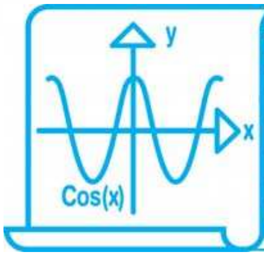
فهرست



فصل ۲ مثلثات

درس‌نامه و پاسخ این فصل را از صفحه ۲۲۴ تا صفحه ۲۶۵ بخوانید

۱ درجه و رادیان

صفحهٔ درس‌نامه: ۲۲۴
صفحهٔ پاسخ: ۲۲۶

۲۷۸- زاویهٔ ۴۰ درجه برحسب رادیان چند برابر زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ رادیان است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۹)*

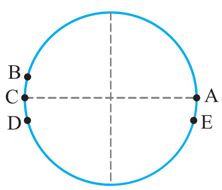
۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۲}{۲۷}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۷۹- مجموع دو زاویه برحسب رادیان $\frac{۲\pi}{۳}$ و تفاضل آن‌ها برحسب درجه، ۳۰° می‌باشد. اندازهٔ زاویهٔ بزرگ‌تر چند برابر اندازهٔ زاویهٔ کوچک‌تر است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۲۸۰- چند دقیقه طول می‌کشد تا عقربهٔ دقیقه‌شمار به اندازهٔ $۲/۵\pi$ رادیان دوران کند؟

۱) ۷۰ ۲) ۷۵ ۳) ۸۰ ۴) ۶۵

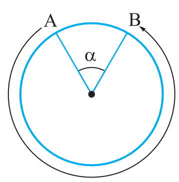


۲۸۱- روی دایره از نقطهٔ A در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازهٔ ۳ برابر شعاع حرکت می‌کنیم. در این صورت به کدام نقطه می‌رسیم؟

۱) B ۲) C
۳) D ۴) E

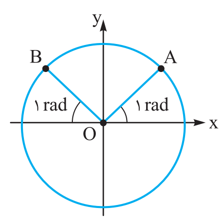
۲۸۲- حول دایره‌ای به شعاع ۵ کیلومتر، مسافت $\frac{۵\pi}{۳}$ کیلومتر را طی می‌کنیم. زاویهٔ مرکزی برحسب درجه کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۷۵°



۲۸۳- در شکل مقابل، طول کمان بزرگ‌تر AB برابر ۹π و زاویهٔ α برابر $\frac{\pi}{۵}$ است. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰
۳) $\frac{۹۰}{۱۹}$ ۴) $\frac{۴۸}{۱۹}$

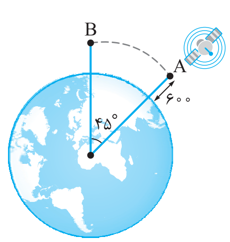


۲۸۴- اگر شعاع دایرهٔ مقابل برابر با ۲ واحد باشد. طول کمان AB کدام است؟

۱) ۲
۲) ۲π
۳) $۲\pi - ۴$
۴) $۴ - ۲\pi$

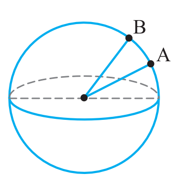
۲۸۵- در یک ساعت عقربه‌ای، نوک عقربهٔ دقیقه‌شمار در مدت‌زمان ۴۰ دقیقه مسافت ۶۰ سانتی‌متر را طی کرده است. طول عقربهٔ دقیقه‌شمار چند سانتی‌متر است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۹)*

۱) $\frac{۱۵}{\pi}$ ۲) ۱۵π ۳) $\frac{۴۵}{\pi}$ ۴) ۴۵π



۲۸۶- مطابق شکل، ماهواره‌ای در فاصلهٔ ۶۰۰ کیلومتری از سطح کرهٔ زمین در حال حرکت است. اگر در هر ساعت ماهواره مسافت ۱۰π کیلومتر را طی کند، چه‌قدر طول می‌کشد از نقطهٔ A به B برسد؟ (شعاع کرهٔ زمین ۶۴۰۰ km است.) *(برگرفته از کتاب درسی)*

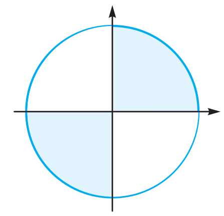
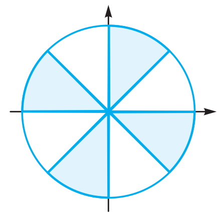
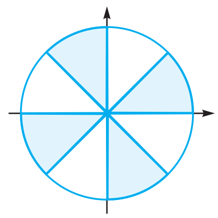
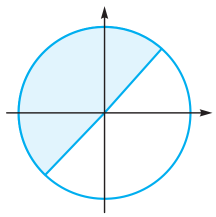
۱) ۱۶۰
۲) ۱۵۰
۳) ۱۷۰
۴) ۱۷۵



۲۸۷- دو شهر دارای طول جغرافیایی یکسان و عرض جغرافیایی ۱۰° و ۲۵° شمالی هستند. اگر شعاع زمین تقریباً ۶۴۰۰ کیلومتر باشد، فاصلهٔ این دو شهر بر روی سطح زمین چند کیلومتر است؟ $(\pi = ۳/۱۴)$ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۵۵۸ ۲) ۸۳۸
۳) ۱۶۷۵ ۴) ۲۵۱۴

۳۲۰- در چه قسمت‌هایی از دایرهٔ مثلثاتی $\sin x > \cos x$ است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۳۲۱- اگر $\frac{\pi}{۶} < x < \frac{\pi}{۴}$، کدام نامساوی نادرست است؟

۱) $\sqrt{\sin x} > \sqrt{\cos x}$ ۲) $\sin^{۲} x < \cos^{۲} x$ ۳) $\tan x < ۱$ ۴) $\cot x > ۱$

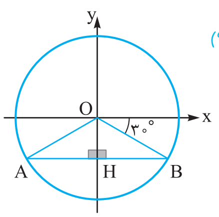
۳۲۲- کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\sin ۲۵^\circ < \sin ۲۶^\circ$ ۲) $\cos ۲۶^\circ < \cos ۲۷^\circ$ ۳) $\tan ۲۷^\circ < \tan ۲۸^\circ$ ۴) $\sin ۲۸^\circ = \cos ۶۲^\circ$

۳۲۳- مقدار کدام گزینه از بقیه کم‌تر است؟

۱) $\cos ۱$ ۲) $\cos ۲$ ۳) $\cos ۳$ ۴) $\cos ۴$

۳۲۴- در دایرهٔ مثلثاتی مقابل، $\frac{AB}{OH}$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)



۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۳۲۵- اگر α در محدودهٔ ۳۰° تا ۱۲۰° تغییر کند، $\sin\alpha$ در بازهٔ $[a,b]$ قرار می‌گیرد. مقدار $b-a$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$

۳۲۶- اگر α در ناحیهٔ دوم و $\sin\alpha = \frac{۳}{۴}$ باشد، حاصل $\cos\alpha(\cot\alpha - \tan\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۳۲۷- اگر $۲\sin x + ۳\cos y = ۵$ باشد، مقدار $\cos x + \sin y$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۳۲۸- حاصل عبارت $\frac{\sin ۰^\circ + \cos ۳۶۰^\circ}{\cot ۲۷۰^\circ + \cos ۱۸۰^\circ}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

۵ روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

صفحهٔ درس‌نامه: ۲۳۵
صفحهٔ پاسخ: ۲۳۷

۳۲۹- در یک دایرهٔ مثلثاتی زاویهٔ α را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا زاویهٔ β به دست آید. حاصل $\frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha\cos\alpha}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\tan\alpha$ ۴) $\tan\beta$

۳۳۰- نقطهٔ $P(x,y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی را نسبت به مبدأ قرینه می‌کنیم تا نقطهٔ P' به دست آید. در این صورت کدام نسبت مثلثاتی مربوط به نقاط P و P' با هم برابر است؟ $(x,y \neq ۰)$ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) سینوس ۲) کسینوس ۳) تانژانت ۴) هیچ‌کدام

۳۳۱- حاصل $\tan(\frac{-\pi}{۶}) + \tan(\frac{-\pi}{۳})$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) $\frac{-۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{-۴\sqrt{۳}}{۳}$

۳۳۲- مقدار $\cos(-\frac{۵\pi}{۶})$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۳۳- حاصل $\dfrac{\sin\frac{۲\pi}{۳}}{\sin\frac{۵\pi}{۶}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $-\dfrac{\sqrt{۳}}{۴}$

۳۳۴- حاصل $\sin(\theta-۱۸۰^\circ)\cos(\theta-۱۸۰^\circ)$ به ازای $\theta=۳۰^\circ$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $-\dfrac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\dfrac{۱}{۴}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۴}$

۳۳۵- اگر $\alpha+\beta=\pi$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\sin\alpha+\sin\beta=۰$ ۲) $\cos\alpha+\cos\beta=۰$ ۳) $\tan\alpha+\tan\beta=۰$ ۴) $\cot\alpha+\cot\beta=۰$

۳۳۶- حاصل $\cos(\alpha+\frac{۲\pi}{۳})+\cos(\alpha+\frac{۵\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) $\dfrac{۱}{۲}$

۳۳۷- در مثلث ABC اگر بدانیم $\sin\dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}=\cos\dfrac{\hat{C}}{۲}$، آن‌گاه این مثلث الزاماً:

۱) قائم‌الزاویه است. ۲) متساوی‌الاضلاع است. ۳) متساوی‌الساقین است. ۴) این رابطه در هر مثلثی برقرار است.

