۱۰/۸ ۲) ۱۱/۲ ۳) ۱۲/۶ ۴) ۱۳/۴

۹۲. بین دو عدد ۲ و $۱۶\sqrt{۲}$، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنبالهٔ هندسی تشکیل داده‌اند، مجموع این هشت عدد کدام است؟

۱) $۳۰(۲+\sqrt{۲})$ ۲) $۴۸\sqrt{۲}$ ۳) $۳۰(\sqrt{۲}+۱)$ ۴) $۳۶(\sqrt{۲}+۱)$

۹۳. در یک دنبالهٔ هندسی، مجموعه سه جملهٔ اول ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول آن ۱۵۳ است. جملهٔ اول، چند برابر جملهٔ پنجم است؟

۱) $\frac{۸۱}{۱۶}$ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۶

۹۴. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع هشت جملهٔ اول $\frac{۵}{۴}$ مجموع چهار جملهٔ اول آن است. جملهٔ هفتم چند برابر جملهٔ اول است؟

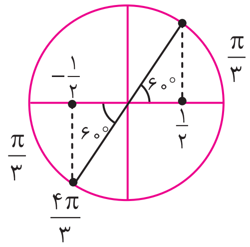
۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۹۵. در دنبالهٔ هندسی ...,۱,۲,۴، مجموع چهارده جملهٔ اول، چند برابر مجموع هفت جملهٔ اول آن است؟

۱) ۶۵ ۲) ۶۳ ۳) ۱۲۷ ۴) ۱۲۹

ب) با توجه به دایره مثلثاتی زیر کمان $\frac{۴\pi}{۳}$ ، $\frac{\pi}{۳}$ بعد از کمان π است. با توجه به شکل مشخص می‌باشد که کسینوس این کمان قرینهٔ کسینوس کمان $\frac{\pi}{۳}(۶۰^\circ)$ است:

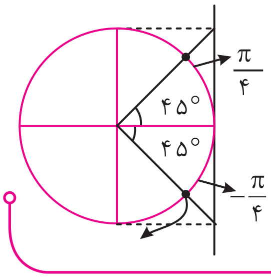
$$\cos\frac{۴\pi}{۳} = -\cos\frac{\pi}{۳} = \frac{-۱}{۲}$$



ج) با توجه به دایره مثلثاتی زیر کمان $\frac{۷\pi}{۴}$ ، $\frac{\pi}{۴}(۴۵^\circ)$ عقب‌تر از کمان $۲\pi(۳۶۰^\circ)$ است.

با توجه به شکل مشخص می‌باشد که تانژانت این کمان قرینهٔ تانژانت کمان $\frac{\pi}{۴}$ است.

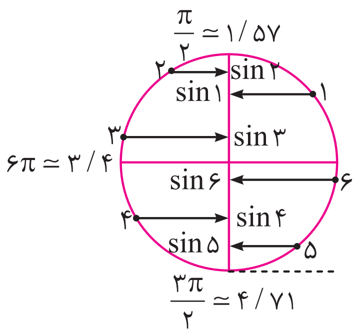
$$\tan\frac{۷\pi}{۴} = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱$$



مثال ۲۵. مقادیر زیر را باهم مقایسه کنید.

$$\sin ۱^{rad} \ , \ \sin ۲^{rad} \ , \ \sin ۳^{rad} \ , \ \sin ۴^{rad} \ , \ \sin ۵^{rad} \ , \ \sin ۶^{rad}$$

پاسخ: دایره مثلثاتی را در نظر بگیرید که محیط آن را می‌خواهیم درجه‌بندی کنیم. اگر شعاع دایره یک واحد باشد می‌توانیم مطابق شکل زیر محیط آن را بر اساس واحد (طول شعاع) درجه‌بندی کنیم. فردی را در نظر بگیرید که از نقطهٔ A در جهت مثبت می‌خواهد بر روی محیط دایره حرکت کند. اگر این فرد زاویه‌ای حدود ۴۵° را طی کند، بر روی محیط دایره کمان $\frac{\pi}{۴}$ را طی کرده است، یعنی حدود $\frac{۳/۱۴}{۴}$ واحد که از یک واحد کمتر است. در قسمت‌های قبل دیدیم یک رادیان معادل حدود ۵۷° است؛ یعنی وقتی بر روی دایره به اندازه واحد (شعاع) حرکت می‌کنیم زاویه‌ای حدود ۵۷° را طی کرده‌ایم. با این توضیحات دایره مطابق شکل زیر از ۱ تا ۶ درجه‌بندی می‌شود:



$$\Rightarrow \sin ۲ > \sin ۱ > \sin ۳ > \sin ۶ > \sin ۴ > \sin ۵$$

تعیین مقادیر مثلثاتی برای تمام زوایا (محتوای تکمیلی)

فرض کنید α زاویه‌ای دلخواه است. در این قسمت می‌خواهیم ارتباط بین نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های $\frac{k\pi}{۲}+\alpha \ (k \in \mathbb{Z})$ را با نسبت‌های مثلثاتی زاویه α پیدا کنیم.

مثال ۲۶. با توجه به نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α، نسبت‌های مثلثاتی زوایای زیر را با رسم دایرهٔ مثلثاتی برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه α بنویسید. (α برحسب رادیان است.)

الف) $-\alpha$　　ب) $\pi-\alpha$　　پ) $\pi+\alpha$

ت) $۲\pi-\alpha$　　ث) $۲\pi+\alpha$　　ج) $\frac{\pi}{۲}-\alpha$

چ) $\frac{\pi}{۲}+\alpha$　　ح) $\frac{۳\pi}{۲}-\alpha$　　خ) $\frac{۳\pi}{۲}+\alpha$

پاسخ:

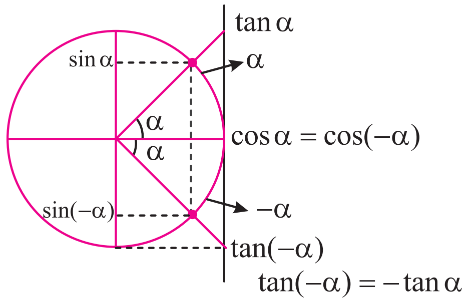
الف) زوایای α و $-\alpha$ را در موقعیت استاندارد رسم می‌کنیم، همان‌طور که در شکل می‌بینید، کسینوس‌های زوایای α و $-\alpha$ باهم برابرند، ولی سینوس‌های آن‌ها قرینهٔ یکدیگرند:

(یعنی منفی از سینوس عبور می‌کند.)

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

(یعنی منفی از کسینوس عبور نمی‌کند.)

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

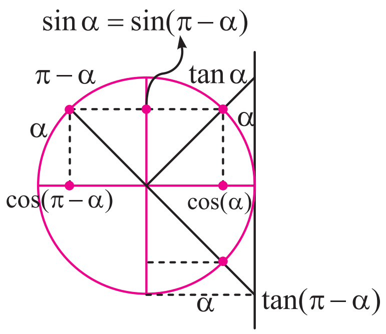


ب) زوایای α و $\pi-\alpha$ را رسم می‌کنیم:

برای رسم کمان $(\pi-\alpha)$ کافی است، از π به اندازهٔ α به عقب برگردیم. درنتیجه انتهای دو کمان α و $(\pi-\alpha)$ باهم برابر و کسینوس‌های آن‌ها قرینهٔ یکدیگرند و درنتیجه تانژانت آن‌ها نیز قرینهٔ یکدیگرند.

(به محور تانژانت‌ها نگاه کنید) درواقع می‌توان گفت سینوس دو زاویهٔ مکمل باهم برابرند و کسینوس و تانژانت آن‌ها قرینهٔ یکدیگرند.

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

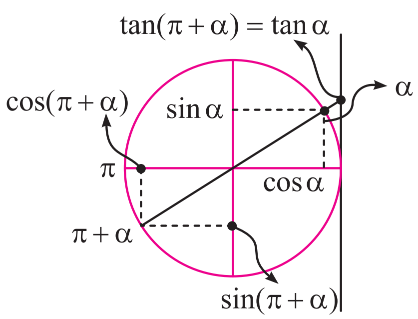


پ) زوایای α و $\pi+\alpha$ را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل مشخص است که سینوس‌های زوایای α و $\pi+\alpha$ همچنین کسینوس‌های آن‌ها قرینهٔ یکدیگرند. ولی ازآنجاکه اختلاف زوایای آن‌ها π است، درنتیجه انتهای کمان‌های آن‌ها در یک امتدادند و درنتیجه تانژانت آن‌ها برابر است.

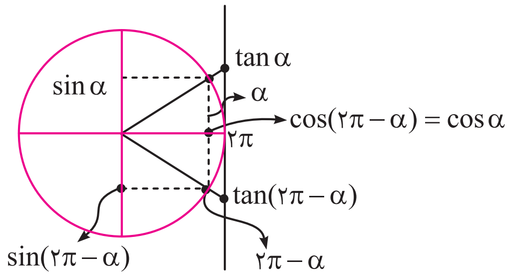
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \quad \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

در حالت کلی وقتی ما نقطه‌ای مانند $(x \text{ و } y)$ را تحت زاویهٔ ۱۸۰° (π رادیان) دوران می‌دهیم مختصات آن به $(-x\ ,\ -y)$ تغییر می‌کند. درنتیجه سینوس و کسینوس آن هر دو قرینه می‌شوند، ولی تانژانت آن‌ها که نسبت این دو مقدار است ثابت می‌ماند.



