مهروماه

به نام پروردگار مهربان

کنکور جدید

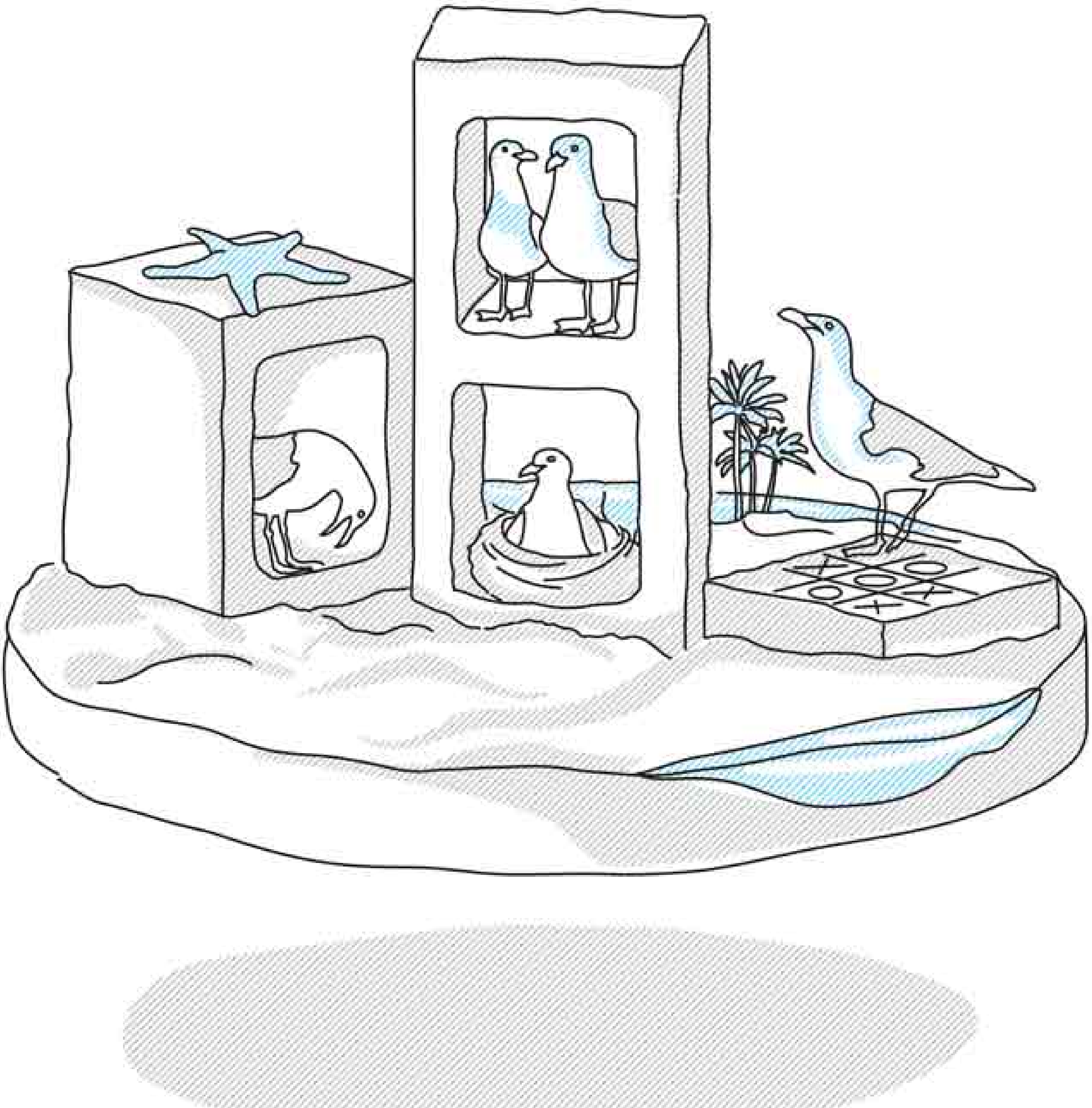
به همراه سؤالات کنکور ۹۷

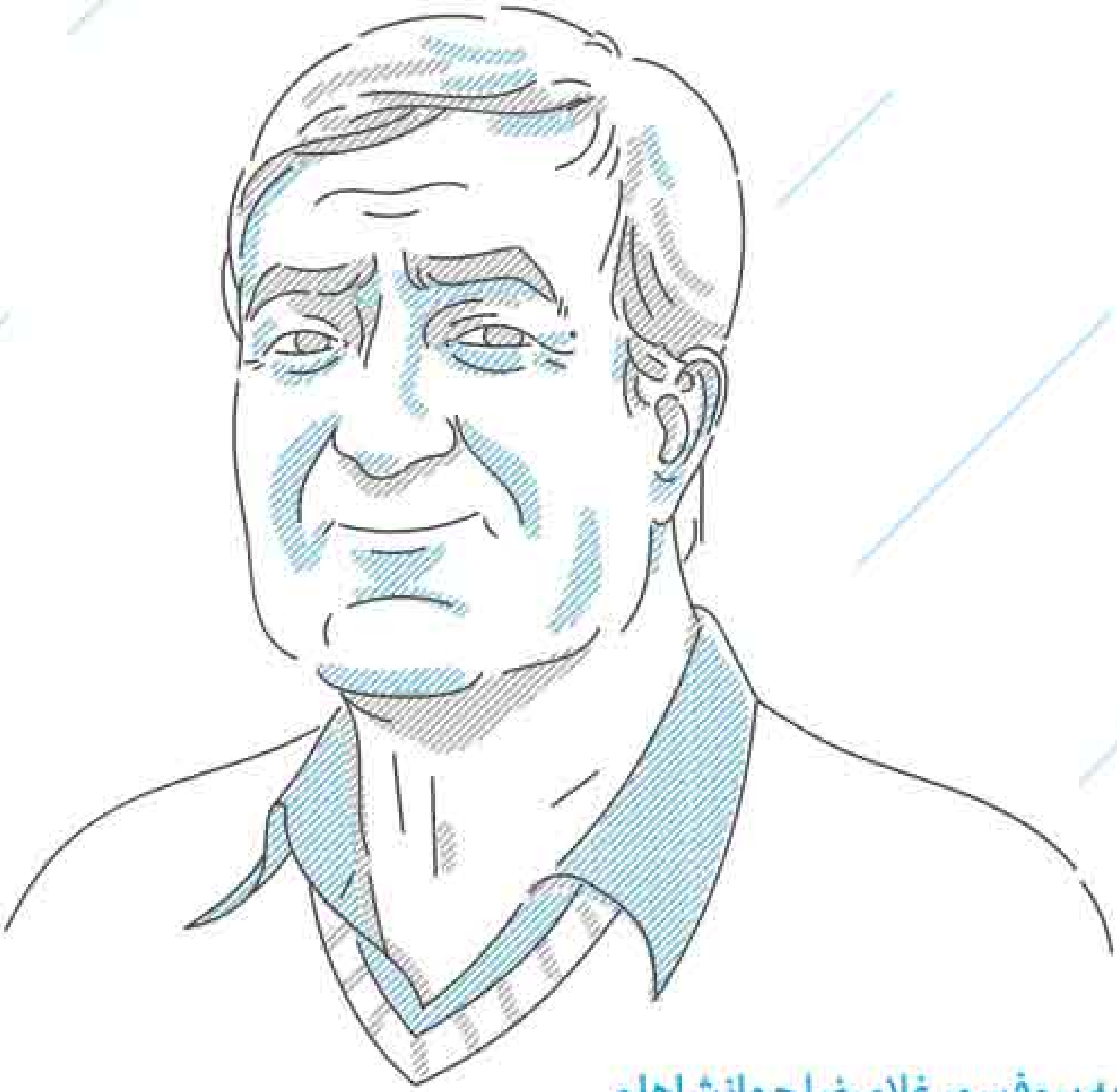
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

جامع کنکور

• جواد ترکمن • علی سعیدی‌زاد • مسعود طایفه

مدیر و ناظر علمی گروه: عباس اشرفی





تقدیم به پروفسور غلامرضا جهانشاهلو

پروفسـور غلامرضا جهانشـاهلو در روز ۲۷ اسـفند سال ۱۳۲۲ در روسـتای سـمقاور از توابع کمیجان در استان مرکزی چشـم به دنیا گشـود. وی مدرک ششـم ابتدایی خود را در سـال ۱۳۳۴ گرفت و چون هیچ دبیرسـتانی تا فاصلهٔ صد کیلومتری سـمقاور وجود نداشـت به ناچار ترک تحصیل کرد و به مدت سه سال به همراه پدرش به کار کشـاورزی پرداخت. در سـال ۱۳۴۳ به عنوان فارغ‌التحصیل ممتاز از دبیرسـتانی در شهر اراک دیپلم ریاضی خود را اخذ نمود. سـپس برای تحصیل در مقطع کارشناسـی رشـتهٔ ریاضی فیزیک به دانشگاه فردوسی مشهد رفت و پس از اخذ مدرک کارشناسـی در مؤسسـهٔ ریاضیات که توسـط «پروفسور مصاحب» تأسیس شده بود، پذیرفته شـد. مؤسسـهٔ ریاضیات اولین مرکز دانشگاهی در ایران اسـت که به منظور تربیت مدرسین دانشگاه تأسـیس شده بود اسـتاد جهانشاهلو دورهٔ ۲۷ ماههٔ بسیار سنگین مؤسسـهٔ ریاضیات را در تابستان ۱۳۴۸ به پایان رسـانده و به عنوان