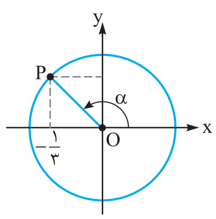
۳۳۸- کدام گزینه می‌تواند جواب معادلهٔ $\sin x=\cos(۲۰^\circ+x)$ باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۳۰° ۲) ۳۵° ۳) ۷۵° ۴) ۱۰۵°

۳۳۹- اگر $\tan\alpha=\cot\beta$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه می‌تواند صحیح باشد؟ $(\alpha,\beta\neq\frac{k\pi}{۴})$

۱) $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{۲}$ ۲) $\alpha=\beta+\dfrac{\pi}{۴}$ ۳) $\alpha+\beta=\dfrac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\alpha=\beta+\dfrac{۳\pi}{۴}$

۳۴۰- با توجه به شکل مقابل، اگر $P(-\frac{۱}{۳},y)$ و طول OP برابر یک واحد باشد، حاصل $A=۳\sin(\pi+\alpha)+۲\tan^۲\alpha$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)



۱) $۱۶+۲\sqrt{۲}$
۲) $۱۶-۲\sqrt{۲}$
۳) $۸+۳\sqrt{۲}$
۴) $۸-۳\sqrt{۲}$

۳۴۱- نقطهٔ $A(۱,۰)$ روی دایرهٔ مثلثاتی به اندازهٔ $\frac{۹\pi}{۴}$ رادیان در جهت چرخش عقربه‌های ساعت دوران می‌کند تا به نقطهٔ A' برسد. مجموع طول و عرض A' کدام است؟

۱) صفر ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $-\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۳۴۲- اگر $\tan\theta=۰/۲$ باشد، مقدار $\dfrac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) -۲ ۲) $۱/۲$ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۴۳- حاصل عبارت $\dfrac{\cos۲۸۵^\circ-\sin۲۵۵^\circ}{\sin۵۲۵^\circ-\sin۱۰۵^\circ}$، با فرض $\tan۱۵^\circ=۰/۲۸$، کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $-\dfrac{۱۶}{۹}$ ۲) $-\dfrac{۹}{۱۶}$ ۳) $\dfrac{۹}{۱۶}$ ۴) $\dfrac{۱۶}{۹}$

۳۴۴- حاصل عبارت $\dfrac{\sin۲۵۰^\circ+\sin۷۰۰^\circ}{\cos۵۶۰^\circ-\cos۱۱۰^\circ}$، با فرض $\tan۲۰^\circ=۰/۴$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $-\dfrac{۳}{۴}$ ۲) $\dfrac{۳}{۴}$ ۳) $\dfrac{۷}{۳}$ ۴) $\dfrac{۵}{۸}$

۳۴۵- حاصل عبارت $\tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}$، کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $-\dfrac{۳}{۲}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $\dfrac{۳}{۲}$

۳۴۶- حاصل عبارت $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $-\dfrac{۱}{۴}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۳) $\dfrac{۱}{۴}$ ۴) $\dfrac{۱}{۲}$

۳۴۷- اگر $\tan\theta = \frac{۳}{۴}$ باشد و θ در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، حاصل $\cos(\frac{۱۱\pi}{۲}+\theta)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $-\frac{۴}{۵}$

۳۴۸- اگر $\tan\alpha = \frac{۴}{۳}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)-\tan(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})$$

۱) $-۱/۲۳$ ۲) $-۰/۵۲$ ۳) $۰/۲۷$ ۴) $۰/۴۸$

۳۴۹- حاصل عبارت $\cos\frac{۱۰\pi}{۳}+\sin\frac{۱۱\pi}{۳}\tan\frac{۱۷\pi}{۶}$، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۳}$

۳۵۰- $\tan(-۱۰۰۰^\circ)$ با کدام‌یک از گزینه‌های زیر برابر است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\tan۱۰۰^\circ$ ۲) $\tan۸۰^\circ$ ۳) $\tan(-۲۰^\circ)$ ۴) $\tan(-۱۰۰^\circ)$

۶ اتحادهای مثلثاتی

صفحهٔ درس‌نامه: ۲۴۰
صفحهٔ پاسخ: ۲۴۱

۳۵۱- اگر $\sin x\cos x = ۰/۴$ باشد، حاصل $\tan x+\cot x$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) ۱۰

۳۵۲- حاصل عبارت $\tan^۲ x-\sin^۲ x$ کدام است؟

۱) $\cot^۲ x$ ۲) $\cot^۲ x\cos^۲ x$ ۳) $\cos^۲ x$ ۴) $\tan^۲ x\sin^۲ x$

۳۵۳- ساده‌شدهٔ عبارت $\frac{\sin^۲ a-\tan^۲ a}{\cos^۲ a-\cot^۲ a}$ کدام است؟ (عبارت تعریف‌شده است.) (کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

۱) $\cot^۶ a$ ۲) $\tan^۶ a$ ۳) $-\tan^۶ a$ ۴) $-\cot^۶ a$

۳۵۴- اگر $\frac{۹}{۵}=\frac{\cos^۲ x}{۱+\sin x}$ باشد، حاصل $۱+\cot^۲ x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲۵}{۱۶}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۲۵}{۹}$

۳۵۵- حاصل $\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{۱}{\sin x.\cos x}$ کدام است؟

۱) $\tan x$ ۲) $\cot x$ ۳) $\frac{۱}{\sin x}$ ۴) $\frac{۱}{\cos x}$

۳۵۶- حاصل عبارت تعریف‌شدهٔ $\frac{۱}{\sin x(۱-\cos x)}-\frac{۱+\cos x}{\sin^۳ x}$ همواره کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sin x$ ۴) $\cos x$

۳۵۷- حاصل $\frac{\cos^۳ x}{۱-\sin x}-\frac{۱}{\tan x+\cot x}$ کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

۳۵۸- حاصل $\frac{\sin^۳ x-\cos^۳ x}{۱+\sin x.\cos x}$ کدام است؟

۱) $\sin x-\cos x$ ۲) $\sin x+\cos x$ ۳) $\sin^۲ x+۲$ ۴) $\cos^۲ x+۲$

۳۵۹- اگر $\cos\theta = A$ باشد، حاصل عبارت $(۱-\sin^۲\theta)(۲+\tan^۲\theta)$ برحسب A همواره کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

۱) $۱-A^۲$ ۲) $۱+A^۲$ ۳) $A^۲$ ۴) $۲+A^۲$

۳۶۰- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۱+۲\sin x\cos x}}{\sin x+\cos x}$ به ازای $x=۱۷۰^\circ$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

۳۶۱- اگر زاویهٔ α حاده باشد و $\sin\alpha\cos\alpha = ۰/۱۸$ باشد، آن‌گاه مقدار $|\sin\alpha-\cos\alpha|$ کدام است؟

۱) $۰/۴$ ۲) $۰/۶$ ۳) $۰/۸$ ۴) ۱

۳۶۲- اگر $\sin x+\cos x = \frac{۱}{۴}$ باشد، حاصل $A=|\sin x-\cos x|$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۶)

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳۱}}{۴}$

۳۶۳- اگر $\tan\alpha = ۲$ باشد، مقدار $\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha$ کدام است؟

۱) $۰/۷۶$ ۲) $۰/۷۲$ ۳) $۰/۶۸$ ۴) $۰/۲۴$

۳۶۴- اگر $\sin x + \cos x = \frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\sin^۳ x + \cos^۳ x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۳}{۸۱}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۷}{۸۱}$

۳۶۵- اگر $\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}$ باشد، حاصل $\sqrt{۱+\tan^۲ x}(۲\sin^۲\frac{\pi}{۴} - \sin^۲ x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

۳۶۶- اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $(\frac{۱}{\sin x} - \sin x)\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) $-\cos^۲ x$ ۲) $-\cos x$ ۳) $\cos^۲ x$ ۴) $\cos x$

۳۶۷- اگر $\sin^۴ x + \cos^۴ x = a$ و $\sin^۶ x + \cos^۶ x = b$، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟

۱) $a = \frac{۲}{۳}b$ ۲) $b = \frac{۲}{۳}a$ ۳) $۳a - ۲b = ۱$ ۴) $۲a - ۳b = ۱$

۷ نسبت‌های مثلثاتی ۲α

صفحهٔ درس‌نامه: ۲۴۳
صفحهٔ پاسخ: ۲۴۴

۳۶۸- اگر $\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$ باشد، $\cos ۲\alpha$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\frac{۵۰}{۱۶۹}$ ۲) $\frac{-۵۰}{۱۶۹}$ ۳) $\frac{-۱۱۹}{۱۶۹}$ ۴) $\frac{۱۱۹}{۱۶۹}$

۳۶۹- α زاویه‌ای حاده است و $\cos\alpha = \frac{۳}{۵}$ می‌باشد، $\sin ۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۲) $\frac{۲۴}{۲۵}$ ۳) $\frac{۷}{۲۵}$ ۴) $-\frac{۷}{۲۵}$

۳۷۰- حاصل $\cos^۲ ۷۵^\circ - \sin^۲ ۷۵^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۳۷۱- حاصل $\sin\frac{\pi}{۱۲}\sin\frac{۷\pi}{۱۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

۳۷۲- حاصل $\cot ۲۰^\circ(۱-\cos ۴۰^\circ)$ کدام است؟

۱) $\cos ۵۰^\circ$ ۲) $\cos ۴۰^\circ$ ۳) $\cos ۲۰^\circ$ ۴) $\cos ۱۰^\circ$

۳۷۳- حاصل عبارت مثلثاتی $(\frac{۱}{۲} - \sin^۲ x)\sin ۲x$ به ازای $x = ۱۱/۲۵^\circ$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۳۷۴- اگر $\cot\frac{x}{۲} = \sqrt{۲}$، حاصل $\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۷۵- حاصل $\cos^۴ x - \sin^۴ x - ۱$ کدام است؟

۱) $۲\cos^۲ x$ ۲) $-۲\cos^۲ x$ ۳) $۲\sin^۲ x$ ۴) $-۲\sin^۲ x$

۳۷۶- حاصل $\sin^۴\frac{\pi}{۸} + \cos^۴\frac{\pi}{۸}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) ۱

۳۷۷- اگر $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = ۲$ باشد، حاصل $\cos^۴ x - \sin^۴ x$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۹)

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

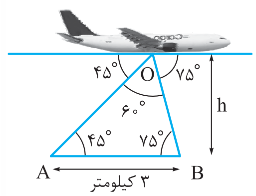
۳۷۸- اگر $\frac{\tan\alpha + ۱}{\tan\alpha - ۱} = \frac{۳}{۲}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sin ۲\alpha$ برابر با کدام گزینه است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) $\frac{۱۲}{۱۳}$ ۲) $-\frac{۱۲}{۱۳}$ ۳) $\frac{۵}{۱۳}$ ۴) $-\frac{۵}{۱۳}$

حال در مثلث BCD، چون طول دو ضلع BC و CD با هم برابر هستند، پس این مثلث، متساوی‌الساقین بوده و اندازهٔ زاویهٔ B نیز برابر ۴۵° خواهد بود. پس داریم:

$$\xrightarrow{\overset{\Delta}{BCD}} B\hat{C}D = \hat{x} = ۱۸۰^\circ - ۲\hat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ - ۲(۴۵^\circ)$$
$$= ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ = ۹۰^\circ$$

۳۱۳ گزینه ۴ با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث OAB داریم:



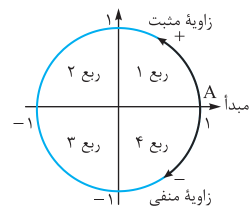
$$\frac{AB}{\sin\hat{O}} = \frac{OB}{\sin\hat{A}} \Rightarrow \frac{۳}{\sin ۶۰^\circ} = \frac{OB}{\sin ۴۵^\circ}$$

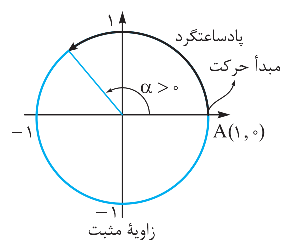
$$\Rightarrow OB = \frac{۳\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$$

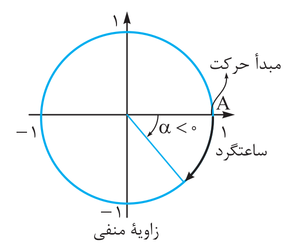
$$\xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم.}} OB = \frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۶} \Rightarrow OB = \sqrt{۶}$$