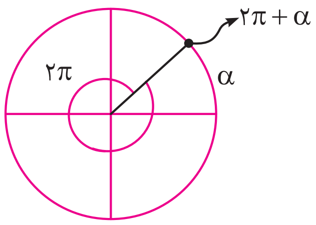
ت) زوایای α و $(۲\pi-\alpha)$ را رسم می‌کنیم:

همان‌طور که می‌بینید، انتهای کمان $۲\pi-\alpha$ و $-\alpha$ در یک نقطه است، فقط تفاوت در جهت حرکت بر روی دایره بوده است. درنتیجه تمامی نتایجی که برای مقایسهٔ نسبت‌های مثلثاتی زوایای α و $-\alpha$ در قسمت «الف» گرفتیم در اینجا برقرار است:



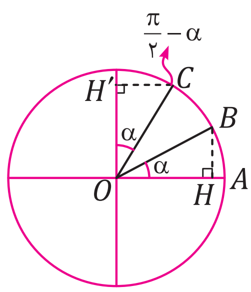
$$\sin(۲\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(۲\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(۲\pi-۲\alpha)=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

ث) انتهای کمان زوایای α و $۲\pi+\alpha$ در دایرهٔ مثلثاتی در یک نقطه است. درنتیجه تمامی نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α با نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $۲\pi+\alpha$ یکسان است. از موارد «ت» و «ث» می‌توان نتیجه گرفت که اگر به زاویه‌ای مضارب ۲π اضافه شود، نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه تغییر نمی‌کند. درواقع اگر از یک کمان، مضارب ۲π را حذف کنیم نسبت‌های مثلثاتی آن کمان تغییر نمی‌کند:



$$\sin(۲\pi-\alpha)\xrightarrow{\text{۲π را کم می‌کنیم}}\sin(-\alpha)$$
$$\cos(۲\pi+\alpha)\xrightarrow{\text{۲π را کم می‌کنیم}}\cos\alpha$$

ج) زوایای α و $\frac{\pi}{۲}-\alpha$ را رسم می‌کنیم: با توجه به این‌که دو مثلث OHB و $OH'C$ باهم همنهشت‌اند می‌توان نتیجه گرفت $HB=H'C$ و $OH=OH'$، پس داریم:



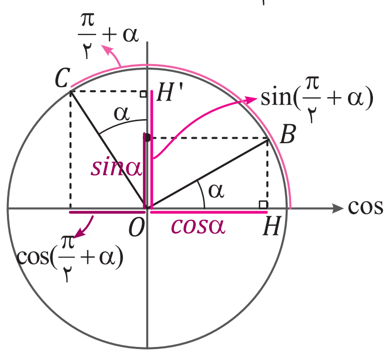
$$\begin{cases}HB=\sin\alpha\\ H'C=\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)\end{cases}\xrightarrow{HB=H'C}\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\begin{cases}OH=\cos\alpha\\ OH'=\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)\end{cases}\xrightarrow{OH=OH'}\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\Rightarrow\ \tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{۱}{\tan\alpha}=\cot\alpha$$

درواقع می‌توان گفت اگر دو زاویه متمم یکدیگر باشند (مجموع آن‌ها ۹۰° یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان باشد) سینوس یکی کسینوس دیگری و کسینوس یکی، سینوس دیگری است.

چ) زوایای α و $\frac{\pi}{۲}+\alpha$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، دو مثلث $OH'C$ و OHB همنهشت‌اند.

پس $HB=H'C$ اما مقدار $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)$ دارای علامت

منفی است، پس $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$ است. از طرفی $OH=OH'$ است و ازآنجاکه مقدار سینوس $(\frac{\pi}{۲}+\alpha)$ مثبت میباشد، پس $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$ است.

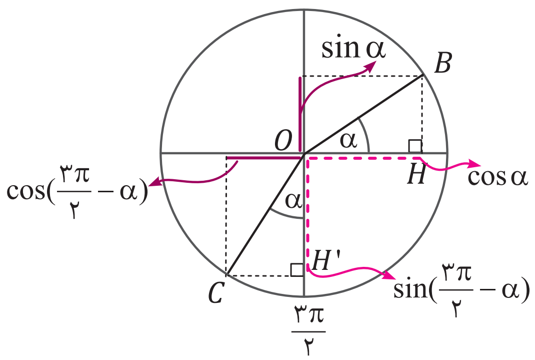
$$\left.\begin{array}{l}\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha\\ \cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha\end{array}\right. \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\frac{۱}{\tan\alpha}=-\cot\alpha$$

البته می‌توان برای اثبات این روابط از روابط مورد «ج» کمک گرفت:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\sin(\frac{\pi}{۲}-\underbrace{(-\alpha)}_{B})=\cos B=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos(\frac{\pi}{۲}-\underbrace{(-\alpha)}_{B})=\sin B=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

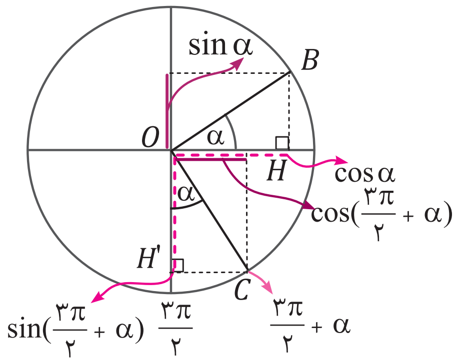
ح) زوایای α و $\frac{۳\pi}{۲}-\alpha$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، دو مثلث OBH و OCH' هم‌نهشت‌اند. پس $CH'=HB$ است اما مقدار $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)$ چون در ربع سوم است منفی است. پس $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$ است. از طرفی $OH=OH'$ است و $\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)$ هم‌مقداری منفی دارد پس $\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cos\alpha$ است.

$$\left.\begin{array}{l}\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cos\alpha\\ \cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha\end{array}\right. \Rightarrow \tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=\frac{\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\frac{۱}{\tan\alpha}=\cot\alpha$$

خ) زوایای α و $\frac{۳\pi}{۲}+\alpha$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل دو مثلث OBH و OCH' هم‌نهشت‌اند. پس $H'C=HB$ است.

مقدار $\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)$ چون در ربع چهارم است، مثبت می‌باشد، پس $\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=\sin\alpha$ است.

از طرفی $OH = OH'$ ، $\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)$ هم چون در ربع چهارم است، منفی می‌باشد، پس $\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha) = -\cos\alpha$ است.

$$\left.\begin{aligned}\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha) &= -\cos\alpha\\ \cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha) &= \sin\alpha\end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha) = \frac{\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-۱}{\tan\alpha} = -\cot\alpha$$

در اینجا برای جمع‌بندی روشی را بیان می‌کنیم که به‌سرعت بتوانیم نسبت‌های زوایایی شبیه مثال قبل را به دست آوریم. کلید این راه‌حل در گرو پاسخ به دو سؤال زیر است:

اگر حول مبدأ مختصات مثلثاتی را به اندازهٔ مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ (مثل $\frac{\pi}{۲}$ ، $\frac{۳\pi}{۲}$ ، $\frac{۵\pi}{۲}$ و ...) دوران دهیم چه اتفاقی می‌افتد؟

پاسخ این است که جای سینوس‌ها و کسینوس‌ها عوض می‌شود (جهت مثبت و منفی ممکن است بسته به زاویهٔ دوران عوض شود).

اگر حول مبدأ مختصات، دایرهٔ مثلثاتی را به اندازهٔ مضارب π (مثل π ، ۲π ، ۳π و ...) دوران دهیم، چه اتفاقی می‌افتد؟

پاسخ این است که جای سینوس و کسینوس جابه‌جا نمی‌شود و فقط ممکن است علامت سینوس و کسینوس زوایا عوض شوند. با توجه به دو مطلب بالا داریم:

$$۱\begin{cases}\sin(\overset{\text{هر عدد صحیح}}{k}\pi\pm\alpha) = \boxed{?}\sin\alpha\\ \cos(k\pi\pm\alpha) = \boxed{?}\cos\alpha\\ \tan(k\pi\pm\alpha) = \boxed{?}\tan\alpha\end{cases} \qquad ۲\begin{cases}\sin(\frac{\overset{\text{فرد}}{k}\pi}{۲}\pm\alpha) = \boxed{?}\cos\alpha\\ \cos(\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha) = \boxed{?}\sin\alpha\\ \tan(\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha) = \boxed{?}\cot\alpha\end{cases} \Rightarrow$$

علامت نسبت مثلثاتی داده شده را با توجه به کمان اولیهٔ داده شده تعیین می‌کنیم و به‌جای علامت سؤال‌ها قرار می‌دهیم.

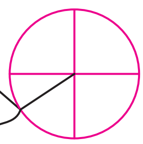
$(\pi, ۲\pi, ۳\pi, \cdots)$

مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$

سینوس این زاویه منفی است

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha) = \boxed{-}\cos\alpha$$

سینوس تبدیل به کسینوس می‌شود

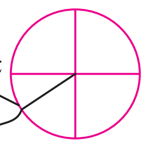


$\frac{۳\pi}{۲}-\alpha$

کسینوس این زاویه منفی است

$$\cos(۳\pi+\alpha) = \boxed{-}\cos\alpha$$

کسینوس بدون تغییر باقی می‌ماند



۳π

$۳\pi+\alpha$

اگر از کمانی ۲π یا مضارب آن را کم یا زیاد کنیم نسبت‌های مثلثاتی آن تغییر نمی‌کند. (چرا؟)
اگر از کمانی π یا مضارب آن را کم یا زیاد کنیم، نسبت‌های تانژانت و کتانژانت آن تغییر نمی‌کند. (چرا؟)

پاسخگو باش

نمونه:

$$\sin(۱۱۷\pi+\alpha) = \sin(\underbrace{۱۱۶\pi}_{\text{حذف}}+\pi+\alpha) = \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\tan(\underbrace{۷\pi}_{\text{حذف}}-\alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

مثال ۲۷. حاصل هریک از موارد زیر را به دست آورید.

الف) $\sin ۳۰۰^\circ$ ب) $\cos\frac{۵\pi}{۶}$ پ) $\tan(-\frac{۳\pi}{۴})$

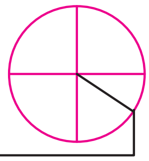
پاسخ: الف)

$$۳۰۰^\circ = ۳۶۰^\circ - ۶۰^\circ$$

$$\sin ۳۰۰^\circ = \sin(۳۶۰^\circ - ۶۰^\circ) = \sin(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) \xrightarrow{\text{۲π را حذف می کنیم}} \sin(-\frac{\pi}{۳}) = -\sin\frac{\pi}{۳} = \frac{-\sqrt{۳}}{۲}$$

راه دوم:

$$\sin(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) \xrightarrow[\text{تغییر می‌ماند}]{\text{سینوس بدون}} \boxed{-}\sin\frac{\pi}{۲} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$



چون سینوس در ربع چهارم، منفی است.

ب) $\frac{۵\pi}{۶} = \pi - \frac{\pi}{۶}$

$$\cos\frac{۵\pi}{۶} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cos(\frac{\pi}{۶}) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

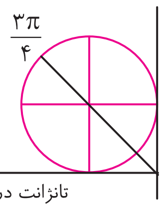
پ) راه اول:

$$\tan(-\frac{۳\pi}{۴}) \xrightarrow[\text{عبورمی‌کند}]{\text{منفی از tan}} -\tan(\frac{۳\pi}{۴}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{۴})$$

$$\xrightarrow[\text{کمان تانژانت کم کرد}]{\text{مضرب π را می توان از}} -\tan(\frac{-\pi}{۴}) \xrightarrow[\text{عبور می کند}]{\text{منفی از تانژانت}} -(-\tan\frac{\pi}{۴}) = \tan\frac{\pi}{۴} = ۱$$

راه دوم:

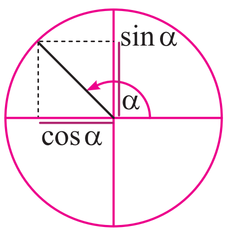
$$\tan(\frac{-۳\pi}{۴}) = -\tan(\frac{۳\pi}{۴}) = -\tan(\pi - \frac{\pi}{۴}) \xrightarrow[\text{تغییر نمی‌کند}]{\text{تانژانت}} -۱ \times \boxed{-۱}\tan\frac{\pi}{۴} = ۱$$



تانژانت در ناحیه دوم منفی است

◄ اتحادهای مثلثاتی

با توجه به دایره مثلثاتی و قضیه فیثاغورس برای هر زاویه α داریم:



$$\Rightarrow \sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha = ۱$$

مثال ۲۸. اگر بدانیم انتهای کمان a در ناحیه چهارم مثلثاتی است و $\sin\alpha = \frac{-۵}{۱۳}$ است. سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه α را بیابید.