فارغ‌التحصیل ممتاز در دانشسـرای عالی (دانشـگاه خوارزمی کنونی) استخدام شد و به شـغل مقدس معلمی در دانشـگاه مشـغول شد. ایشـان در سـال ۱۳۵۱ برای ادامهٔ تحصیل عازم انگلستان شـد، ابتدا مدرک کارشناسـی ارشـد دیگری در رشـتهٔ تحقیق در عملیات از دانشـگاه سـاوت‌همپتون دریافت نمود، سـپس برای دورهٔ دکتری در زمینهٔ الگوریتم‌های مدل‌های تحقیق در عملیات به دانشـگاه برونل رفت و در اردیبهشـت سـال ۱۳۵۵ از رسالهٔ خود دفاع کرد و به ایران بازگشـت. وی در سال ۱۳۷۶ به مرتبهٔ استاد تمامی ارتقاء یافت و تا آخر عمر مفیدش به تدریس در مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری و تألیف مقاله و کتاب پرداخت؛ ماحصـل زندگـی وی چاپ بیسـت و دو جلد کتاب و چاپ بیـش از ۲۶۰ مقاله در مجلات معتبـر بین‌المللی و نیز راهنمایی بیش از ۱۱۰ دانشـجوی دکتری و بیش از ۳۰۰ دانشـجوی کارشناسـی ارشـد و بیش از هزار دبیر ریاضی اسـت. او با مقام «پدر علم تحلیل پوششـی داده‌های ایران» همچون پدری دلسـوز در تمام عرصه‌های زندگی و کار دانشجویان خویش را همراهی می‌کرد و تأثیر ایشان تا ابد در پیشرفت علم تحقیق در عملیات باقی خواهد ماند و روشـنگر راه کسـانی است که او را سرمشق و الگوی خود در زندگی و کار خود قرار می‌دهند. ایشان در روز ۱۶ فروردین سال ۱۳۹۶ دار فانی را وداع گفتند.