فصل ۲ درس‌نامهٔ ۴
مثلثات: دایرهٔ مثلثاتی

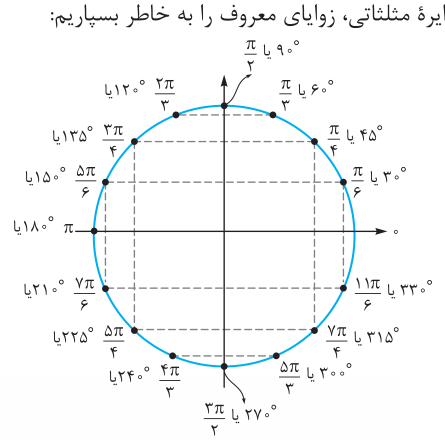
کمی قبل نسبت‌های مثلثاتی را در مثلث قائم‌الزاویه آموختیم. اما اصل فهم نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی است. اگر در دستگاه مختصات دایره‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع ۱ واحد رسم کنیم، دایرهٔ مثلثاتی را رسم کرده‌ایم. نقطهٔ $A(۱,۰)$ مبدأ حرکت روی این دایره است و جهت مثبت حرکت روی دایره، جهت پادساعتگرد (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) می‌باشد. پس اگر از مبدأ حرکت دایره، پادساعتگرد حرکت کنیم، زاویه مثبت بوده و اگر ساعتگرد حرکت کنیم، زاویه منفی می‌باشد. با رسم دایرهٔ مثلثاتی در دستگاه مختصات، دایره به چهار ربع (ناحیه)، تقسیم می‌شود:



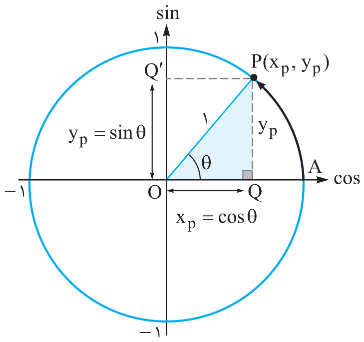




پس روی دایرهٔ مثلثاتی، زوایای معروف را به خاطر بسپاریم:



سینوس و کسینوس اگر محور xها را محور کسینوس و محور yها را محور سینوس بنامیم، برای تعیین سینوس و کسینوس زاویهٔ θ، کافی است از انتهای کمان زاویهٔ θ، یعنی از نقطهٔ P دو عمود بر محورها رسم کنیم و مختصات نقطهٔ P را به دست آوریم. مقدار طول و عرض نقطهٔ P، به ترتیب کسینوس و سینوس زاویهٔ θ هستند.



$$P(x_p, y_p) \in \text{دایرهٔ مثلثاتی} \Rightarrow \begin{cases} x_p = OQ = \cos\theta \\ y_p = OQ' = \sin\theta \end{cases}$$

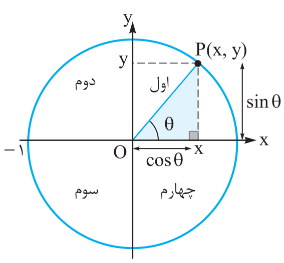
$$\xrightarrow{\text{نتیجه}} P(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{y_p}{۱} \Rightarrow \sin\theta = y_p \\ \cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{OQ}{OP} = \frac{x_p}{۱} \Rightarrow \cos\theta = x_p \end{cases}$$

$$P \in \text{دایرهٔ مثلثاتی} \Rightarrow P(\underbrace{\cos\theta}_{x_p}, \underbrace{\sin\theta}_{y_p})$$

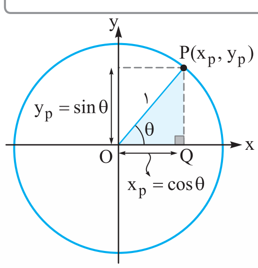
$$\begin{cases} \tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y_p}{x_p} \Rightarrow \tan\theta = \frac{y_p}{x_p} \\ \cot\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{OQ}{PQ} = \frac{x_p}{y_p} \Rightarrow \cot\theta = \frac{x_p}{y_p} \end{cases}$$

گنج درس‌نامه ۱ علامت نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس در نواحی مختلف دایرهٔ مثلثاتی، به صورت مقابل است، داریم:



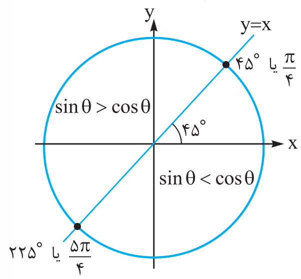
ناحیه	حدود زاویه	علامت نسبت
اول	$۰ < \theta < ۹۰^\circ$	$y = \sin\theta > ۰, x = \cos\theta > ۰$
دوم	$۹۰^\circ < \theta < ۱۸۰^\circ$	$y = \sin\theta > ۰, x = \cos\theta < ۰$
سوم	$۱۸۰^\circ < \theta < ۲۷۰^\circ$	$y = \sin\theta < ۰, x = \cos\theta < ۰$
چهارم	$۲۷۰^\circ < \theta < ۳۶۰^\circ$	$y = \sin\theta < ۰, x = \cos\theta > ۰$

۲ اگر مؤلفهٔ اول نقطهٔ P یا کسینوس زاویهٔ θ معلوم باشد، به راحتی می‌توانیم مؤلفهٔ دوم نقطهٔ P یا سینوس زاویهٔ θ را به دست آوریم و به عکس. برای این منظور از رابطهٔ صفحهٔ بعد بهره می‌گیریم:



$$\xrightarrow[\text{قضیهٔ فیثاغورس}]{\overset{\Delta}{OPQ}} OQ^۲+PQ^۲=۱^۲ \Rightarrow \begin{cases} x_p^۲+y_p^۲=۱ \\ \cos^۲\theta+\sin^۲\theta=۱ \end{cases}$$

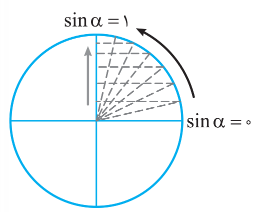
۳ اگر در دایرهٔ مثلثاتی، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم (یعنی خط $y=x$) را رسم کنیم، در دایرهٔ مثلثاتی زوایای ۴۵° (یعنی $\frac{\pi}{۴}$) و ۲۲۵° (یعنی $\frac{۵\pi}{۴}$) را ایجاد می‌کند. در این زوایا مقادیر سینوس و کسینوس با هم برابر هستند و تانژانت و کتانژانت آن‌ها، برابر یک می‌باشد. داریم:

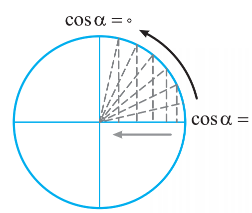


$$\Rightarrow \begin{cases} \sin۴۵^\circ=\cos۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \sin۲۲۵^\circ=\cos۲۲۵^\circ=-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

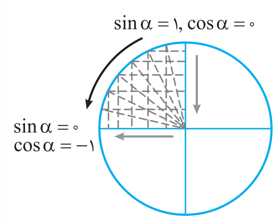
اگر θ بین ۴۵° الی ۲۲۵° باشد (یعنی بالای خط $y=x$)، مقدار $\sin\theta$ از $\cos\theta$ بیشتر است و اگر θ بین ۲۲۵° الی ۴۵° باشد (یعنی پایین خط $y=x$)، مقدار $\sin\theta$ از $\cos\theta$ کم‌تر می‌باشد.

۴ **در ربع اول**، اگر زاویهٔ α از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ زیاد شود، مقدار $\sin\alpha$ از صفر به ۱ افزایش می‌یابد و مقدار $\cos\alpha$ از ۱ به صفر کاهش خواهد یافت. داریم:

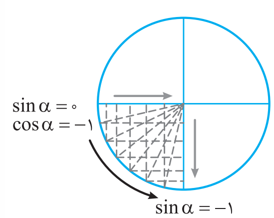




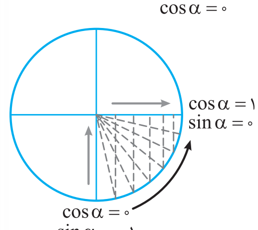
در ربع دوم، اگر زاویهٔ α از $\frac{\pi}{۲}$ تا π زیاد شود، مقدار $\sin\alpha$ از ۱ به صفر، کاهش یافته و مقدار $\cos\alpha$ نیز از صفر به -۱، کاهش می‌یابد. داریم:



در ربع سوم، اگر α از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$ زیاد شود، مقدار $\sin\alpha$ از صفر به -۱ کاهش یافته و مقدار $\cos\alpha$ از -۱ به صفر افزایش می‌یابد. داریم:

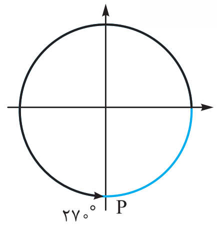


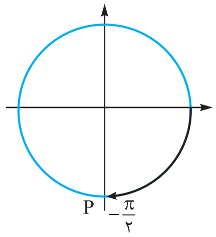
در ربع چهارم، اگر α از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π زیاد شود، مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هر دو زیاد می‌شوند. مقدار $\sin\alpha$ از -۱ به صفر افزایش یافته و مقدار $\cos\alpha$ از صفر به ۱ افزایش می‌یابد. داریم:



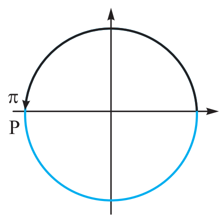
۳۱۴ گزینه ۴

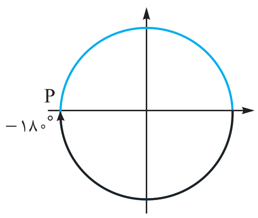
۱ : زاویهٔ $-\frac{\pi}{۲}$ رادیان و ۲۷۰° نقطهٔ پایین دایرهٔ مثلثاتی را نشان می‌دهند و یک نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی هستند. داریم:



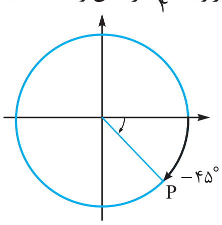


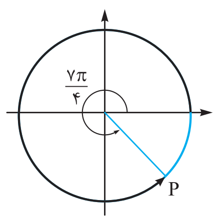
۲ : زاویهٔ -۱۸۰° و π رادیان، نقطهٔ سمت چپ دایرهٔ مثلثاتی را نشان می‌دهند و یک نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی هستند. داریم:



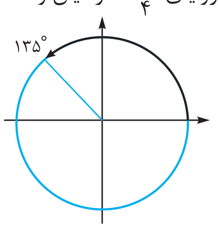


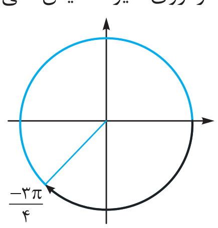
۳ : زاویهٔ $\frac{۷\pi}{۴}$ رادیان و -۴۵°، یک نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی هستند. چون داریم:



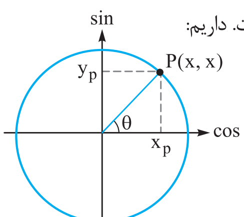


۴ : زوایای $-\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان و ۱۳۵° یک نقطه را روی دایره نمایش نمی‌دهند.