پاسخ:

$$\sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha = ۱ \Rightarrow \cos^{۲}\alpha = ۱ - (\frac{-۵}{۱۳})^{۲} = ۱ - \frac{۲۵}{۱۶۹} = \frac{۱۴۴}{۱۶۹} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{۱۲}{۱۳}$$

اما ازآنجاکه در ناحیه چهارم کسینوس مثبت است داریم: $\cos\alpha = \frac{۱۲}{۱۳}$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{-۵}{۱۳}}{\frac{۱۲}{۱۳}} = \frac{-۵}{۱۲} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{-۱۲}{۵}$$

مثال ۲۹. اگر $\tan\alpha = ۲$ باشد و انتهای کمان α در ناحیه سوم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی را بیابید.

پاسخ:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = ۲ \Rightarrow \sin\alpha = ۲\cos\alpha$$

$$\sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha = ۱ \Rightarrow (۲\cos\alpha)^{۲} + \cos^{۲}\alpha = ۱ \Rightarrow ۵\cos^{۲}\alpha = ۱$$

$$\Rightarrow \cos^{۲}\alpha = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{۱}{\sqrt{۵}} \xrightarrow[\text{سوم}]{\alpha\text{در ناحیه}} \cos\alpha = \frac{-۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = ۲\cos\alpha = \frac{-۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} = \frac{۱}{۲}$$

مثال ۳۰. درستی هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\frac{\cos x}{۱+\sin x} = \frac{۱-\sin x}{\cos x}$

ب) $\sin^{۴}x + \cos^{۴}x = ۱ - ۲\sin^{۲}x\cos^{۲}x$

ج) $\sin^{۶}x + \cos^{۶}x = ۱ - ۳\cos^{۲}x\sin^{۲}x$

د) $\tan x + \cot x = \frac{۱}{\sin x\cos x}$

پاسخ: الف)

می‌دانیم $\cos^{۲}x = ۱ - \sin^{۲}x$ درنتیجه با ضرب کردن صورت و مخرج کسر در مزدوج مخرج داریم:

$$\frac{\cos x}{۱+\sin x} \times \frac{۱-\sin x}{۱-\sin x} = \frac{\cos x(۱-\sin x)}{۱-\sin^{۲}x} = \frac{\cos x(۱-\sin x)}{\cos^{۲}x} = \frac{۱-\sin x}{\cos x}$$

توجه به این نکته مهم است که تساوی بالا وقتی برقرار است که x برابر با $\frac{\pi}{۲}$ نباشد، زیرا در غیر این صورت مزدوج کسر صفر می‌شود و نمی‌توان آن را ضرب کرد.

ب)

◄ معادلات درجه ۲

تعریف معادله درجه ۲

می‌دانیم منظور از درجهٔ یک عبارت، بزرگ‌ترین توان جملات آن عبارت است. مثلاً عبارت « $۳x+۴$» یک عبارت درجه ۱ و عبارت « $۴x-۳x^۲+۵$» یک عبارت درجه ۲ و عبارت «۷» یک عبارت درجه صفر است.

یک عبارت درجه ۲ به‌صورت کلی به شکل زیر است:

$$y=ax^۲+bx+c \quad a\neq ۰$$

توجه کنید که در این عبارت b و c می‌توانند صفر باشند، ولی a حتماً مخالف صفر است. مثلاً عبارت‌های $y=۳x^۲-۴$, $y=-x^۲+۵x$ و $y=۴x^۲$ همگی درجه ۲ هستند.

عبارت درجه دوم $y=x^۲-۳x+۲$ را در نظر بگیرید. این عبارت به ازای x های مختلف مقادیر متفاوتی خواهد داشت؛ مثلاً:

$$x=۴ \Rightarrow y=۴^۲-۳\times۴+۲=۶$$

$$x=-۳ \Rightarrow y=(-۳)^۲-۳\times(-۳)+۲=۲۰$$

$$x=۱ \Rightarrow y=۱^۲-۳\times۱+۲=۰$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود به ازای $x=۱$ حاصل عبارت صفر می‌شود. اصطلاحاً می‌گوییم $x=۱$ یکی از ریشه‌های عبارت $y=x^۲-۳x+۲$ می‌باشد؛ یعنی منظور از ریشهٔ یک عبارت، مقداری است که آن عبارت را صفر می‌کند. به‌عبارت‌دیگر برای یافتن ریشه‌های عبارت $y=x^۲-۳x+۲$ می‌بایست تساوی $x^۲-۳x+۲=۰$ را بررسی کنیم. $x^۲-۳x+۲=۰$ یک معادلهٔ درجه ۲ است که در آن ریشه‌های یک عبارت درجه ۲ بررسی می‌شود. این معادله درجه ۲ به‌صورت کلی به شکل زیر است:

$$ax^۲+bx+c=۰$$

توجه داشته باشید که در معادله درجه ۲، ضریب جملهٔ درجه ۲ (یعنی a) حتماً مخالف صفر است ولی دیگر ضرایب (b و c) ممکن است صفر باشند.

تذکر: یک معادله درجه ۲ حداکثر می‌تواند دو جواب حقیقی داشته باشد و در برخی موارد نیز یک جواب داشته و یا اصلاً جواب حقیقی ندارد. (در این مورد در ادامه بیشتر توضیح خواهیم داد.)

روش‌های حل معادله درجه ۲

۱) روش تجزیه:

عبارت $A\times B=۰$ را در نظر بگیرید. چه زمانی این تساوی برقرار است؟ زمانی که یا $A=۰$ باشد یا $B=۰$ ما از قبل حل معادله درجه یک را بلد هستیم. (معادله درجه یک به‌صورت کلی به شکل $ax+b=۰$ است و درصورتی‌که $a\neq۰$ باشد دارای جواب $x=-\frac{b}{a}$ است.) بنابراین اگر بتوانیم در یک معادله درجه دوم، عبارت درجه ۲ را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عبارت درجه یک تجزیه کنیم، می‌توانیم به جواب‌های معادله نزدیک شویم. پس سعی می‌کنیم با کمک روش‌های تجزیه (که در سال قبل آموخته‌ایم) عبارت‌های درجه دوم را تجزیه کنیم.

مثال ۱. معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید:

الف) $x^۲ - x - ۶ = ۰$ ب) $۲x^۲ + ۵x - ۳ = ۰$

ج) $x^۳ - ۵x^۲ + ۴x = ۰$ د) $x^۲ - ۴x + ۴ = ۰$

پاسخ:

الف) $x^۲ - x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ x+۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$

ب) $۲x^۲ + ۵x - ۳ = ۰ \xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{طرفین را در ۲}} ۴x^۲ + ۱۰x - ۶ = ۰ \Rightarrow (۲x)^۲ + ۵ \times (۲x) - ۶ = ۰$

$$\Rightarrow (۲x+۶)(۲x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲x+۶ = ۰ & x = -۳ \\ ۲x-۱ = ۰ & x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

ج) $x^۳ - ۵x^۲ + ۴x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ - ۵x + ۴) = ۰ \Rightarrow x(x-۱)(x-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x-۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x-۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \end{cases}$

د) $x^۲ - ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \\ x-۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \end{cases}$ (۲ جواب تکراری)

تذکر: توجه داشته باشید از ویژگی‌های روش تجزیه این است که با این روش می‌توان معادلات با درجات بالاتر را نیز حل کرد. مثل قسمت «ج» در مثال قبلی. از معایب این روش نیز این است که اولاً راه‌های تجزیه گاهی سخت است و دیر به نتیجه می‌رسد (بخصوص در مواردی که جواب‌ها غیر صحیح باشند.) ثانیاً برای حل معادلاتی که جواب ندارد با این روش به مشکل می‌خوریم.

تذکر: اگر جواب‌های معادله تکراری باشند (مثل قسمت «د» مثال قبلی) اصطلاحاً می‌گوییم معادله یک ریشهٔ مضاعف دارد. ریشهٔ مضاعف یعنی دو جواب مثل هم.

۲) روش مربع کامل

در این روش سعی می‌کنیم در عبارت درجه دوم یک مربع کامل ایجاد کنیم، به‌نحوی‌که جملات شامل $x^۲$ و x در آن مربع کامل متمرکز شوند. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم معادله $x^۲ - ۸x - ۳ = ۰$ را حل کنیم. ابتدا جملات شامل $x^۲$ و x را یک‌طرف و مابقی جملات را به طرف دیگر تساوی می‌بریم:

$$x^۲ - ۸x = ۳$$

در مرحله بعد به دو طرف تساوی جمله‌ای را اضافه می‌کنیم که در سمت چپ تساوی بتوانیم مربع کامل بسازیم. درواقع آنچه برای مربع سازی کم داریم (مجذور نصف ضریب x) را به دو طرف اضافه می‌کنیم.

$$x^۲ - ۸x + ۱۶ = ۳ + ۱۶$$

حالا در طرف چپ می‌توانیم یک مربع کامل بسازیم: $(x-۴)^۲ = ۱۹$

با توجه به مثبت بودن طرف راست تساوی (عدد ۱۹) این معادله دو جواب خواهد داشت.

$$(x-۴)^۲ = ۱۹ \Rightarrow \begin{cases} x-۴ = +\sqrt{۱۹} \Rightarrow x = ۴ + \sqrt{۱۹} \\ x-۴ = -\sqrt{۱۹} \Rightarrow x = ۴ - \sqrt{۱۹} \end{cases}$$

(به‌طورکلی اگر $X^۲ = m$ بوده و m مثبت باشد، خواهیم داشت: $X = \pm\sqrt{m}$)

تذکر: توجه داشته باشید که اگر در این روش عدد به‌دست‌آمده در طرف مقابل مربع کامل، صفر باشد، معادله دو جواب تکراری خواهد داشت که به آن جواب مضاعف می‌گوییم و اگر عدد به‌دست‌آمده در طرف مقابل مربع کامل، منفی باشد، معادله جواب ندارد.

تذکر: اگر ضریب $x^۲$ در معادلهٔ اولیه ۱ نباشد، می‌توانیم طرفین تساوی را بر آن ضریب تقسیم کنیم و یا این‌که به همان حالت مربع سازی کنیم ولی در حالت دوم، ضریب $x^۲$ باید مربع کامل باشد. اگر ضریب $x^۲$ مربع کامل نبود می‌توانیم طرفین را در عدد موردنیاز ضرب کنیم تا مربع کامل شود.