مقدمه

سپاس یکتای بی‌همتا را که بار دیگر زمان و توان نوشتن را به این کم‌ترین عطا فرمود.

در اثنای پایه‌ریزی نظام جدید آموزشی و تغییر در جهت بهتر شدن شیوهٔ آموزش و یادگیری، دو کتاب «آمار و احتمال» و «ریاضیات گسسته» (در رشتهٔ ریاضی)، نسبت به کتاب‌های سلَفِ خود، دست‌خوش تغییراتی شدند و به ناچار مؤلفین را بر آن داشت تا پس از اِعمال تغییرات لازم، کتاب‌های جدیدی در این زمینه بازنویسی نمایند.

تعدّد کتاب‌های تألیف شده در زمینهٔ این دو درس، که هر یک از دید و سلیقهٔ خود به آن‌ها پرداخته‌اند، گویای اهمیت این دو درس در آزمون‌های سراسری می‌باشد. لذا بر آن شدیم تا کتابی جامع و در بر گیرندهٔ هر دو درس «آمار و احتمال» و «ریاضیات گسسته» به رشتهٔ تحریر درآوریم.

چون صوفیان به حالت رَقصند مقتدا　　　ما نیز هم به شعبده دستی برآوریم

البته بی‌هیچ ادعایی و اصلاً فاش می‌گوییم که ما در پیشگاه اساتید این دانش و فن، «از خاک کم‌تریم».

اما در مورد این کتاب مطالبی چند ارائه می‌گردد:

- در قسمت درسنامه سعی کرده‌ایم تمام مطالب مورد نیاز، جهت یادگیری و تسلط بر متن کتاب درسی، همراه با ارائهٔ نکته‌های مهم، ترفندهای آموزشی و راهبردهایی که مورد نیاز داوطلبان کنکور می‌باشد، مورد بحث و بررسی دقیق و موشکافانه قرار دهیم. در درسنامه، تست‌هایی مطرح نموده‌ایم که جنبهٔ آموزشی آن‌ها بسیار زیاد است، بنابراین در ابتدا مطالعهٔ درسنامه به همراه حل و بررسی تست‌های آن را به شدت توصیه می‌کنیم.
- در مورد مطالب جدیدی که در کتاب‌های آمار و احتمال و ریاضیات گسسته توسط مؤلفین محترم کتاب‌های درسی ارائه شده است، تمام تلاش خود را به کار بسته‌ایم، تا با مراجعه به کتاب‌های مرجع و مقاله‌ها و پایان‌نامه‌های معتبر داخلی و خارجی، این مباحث را مورد بررسی و بسط قرار دهیم، بنابراین بحث‌هایی از قبیل منطق ریاضی، آمار استنباطی، احاطه‌گری و مربع‌های لاتین برگرفته از متن کتاب‌های درسی و منابع مورد اشاره می‌باشند. همچنین تا حد ممکن از ارائهٔ مطالبی که خارج از چارچوب کتاب‌های درسی می‌باشد، اجتناب کرده‌ایم. هرچند در بعضی موارد به جهت درک و فهم بیشتر، مطالبی تحت عنوان «یک گام فراتر» آورده شده است که مطالعهٔ آن‌ها اجباری نیست و فقط برای آن دسته از دانش‌پژوهانی که مایل به یادگیری مطالبی فراتر از چارچوب کتاب درسی می‌باشند، ارائه گردیده است.
- در انتهای هر مبحث «پرسش‌های چهار گزینه‌ای» شامل تست‌های مهم و مرتبط با کتاب‌های نظام آموزشی جدید از کنکور سراسری و نیز تست‌های مطرح شده در آزمون‌های معتبر به همراه سؤالات تألیفی ارائه نموده‌ایم.

ما در این کتاب تمام سعی خود را به کار بسته‌ایم تا این مجموعه از سؤال‌ها، جامع و برآورندهٔ نیازهای یک داوطلب کنکور باشد. پاسخ سؤال‌ها تا حد ممکن و در چارچوب بضاعت علمی نگارندگان، کاملاً تشریحی و مبتنی بر درسنامه‌ها ارائه شده است. تمام تلاش خود را به‌کار بسته‌ایم که هر آن‌چه مورد نیاز یک داوطلب کنکور رشتهٔ ریاضی است، در مجموعهٔ تست‌ها پوشش داده‌ایم. هرچند باز هم تأکید می‌کنیم که قبل از مراجعه به سؤال‌های چهار گزینه‌ای، مطالعه و تسلط بر درسنامهٔ هر قسمت از اولویت بیشتری برخوردار است.

سپاس از

■ در پدید آمدن این اثر افراد بسیاری سهیم هستند. بر خود لازم می‌دانیم سپاس بی‌انتهای خود را تقدیم افرادی کنیم که به‌طور مستقیم و غیرمستقیم ما را در به ثمر رساندن این مجموعه یاری نموده‌اند:

- جناب **آقای احمد اختیاری**، مدیریت محترم انتشارات مهروماه که همواره پشتیبانی خود را از ما دریغ نکرده‌اند و در تمام مشکلات با روحیه‌ای وصف‌ناپذیر همراه ما بوده‌اند.
- جناب **آقای محمدحسین انوشه** مدیر شورای تألیف که زحمات زیادی را متقبل شده‌اند.
- جناب **آقای مهندس عباس اشرفی**، مدیر محترم گروه ریاضی که در تمام مراحل یار و یاور ما بوده‌اند و افتخار دوستی و همکاری با ایشان برایمان بسیار مغتنم است.
- دوست گرامی جناب **آقای مهندس روح‌الله مصطفی‌زاده**، که زحمت ویراستاری بخشی از کتاب را عهده‌دار بودند.
- **سرکار خانم سنور حریری**، مسئول ویراستاری، سرکار **خانم‌ها نارین رحیم‌زاده**، **هستی مخدوم** و جناب **آقای حامد شفیعی**، که زحمت ویراستاری و نمونه‌خوانی متن‌ها را به عهده داشتند.
- **سرکار خانم سمیه جباری**، مدیر توانمند واحد تولید، به همراه گروه بسیار حرفه‌ای و مسلط در امر تایپ، رسم شکل‌ها و صفحه‌آرایی تمام همت خود را به کار بسته‌اند. به ویژه **سرکار خانم رویا طبسی** (صفحه‌آرای بسیار چیره‌دست)، **خانم‌ها مینا محمدلو** و **فرحناز قاسمی** و جناب **آقای صمد ذوالفقاری** (تایپیست‌های مسلط و شکیبا) **سرکار خانم هستی فرهادپور** و **جناب آقای مرتضی ضیایی** (رسام‌های هنرمند) و **سرکار خانم زهرا فریدونی** (هماهنگ کنندهٔ امر تولید با پشتکار ستودنی)
- **جناب آقای فرهادی** مدیر محترم واحد هنری و همکاران خوبشان که دستی توانمند در تهیهٔ تصاویر داخل کتاب و طراحی جلد دارند و همواره ما را رهین منّت خویش نموده‌اند.
- **جناب آقای امیر انوشه** مسئول محترم واحد سایت و همکاران محترمشان به جهت سعی وافر در شناساندن کتاب در فضای مجازی
- **سرکار خانم‌ها فرزانه قنبری** مدیر روابط عمومی و **ساره کفاش‌زاده** به‌خاطر برقرار هماهنگی‌های لازمه و زحمات فراوانشان

و اما

هرچه هست از قامت ناساز بی‌اندام ماست.

- در انتها از تمام کسانی که این کتاب را مورد مطالعه قرار می‌دهند صمیمانه درخواست می‌کنیم که کاستی‌های این کتاب را، چه در صورت و چه در محتوا، به ما گوشزد نمایند و نظرات سازندهٔ خود را آشکار سازند تا بتوانیم در چاپ(های) بعدی آن‌ها را برطرف نماییم. اهل دانش نیک می‌دانند که راه پویش علمی، نیازمند اصلاح و تغییر همیشگی است.

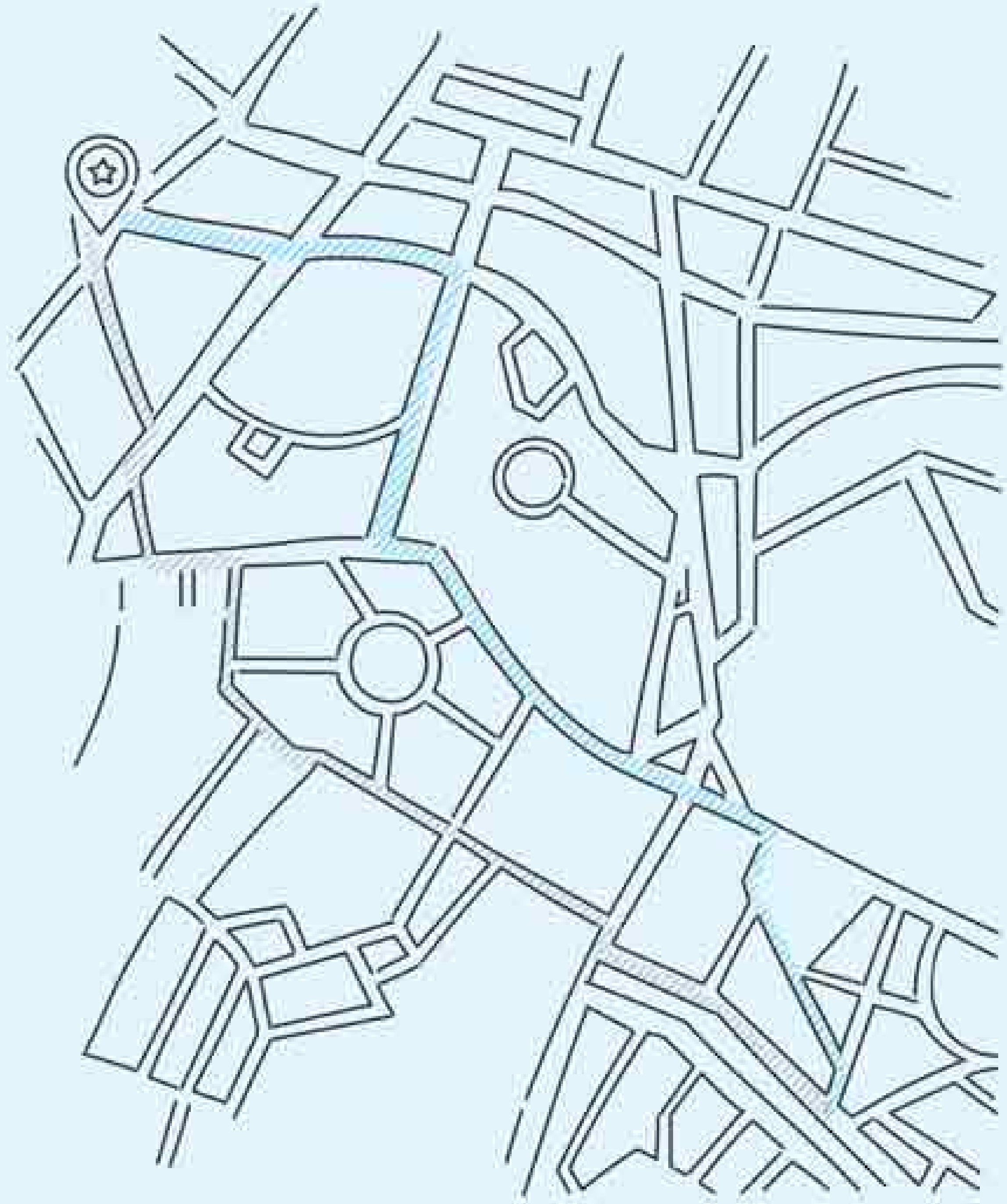
در آخر کتاب را به جوانان عزیز این مرز و بوم تقدیم می‌کنیم و تمام تلاشمان بر آن بوده است که نیازهای علمی این عزیزان برطرف گردد و هر آینه اگر این سعی‌مان هوده باشد، خوشا...