۳۱۵ گزینه ۲ چون نقطهٔ $P(x,x)$ روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد، پس بین مؤلفه‌های اول و دوم آن، رابطهٔ زیر برقرار است. داریم:



$$\Rightarrow P(x,x) \in \text{دایرهٔ مثلثاتی}$$

$$x_p^۲+y_p^۲=۱ \xrightarrow{x_p=y_p=x} x^۲+x^۲=۱ \Rightarrow ۲x^۲=۱ \Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{x>۰} x=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow ۲x=۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\sqrt{۲}$$

۳۱۶ گزینه ۱

$$P(x,۲x-۲)\in \text{دایرهٔ مثلثاتی} \xrightarrow{x_p^۲+y_p^۲=۱} x^۲+(۲x-۲)^۲=۱$$

$$\Rightarrow x^۲+(۴x^۲-۸x+۴)=۱ \Rightarrow ۵x^۲-۸x+۳=۰$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=۰} \begin{cases} x=۱ \;\text{غ ق ق} \Rightarrow \begin{cases} \text{به ازای } x=۱ \text{ مختصات نقطهٔ } P(۱,۰) \\ \text{شده که مبدأ حرکت دایره است.} \end{cases} \\ x=\frac{۳}{۵} \Rightarrow P(\frac{۳}{۵},۲(\frac{۳}{۵})-۲)=(\frac{۳}{۵},\frac{-۴}{۵}) \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم مؤلفهٔ اول مختصات نقطهٔ P، برابر $\cos\alpha$ و مؤلفهٔ دوم آن، برابر $\sin\alpha$ می‌باشد. پس داریم:

$$\Rightarrow \cos\alpha = x_p = \frac{۳}{۵}$$

۳۱۷ گزینه ۲ چون نقطهٔ P روی دایرهٔ مثلثاتی در ربع دوم واقع است، پس قطعاً مؤلفهٔ اول آن منفی و مؤلفهٔ دوم آن مثبت بوده و بین مؤلفهٔ اول و دوم آن رابطهٔ $x_p^۲ + y_p^۲ = ۱$ برقرار است. با کمی دقت به راحتی پی می‌بریم که تنها در گزینهٔ (۲)، بین مؤلفهٔ اول و دوم نقطهٔ P رابطهٔ فوق برقرار است. داریم:

۱: $P(\frac{۳}{۵},-\frac{۴}{۵}) \in$ ربع چهارم $\Rightarrow$ غلط

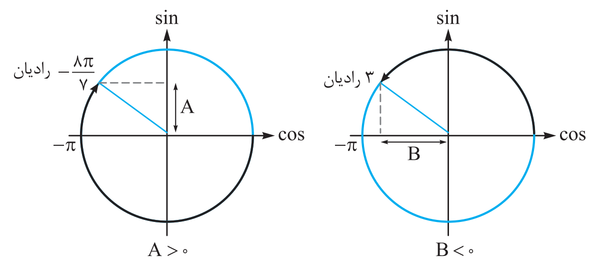
۲: $P(-\frac{۲}{۳},\frac{\sqrt{۵}}{۳}) \Rightarrow (-\frac{۲}{۳})^۲ + (\frac{\sqrt{۵}}{۳})^۲ = \frac{۴}{۹}+\frac{۵}{۹} = ۱ \checkmark$

۳: $P(-\frac{۱}{۳},\frac{\sqrt{۲}}{۳}) \Rightarrow (-\frac{۱}{۳})^۲ + (\frac{\sqrt{۲}}{۳})^۲ = \frac{۱}{۹}+\frac{۲}{۹} = \frac{۱}{۳} \neq ۱ \Rightarrow$ غلط

۴: $P(-\frac{\sqrt{۷}}{۸},\frac{۳}{۸}) \Rightarrow (-\frac{\sqrt{۷}}{۸})^۲ + (\frac{۳}{۸})^۲ = \frac{۷}{۶۴}+\frac{۹}{۶۴} = \frac{۱۶}{۶۴} \neq ۱ \Rightarrow$ غلط

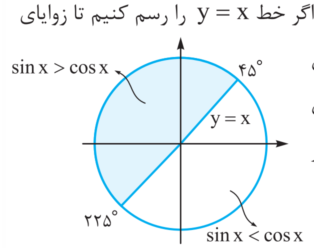
۳۱۸ گزینه ۳ چون $\sin\theta < ۰$ است، پس قطعاً زاویهٔ θ در ناحیهٔ سوم یا چهارم دایرهٔ مثلثاتی است. از طرفی چون $\tan\theta > ۰$ است پس قطعاً زاویهٔ θ در ناحیهٔ اول یا سوم دایرهٔ مثلثاتی می‌باشد. از اشتراک این دو حرف، نتیجه می‌گیریم زاویهٔ θ در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

۳۱۹ گزینه ۲ ابتدا زاویهٔ $-\frac{۸\pi}{۷}$ و ۳ رادیان را در دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم. سپس براساس ناحیه‌ای که این زوایا در آن قرار می‌گیرند، علامت sin و cos آن‌ها را به دست می‌آوریم:



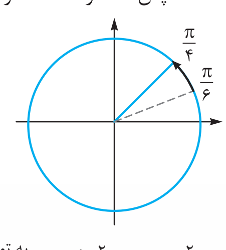
همان‌طور که مشاهده می‌کنیم مقدار $A = \sin(-\frac{۸\pi}{۷})$ مثبت بوده و مقدار $B = \cos(۳)$ منفی می‌باشد.

۳۲۰ گزینه ۴ در دایرهٔ مثلثاتی اگر خط $y = x$ را رسم کنیم تا زوایای ۴۵° و ۲۲۵° در دایرهٔ مثلثاتی مشخص شود، بین ۴۵° و ۲۲۵°، یعنی بالای خط $y = x$، مقدار سینوس از مقدار کسینوس بیشتر است.



$$\sin x > \cos x \Rightarrow ۴۵^\circ < x < ۲۲۵^\circ$$

۳۲۱ گزینه ۱ چون $\frac{\pi}{۶} < x < \frac{\pi}{۴}$ است، پس مقدار $\sin x$ از $\cos x$ کوچک‌تر است. پس داریم:



$$\frac{\pi}{۶} < x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \sin x < \cos x$$

$\xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{\sin x} < \sqrt{\cos x} \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) نادرست است.

$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^۲ x < \cos^۲ x \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

اگر $\frac{\pi}{۶} < x < \frac{\pi}{۴}$ باشد مقدار $\tan x < ۱$ و $\cot x > ۱$ است. چرا که $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ است و در این فاصله $\sin x < \cos x$ می‌باشد. به طور مشابه $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ چون صورت کسر بیشتر از مخرج است مقدار کسر بیشتر از ۱ می‌شود.

۳۲۲ گزینه ۲ گزینهٔ (۱) و (۲): می‌دانیم با افزایش زاویه از صفر تا ۹۰°، مقدار سینوس افزایش یافته و مقدار کسینوس کاهش می‌یابد. پس $\sin ۲۵^\circ$ از $\sin ۲۶^\circ$ کوچک‌تر است. داریم:

۱: $۲۵^\circ < ۲۶^\circ \Rightarrow \sin ۲۵^\circ < \sin ۲۶^\circ \Rightarrow \checkmark$

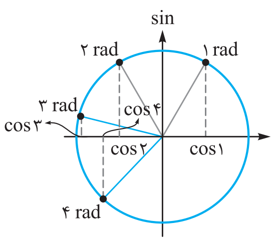
۲: $۲۶^\circ < ۲۷^\circ \Rightarrow \cos ۲۶^\circ > \cos ۲۷^\circ \Rightarrow \times$

۳: با افزایش زاویه از صفر تا ۹۰°، مقدار تانژانت افزایش می‌یابد. پس داریم:

$$۲۷^\circ < ۲۸^\circ \Rightarrow \tan ۲۷^\circ < \tan ۲۸^\circ \Rightarrow \checkmark$$

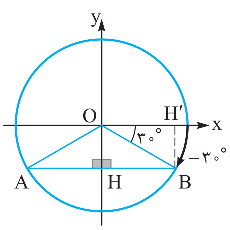
۴: دو زاویه‌ای که مجموعشان ۹۰° می‌باشد (به عبارتی متمم هم هستند)، سینوس یکی برابر با کسینوس دیگری است و به عکس. چون ۲۸° و ۶۲° متمم هم هستند، پس $\sin ۲۸^\circ = \cos ۶۲^\circ$ می‌باشد. ✓

۳۲۳ گزینه ۳ ابتدا ۱، ۲، ۳ و ۴ رادیان را در دایرهٔ مثلثاتی تجسم می‌کنیم:



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، مقدار cos۳ از بقیه کم‌تر است.

۳۲۴ گزینه ۴ به مقادیر نسبت‌های مثلثاتی sin و cos زاویهٔ ۳۰°، داریم:



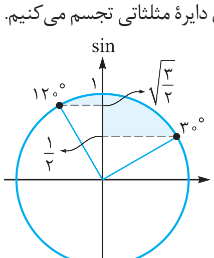
$$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin(-۳۰^\circ) = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow BH' = OH = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \cos(-۳۰^\circ) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow AH = BH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow AB = ۲BH = ۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \sqrt{۳} \Rightarrow \frac{AB}{OH} = \frac{\sqrt{۳}}{\frac{۱}{۲}} = ۲\sqrt{۳}$$

۳۲۵ گزینه ۲ ابتدا زاویهٔ ۳۰° و ۱۲۰° را بر روی دایرهٔ مثلثاتی تجسم می‌کنیم.



چون α در محدودهٔ ۳۰° و ۱۲۰° تغییر می‌کند، پس $\sin\alpha$ ابتدا از $\frac{۱}{۲}$ شروع شده و به عدد ۱ افزایش یافته و سپس از عدد ۱ به عدد $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ کاهش می‌یابد. پس داریم:

$$۳۰^\circ \le \alpha \le ۱۲۰^\circ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \le \sin\alpha \le ۱$$

پس نتیجه می‌گیریم $\sin\alpha$ در بازهٔ $[\frac{۱}{۲},۱]$ قرار می‌گیرد. پس به راحتی نتیجه می‌گیریم که:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۱}{۲} \\ b = ۱ \end{cases} \Rightarrow b - a = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

تفکر حواستان باشد نمی‌توانیم از طرفین یک نامعادله، سینوس یا کسینوس یا تانژانت بگیریم. برای این کار حتماً باید از دایرهٔ مثلثاتی کمک بگیریم.

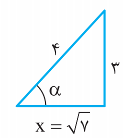
$$\frac{\pi}{۶}\le\alpha\le\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱}{۲}\le\sin\alpha\le ۱\\ -\frac{۱}{۲}\le\cos\alpha\le\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \tan\alpha\ge\frac{\sqrt{۳}}{۳}\ \text{یا}\ \tan\alpha\le-\sqrt{۳}\end{cases}$$

۳۲۶ گزینه ۳ • روش اول

گنج پاسخ‌نامه اگر مقدار یکی از نسبت‌های مثلثاتی را داشته باشیم، ابتدا از روی ناحیه‌ای که این زاویه در آن قرار می‌گیرد، علامت تک‌تک نسبت‌های مثلثاتی دیگر را مشخص می‌کنیم. حال مثلث قائم‌الزاویه‌ای را رسم کرده و یکی از زوایای داخلی آن را α می‌گیریم. براساس نسبت مثلثاتی داده‌شده، دو ضلع از سه ضلع این مثلث قائم‌الزاویه معلوم می‌شود. حالا به کمک رابطهٔ فیثاغورس، اندازهٔ ضلع سوم را به دست می‌آوریم با معلوم‌بودن طول سه ضلع مثلث، همهٔ نسبت‌های مثلثاتی دیگر را به علامت آن، به دست می‌آوریم.