مثال ۲. معادله‌های زیر را به روش مربع سازی حل کنید.

الف) $x^۲+۴x-۵=۰$ ب) $۲x^۲+x-۶=۰$

ج) $x^۲-۸=۰$ د) $x^۲-۶x+۱۰=۰$

پاسخ:

الف) $x^۲+۴x-۵=۰ \Rightarrow x^۲+۴x=۵ \Rightarrow x^۲+۴x+۴=۵+۴ \Rightarrow (x+۲)^۲=۹$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۲=\sqrt{۹}=۳ \Rightarrow x=۱ \\ x+۲=-\sqrt{۹}=-۳ \Rightarrow x=-۵ \end{cases}$$

ب) $۲x^۲+x-۶=۰ \xrightarrow[\text{تقسیم می کنیم}]{\text{طرفین را بر ۲}} x^۲+\frac{۱}{۲}x-۳=۰ \Rightarrow x^۲+\frac{۱}{۲}x=۳$

$$\Rightarrow x^۲+\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۱۶}=۳+\frac{۱}{۱۶}$$

$$\Rightarrow (x+\frac{۱}{۴})^۲=\frac{۴۹}{۱۶} \Rightarrow x+\frac{۱}{۴}=\pm\sqrt{\frac{۴۹}{۱۶}}=\pm\frac{۷}{۴} \Rightarrow x=-\frac{۱}{۴}\pm\frac{۷}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{۸}{۴}=-۲ \\ x=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

ج) $x^۲-۸=۰ \Rightarrow x^۲=۸ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۸}$

د) $x^۲-۶x+۱۰=۰ \Rightarrow x^۲-۶x=-۱۰ \Rightarrow x^۲-۶x+۹=-۱۰+۹ \Rightarrow (x-۳)^۲=-۱$

چون عدد سمت راست تساوی منفی است و حاصل یک مربع کامل نمی‌تواند منفی باشد، بنابراین معادله جواب حقیقی ندارد؛ یعنی هیچ مقداری برای x نمی‌توان یافت که در این تساوی صدق کند.

۳) روش فرمول کلی (روش Δ)

معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ را در نظر بگیرید. اگر از a فاکتور بگیریم خواهیم داشت:

$$a(x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=۰$$

حالا در داخل پرانتز مربع سازی می‌کنیم:

$$a\left((x+\frac{b}{۲a})^۲-\frac{b^۲}{۴a^۲}+\frac{c}{a}\right)=۰$$

اگر کمی عبارت را مرتب کنیم، داریم:

$$a\left((x+\frac{b}{۲a})^۲-\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲})\right)=۰$$

عبارت $b^۲-۴ac$ را Δ (دلتا) می‌نامیم و معادله فوق را به این صورت می‌نویسیم:

$$a\left((x+\frac{b}{۲a})^۲-\frac{\Delta}{۴a^۲}\right)=۰$$

اگر تساوی (معادله) فوق بخواهد جوابی داشته باشد با توجه به اینکه $a\neq۰$ است، عبارت داخل پرانتز می‌بایست صفر شود، یعنی:

$$(x+\frac{b}{۲a})^۲=\frac{\Delta}{۴a^۲}$$

حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $\Delta < ۰$ باشد:

چون سمت راست تساوی منفی می‌شود و سمت چپ تساوی یعنی $(x+\frac{b}{۲a})^۲$ همواره نامنفی است، تساوی هیچ‌گاه برقرار نخواهد بود؛ یعنی تساوی به ازای هیچ مقداری برای x برقرار نیست و درنتیجه معادله جوابی ندارد.

حالت دوم: $\Delta = ۰$ باشد

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (x+\frac{b}{۲a})^۲ = ۰ \Rightarrow (x+\frac{b}{۲a})(x+\frac{b}{۲a}) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{۲a} \\ x = -\frac{b}{۲a} \end{cases}$$

در این حالت ۲ جواب یکسان برای معادله به‌دست می‌آید که آن را جواب مضاعف معادله می‌نامیم.

حالت سوم: $\Delta > ۰$ باشد:

$$\Delta > ۰ \Rightarrow (x+\frac{b}{۲a})^۲ = \frac{\Delta}{۴a^۲} \Rightarrow x+\frac{b}{۲a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{۴a^۲}} \Rightarrow x = \frac{-b}{۲a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

در این حالت معادله دارای دو جواب حقیقی متمایز خواهد بود:

$$x_۱ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \quad , \quad x_۲ = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

تذکر: حسن استفاده از روش فرمول کلی (روش دلتا) این است که همواره به نتیجه می‌رسد؛ یعنی شما می‌توانید با اطمینان در مورد تعداد، علامت و مقدار جواب‌های معادله اظهارنظر کنید، اگرچه در برخی موارد استفاده از روش‌های دیگر سریع‌تر خواهد بود.

مثال ۳. معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی (Δ) حل کنید.

الف) $x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$　　ب) $-x^۲ + ۶x - ۹ = ۰$　　ج) $۲x^۲ - ۳x + ۴ = ۰$

پاسخ:

الف) $x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۳^۲ - ۴\times۱\times(-۴) = ۲۵} x_{۱,۲} = \frac{۳\pm\sqrt{۲۵}}{۲} = \frac{۳\pm۵}{۲} = \begin{cases} ۴ \\ -۱ \end{cases}$

ب) $-x^۲ + ۶x - ۹ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۶^۲ - ۴\times(-۱)\times(-۹) = ۰ \Rightarrow x_{۱,۲} = \frac{-۶\pm۰}{-۲} = ۳$

معادله یک ریشه مضاعف دارد.

ج) $۲x^۲ - ۳x + ۴ = ۰ \Rightarrow \Delta = (-۳)^۲ - ۴\times۲\times۴ = -۲۳$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

تذکر: اگر در معادله $ax^۲ + bx + c = ۰$ ضرایب a و c مختلف‌العلامه باشند، معادله حتماً دو جواب حقیقی متمایز دارد.

$ac < ۰ \Rightarrow -ac > ۰ \Rightarrow -۴ac > ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac > ۰ \Rightarrow \Delta > ۰$ دو ریشه حقیقی داریم.

استفاده از Δ' به‌جای Δ

اگر در معادله $ax^2+bx+c=0$ ضریب x یعنی b یک عدد زوج باشد، برای ساده‌تر شدن محاسبات می‌توانیم از Δ' به‌جای Δ استفاده کنیم.

$$b'=\frac{b}{2} \Rightarrow \Delta'=b'^2-ac \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$$

دقت داشته باشید که جواب‌های که از طریق Δ' به دست می‌آید همان جواب‌های اصلی معادله است که از طریق Δ به دست می‌آید.

مثال ۴.

$$6x^2-12x-18=0$$

$$\Delta' \text{روش} \Rightarrow b'=\frac{-12}{2}=-6$$

$$\Delta'=(-6)^2-6\times(-18)=144 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\cancelto{12}{\sqrt{144}}}{6}=3,-1$$

$$\Delta \text{روش} \Rightarrow \Delta=(-12)^2-4\times6\times(-18)=576 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{576}}{2\times6}=3\ ,\ -1$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در استفاده از Δ، ضرایب بسیار بزرگ می‌شوند و احتمال اشتباه محاسباتی زیاد می‌شود.

حالت‌های خاص معادله درجه ۲

اگر معادله درجه دوم را به‌صورت $ax^2+bx+c=0$ در نظر بگیریم با توجه به ضرایب معادله حالت‌های خاص پیش می‌آید که یافتن جواب معادله راحت‌تر و سریع‌تر خواهد بود.

۱) $c=0$ (ضریب مستقل از x صفر باشد)

$$c=0 \Rightarrow ax^2+bx=0 \Rightarrow x(ax+b)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

بنابراین اگر c (ضریب ثابت) صفر باشد یک جواب معادله صفر و جواب دیگر $-\dfrac{b}{a}$ است.

۲) $b=0$

$$b=0 \Rightarrow ax^2+c=0 \Rightarrow ax^2=-c \Rightarrow x^2=-\frac{c}{a} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

بنابراین اگر b صفر باشد، معادله دو جواب دارد که قرینه یکدیگرند. البته اگر $-\dfrac{c}{a}$ یک عدد منفی باشد (a و c هم‌علامت باشند) معادله جواب ندارد.

۳) $b=0$ و $c=0$

$$b=c=0 \Rightarrow ax^2=0 \Rightarrow x=0$$

بنابراین اگر b و c هر دو صفر باشند معادله ریشهٔ مضاعف صفر دارد.

۴) $a+b+c=0$

$$a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

بنابراین اگر مجموع ضرایب معادله صفر باشد، یکی از ریشه‌های معادله ۱ و ریشه دیگر $\dfrac{c}{a}$ است.

درس اول: تعریف غیردقیق تابع

خیلی مهم است که درک درستی از مفهوم تابع داشته باشیم؛ لذا برای اینکه این اتفاق بیفتد سعی می‌کنیم با نگاه‌ها و تعابیر مختلفی تابع را تعریف کنیم. به این مثال توجه کنید:

فرض کنید شما در آزمونی شرکت کرده‌اید و برای اعلام نتایج آن آزمون یک ماشین (یا کامپیوتر) را در مدرسه قرار داده‌اند که هرکسی نام خود را وارد می‌کند و نمره خود را دریافت می‌کند. شما نام خود را وارد می‌کنید و به شما نمره ۱۸ را اعلام می‌کند و مابقی دانش آموزان نیز همین‌طور، مثلاً علی ۱۹، سینا ۱۷، کیوان ۱۸ و ... . اگر شما دوباره نام خود را به دستگاه بدهید و این بار نمره شما را ۱۹ اعلام کند، چه حسی به شما دست خواهد داد؟ مسلماً شما اعتمادتان را به ماشین از دست خواهید داد. چراکه به ازای وارد شدن اسم شما یک‌بار نمره ۱۸ و بار دیگر نمره ۱۹ را اعلام کرده است. این دستگاه یا کامپیوتر نمی‌تواند یک «تابع» باشد. به زبان خیلی ساده، «تابع» یک ماشین قابل‌اعتماد است؛ یعنی ماشینی که اگر به ازای یک سؤال یک جواب داد، به ازای آن سؤال جواب دیگری ندهد (هرچقدر هم که آن سؤال را تکرار کنیم). در ضمن اشکالی ندارد که به ازای سؤال‌های مختلف یک جواب یکسان بدهد، مثلاً چند دانش‌آموز همگی ۱۸ شده باشند.

برای تعریف دقیق‌تر تابع نیاز داریم با چند مفهوم دیگر آشنا شویم.

زوج مرتب

زوج‌مرتب همان‌طور که از اسمش پیداست، از دو مؤلفه تشکیل شده که ترتیب آن‌ها مهم است؛ یعنی مهم است کدام مؤلفه اول است و کدام مؤلفه دوم.