زمانه قرعهٔ نو می‌زند به نام شما   خوشا شما که جهان می‌رود به کام شما

تابستان ۹۷

فهرست

فصل ۵



گراف و مدل‌سازی

گراف یکی از جذاب‌ترین فصل‌های ریاضیات گسسته است. در این فصل ابتدا با مباحث مقدماتی گراف آشنا می‌شوید. سپس در بحث مدل‌سازی، یکی از کاربردهای گراف در دنیای واقعی را می‌بینید. تست‌های گراف بیشتربه‌صورت مفهومی می‌باشند و بسیاری از آن‌ها با رسم شکل به راحتی حل می‌شوند. هر چند تعداد اندکی از تست‌ها به صورت محاسباتی و با استفاده از مفاهیم مقدماتی ترکیبیات قابل حل‌اند.

معرفی گراف

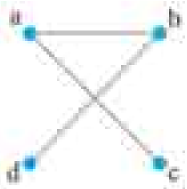
۵

شکلی است متشکل از تعدادی نقطه، به نام رأس و خط‌هایی به نام یال، که زوج‌های معینی از رأس‌ها را به هم وصل می‌کنند. گراف‌ها بیان‌گر وضعیت‌های مختلف در اطراف ما می‌باشند.

برای مثال، فرض کنید a، b، c و d چهار تیم ورزشی می‌باشند و اعلام شده است

- تیم a با تیم‌های b و c بازی کرده است.
- تیم b با تیم d بازی کرده است.

برای نمایش این وضعیت، اگر هر تیم را با یک نقطه (رأس) و بازی انجام شده بین آن‌ها را با یک خط (یال) نشان دهیم، شکل زیر به دست می‌آید، که گراف نامیده می‌شود (توجه کنید که یال‌ها، لزوماً خط راست نیستند و می‌توان آن‌ها را به صورت خمیده نیز رسم کرد). واضح است که در این گراف ۴ رأس a، b، c و d و ۳ یال ab، ac و bd دیده می‌شود.



«گراف G»

نتیجه: ۱ هر یال گراف را با دو رأس واقع بر دو انتهای آن یال نام‌گذاری می‌کنند. توجه کنید که این نام‌گذاری بدون ترتیب است، زیرا هر یال فاقد جهت می‌باشد.

۲ هر گراف از دو جزء تشکیل شده است، که عبارت‌اند از: الف) رأس‌ها ب) یال‌ها

نمایش گراف با نماد ریاضی

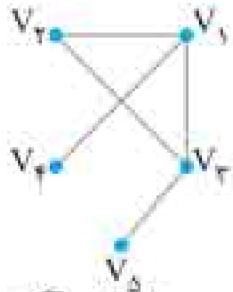
به طور معمول گراف را با حرف G (یا H یا...) نشان می‌دهند. از آن‌جایی که هر گراف مانند G، از دو جزء تشکیل شده است، بنابراین دو مجموعهٔ زیر را معرفی می‌کنیم:

۱ **مجموعهٔ رأس‌های گراف G:** یک مجموعهٔ ناتهی و متناهی، شامل رأس‌های گراف G می‌باشد، که آن را با نماد $V(G)$ نشان می‌دهند.
(مجموعهٔ متناهی، به مجموعه‌ای با تعداد اعضای معلوم گفته می‌شود.)

۲ **مجموعهٔ یال‌های گراف G:** یک مجموعهٔ متشکل از یال‌های گراف G می‌باشد، که آن را با نماد $E(G)$ نشان می‌دهند. (توجه کنید که این مجموعه می‌تواند تهی باشد، که در این صورت گراف G، فاقد یال است.)

مثال:

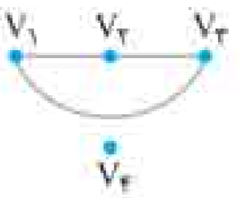
الف) در گراف G، شکل زیر، داریم:



«گراف G»

$$\begin{cases} V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\} \\ E(G)=\{v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4,v_2v_3,v_3v_5\} \end{cases}$$

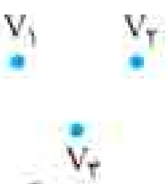
ب) در گراف H، شکل زیر، داریم:



«گراف H»

$$\begin{cases} V(H)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\} \\ E(H)=\{v_1v_2,v_2v_3,v_1v_3\} \end{cases}$$

پ) در گراف I، شکل زیر داریم:



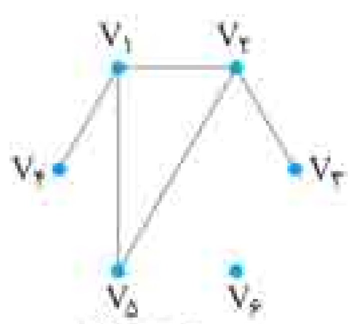
«گراف I»

$$\begin{cases} V(I)=\{v_1,v_2,v_3\} \\ E(I)=\{\ \}=\varnothing \end{cases}$$

رسم گراف

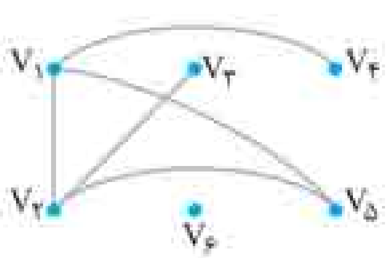
برای رسم گراف G، با داشتن دو مجموعهٔ $V(G)$ و $E(G)$، ابتدا به تعداد عضوهای مجموعهٔ رأس‌های گراف، نقطه (رأس) در نظر می‌گیریم و سپس با توجه به عضوهای مجموعهٔ یال‌های گراف، رأس‌های متناظر را به هم وصل می‌کنیم. توجه کنید که در رسم یال‌ها، هیچ یالی نباید خودش را قطع نماید و هر یال از دو رأسی می‌گذرد که آن‌ها را به هم وصل کرده است. یعنی هیچ یالی نباید از رأسی که مربوط به دو سر آن یال نیست، عبور نماید.

مثال: اگر $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ و $E(G)=\{v_1v_2,v_2v_3,v_2v_5,v_1v_5,v_1v_4\}$، آن‌گاه **گراف G را به صورت زیر رسم می‌کنیم:**



«گراف G»

- توجه کنید که گراف G را به صورت زیر نیز می‌توان رسم کرد:



«گراف G»

همان‌طور که ملاحظه می‌شود این گراف نیز، همان گراف G است. به عبارت دیگر ممکن است شکل ظاهری دو گراف متفاوت به نظر برسد، اما هر دو یکسان‌اند. یعنی مجموعهٔ رأس‌های دو گراف و مجموعهٔ یال‌های دو گراف، با هم فرقی ندارند. بنابراین برای رسم نمودار گراف (شکل گراف) روش یکتایی وجود ندارد.

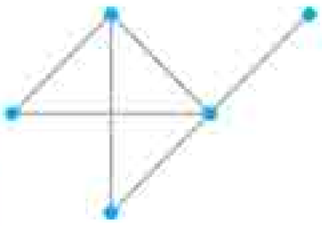
تذکر: رأسی از گراف، که هیچ یال گراف به آن متصل نباشد، رأس تنها (ایزوله) نامیده می‌شود.

به عنوان مثال در گراف شکل بالا، رأس v_6، یک رأس تنها (ایزوله) محسوب می‌شود. زیرا هیچ کدام از یال‌های گراف به آن متصل نیست.

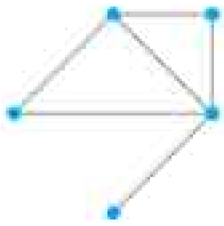
گراف‌های یکریخت

دو گراف را یکریخت می‌گوییم هرگاه رأس‌های آن‌ها را بتوان طوری نام‌گذاری کرد که مجموعهٔ یالی دو گراف یکسان شود. بنابراین دو گراف یکریخت تعداد رأس‌های برابر و تعداد یال‌های برابر دارند.

مثال: دو گراف G و H در شکل زیر یکریخت‌اند.

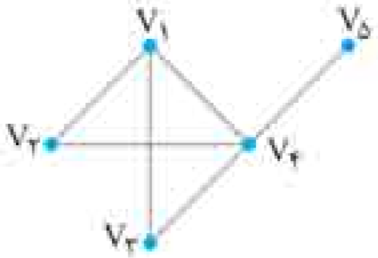


«گراف G»



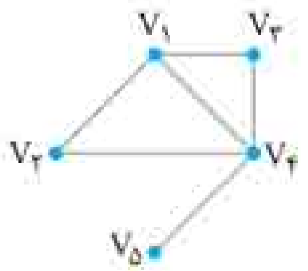
«گراف H»

زیرا اگر در گراف G، رأس‌ها را به صورت مقابل نام‌گذاری کنیم، آن‌گاه:



$$\begin{cases} V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\} \\ E(G)=\{v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4,v_2v_4,v_3v_4,v_4v_5\} \end{cases}$$

حال می‌توانیم رأس‌های گراف H را طوری نام‌گذاری کنیم که $E(H)=E(G)$ باشد. برای این منظور داریم:



$$\begin{cases} V(H)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\} \\ E(H)=\{v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4,v_2v_4,v_3v_4,v_4v_5\} \end{cases}$$

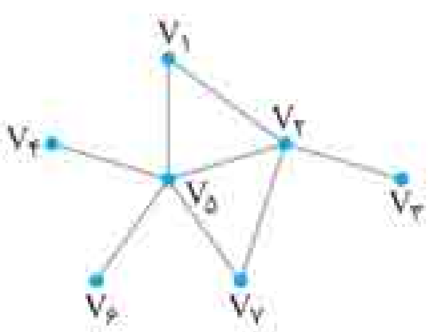
پس دو گراف G و H یکریخت‌اند.

زیرگراف

یک زیرگراف از گراف G، گرافی است که مجموعهٔ رأس‌های آن، زیرمجموعه‌ای ناتهی از مجموعهٔ رأس‌های گراف G و مجموعهٔ یال‌های آن، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ یال‌های گراف G باشد.