با توجه به مطالب بالا، داریم:

$$\sin\alpha=\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\alpha\in\text{ناحیهٔ دوم}}$$



$$x^{۲}+۳^{۲}=۴^{۲}\Rightarrow x=\sqrt{۷}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{۷}}{۴}\\ \cot\alpha=-\frac{\sqrt{۷}}{۳}\\ \tan\alpha=-\frac{۳}{\sqrt{۷}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\cos\alpha(\cot\alpha-\tan\alpha)=-\frac{\sqrt{۷}}{۴}\left(-\frac{\sqrt{۷}}{۳}-\left(-\frac{۳}{\sqrt{۷}}\right)\right)=\frac{۷}{۱۲}-\frac{۳}{۴}$$

$$=\frac{۷-۹}{۱۲}=-\frac{۲}{۱۲}=-\frac{۱}{۶}$$

• روش دوم

گنج پاسخ‌نامه روابط زیر در ساده‌کردن روابط مثلثاتی بسیار کاربردی است:

$$\sin^{۲}x+\cos^{۲}x=۱$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\tan x.\cot x=۱$$

ابتدا به جای $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$، بازشدهٔ آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\Rightarrow\cos\alpha(\cot\alpha-\tan\alpha)=\cos\alpha\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$=\frac{\cos^{۲}\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\ (*)$$

حال با توجه به رابطهٔ $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$، داریم:

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\xrightarrow{\sin\alpha=\frac{۳}{۴}}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}+\cos^{۲}\alpha=۱$$

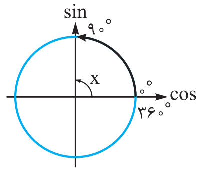
$$\Rightarrow\cos^{۲}\alpha=۱-\frac{۹}{۱۶}=\frac{۷}{۱۶}\xrightarrow{\alpha\in\text{ربع دوم}}\cos\alpha=\frac{-\sqrt{۷}}{۴}$$

$$\xrightarrow{(*)}\frac{\cos^{۲}\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha=\frac{\left(-\frac{\sqrt{۷}}{۴}\right)^{۲}}{\frac{۳}{۴}}-\frac{۳}{۴}=\frac{\frac{۷}{۱۶}}{\frac{۳}{۴}}-\frac{۳}{۴}$$

$$=\frac{۷}{۱۲}-\frac{۳}{۴}=\frac{-۲}{۱۲}=-\frac{۱}{۶}$$

۳۲۷ گزینه ۱ با توجه به این‌که $۲\sin x+۳\cos y=۵$ است و می‌دانیم $-۱\le\sin x\le ۱$ و $-۱\le\cos y\le ۱$، پس باید نتیجه بگیریم که تساوی فوق زمانی برقرار می‌شود که $\sin x=۱$ و $\cos y=۱$ باشد. حال چون $\sin x=۱$ است، پس قطعاً زاویهٔ x در بالای دایرهٔ مثلثاتی بوده و $\cos x=۰$ می‌باشد. در ضمن چون $\cos y=۱$ است، پس قطعاً زاویهٔ y در سمت راست دایرهٔ مثلثاتی بوده و $\sin y=۰$ می‌باشد. پس داریم:

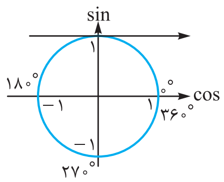
$$\begin{cases}\sin x=۱\\ \cos y=۱\end{cases}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=۰\\ \sin y=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\cos x+\sin y=۰$$

۳۲۸ گزینه ۳ اگر جای زوایای ۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰° و ۳۶۰° را در دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنیم، به راحتی مقادیر سینوس، کسینوس و کتانژانت آن‌ها قابل محاسبه است. داریم:

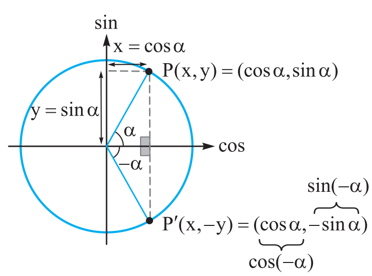


$$\Rightarrow\frac{\sin ۰^{\circ}+\cos ۳۶۰^{\circ}}{\cot ۲۷۰^{\circ}+\cos ۱۸۰^{\circ}}=\frac{۰+۱}{۰+(-۱)}=\frac{۱}{-۱}=-۱$$

فصل ۲ — درس‌نامه ۵ — مثلثات: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

با داشتن زاویهٔ α (که فرض می‌کنیم در ناحیهٔ اول است)، می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زوایای $-\alpha$، $\frac{\pi}{۲}\pm\alpha$، $\pi\pm\alpha$، $\frac{۳\pi}{۲}\pm\alpha$ و $۲\pi-\alpha$ را به دست آوریم. این زوایا را وابسته به زاویهٔ α می‌نامیم.

۱. نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه (زاویهٔ $-\alpha$) دو زاویهٔ α و $-\alpha$ را قرینهٔ هم می‌گوییم. با تجسم این دو زاویه در دایرهٔ مثلثاتی، به راحتی نتیجه می‌گیریم که اگر انتهای زاویهٔ α را $P(x,y)$ بنامیم، انتهای زاویهٔ $-\alpha$ که ربع چهارم است، قطعاً به صورت $P(x,-y)$ می‌باشد. چون نقطهٔ P'، قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به محور xهاست. داریم:



$$\xrightarrow{\text{نسبت‌های مثلثاتی } -\alpha}\quad\begin{aligned}\sin(-\alpha)&=-\sin\alpha\\ \cos(-\alpha)&=\cos\alpha\\ \tan(-\alpha)&=-\tan\alpha\\ \cot(-\alpha)&=-\cot\alpha\end{aligned}$$

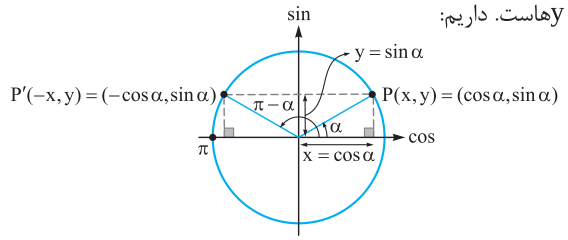
گنج درس‌نامه ۱ نسبت مثلثاتی کسینوس، منفی را می‌خورد (یعنی $\cos(-◌)=\cos ◌$). پس هر وقت اراده کنیم می‌توانیم کمان کسینوس را در یک منفی ضرب کرده و قرینه کنیم. به عنوان مثال، $\cos(x-\frac{\pi}{۲})=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)$ است.

۲ ضریب منفی پشت کمان، از نسبت‌های مثلثاتی سینوس، تانژانت و کتانژانت عبور می‌کند، به عبارتی دیگر ضریب منفی را می‌توانیم به پشت نسبت‌های مثلثاتی سینوس، تانژانت و کتانژانت انتقال دهیم. یعنی داریم:

$$\sin(-\bigcirc)=-\sin\bigcirc\ ,\ \tan(-\bigcirc)=-\tan\bigcirc\ ,\ \cot(-\bigcirc)=-\cot\bigcirc$$

۲.نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل (زاویهٔ $\pi-\alpha$)

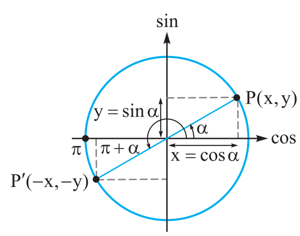
دو زاویهٔ α و $\beta=\pi-\alpha$ را مکمل هم می‌نامیم. پس هرگاه مجموع دو زاویه برابر ۱۸۰° باشد، این دو زاویه را مکمل هم می‌نامیم. اگر انتهای زاویهٔ α را $P(x,y)$ بنامیم، انتهای زاویهٔ $\pi-\alpha$ که در ربع دوم است، قطعاً به صورت $P'(-x,y)$ می‌باشد. چون نقطهٔ P'، قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به محور yهاست. داریم:



نسبت‌های مثلثاتی $\pi-\alpha$	
$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$
$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

۳.نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π (زاویهٔ $\pi+\alpha$)

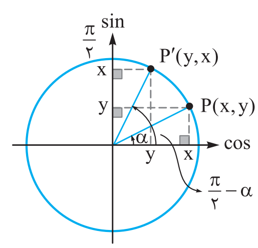
اگر انتهای زاویهٔ α را نقطهٔ $P(x,y)$ بنامیم، انتهای زاویهٔ $\pi+\alpha$ که در ناحیهٔ سوم است، قطعاً به صورت $P'(-x,-y)$ می‌باشد. دلیل این موضوع آن است که نقطهٔ P'، قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به مبدأ مختصات است. داریم:



نسبت‌های مثلثاتی $\pi+\alpha$	
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$
$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$

۴.نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم (زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}-\alpha$)

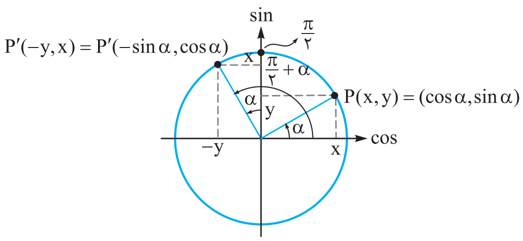
دو زاویهٔ α و $\beta=\frac{\pi}{۲}-\alpha$ را متمم هم می‌نامیم. پس هرگاه مجموع دو زاویهٔ α و β برابر ۹۰° (یا $\frac{\pi}{۲}$) باشد، این دو زاویه را متمم هم می‌نامیم. اگر انتهای زاویهٔ α را نقطهٔ $P(x,y)$ بنامیم، انتهای زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}-\alpha$ که در ربع اول است، قطعاً به صورت $P'(y,x)$ می‌باشد. پس داریم:



نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\pi}{۲}-\alpha$	
$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$
$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$	$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$

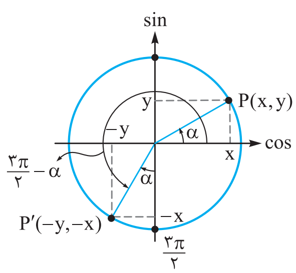
۵.نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ (زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}+\alpha$)

اگر انتهای زاویهٔ α را نقطهٔ $P(x,y)$ بنامیم، انتهای زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}+\alpha$ که در ناحیهٔ دوم است، قطعاً به صورت $P'(-y,x)$ می‌باشد. داریم:

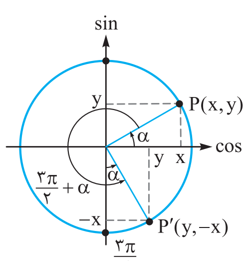


نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\pi}{۲}+\alpha$	
$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$
$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$

۶.نسبت‌های مثلثاتی دو زاویهٔ $\frac{۳\pi}{۲}\pm\alpha$



نسبت‌های مثلثاتی $\frac{۳\pi}{۲}-\alpha$	
$\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$
$\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$	$\cot(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$



نسبت‌های مثلثاتی $\frac{۳\pi}{۲}+\alpha$	
$\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=\sin\alpha$
$\tan(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$

گنج درس‌نامه ۱ اگر در زاویه‌ای π دیده شود (یعنی زوایای $\pi\pm\alpha$)، برای تعیین نسبت‌های مثلثاتی، کافی است به این نکته توجه کنیم که نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود. تنها نکته‌ای که باید به آن توجه کنیم این است که براساس ناحیه‌ای که زاویهٔ $\pi-\alpha$ و $\pi+\alpha$ (یعنی ناحیهٔ دوم و سوم) در آن قرار دارد، علامت نسبت مثلثاتی را مشخص کنیم و اگر علامت این نسبت منفی بود، پشت نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α (که همگی مثبت هستند)، یک منفی قرار دهیم. در غیر این صورت همان نسبت را برای زاویهٔ α می‌نویسیم. به مثال‌های زیر توجه کنیم:

۱) $\sin(\underbrace{\pi-\alpha}_{\text{ناحیهٔ دوم}})=+\sin\alpha$
سینوس مثبت است.