زوج‌مرتب‌ها را به‌صورت $(a$ و $b)$ نمایش می‌دهیم که در آن a مؤلفه اول و b مؤلفه دوم است. a و b می‌توانند هر چیزی باشند. مثلاً می‌توانیم زوج‌مرتب‌هایی داشته باشیم که مؤلفه اول نام دانش‌آموز و مؤلفه دوم نمره آزمون آن دانش‌آموز باشد.

... و (۱۸ و احمد) و (۱۸ و کیوان) و (۱۷ و سینا) و (۱۹ و علی)

معروف‌ترین زوج‌مرتبی که تابه‌حال شناخته‌اید، مختصات یک نقطه است. وقتی شما می‌گویید مختصات یک نقطه (۱- و ۲) است همه این تصور را خواهند داشت که این نقطه دارای طول ۲ و عرض ۱- می‌باشد؛ یعنی مؤلفه اول نشان‌دهنده طول و مؤلفه دوم نشان‌دهنده عرض نقطه است.

دو زوج‌مرتب زمانی باهم برابرند که مؤلفه‌های اول آن‌ها باهم و مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز باهم برابر باشند؛ بنابراین ۲ زوج‌مرتب (۴- و ۲) و (۲ و ۴-) باهم برابر نیستند.

مفهوم رابطه

یک رابطه، مجموعه‌ای است از زوج‌مرتب‌هایی که مؤلفه‌های اول آن از یک مجموعه (مثل A) و مؤلفه‌های دوم آن از یک مجموعه (مثل B) انتخاب شده باشند. در این صورت می‌گوییم یک رابطه از A به B داریم.

به‌عنوان‌مثال اگر $A=\{a\ ,\ b\}$ و $B=\{۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳\}$ باشد، رابطه‌های زیر را از A به B تعریف کرده‌ایم.

$$D=\{(a\ ,\ ۱)\ ,\ (a\ ,\ ۳)\ ,\ (b\ ,\ ۱)\}$$

$$E=\{(a\ ,\ ۲)\ ,\ (a\ ,\ ۳)\ ,\ (b\ ,\ ۱)\ ,\ (b\ ,\ ۲)\}$$

$$F=\{(a\ ,\ ۱)\ ,\ (a\ ,\ ۲)\ ,\ (a\ ,\ ۳)\ ,\ (b\ ,\ ۱)\ ,\ (b\ ,\ ۲)\ ,\ (b\ ,\ ۳)\}$$

برای نام‌گذاری رابطه‌ها (همانند مجموعه‌ها) از حروف بزرگ استفاده می‌کنیم.

پاسخگو باش

برای ۲ مجموعه $A=\{a\ ,\ b\}$ و $B=\{۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳\}$ چند رابطه مختلف می‌توان از A به B تعریف کرد؟

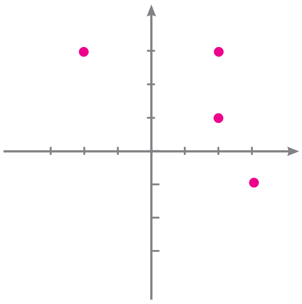
روش‌های نمایش یک رابطه

۱) به‌صورت یک مجموعه

با توجه به تعریف رابطه، می‌توان آن را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌ها نمایش داد. مثلاً:

$$C=\{(a\ ,\ ۱)\ ,(a\ ,\ ۳)\ ,\ (b\ ,\ ۲)\ ,\ (b\ ,\ ۳)\}$$

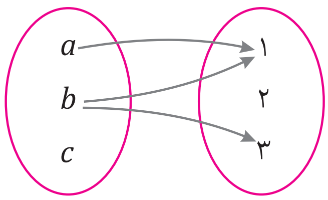
۲) نمودار در دستگاه مختصات



اگر هر زوج‌مرتب را به‌صورت مختصات یک نقطه در نظر بگیریم، می‌توانیم زوج‌مرتب‌های یک رابطه را به‌صورت تعدادی نقطه در دستگاه مختصات نمایش دهیم. مؤلفه اول نشان‌دهنده طول نقطه و مؤلفه دوم عرض آن خواهد بود. مثلاً:

$$C=\{(۲\ ,\ ۱)\ ,\ (۳\ ,\ -۱)\ ,\ (-۲\ ,\ ۳)\ ,\ (۲\ ,\ ۳)\}$$

۳) نمودار ون



اگر رابطه‌ای از A به B تعریف شده باشد، می‌توانیم با نشان دادن اعضای A و B به شکل روبه‌رو و ارتباط بین عضوهای آن رابطه را نمایش دهیم. هر زوج‌مرتب را به‌صورت یک پیکان نمایش می‌دهیم.

$$C=\{(a\ ,\ ۱)\ ,\ (b\ ,\ ۱)\ ,\ (b\ ,\ ۳)\}$$

۴) جدول

طول قد cm	۱۰۰	۱۷۰	۱۷۰	۱۲۰
وزن	۲۵	۶۵	۷۵	۴۰

گاهی برای نمایش یک رابطه از جدول استفاده می‌کنیم. مثلاً رابطه طول قد و وزن چند نفر را به‌صورت روبه‌رو می‌توان نمایش داد.

$$C=\{(۱۰۰\,,۲۵)\ ,\ (۱۷۰\,,۶۵)\ ,\ (۱۷۰\,,۷۵)\ ,\ (۱۲۰\,,۴۰)\}$$

۵) توصیف زوج مرتب‌های رابطه با نمادهای ریاضی

گاهی به‌جای نمایش تک‌تک زوج‌مرتب‌های یک رابطه، آن‌ها را توصیف می‌کنیم. مثلاً وقتی می‌گوییم:

$$R=\{(x\,,\,y)\,|\,x\,,\,y\in A\,,\,x=y+۱\}\,,\,A=\{۱\,,۲\,,۳\}$$

رابطهٔ R را به این صورت تعریف کرده‌ایم که شامل زوج‌مرتب‌هایی می‌شود که مؤلفه‌های اول و دوم آن‌ها از مجموعه A انتخاب می‌شود و مؤلفه اول هر زوج‌مرتب یک واحد از مؤلفه دوم آن بیشتر است. اگر بخواهیم زوج‌مرتب‌های رابطه R را برحسب توصیفی که انجام‌شده نمایش دهیم، خواهیم داشت:

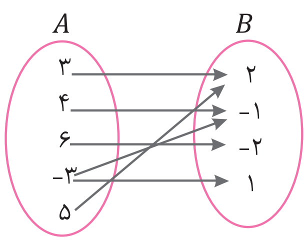
$$R=\{(۲\,,۱)\,,(۳\,,۲)\}$$

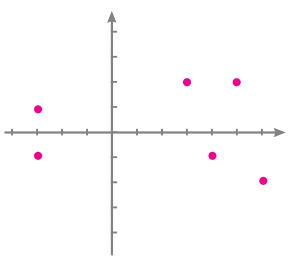
مثال ۱. رابطه D به‌صورت زیر تعریف شده است. آن را به صورت‌های مختلف (نمودار، نمودار ون و جدول) نمایش دهید.

$$D=\{(۳\,,۲)\ ,\ (۴\,,-۱)\ ,\ (۶\,,-۲)\ ,\ (-۳\,,-۱)\ ,\ (۵\,,۲)\ ,\ (-۳\,,۱)\}$$

پاسخ:

مولفه اول	۳	۴	۶	-۳	۵	-۳
مولفه دوم	۲	-۱	-۲	-۱	۲	۱





تعریف تابع

حال که با مفهوم رابطه (به‌عنوان مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌ها) آشنا شده‌ایم، می‌توانیم تعریف دقیقی از تابع ارائه کنیم.

تابع رابطه‌ای است که در آن هیچ دو زوج‌مرتبی با مؤلفه اول یکسان و مؤلفه دوم متفاوت وجود نداشته باشد؛ یعنی اگر دو زوج‌مرتب داشته باشیم که مؤلفه اول آن‌ها یکسان باشد، مؤلفه دوم آن‌ها نیز باید یکسان باشد، بنابراین فرض می‌کنیم هر رابطه یک تابع است مگر خلاف آن ثابت شود. به چند مثال توجه کنید.

مجموعه {(۲ , ۱) , (۱ , ۳−) , (۴ , ۲) , (۳ , ۲)} یک تابع است؛

ولی مجموعه {(۲ , ۷) , (۵ , ۳) , (۱ , ۴) , (۲− , ۳)} یک تابع نیست؛

زیرا دو زوج‌مرتب (۲- و ۳) و (۵ و ۳) در آن وجود دارد که مؤلفه اول یکسان (عدد ۳) دارند ولی مؤلفه دوم آن‌ها متفاوت است. مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌ها را در نظر بگیرید که مؤلفه اول نام یک دانش‌آموز است و مؤلفه دوم نام دانش‌آموز دیگری است که با او دوست است. این مجموعه احتمالاً یک تابع نیست؛ زیرا مثلاً علی می‌تواند هم با سینا دوست باشد و هم با کیوان؛ یعنی زوج‌مرتب‌های (سینا و علی) و (کیوان و علی) در این مجموعه هستند که مؤلفه اول یکسان و مؤلفه دوم متفاوت دارند. توجه کنید که اگر هر دانش‌آموز حداکثر با یک دانش‌آموز دوست باشد، این رابطه معرف یک تابع است.

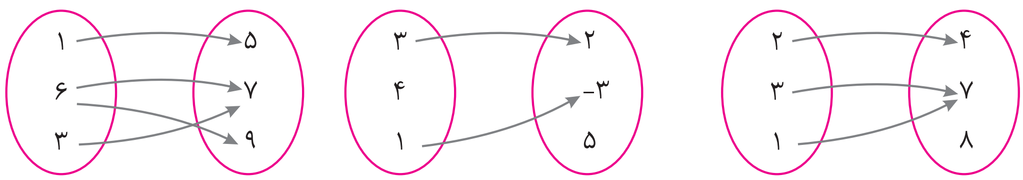
تشخیص تابع بودن یک رابطه در حالت‌های مختلف

۱) نمایش زوج مرتبی

در این حالت کافی است ابتدا مؤلفه‌های اول زوج‌مرتب‌ها را بررسی کنیم. اگر همگی متفاوت بودند که تابع است، اگر دو مؤلفه اول یکسان پیدا شد، مؤلفه دوم آن‌ها را چک می‌کنیم. اگر متفاوت بودند تابع نیست و اگر یکسان بودند، تابع است.