بنابراین گراف H یک زیرگراف از گراف G نامیده می‌شود اگر و تنها اگر $(V(H)\neq\varnothing)\wedge(V(H)\subseteq V(G))\wedge(E(H)\subseteq E(G))$

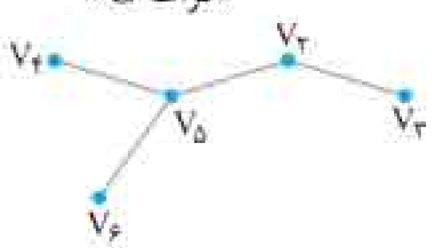
- به عنوان مثال، با توجه به گراف G، در شکل زیر و با توجه به این‌که:



«گراف G»

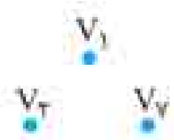
$$\begin{cases} V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\} \\ E(G)=\{v_1v_2,v_1v_5,v_2v_3,v_2v_5,v_2v_7,v_4v_5,v_5v_6,v_5v_7\} \end{cases}$$

درمی‌یابیم گراف‌های G_1، G_2 و G_3 همگی زیرگراف‌هایی از گراف G می‌باشند. زیرا:



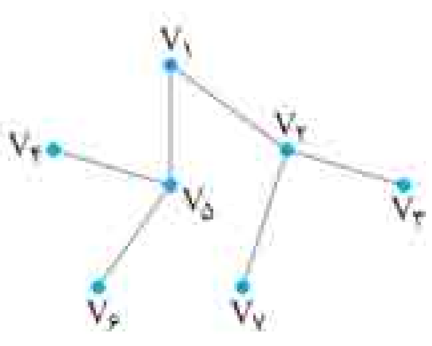
«گراف G_1»

$$\begin{cases} V(G_1)=\{v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}\subseteq V(G) \\ E(G_1)=\{v_2v_3,v_2v_5,v_4v_5,v_5v_6\}\subseteq E(G) \end{cases}$$



«گراف G_2»

$$\begin{cases} V(G_2)=\{v_1,v_2,v_7\}\subseteq V(G) \\ E(G_2)=\varnothing\subseteq E(G) \end{cases}$$

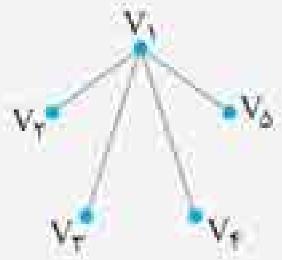


«گراف G_3»

$$\begin{cases} V(G_3)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}\subseteq V(G) \\ E(G_3)=\{v_1v_2,v_1v_5,v_2v_3,v_2v_7,v_5v_6,v_4v_5\}\subseteq E(G) \end{cases}$$

تست: با مجموعهٔ رأس‌های $\{v_۱,v_۲,v_۳,v_۴,v_۵\}$ چند گراف ساده با $q=۶$ و $\deg(v_۱)=۴$ وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

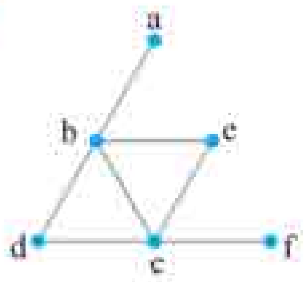


پاسخ: گزینه۳ می‌دانیم مرتبهٔ این گراف $p=۵$ و در نتیجه حداکثر تعداد یال‌های آن $\binom{۵}{۲}=۱۰$ است. از طرفی چون درجهٔ رأس $v_۱$ برابر ۴ می‌باشد، پس رأس $v_۱$ به رأس‌های $v_۲$، $v_۳$، $v_۴$ و $v_۵$ متصل است و در نتیجه ۴ یال (به اجبار) رسم شده‌اند. پس برای آن‌که در این گراف $q=۶$ باشد، باید از بین $۱۰-۴=۶$ یال باقی‌مانده، ۲ یال دیگر انتخاب کنیم، که این عمل به $\binom{۶}{۲}=۱۵$ روش امکان‌پذیر است.

بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجهٔ یک گراف

در گراف G، بزرگ‌ترین عدد در بین درجه‌های رأس‌ها را با نماد $\Delta(G)$ و کوچک‌ترین عدد در بین درجه‌های رأس‌ها را با نماد $\delta(G)$ نمایش می‌دهند و به ترتیب ماکزیمم درجه و مینیمم درجهٔ گراف G نامیده می‌شوند.

برای مثال، در گراف شکل زیر، درجه‌های رأس‌ها عبارت‌اند از:



$\deg(d)=۲$ $\deg(a)=۱$

$\deg(e)=۲$ $\deg(b)=۴$

$\deg(f)=۱$ $\deg(c)=۴$

بنابراین $\Delta(G)=۴$ و $\delta(G)=۱$.

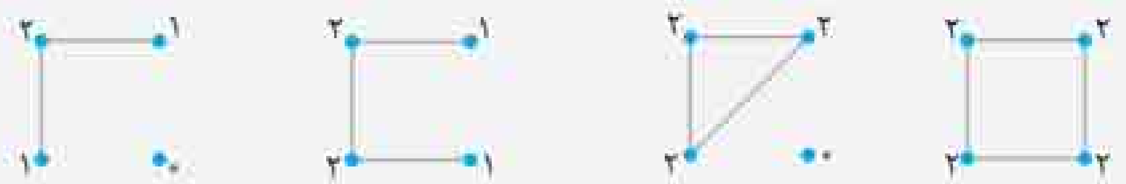
نتیجه: در گراف G، برای هر رأس v، همواره داریم: $\boxed{\delta(G)\le \deg_G(v)\le \Delta(G)}$

به عبارت دیگر درجه‌های تمام رأس‌های گراف متعلق به بازهٔ $[\delta,\Delta]$ است.