۲) $\cos(\underbrace{\pi-\alpha}_{\text{ناحیهٔ دوم}})=-\cos$
کسینوس منفی است.

۳) $\tan(\underbrace{\pi-\alpha}_{\text{ناحیهٔ دوم}})=-\tan\alpha$
تانژانت منفی است.

۴) $\cot(\underbrace{\pi+\alpha}_{\text{ناحیهٔ سوم}})=+\cot\alpha$
کتانژانت مثبت است.

۵) $\sin(\underbrace{\pi+\alpha}_{\text{ناحیهٔ سوم}})=-\sin\alpha$
سینوس منفی است.

۲ اگر در زاویه‌ای $\frac{\pi}{۲}$ یا $\frac{۳\pi}{۲}$ دیده شود (یعنی زوایای $\frac{\pi}{۲}\pm\alpha$ و $\frac{۳\pi}{۲}\pm\alpha$)، برای تعیین نسبت مثلثاتی sin و cos ابتدا نسبت مثلثاتی را عوض می‌کنیم، سپس براساس ناحیه‌ای که این زاویه در آن قرار دارد، خودمان علامت مورد نظر برای آن نسبت مثلثاتی را مشخص کرده و اگر علامت این نسبت منفی بود، پشت نسبت مثلثاتی دیگر برای زاویهٔ α، یک منفی قرار می‌دهیم. در غیر این صورت اگر علامت نسبت این زاویه مثبت بود، همان نسبت مثلثاتی دیگر برای زاویهٔ α را می‌نویسیم. به عنوان مثال، داریم:

نسبت عوض می‌شود.
۱) $\sin(\underbrace{\frac{\pi}{۲}-\alpha}_{\text{ناحیهٔ اول}})=+\cos\alpha$
سینوس مثبت

نسبت عوض می‌شود.
۲) $\cos(\underbrace{\frac{\pi}{۲}+\alpha}_{\text{ناحیهٔ دوم}})=-\sin\alpha$
کسینوس منفی

نسبت عوض می‌شود.
۳) $\sin(\underbrace{\frac{\pi}{۲}+\alpha}_{\text{ناحیهٔ دوم}})=+\cos\alpha$
سینوس مثبت

در مورد نسبت مثلثاتی tan و cot نیز به مانند بالا عمل می‌کنیم. به عنوان مثال، داریم:

نسبت عوض می‌شود.
۱) $\tan(\underbrace{\frac{\pi}{۲}-\alpha}_{\text{ناحیهٔ اول}})=+\cot\alpha$
تانژانت مثبت

نسبت عوض می‌شود.
۲) $\tan(\underbrace{\frac{\pi}{۲}+\alpha}_{\text{ناحیهٔ دوم}})=-\cot\alpha$
تانژانت منفی

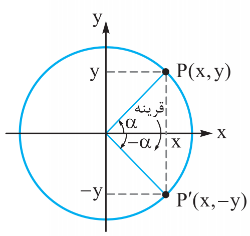
نسبت عوض می‌شود.
۳) $\cot(\underbrace{\frac{۳\pi}{۲}-\alpha}_{\text{ناحیهٔ سوم}})=+\tan\alpha$
کتانژانت مثبت است.

۳ اگر از نقطهٔ انتهای زاویهٔ α (یعنی نقطهٔ P)، یک دور کامل دوران کنیم و یا چندین دور کامل دوران کنیم، نقطهٔ انتهای زاویه، همان انتهای زاویهٔ α (یعنی نقطهٔ P) خواهد بود. به عبارتی دیگر، اگر از نقطهٔ انتهای زاویهٔ α (یعنی نقطهٔ P) به اندازهٔ ۲π رادیان، $۲\times۲\pi$ رادیان، $۳\times۲\pi$ رادیان، ... و یا مضارب صحیحی از ۲π رادیان دوران کنیم، نقطهٔ انتهای زاویهٔ حاصل، همان نقطهٔ P خواهد بود. در نتیجه نسبت مثلثاتی زاویهٔ حاصل، با نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α برابر هستند. به زبان ساده اگر در زاویه‌ای مضارب صحیح از ۲π رادیان (یعنی $۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$) دیده شود، برای محاسبهٔ نسبت مثلثاتی آن زاویه، $۲k\pi$ را کامل کنار می‌گذاریم. داریم:

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \tan\\ \cot\end{matrix}\left(۲k\pi\pm\alpha\right)=\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \tan\\ \cot\end{matrix}\left(\pm\alpha\right)$$

نمونه $\sin\frac{۱۹\pi}{۳}=\sin\frac{۱۸\pi+\pi}{۳}=\sin(\cancel{۶\pi}+\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳۲۹ گزینه ۲ در دایرهٔ مثلثاتی اگر زاویهٔ α را نسبت به محور xها قرینه کنیم، پس نقطهٔ انتهای زاویهٔ α نیز نسبت به محور xها قرینه می‌شود. قرینهٔ زاویهٔ α نسبت به محور xها (یعنی زاویهٔ β) در حقیقت همان $-\alpha$ است. پس $\beta=-\alpha$ می‌باشد و داریم:



$$\frac{\sin\beta.\cos\beta}{\sin\alpha.\cos\alpha}\overset{\beta=-\alpha}{=\!=}\frac{\sin(-\alpha).\cos(-\alpha)}{\sin\alpha.\cos\alpha}=\frac{(-\cancel{\sin\alpha}).\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\sin\alpha}.\cancel{\cos\alpha}}=-۱$$

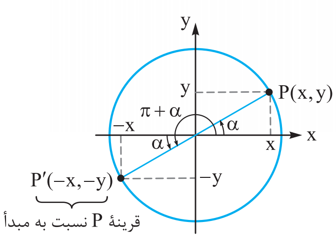
۳۳۰ گزینه ۳ اگر نقطهٔ $P(x,y)$ را نسبت به مبدأ قرینه کنیم تا نقطهٔ P' به‌دست آید، در این حالت نتیجه می‌گیریم که اگر P نقطهٔ انتهای زاویهٔ α باشد، نقطهٔ P' انتهای زاویهٔ $\pi+\alpha$ است. پس داریم:

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ ، $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$

پس نسبت مثلثاتی تانژانت برای دو زاویهٔ مربوط به نقاط P و P' با هم برابر هستند.



۳۳۱ گزینه ۴

گنج پاسخ‌نامه نسبت مثلثاتی کسینوس، منفی را خورده و بقیهٔ نسبت‌های مثلثاتی منفی را از خود عبور می‌دهند. پس داریم:

$\cos(-\bigcirc)=\cos\bigcirc$

$\sin(-\bigcirc)=-\sin\bigcirc$ ، $\tan(-\bigcirc)=-\tan\bigcirc$ ، $\cot(-\bigcirc)=-\cot\bigcirc$

با توجه به مطالب فوق، منفی از تانژانت عبور می‌کند. داریم:

$$\tan(-\frac{\pi}{۶})+\tan(-\frac{\pi}{۳})=(-\tan\frac{\pi}{۶})+(-\tan\frac{\pi}{۳})$$
$$=(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})+(-\sqrt{۳})=-\frac{۴}{۳}\sqrt{۳}$$

۳۳۲ گزینه ۳

نسبت کسینوس، منفی را می‌خورد. چون $\frac{۵\pi}{۶}$ در ناحیهٔ دوم است، پس می‌توان آن را به دو صورت $\pi-\frac{\pi}{۶}$ یا $\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}$ تبدیل کنیم. پس با این تغییر قیافه برای زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۶}$، داریم:

$$\cos(-\frac{۵\pi}{۶})=\cos\overset{\text{ناحیهٔ دوم}}{\frac{۵\pi}{۶}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos(\pi-\overset{\alpha}{\frac{\pi}{۶}})\xlongequal{\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha}-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \cos(\frac{\pi}{۲}+\overset{\alpha}{\frac{\pi}{۳}})\xlongequal{\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha}-\sin\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{cases}$$

۳۳۳ گزینه ۱

$$\frac{\sin(\overset{\text{ناحیهٔ دوم}}{\frac{۲\pi}{۳}})}{\sin(\underset{\text{ناحیهٔ دوم}}{\frac{۵\pi}{۶}})}=\frac{\sin(\pi-\overset{\alpha}{\frac{\pi}{۳}})}{\sin(\pi-\underset{\alpha}{\frac{\pi}{۶}})}\xlongequal{\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha}\frac{\sin\frac{\pi}{۳}}{\sin\frac{\pi}{۶}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{\cancel{۲}}}{\frac{۱}{\cancel{۲}}}=\sqrt{۳}$$

۳۳۴ گزینه ۱

گنج پاسخنامه اگر زاویهٔ نسبت مثلثاتی $\alpha-\frac{\pi}{۲}$، $\alpha-\frac{۳\pi}{۲}$ و $\alpha-\pi$ باشد، اگر نسبت مثلثاتی کسینوس باشد که به راحتی زاویه را در منفی ضرب کرده و قرینه می‌کنیم. ولی اگر نسبت مثلثاتی به‌جز کسینوس باشد، اگر زاویه را در منفی ضرب کردیم، پشت نسبت مثلثاتی نیز یک منفی قرار دهیم. به عنوان مثال، داریم:

$$\cos(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})=\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\sin(\alpha-\pi)=-\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$

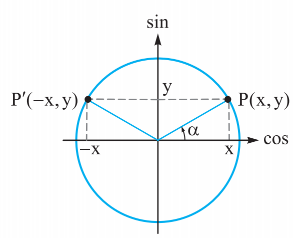
$$\tan(\alpha-\frac{\pi}{۲})=-\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=-\cot\alpha$$

$$\sin(\theta-۱۸۰^\circ)\cos(\theta-۱۸۰^\circ)=-\sin(۱۸۰^\circ-\theta).\cos(۱۸۰^\circ-\theta)$$

$$=-\sin\theta.(-\cos\theta)=\sin\theta.\cos\theta\xlongequal{\theta=۳۰^\circ}\sin ۳۰^\circ\times\cos ۳۰^\circ$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

۳۳۵ گزینه ۱



چون $\alpha+\beta=\pi$ است، پس دو زاویهٔ α و β مکمل یکدیگرند. پس می‌توانیم این دو زاویه را α و $\beta=\pi-\alpha$ در نظر بگیریم. پس با کمی تجسم، داریم:

$$\begin{cases}\sin\beta=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\\ \cos\beta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha+\cos\beta=۰\\ \tan\beta=\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha\Rightarrow\tan\alpha+\tan\beta=۰\\ \cot\beta=\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha\Rightarrow\cot\alpha+\cot\beta=۰\end{cases}$$

پس تنها گزینهٔ (۱)، یعنی $\sin\alpha+\sin\beta=۰$ نادرست است.