۲) نمایش با نمودار ون

رابطه R از مجموعه A به B که با نمودار ون نمایش داده شده است، تابع است اگر از هر عضو مجموعه اول (A) دقیقاً یک پیکان خارج شود (نه کمتر و نه بیشتر) یعنی از هیچ عضو مجموعه اول (A) دو پیکان یا بیشتر خارج نشود و بدون پیکان هم نباشد. مثلاً:

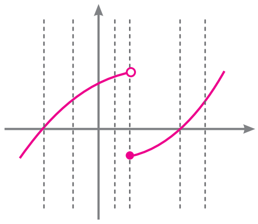


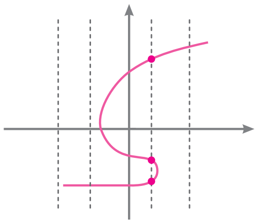
تابع است. — تابع نیست: از ۴ پیکانی خارج نشده است. — تابع نیست: از ۶ بیش از یک پیکان خارج شده است.

۳) نمایش با نمودار (در دستگاه مختصات)

توجه داشته باشید وقتی می‌گوییم یک نمودار در دستگاه مختصات متعلق به یک رابطه یا تابع است؛ یعنی هر نقطه از آن نمودار نشان‌دهنده یک زوج‌مرتب از آن رابطه یا تابع است و به ازای هر زوج‌مرتب از آن رابطه یا تابع حتماً یک نقطه بر روی نمودار وجود دارد.

به‌این ترتیب برای تشخیص تابع بودن از روی نمودار می‌بایست ببینیم که آیا دو نقطه با مؤلفه اول (طول) یکسان و مؤلفه دوم (عرض) متفاوت بر روی نمودار وجود دارد یا نه. با توجه به اینکه نقاط با طول یکسان بر روی یک خط قائم قرار می‌گیرند، برای تشخیص تابع بودن کافی است خطوط قائم بر روی نمودار رسم می‌کنیم. اگر حتی یک خط قائم نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، نمودار متعلق به یک تابع نخواهد بود. مثلاً:


تابع است.


تابع نیست.

۴) توصیف زوج مرتب‌های رابطه

گاهی نمایش یک رابطه با توصیف زوج‌مرتب‌های آن انجام می‌شود، مثل:

$$R=\{(x\,,\,y)\mid x\,,y\in \mathbb{Z}\,,\,x+y=۵\}$$

در این حالت برای تشخیص تابع بودن یا نبودن این رابطه می‌بایست حکم $x=x' \;\Rightarrow\; y=y'$ را بررسی کنیم؛ یعنی ببینیم اگر دو مؤلفه اول یکسان داشته باشیم، آیا به ازای آن‌ها، مؤلفه‌های دوم متفاوت خواهیم داشت یا فقط مؤلفه‌های دوم یکسان ایجاد می‌شود. مثلاً در همین مثالی که در بالا ذکر شد خواهیم داشت:

$$x+y=۵ \;\Rightarrow\; y=۵-x$$

$$x=x' \;\Rightarrow\; -x=-x' \;\Rightarrow\; ۵-x=۵-x' \;\Rightarrow\; y=y'$$

یعنی اگر مؤلفه‌های اول x و x' یکسان باشند، مؤلفه‌های دوم y و y' مربوط به آن‌ها نیز با یکدیگر برابرند پس این رابطه یک تابع است.

مثال ۲. کدام‌یک از رابطه‌های زیر یک تابع هستند.

الف) $R_۱=\left\{(x\,,\,y)\,\middle|\,x\,,\,y\in \mathbb{R}\,,\,x^۲+y^۲=۹\right\}$

ب) $R_۲=\left\{(x\,,\,y)\,\middle|\,x\,,\,y\in \mathbb{N}\,,\,x^۲+y^۲=۹\right\}$

پاسخ:

الف)

$$x=x' \;\Rightarrow\; x^۲=x'^۲ \;\Rightarrow\; ۹-x^۲=۹-x'^۲ \;\Rightarrow\; y^۲=y'^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=y' \\ y=-y' \end{cases} \Rightarrow \quad \text{تابع نیست.} \xrightarrow{\text{مثال نقض}} \begin{matrix}(۰\,,\,۳)\\(۰\,,\,-۳)\end{matrix}$$

چون از یک x و x' یکسان به y و y' متفاوت رسیده‌ایم، پس رابطه تابع نیست.

ب) $y^۲=۹-x^۲$

$$x=x' \;\Rightarrow\; x^۲=x'^۲ \;\Rightarrow\; ۹-x^۲=۹-x'^۲ \;\Rightarrow\; y^۲=y'^۲ \;\Rightarrow\; \begin{cases} y=y' \\ y=-y' \quad \text{این حالت رخ نمی‌دهد.} \end{cases}$$

با توجه به توصیف زوج‌مرتب‌ها در رابطه $R_۲$ که y و y' را عدد طبیعی معرفی کرده است، y و y' نمی‌توانند قرینه یکدیگر باشند و لذا فقط می‌توانند برابر باشند؛ بنابراین رابطه $R_۲$ یک تابع است.

مثال ۳. a و b را چنان بیابید تا رابطه زیر یک تابع باشد:

$$R=\{(۵\ ,\ a+۴)\ ,\ (a+۲\ ,\ b+۱)\ ,\ (۵\ ,\ ۳)\ ,\ (۱\ ,\ ۴)\ ,\ (۳\ ,\ ۷)\}$$

پاسخ:

به مؤلفه‌های اول زوج‌مرتب‌ها دقت می‌کنیم. مشاهده می‌شود که دو زوج‌مرتب (۳ و ۵) و $(۵\ ,\ a+۴)$ دارای مؤلفه اول یکسان هستند. پس مؤلفه دوم آن‌ها نیز باید یکسان باشد.

$$۳=a+۴\ \Rightarrow a=-۱$$

اگر $a=-۱$ را در رابطه قرار دهیم، زوج‌مرتب $(a+۲\ ,\ b+۱)$ به‌صورت $(۱\ ,\ b+۱)$ خواهد بود که مؤلفه اول آن با زوج‌مرتب (۴ و ۱) یکسان است؛ بنابراین:

$$\left.\begin{matrix}(۱\ ,\ ۴)\\(۱\ ,\ b+۱)\end{matrix}\right\}\Rightarrow b+۱=۴\ \Rightarrow\ b=۳$$

مثال ۴. مشخص کنید کدام‌یک از رابطه‌های زیر تابع هستند و کدام نیستند.

$$R_۱=\{(۲\ ,\ ۳)\ ,\ (۴\ ,\ ۵)\ ,\ (۳\ ,\ -۱)\ ,\ (۲\ ,\ ۳)\ ,\ (۵\ ,\ ۲)\}$$
$$R_۲=\{(۳\ ,\ ۲)\ ,\ (۴\ ,\ ۵)\ ,\ (۲\ ,\ ۳)\ ,\ (۵\ ,\ ۱)\ ,\ (۷\ ,\ ۵)\}$$
$$R_۳=\{(۵\ ,\ ۲)\ ,\ (۴\ ,\ ۵)\ ,\ (۲\ ,\ ۳)\ ,\ (۵\ ,\ ۴)\ ,\ (۷\ ,\ ۳)\}$$
$$R_۴=\{(۵\ ,\ ۳)\}$$
$$R_۵=\{\ \}$$

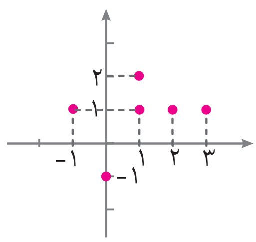
$R_۶$: مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌هایی که ارتباط بین قد و وزن افراد مختلف را نشان می‌دهد.

$R_۷$: مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌هایی که ارتباط بین هر دانش‌آموز و پدرش را مشخص می‌کند (مؤلفه اول دانش‌آموز است).

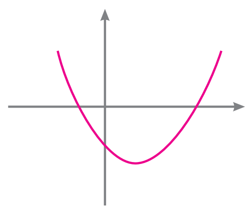
$: R_۸$

مولفه اول	۳	۴	۵	۳	۲
مولفه دوم	−۲	۱	۲	۳	۳

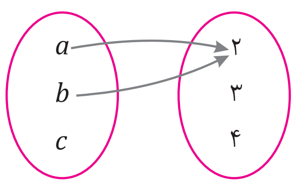
$: R_۹$



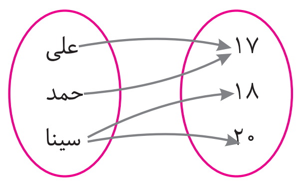
$: R_{۱۰}$



$: R_{۱۱}$



$: R_{۱۲}$



پاسخ:

R_1 و R_2 تابع هستند؛ زیرا زوج مرتب‌هایی با مؤلفه اول یکسان و مؤلفه دوم متفاوت در آن‌ها وجود ندارد.

R_3 تابع نیست؛ زیرا دو زوج‌مرتب(۲ و ۵) و (۴ و ۵) (مؤلفه اول یکسان و مؤلفه دوم مختلف) در آن وجود دارد.

R_4 و R_5 تابع هستند؛ زیرا اصلاً دو زوج‌مرتب ندارند که بخواهد تابع بودن را نقض کند.

R_6 تابع نیست؛ زیرا می‌تواند ۲ نفر با قد یکسان و وزن متفاوت وجود داشته باشد؛ یعنی دو زوج‌مرتب با مؤلفه اول یکسان و دوم متفاوت.

R_7 تابع است؛ زیرا هر دانش‌آموز فقط یک پدر دارد. البته اگر مؤلفه اول نام پدر بود در آن صورت تابع نبود؛ زیرا بعضی پدرها بیش از یک فرزند دارند.

R_8 تابع نیست. زیرا دو زوج مرتب (۳ ,۲-) و (۳ ,۳) در آن وجود دارد.

R_9 تابع نیست؛ زیرا دو نقطه با مختصات (۱ و ۱) و (۲ و ۱) در آن وجود دارد.

R_{10} تابع است. هیچ دو زوج‌مرتبی (نقطه‌ای) نمی‌توان روی نمودار پیدا کرد که مؤلفه اول (طول) یکسان و مؤلفه دوم (عرض) متفاوت داشته باشند.

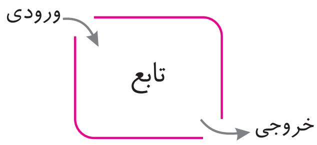
R_{11} تابع نیست، زیرا از c پیکانی خارج نشده است.

R_{12} تابع نیست؛ زیرا سینا هم به ۱۸ وصل شده است و هم به ۲۰ یعنی دو زوج‌مرتب (۱۸ و سینا) و (۲۰ و سینا) داریم.

تعبیر دیگری از تابع

همان‌طور که در ابتدای فصل گفتیم، می‌توانیم از تابع به‌عنوان یک ماشین قابل‌اعتماد نام ببریم که اگر به ازای یک سؤال یک جواب داد، به ازای آن سؤال هر بار همان جواب قبلی را بدهد.

فرض کنید شکل روبه‌رو نمایش یک ماشین به‌عنوان یک تابع باشد. سؤال به‌عنوان ورودی تابع و پاسخ‌های ماشین به‌عنوان خروجی تابع تلقی می‌شوند. درواقع تابع مجموعه‌ای است از زوج مرتب‌هایی که مؤلفه‌های اول آن‌ها را ورودی‌های تابع و مؤلفه‌های دوم آن‌ها را خروجی‌های تابع تشکیل می‌دهند. می‌توانیم بگوییم یک تابع ماشینی است که ورودی‌ها را به خروجی‌ها تبدیل می‌کند.



{(ورودی۱ ، خروجی۱) , (ورودی۲ ، خروجی۲) ، .....}

جالب است بدانی

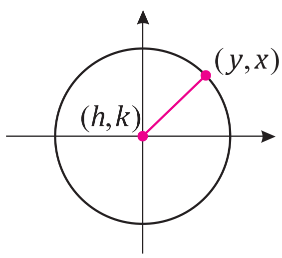
تاریخ مفهوم تابع

مفهوم تابع در آثار بابلی‌های باستان به چشم می‌خورد. بابلی‌ها جداولی برای مربع و معکوس اعداد طبیعی داشتند. ریاضی بین بابلی‌های باستان رشد چشم‌گیری کرده بود که شاید تأثیر جدی بر ریاضیدانان یونانی چند قرن بعد گذاشت. توابع مثلثاتی توسط هیپارخوس یونانی موردبررسی قرار گرفت و پیدا کردن ریشه‌های یک چندجمله‌ای از اساسی‌ترین دغدغه‌های ریاضیدانان یونانی بوده است، به همین ترتیب می‌توان گفت آن‌ها با توابع چندجمله‌ای هم آشنا بوده‌اند. باید توجه کرد که هنگامی‌که از مفهوم تابع نزد ریاضیدانان دوران باستان سخن می‌گوییم منظورمان تنها این است که آنان رابطه‌ای بین یک سری ورودی و یک سری خروجی بر مبنای ضابطه‌ای خاص را تشخیص می‌دادند.

واژه تابع برای نخستین بار در آثار گوتفرید لایب نیتس، ریاضیدان و فیلسوف آلمانی در قرن هفدهم مشاهده شد. او برای نسبت دادن هر کمیتی به نمودار، تابعی در نظر می‌گرفت. به‌عنوان مثال، شیب هر نقطه از نمودار یا عرض نقطه تابعی از طول آن است. در اینجا، ذکر این نکته جالب توجه است که علی‌رغم شهرت نیوتون و کشف هم‌زمان حساب دیفرانسیل توسط او و لایب نیتس به‌صورت مستقل، نمادگذاری‌ها و نام‌گذاری‌ها به شیوه لایب نیتس توسعه پیدا کرد و ما امروزه از قراردادهای لایب نیتس استفاده می‌کنیم و نه نیوتون.

تعریف لایب‌نیتس به آنچه امروز از تابع می‌شناسیم بسیار نزدیک است با این تفاوت که تعریف امروزی ما وابستگی و ارتباط ضروری با شکل هندسی یک نمودار ندارد.

چند سال بعد از لایب نیتس، یوهان برنولی، ریاضیدان ایتالیایی هر عبارت جبری ساخته‌شده از یک متغیر و چند ثابت را تابع نامید و درنهایت این اولر، ریاضی‌دان معروف سوییسی بود که نماد $f(x)$ را برای نشان دادن تابعی برحسب x پیشنهاد داد و به کار برد. به نظر می‌رسد که برای اولر تابع بودن یک کمیت عبارت است از تغییر آن کمیت به ازای تغییر کمیت دیگر. به‌این‌ترتیب احتمالاً اولر واژه تابع را به معادله حاکم بر یک دایره هم اطلاق می‌کرده است؛ زیرا می‌توان گفت که در معادله



$x^2+y^2=r^2$ یک دایره، با تغییر عوض می‌شود.

شکل ۱ - دایره، بنابر تعریف امروزه، معرف تابع نیست.

تعریف تابع به‌عنوان یک تناظر تک مقداری از یک مجموعه به مجموعه دیگر (این شرط که هیچ مؤلفه اولی با بیش از یک مؤلفه دوم نظیر نشود) برای اولین بار در اواخر قرن نوزدهم توسط ریچارد دده‌کیند، ریاضیدان آلمانی ارائه شد. این همان تعریفی است که امروزه به‌صورت متعارف از تابع می‌پذیریم. برای دده‌کیند (و همچنین برای ما) تناظر ۱ در شکل ۲ معرف تابع است و تناظر ۲ معرف تابع نیست.

تناظر ۱ — از مجموعه سمت چپ به مجموعه سمت راست

تناظر ۲ — از مجموعه سمت چپ به مجموعه سمت راست

شکل ۲ - بنا به تعریف دده کیند از تابع، تناظر ۱ تابع است و تناظر ۲ تابع نیست.

۹. کدام‌یک از روابط زیر تابع نیست؟

۱) $|y| = -۴x^۲ + ۴x - ۱$

۲) $x^۲ + y^۲ + ۴x + ۲y + ۵ = ۰$

۳) $y = \sqrt{x^۲ - ۴} \pm \sqrt{۴ - x^۲}$

۴) $y^۲ + ۴yx = x - ۱$

۱۰. اگر رابطهٔ $R = \{(۳ , ۴b) , (۲ , a-۱) , (۳ , b^۲ + a) , (۲ , ۳)\}$ یک تابع باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۶   ۴) ۸

۱۱. کدام‌یک از گزینه‌های زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟

۱) $y = \begin{cases} x^۲ & x < ۰ \\ x & -۱ < x < ۱ \\ -x^۲ & x \geq ۱ \end{cases}$

۲) $x + |y| - x^۲ = ۰$

۳) $x^۲ + y^۲ + ۲y + ۱ = ۰$

۴) $y^۲ - y = ۰$

۱۲. به ازای چه مقدار m رابطهٔ روبرو بیانگر یک تابع است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x \geq ۳ \\ ۴x + m & x \leq ۳ \end{cases}$$

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴-   ۴) ۳-

۱۳. کدام‌یک از رابطه‌های زیر تابع است؟

۱) $|x| + |y^۲ - ۱| = ۰$

۲) $|x| - |y| = ۰$

۳) $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۳y + ۱ = ۰$

۴) $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۳y + \frac{۱۳}{۴} = ۰$

۱۴. رابطه R با معادله $|y| = x$ به‌طوری‌که $x \in N$ باشد ....

۱) یک رابطه است.

۲) یک تابع است.

۳) یک رابطه نیست بلکه تابع است.

۴) هم رابطه و هم تابع است.

۱۵. رابطه $y = f(x)$ تابع است هرگاه ....

۱) برای هر y فقط یک x موجود باشد.

۲) برای مقدار x حداکثر یک مقدار y موجود باشد.

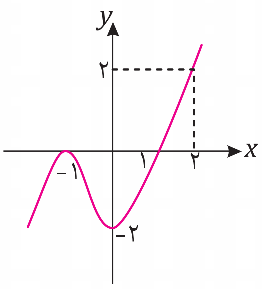
۳) برای هر x حداقل یک y موجود باشد.

۴) برای هر y حداقل یک x موجود باشد.

۱۶. اگر تابع $f = \{(a+b , ۱-a) , (۳-b , a-b)\}$ فقط یک عضو داشته باشد، آنگاه:

۱) $ab = \frac{۱}{۲}$ ۲) $ab = ۱$ ۳) $\frac{a}{b} = ۲$ ۴) $\frac{a}{b} = \frac{۱}{۲}$

۱۷. با توجه به شکل مقابل، حاصل کسر $\frac{f(۲) - f(۱)}{f(۰) - f(-۱)}$ کدام است؟



۱) ۱-

۲) ۲-

۳) ۳-

۴) ۴-

۱۸. اگر $f=\{(-۲\,,a+۲)\,,(۳\,,۷)\,,(-۲\,,۳a)\,,(۳\,,۲b-۱)\}$ تابع باشد، $a+b$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۴- ۴) ۵-

۱۹. در کدام گزینه زیر y تابعی از x است؟

۱) $x^۲+y^۲=۱$ ۲) $x^۲-y^۲=۱$ ۳) $x^۳-y^۲=۱$ ۴) $x^۲-y^۳=۱$

۲۰. اگر رابطهٔ $f=\{(۱\,,a^۲-۳)\,,(a^۲+۲a\,,b^۳-۱)\,,(۱\,,-۲a-۴)\,,(-۱\,,a^۲-b^۳)\}$ تابع باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۱. اگر a و b اعداد طبیعی باشند، کدام گزینه می‌تواند یک تابع باشد؟

۱) $A=\{(۴\,,-\sqrt{۲})\,,(۴\,,a^۲)\}$ ۲) $B=\{(۵\,,a^۲+b^۴)\,,(۵\,,-۱۲)\}$

۳) $C=\{(b\,,-۹)\,,(b\,,a)\}$ ۴) $D=\{(a\,,-۱۷)\,,(a\,,۲a-b)\}$

دامنه و برد تابع

۲۲. دامنه تعریف تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x-۳}}+\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$ کدام فاصله است؟

۱) $(۰,۱]$ ۲) $[۰\ \ ۳]$ ۳) $[۱\,,۲]$ ۴) $[۲\,,۳]$

۲۳. بزرگ‌ترین دامنهٔ تابع $y=\frac{\sqrt{x^۲-۱}}{\sqrt{|x|-x}}$ برابر است با:

۱) $-۱\le x\le ۱$ ۲) $x>۱$ ۳) $-۱\le x<۰$ ۴) $x\le -۱$

۲۴. دامنهٔ تعریف تابع $y=\sqrt{x+|x|}$ کدام است؟

۱) $x<۰$ ۲) R ۳) $D_f=\{۰\}$ ۴) $x\ge ۰$

۲۵. دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۲x}+\sqrt{\frac{-۱}{x^۲+۲x}}$ کدام است؟

۱) $-۲<x<۰$ ۲) $x<-۲$ یا $x>۰$ ۳) ϕ ۴) $\{۰\,,-۲\}$

۲۶. دامنهٔ تابع $y=\frac{\sqrt{x-۲}}{|x|-۴}$ برابر است با:

۱) $x\ge ۲$ ۲) $x\ge ۲\,,x\ne ۴$

۳) $x\ge -۴$ ۴) $x\ge ۰\,,x^۲\ne ۱۶$

۲۷. دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۲x-۱}}$ برابر است با:

۱) $\left(\frac{۱}{۴},۱\right]$ ۲) $(\frac{۱}{۲},۱)$ ۳) $\left[\frac{۱}{۲},۱\right]$ ۴) $\left[\frac{۱}{۲},۱\right)$

۲۸. دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x+۳}}+\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$ کدام است؟

۱) $(۰\,,۱]$ ۲) $(۰\,,۲]$ ۳) $[۱\,,۲]$ ۴) $(۲\,,۳)$

۲۹. «مجموعهٔ اعداد طبیعی» زیرمجموعه دامنهٔ «کدام تابع» است؟

۱) $y=\sqrt{x-۳}$ ۲) $y=\dfrac{۱}{۳+x}$ ۳) $y=\sqrt{۳-x}$ ۴) $y=\dfrac{۱}{۳-x}$

۳۰. برد تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{x^۲+۴}{x^۲+۲}$ در کدام بازه است؟

۱) $[۱,۲)$ ۲) $(۱,۲]$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $[۱,۴)]$

۳۱. اگر $D_f=[۲,۴]$ و $D_g=[۱,۲]$ دامنه تابع $g(\frac{x}{۲})+۲f(۲x)$ کدام است؟

۱) $\{۲\}$ ۲) $[۱,۲]$ ۳) $[۱,۳]$ ۴) $[۱,۴]$

۳۲. دامنه تعریف تابع $y=\sqrt{\dfrac{۳+|x|}{۳-|x-۱|}}$ کدام است؟

۱) $(-۴,۱)$ ۲) $(-۴,۰)$ ۳) $(-۳,۳)$ ۴) $(-۲,۴)$

۳۳. در دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۲x^۲-x}{۳x^۳-۴x^۲-۴x}$ چند عدد صحیح وجود ندارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) تمام اعداد صحیح، در دامنه می‌باشند.