۳۳۶ گزینه ۱ ابتدا شکل دو زاویه را تغییر می‌دهیم:

$$\alpha+\overset{\text{ناحیهٔ چهارم}}{\frac{۵\pi}{۳}}=\alpha+(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=۲\pi+(\alpha-\frac{\pi}{۳})$$

$$\alpha+\overset{\text{ناحیهٔ دوم}}{\frac{۲\pi}{۳}}=\alpha+(\pi-\frac{\pi}{۳})=\pi+(\alpha-\frac{\pi}{۳})$$

$$\Rightarrow\cos(\alpha+\frac{۵\pi}{۳})+\cos(\alpha+\frac{۲\pi}{۳})=\cos(\cancel{۲\pi}+\boxed{\alpha-\frac{\pi}{۳}})$$

$$+\underbrace{\cos(\pi+\boxed{\alpha-\frac{\pi}{۳}})}_{\cos(\pi+\bigcirc)=-\cos\bigcirc}=\cos(\alpha-\frac{\pi}{۳})+\underbrace{(-\cos(\alpha-\frac{\pi}{۳}))}=۰$$

۳۳۷ گزینه ۴ چون مجموع زوایای داخلی مثلث ABC برابر π است، پس داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi\xrightarrow{\div ۲}\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}=\frac{\pi}{۲}$$

چون دو زاویهٔ $\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}$ و $\frac{\hat{C}}{۲}$ متمم یکدیگرند، پس sin یکی با cos دیگری برابر می‌باشد. داریم:

$\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}=\cos\frac{\hat{C}}{۲}\Rightarrow$ همواره برقرار است. $\Rightarrow$ هر مثلثی می‌تواند باشد

۳۳۸ گزینه ۲

گنج پاسخنامه هرگاه سینوس زاویه‌ای با کسینوس زاویهٔ دیگری برابر باشد، این دو زاویه متمم یکدیگرند. داریم:

$$\sin\bigcirc=\cos\bigcirc\Rightarrow\bigcirc+\bigcirc=\frac{\pi}{۲}$$

چون $\sin x$ با $\cos(۲۰^\circ+x)$ برابر است، پس دو زاویهٔ x و $۲۰^\circ+x$ متمم یکدیگر بوده و مجموع آن‌ها برابر ۹۰° (یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان) است. داریم:

$$x+(۲۰^\circ+x)=۹۰^\circ\Rightarrow ۲x=۷۰^\circ\Rightarrow x=۳۵^\circ$$

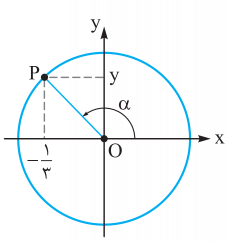
۳۳۹ گزینه ۳

گنج پاسخنامه هرگاه تانژانت زاویه‌ای با کتانژانت زاویهٔ دیگر برابر باشد، این دو زاویه متمم یکدیگر بوده و مجموع آن‌ها برابر ۹۰° (یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان) است یا مجموع آن‌ها برابر ۲۷۰° (یا $\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان) می‌باشد. داریم:

$$\tan\bigcirc=\cot\bigcirc\Rightarrow\bigcirc+\bigcirc=\frac{\pi}{۲}\ \text{یا}\ \frac{۳\pi}{۲}$$

$$\tan\alpha=\cot\beta\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}\ \text{یا}\ \frac{۳\pi}{۲}$$

۳۴۰ گزینه ۲



$$P(-\frac{۱}{۳},y)\xrightarrow{x_P^۲+y_P^۲=۱}(-\frac{۱}{۳})^۲+y^۲=۱$$

$$\Rightarrow y^۲=\frac{۸}{۹}\xrightarrow{y>۰}y=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

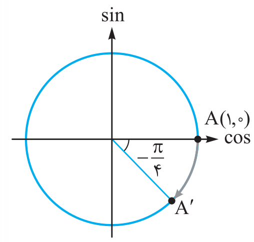
$$\Rightarrow P(\underbrace{-\frac{۱}{۳}}_{\cos\alpha},\underbrace{\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}}_{\sin\alpha})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{۱}{۳}\\ \sin\alpha=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\end{cases}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{۲\sqrt{۲}}{\cancel{۳}}}{-\frac{۱}{\cancel{۳}}}=-۲\sqrt{۲}$$

$$A = ۳\sin(\pi+\alpha)+۲\tan^{۲}\alpha = ۳(-\sin\alpha)+۲\tan^{۲}\alpha$$

$$= ۳(-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})+۲\underbrace{(-۲\sqrt{۲})^{۲}}_{۸} = -۲\sqrt{۲}+۱۶$$

۳۴۱ گزینه ۱ $\frac{۹\pi}{۴}$ رادیان در حقیقت همان $۲\pi+\frac{\pi}{۴}$ است. می‌دانیم از هر نقطه‌ای روی دایرهٔ مثلثاتی ۲π رادیان یا مضرب صحیحی از ۲π رادیان اضافه یا کم کنیم، چون نقطهٔ انتهای زاویه روی دایرهٔ مثلثاتی تغییر نمی‌کند، پس می‌توانیم آن را نادیده بگیریم. پس اگر از نقطهٔ $A(۱,۰)$ (یعنی مبدأ حرکت دایره) به اندازهٔ $\frac{۹\pi}{۴}$ رادیان یا همان $۲\pi+\frac{\pi}{۴}$ رادیان ساعتگرد دوران کنیم، گویی از این نقطه، $\frac{\pi}{۴}$ رادیان ساعتگرد دوران کرده‌ایم، بنابراین A' نقطهٔ انتهای زاویهٔ $-\frac{\pi}{۴}$ رادیان روی دایرهٔ مثلثاتی است. داریم:



$$A'(x_{A'},y_{A'}) = (\cos(-\frac{\pi}{۴}),\sin(-\frac{\pi}{۴})) = (\cos\frac{\pi}{۴},-\sin\frac{\pi}{۴})$$

$$=(\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) \Rightarrow \text{مجموع طول و عرض } A' = x_{A'}+y_{A'}$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=۰$$

۳۴۲ گزینه ۴

نسبت عوض می‌شود. — نسبت عوض نمی‌شود.

$$\frac{\cos(\overbrace{\frac{۳\pi}{۲}+\theta}^{\text{ناحیهٔ چهارم}})-\cos(\overbrace{\pi+\theta}^{\text{ناحیهٔ سوم}})}{\sin(\underbrace{\pi-\theta}_{\text{ناحیهٔ دوم}})-\sin(\underbrace{۳\pi+\theta}_{\cancel{۲\pi}+\pi+\theta})} = \frac{+\sin\theta-(-\cos\theta)}{+\sin\theta-(-\sin\theta)} = \frac{\sin\theta+\cos\theta}{۲\sin\theta}$$

نسبت عوض نمی‌شود. — نسبت عوض نمی‌شود.

چون در صورت تست $\tan\theta=۰/۲$ است و صورت و مخرج برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ می‌باشد، کافی است صورت و مخرج کسر را به $\cos\theta$ تقسیم کنیم. داریم:

$$\xrightarrow[\div\cos\theta]{\div\cos\theta} \frac{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{۲\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\tan\theta+۱}{۲\tan\theta} \overset{\tan\theta=۰/۲}{=\!=\!=} \frac{۰/۲+۱}{۲(۰/۲)} = \frac{۱/۲}{۰/۴} = ۳$$

۳۴۳ گزینه ۱ چون زاویهٔ فرض طراح ۱۵° است، تمام زوایا را باید به ۱۵° تبدیل کنیم. داریم:

$$\frac{\cos\overbrace{۲۸۵^\circ}^{\text{ناحیهٔ چهارم}}-\sin\overbrace{۲۵۵^\circ}^{\text{ناحیهٔ سوم}}}{\sin\underbrace{۵۲۵^\circ}_{\underbrace{\cancel{۳۶۰^\circ}+۱۶۵^\circ}_{\text{ناحیهٔ دوم}}}-\sin\underbrace{۱۰۵^\circ}_{\text{ناحیهٔ دوم}}} = \frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+۱۵^\circ)-\sin(\frac{۳\pi}{۲}-۱۵^\circ)}{\sin(\pi-۱۵^\circ)-\sin(\frac{\pi}{۲}+۱۵^\circ)}$$

$$=\frac{\sin۱۵^\circ+\cos۱۵^\circ}{\sin۱۵^\circ-\cos۱۵^\circ}$$

صورت و مخرج این کسر را به $\cos۱۵^\circ$ تقسیم می‌کنیم تا فرض صورت تست، یعنی $\tan۱۵^\circ=۰/۲۸$ به دست آید. داریم:

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sin۱۵^\circ+\cos۱۵^\circ}{\cos۱۵^\circ}}{\frac{\sin۱۵^\circ-\cos۱۵^\circ}{\cos۱۵^\circ}} = \frac{\tan۱۵^\circ+۱}{\tan۱۵^\circ-۱} \overset{\tan۱۵^\circ=۰/۲۸}{=\!=\!=} \frac{۰/۲۸+۱}{۰/۲۸-۱}$$

$$=\frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲} = \frac{\frac{۱۲۸}{\cancel{۱۰۰}}}{-\frac{۷۲}{\cancel{۱۰۰}}} = \frac{-۱۶}{۹}$$

۳۴۴ گزینه ۳ چون زاویهٔ فرض طراح ۲۰° است، پس همهٔ زوایا را باید براساس ۲۰° بنویسیم. داریم:

$$\frac{\sin\overbrace{۲۵۰^\circ}^{\text{ناحیهٔ سوم}}+\sin\overbrace{۷۰۰^\circ}^{\cancel{۲\times۳۶۰^\circ}-۲۰^\circ}}{\cos\underbrace{۵۶۰^\circ}_{\cancel{۳۶۰^\circ}+۲۰۰^\circ}-\cos\underbrace{۱۱۰^\circ}_{\text{ناحیهٔ دوم}}} = \frac{\sin(\frac{۳\pi}{۲}-۲۰^\circ)+\sin(-۲۰^\circ)}{\cos(\pi+۲۰^\circ)-\cos(\frac{\pi}{۲}+۲۰^\circ)}$$

$$=\frac{-\cos۲۰^\circ-\sin۲۰^\circ}{-\cos۲۰^\circ+\sin۲۰^\circ} \xrightarrow[\div\cos۲۰^\circ]{\div\cos۲۰^\circ} \frac{\frac{-\cos۲۰^\circ-\sin۲۰^\circ}{\cos۲۰^\circ}}{\frac{-\cos۲۰^\circ+\sin۲۰^\circ}{\cos۲۰^\circ}}$$

$$=\frac{-۱-\tan۲۰^\circ}{-۱+\tan۲۰^\circ} \overset{\tan۲۰^\circ=۰/۴}{=\!=\!=} \frac{-۱-۰/۴}{-۱+۰/۴} = \frac{\cancel{-}۱/۴}{\cancel{-}۰/۶} = \frac{\frac{۱۴}{\cancel{۱۰}}}{\frac{۶}{\cancel{۱۰}}} = \frac{۷}{۳}$$

۳۴۵ گزینه ۲

$$\tan\overset{\frac{۸\pi+۳\pi}{۴}}{\frac{۱۱\pi}{۴}}+\sin\overset{\frac{۱۶\pi-\pi}{۴}}{\frac{۱۵\pi}{۴}}\cos\overset{\frac{۸\pi+۵\pi}{۴}}{\frac{۱۳\pi}{۴}}$$

$$=\tan(\cancel{۲\pi}+\frac{۳\pi}{۴})+\sin(\cancel{۴\pi}-\frac{\pi}{۴}).\cos(\cancel{۲\pi}+\frac{۵\pi}{۴})$$

$$=\tan\frac{۳\pi}{۴}+\sin(-\frac{\pi}{۴}).\cos(\frac{۵\pi}{۴})=\tan(\pi-\frac{\pi}{۴})+(-\sin\frac{\pi}{۴})\cos(\pi+\frac{\pi}{۴})$$

$$=-\tan\frac{\pi}{۴}+\sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۴}=-۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cdot\frac{\sqrt{۲}}{۲}=-۱+\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

۳۴۶ گزینه ۳

$$\sin\overset{\frac{۱۸\pi-\pi}{۳}}{\frac{۱۷\pi}{۳}}.\cos(\cancel{-}\overset{\frac{۱۲\pi+۵\pi}{۶}}{\frac{۱۷\pi}{۶}})+\tan(\overset{\frac{۱۶\pi+۳\pi}{۴}}{\frac{۱۹\pi}{۴}}).\sin(-\overset{\frac{۱۲\pi-\pi}{۶}}{\frac{۱۱\pi}{۶}})$$

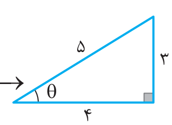
$$=\sin(\cancel{۶\pi}-\frac{\pi}{۳}).\cos(\cancel{۲\pi}+\overset{\pi-\frac{\pi}{۶}}{\frac{۵\pi}{۶}})+\tan(\cancel{۴\pi}+\overset{\pi-\frac{\pi}{۴}}{\frac{۳\pi}{۴}})(-\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۶}))$$

$$=(-\sin\frac{\pi}{۳}).(-\cos\frac{\pi}{۶})+(-\tan\frac{\pi}{۴})(\sin\frac{\pi}{۶})$$

$$=(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-۱)(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

۳۴۷ گزینه ۲ در ناحیهٔ سوم، نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس منفی می‌باشند. پس داریم:

$$\tan\theta=\frac{۳}{۴} \xrightarrow{\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{۳}{۴}}$$



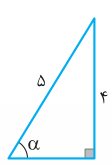
$$\xrightarrow{\theta\in\text{ربع ۳}} \begin{cases}\sin\theta=\frac{-۳}{۵}\\ \cos\theta=\frac{-۴}{۵}\end{cases}$$

در منفی ضرب می‌کنیم.

$$\cos(\underbrace{\frac{۱۱\pi}{۲}}_{\frac{۱۲\pi-\pi}{۲}}+\theta)=\cos(\cancel{۶\pi}-\frac{\pi}{۲}+\theta)=\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\sin\theta=\frac{-۳}{۵}$$

۳۴۸ گزینه ۳

$$\tan\alpha=\frac{۴}{۳}$$



$$\xrightarrow{\alpha\in\text{ربع ۳}} \begin{cases}\sin\alpha=-\frac{۴}{۵}\\ \cos\alpha=-\frac{۳}{۵}\\ \cot\alpha=\frac{۳}{۴}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin(\underbrace{\frac{9\pi}{2}+\alpha}_{\cancel{4\pi}+\frac{\pi}{2}+\alpha}).\cos(\underbrace{\frac{7\pi}{2}-\alpha}_{\cancel{4\pi}-\frac{\pi}{2}-\alpha})-\tan(\underbrace{\alpha-\frac{3\pi}{2}}_{-(\frac{3\pi}{2}-\alpha)})$$

$$=\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha).\cos(\cancel{-}(\frac{\pi}{2}+\alpha))-(-\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha))$$

$$=\cos\alpha.(-\sin\alpha)+\cot\alpha=(-\frac{3}{5})(\frac{4}{5})+\frac{3}{4}=-\frac{12}{25}+\frac{3}{4}$$

$$=-\frac{48}{100}+\frac{3}{4}=-0/48+0/75=0/27$$

۳۴۹ گزینه ۲

$$\tan\overset{\cancel{2\pi}+\frac{5\pi}{6}}{\frac{17\pi}{6}}.\sin\underset{\cancel{4\pi}-\frac{\pi}{3}}{\frac{11\pi}{3}}+\cos\overset{\cancel{4\pi}-\frac{2\pi}{3}}{\frac{10\pi}{3}}=\tan\frac{5\pi}{6}.\sin(-\frac{\pi}{3})+\cos(\cancel{-}\frac{2\pi}{3})$$

$$=\tan(\pi-\frac{\pi}{6}).(-\sin\frac{\pi}{3})+\cos(\pi-\frac{\pi}{3})$$

$$=(-\tan\frac{\pi}{6}).(-\sin\frac{\pi}{3})+(-\cos\frac{\pi}{3})=(-\frac{\sqrt{3}}{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{1}{2}=\frac{3}{6}-\frac{1}{2}=0$$

۳۵۰ گزینه ۲

$$\tan(-1000^\circ)=-\tan1000^\circ=-\tan(\cancel{2\times360^\circ}+280^\circ)$$

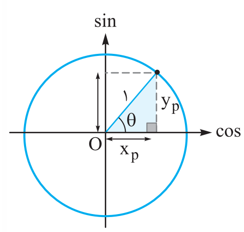
$$=-\tan280^\circ=-\tan(\underbrace{270^\circ+10^\circ}_{\frac{3\pi}{2}+10^\circ})=-(-\cot10^\circ)=\cot10^\circ=\tan80^\circ$$

فصل ۲

درس‌نامه ۶

مثلثات: اتحادهای مثلثاتی

۱ در دایرهٔ مثلثاتی اگر نقطهٔ $P(x_p, y_p)$، انتهای کمان زاویهٔ θ باشد، $x_p=\cos\theta$ و $y_p=\sin\theta$ می‌باشد.



چون شعاع دایرهٔ مثلثاتی برابر ۱ است، پس $x_p^2+y_p^2=1$ خواهد بود. پس داریم:

$$\xrightarrow{\text{رابطهٔ فیثاغورس}} x_p^2+y_p^2=1$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

با معلوم‌بودن مقدار $\sin\theta$، مقدار $\cos\theta$ به دست می‌آید و به عکس با معلوم‌بودن مقدار $\cos\theta$، مقدار $\sin\theta$ به دست خواهد آمد. داریم:

$$\boxed{\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}} \qquad \boxed{\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}}$$

تذکر برای انتخاب علامت + یا −، باید به این موضوع توجه کنیم که انتهای کمان زاویهٔ θ در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. به عنوان مثال، اگر θ در ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، با معلوم‌بودن مقدار $\sin\theta$، مقدار $\cos\theta$ برابر با $-\sqrt{1-\sin^2\theta}$ می‌باشد. چون θ در ناحیهٔ دوم است، پس قطعاً $\cos\theta$ منفی است.

تست اگر $\cot\theta<0$ و $\cos\theta=\frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\sin\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ۲) $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ ۳) $-\frac{9}{16}$ ۴) $\frac{9}{16}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** چون $\cot\theta<0$ است، پس زاویهٔ θ در ناحیهٔ دوم یا چهارم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. از طرفی چون $\cos\theta=\frac{3}{4}$ بوده و مثبت است، پس زاویهٔ θ در ناحیهٔ اول یا چهارم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. از اشتراک این حرف‌ها، به این نتیجه می‌رسیم که زاویهٔ θ در ناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی واقع می‌شود. پس داریم:

$$\cos\theta>0,\cot\theta<0 \Rightarrow \theta\in \text{ناحیهٔ چهارم} \Rightarrow$$

در ناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی سینوس منفی است.

$$\sin\theta=\underset{\theta\in\text{ربع ۴}}{\underset{\downarrow}{-}}\sqrt{1-\cos^2\theta}\xlongequal{\cos\theta=\frac{3}{4}}-\sqrt{1-(\frac{3}{4})^2}=-\sqrt{1-\frac{9}{16}}=-\sqrt{\frac{7}{16}}$$

$$=-\frac{\sqrt{7}}{4}$$

گنج درس‌نامه با توجه به این‌که $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ است، نتیجه می‌گیریم که:

۱ $\sin^4\theta+\cos^4\theta\xlongequal{\sin^2\theta=a,\cos^2\theta=b}a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$\xlongequal{a+b=1}1-2\sin^2\theta.\cos^2\theta$

$$\Rightarrow \boxed{\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\sin^2\theta.\cos^2\theta}$$

۲ $\sin^6\theta+\cos^6\theta$

$\xlongequal{\sin^2\theta=a,\cos^2\theta=b}a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$\xlongequal{a+b=1}1-3ab=1-3\sin^2\theta.\cos^2\theta$

$$\Rightarrow \boxed{\sin^6\theta+\cos^6\theta=1-3\sin^2\theta.\cos^2\theta}$$

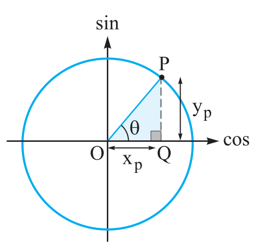
۳ $(\sin\theta\pm\cos\theta)^2$

$=\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}\pm2\sin\theta\cos\theta=1\pm2\sin\theta.\cos\theta$

$$\Rightarrow \boxed{(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm2\sin\theta.\cos\theta}$$

۴ $$\boxed{\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}}$$

۲ در دایرهٔ مثلثاتی $\tan\theta=\frac{y_p}{x_p}$ و $\cot\theta=\frac{x_p}{y_p}$ است، پس داریم:



$$\xrightarrow{\overset{\Delta}{OPQ}}\begin{cases}\tan\theta=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{y_p}{x_p}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\ \cot\theta=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}=\frac{x_p}{y_p}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \text{ و } \boxed{\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

گنج درس‌نامه

۱ $\boxed{\tan\theta.\cot\theta=1}\Rightarrow\boxed{\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}}$ و $\boxed{\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}}$

۲ $$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta.\cos\theta}$$