۳۴. دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{(x^۲-۴)\times|x^۲-x|}$ چه تعداد از اعداد صحیح را شامل نمی‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵. برد تابع $y=۲x^۲-۳x-۱$ برابر است با:

۱) $[-۱,+\infty)$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $\left[\dfrac{-۱۷}{۸},+\infty\right)$ ۴) $\left[\dfrac{۱۷}{۴},+\infty\right)$

۳۶. برد تابع $y=\sqrt{x^۲-|x^۲|}$ برابر است با:

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $[۰,+۱)$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $\{۰\}$

۳۷. تابع $y=\dfrac{۲x-۱}{x^۲+kx+۱}$ به ازای کدام مقدار k همواره معین است؟

۱) $k=۱۰$ ۲) $k=۵$ ۳) $k=-۳$ ۴) $k=\dfrac{۱}{۲}$

۳۸. بُرد تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}+۳$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $[۳,+\infty)$ ۴) $(۳,+\infty)$

۳۹. رابطه $\left\{(x,y)\middle|x^۳+y^۲-۲y=۰\right\}$ در مجموعه اعداد حقیقی داده شده است. دامنه این رابطه برابر است با:

۱) $[۱,\infty)$ ۲) $(-\infty,۱)$ ۳) $(-\infty,۱]$ ۴) $(۱,\infty)$

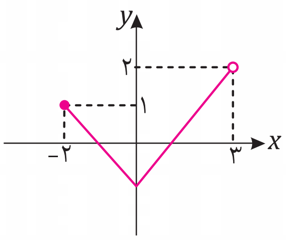
۴۰. اگر برد تابع $f(x)=\frac{۲}{x+۲}$ به‌صورت مجموعهٔ $\{-۱,۱,۲\}$ باشد، دامنهٔ این تابع برابر کدام مجموعه است؟

۱) $\{-۴,-۲,۰\}$ ۲) $\{۳,-۲,۰\}$ ۳) $\{-۴,-۱,۰\}$ ۴) $\{۴,-۱,۱\}$

۴۱. برد تابع $y=\frac{x^{۲}+۲x+۱}{x-۲}$ شامل کدام عدد زیر نمی‌شود؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) -۲

۴۲. در تابع زیر، اشتراک دامنه و برد تابع f برابر است با:



۱) $[-۱,۱]$ ۲) $[-۱,۲)$

۳) $[-۲,۳)$ ۴) $[-۲,۲)$

۴۳. دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۱-\frac{۲}{|x|}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-(-۲,۲)$ ۲) $[-۲,۲]$ ۳) $[-۲,+\infty)$ ۴) $(۰,۲]$

۴۴. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۴-\sqrt{۲x-۱}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}\leq x\leq\frac{۱۷}{۲}$ ۲) $x\leq\frac{۱۷}{۲}$ ۳) $x\geq\frac{۱}{۲}$ ۴) $x\geq\frac{۱۷}{۲}$

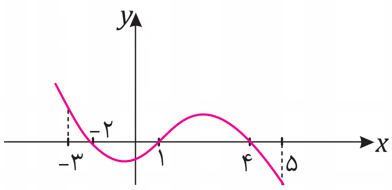
۴۵. اگر برد تابع $f(x)$ برابر $R_f=[-\sqrt{۳},۲]$ باشد، برد تابع $\sqrt{۲}f(x-۱)+۱$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۶. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{x^{۲}+۷}}{x^{۲}+ax+b}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{۱,۴\}$ است. $f(۳)$ چقدر است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۴۷. شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



۱) $[-۲,۰]\cup[۱,۴]$

۲) $[-۲,۱]\cup[۱,۴]$

۳) $[-۳,-۲]\cup[۴,۵]$

۴) $[-۲,-۱]\cup[۴,۵]$

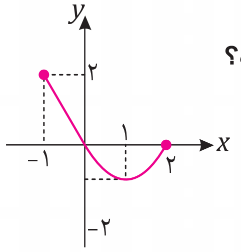
۴۸. اگر مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{R}|-۲<x<۲\}$، دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}+۳x$ باشد، آنگاه برد تابع با ضابطهٔ $y=|f(x)|$ کدام بازه است؟

۱) $(-۲,۱۰)$ ۲) $(۲,۱۰)$ ۳) $[۰,۱۰)$ ۴) $[\frac{۹}{۴},۱۰)$

۴۹. به ازای کدام مقادیر m، دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{mx^{۲}+mx+۱}$ تهی است؟

۱) $m>۰$ ۲) $-۴\leq m<۰$ ۳) $۰<m<۴$ ۴) هیچ مقداری از m

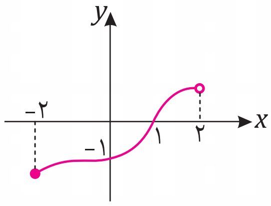
۵۰. اگر نمودار تابع f به‌صورت روبرو باشد، دامنهٔ تابع $y=\dfrac{1}{\sqrt{f(x)+1}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

۵۱. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{1+f(x)}$ کدام است؟



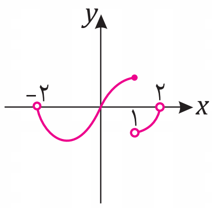
۱) $[-1,2)$ ۲) $(-1,2)$

۳) $[-2,2)$ ۴) $[0,2)$

۵۲. دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{0,-1\}$ ۳) $\mathbb{R}-\left\{0,-\frac{1}{2},-1\right\}$ ۴) $\mathbb{R}-\left\{0,-\frac{1}{2}\right\}$

۵۳. نمودار تابع $f(x_0)$ به‌صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^2-1)f(x)}$ کدام است؟



۱) $[-1,0]\cup\{1\}$

۲) $[-1,0]$

۳) $[-1,1]$

۴) $(-2,0]\cup[1\ \ 2)$

۵۴. با فرض اینکه دامنهٔ تعریف $f(x)$ فاصلهٔ $[-2,\infty)$ باشد، دامنهٔ تعریف $f(3x)$ کدام است؟

۱) $(-\infty,+\infty)$ ۲) $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$ ۳) $\left[-- \quad +\infty\right)$ ۴) $\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$

ضابطه تابع

۵۵. اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{|x|-4} & x\le 0\\ \dfrac{1}{x} & 0<x<1\\ x^2-x^4 & x\ge 1\end{cases}$ باشد، مقدار $f(f(2))-f(f(\frac{1}{2}))$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۰ ۳) ۱۰- ۴) ۱۴-

۵۶. اگر $f(x)=\begin{cases}1-2x^2 & x<1\\ x^4 & 1\le x\le 2\\ 16x-1 & x>2\end{cases}$ باشد، مقدار $2f(f(\frac{1}{2}))-f(f(\frac{3}{2}))$ کدام است؟

۱) ۸۰- ۲) ۷۹- ۳) ۷۹ ۴) ۸۰

۵۷. اگر برای تابع $y=x^{۲}+ax-b$ داشته باشیم $f(-۱)=۱\ ,\ f(۱)=۳$ حاصل ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\frac{-۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۵۸. اگر $f(x)=x^{۲}-۲x$ حاصل $f(x+۱)-f(x-۱)$ کدام است؟

۱) $۲x-۲$ ۲) $۲x-۴$ ۳) $۴x-۲$ ۴) $۴x-۴$

۵۹. اگر $f(۲x-۵)=ax^{۲}+x-۳a+۹$ و $f(-۷)=۰$ باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۴-

۶۰. اگر $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۲\sqrt{۲}x+۲}$ باشد، حاصل $f(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

۶۱. اگر $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ باشد، حاصل $\underbrace{f(f(...f(x)))}_{\text{۱۰۰۱بار}}$ کدام است؟

۱) x ۲) $۲x$ ۳) $\frac{x+۱}{x-۱}$ ۴) $\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)^{۱۰۰۱}$

۶۲. تابع $f(x)=۲x-x^{۲}$ با حاصل کدام عبارت، برابر نیست؟

۱) $f(x)-f(۲)$ ۲) $f(۲-x)$ ۳) $f(x)+f(۲)$ ۴) $f(۲+x)$

۶۳. مقادیر متغیر مستقل x و متغیر وابسته $f(x)$ مطابق جدول زیر است. حاصل $a+b$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

x	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
$f(x)$	۲	۱۲	۳۰	a	۹۰	b	۱۸۲

۱) ۱۸۸ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۷۸ ۴) ۱۵۶

۶۴. اگر $f(x+۱)=x^{۲}-۲x+۱$ باشد، تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $(x-۲)^{۲}$ ۲) $(x-۱)^{۲}$ ۳) $x^{۲}-۲x$ ۴) $(x+۲)^{۲}$

۶۵. مقدار تابع $f(x)=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}$ در نقاطی که $x+\frac{۱}{x}=۵$ باشد، کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۵ ۳) ۲۳ ۴) ۲۱

۶۶. با فرض $f\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right)=\left(۱-\frac{۲}{x+۱}\right)^{۲}$ آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $x^{۲}$ ۲) $(x-۱)^{۲}$ ۳) $(x+۱)^{۲}$ ۴) $\frac{۱}{x^{۲}}$

۶۷. اگر $f(x)=۲x$ و $f(g(x))=۲x+۲$ باشد، آنگاه:

۱) $g(x)=x-۱$ ۲) $g(x)=x+۲$ ۳) $g(x)=x+۱$ ۴) $g(x)=x-۲$

۶۸. اگر $f(\sqrt{x})=x+\sqrt{x}$ باشد، حاصل $f(۲)+f(۱)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