تست: چند گراف ساده با ۴ رأس، که ماکزیمم درجهٔ آن برابر ۲ می‌باشد، وجود دارد؟ (رأس‌ها نام‌گذاری نشده‌اند)

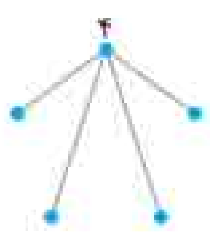
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه۳ در این گراف بزرگ‌ترین درجه برابر ۲ است، پس رأس با درجهٔ ۲ دارد و رأسی با درجهٔ بزرگ‌تر از ۲ ندارد. به کمک رسم گراف‌های یکریخت داریم:



نکته ۱: در هر گراف سادهٔ G، از مرتبهٔ p، همواره داریم: $\boxed{۰\le \delta(G)\le \Delta(G)\le p-۱}$

زیرا هر رأس گراف سادهٔ G، حداکثر به تمام رأس‌ها، به جز خودش، می‌تواند وصل شود. پس در گراف سادهٔ از مرتبهٔ p، بیشترین درجهٔ یک رأس برابر با $p-۱$ است.



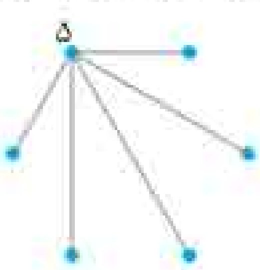
برای مثال، گراف ساده‌ای با درجهٔ رأس‌های ۵،۴،۳،۲،۱ وجود ندارد. زیرا در این گراف $p=۵$ است و درجهٔ یک رأس، حداکثر برابر با $۵-۱=۴$ است. بنابراین وجود رأس با درجهٔ ۵، یک تناقض است.

تذکر: در هر گراف ساده G، از مرتبهٔ p، رأس با درجهٔ $p-۱$ (که به تمام رأس‌های گراف، به جز خودش، وصل می‌باشد یا به عبارت دیگر با تمام رأس‌های گراف، مجاور است) **رأس فول** (Full) می‌گوییم.

نتیجه: ۱ اگر گراف سادهٔ G، دست‌کم یک رأس فول داشته باشد، آن‌گاه فاقد رأس تنهاست، به عبارت دیگر $\delta(G)\ge ۱$ می‌باشد.

۲ در گراف سادهٔ G، از مرتبهٔ p، اگر k رأس با درجهٔ $p-۱$ (k رأس فول) وجود داشته باشد، آن‌گاه $\delta(G)\ge k$.

زیرا می‌دانیم رأس با درجهٔ $p-۱$، به تمام رأس‌های گراف، به جز خودش وصل است. حال اگر k رأس با درجهٔ $(p-۱)$ وجود داشته باشد، در این صورت k رأس به تمام رأس‌های گراف (به جز خودشان) وصل می‌شوند و لذا درجهٔ سایر رأس‌ها حداقل برابر k است.



برای مثال، گراف ساده‌ای با درجه‌های ۵،۳،۳،۲،۱،۰ وجود ندارد. زیرا در این گراف $p=۶$ است و یک رأس با درجهٔ $P-۱=۶-۱=۵$ وجود دارد، پس درجهٔ سایر رأس‌ها دست کم باید برابر ۱ باشند و رأس با درجهٔ صفر غیرقابل قبول است.

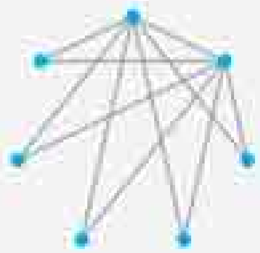
تست: درجه‌های رأس‌های یک گراف ساده در کدام گزینه قابل قبول است؟

۱) ۵,۳,۳,۲,۱ ۲) ۶,۶,۴,۴,۳,۲,۱ ۳) ۶,۵,۳,۳,۲,۲,۱ ۴) ۴,۴,۴,۴,۳,۳,۳

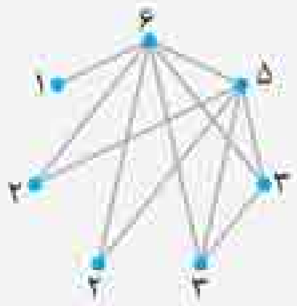
پاسخ: گزینه۳ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: واضح است که $p=۵$ است و رأس با درجهٔ ۵ غیرممکن می‌باشد، زیرا درجهٔ یک رأس حداکثر $p-۱=۵-۱=۴$ است.

گزینه «۲»: در این‌جا $p=۷$ و ۲ رأس با درجهٔ $p-۱=۷-۱=۶$ وجود دارد. پس درجهٔ سایر رأس‌ها برابر ۲ یا بیشتر از ۲ می‌باشد. یعنی رأس با درجهٔ ۱ یک تناقض است.



گزینه «۳»: این گراف قابل رسم است.



گزینه «۴»: تعداد رأس‌های فرد، عددی فرد است (۳ رأس با درجهٔ ۳) و این موضوع یک تناقض است.

یک‌گام فراتر: تشخیص ساده بودن یک گراف از روی درجه‌های آن (با فرض زوج بودن تعداد رأس‌های فرد گراف) طبق مراحل زیر نیز ممکن است:

مرحله ۱: درجه‌های رأس‌های گراف را به طور نزولی (بزرگ به کوچک) مرتب می‌کنیم.

مرحله ۲: یک رأس با درجهٔ ماکزیمم را حذف می‌کنیم (یعنی اگر چند رأس با درجهٔ ماکزیمم وجود داشته باشد، یکی را حذف می‌نماییم) و به تعداد عدد درجهٔ همان رأس، از بقیهٔ درجه‌ها، هر کدام یک واحد کم می‌کنیم (یعنی اگر رأس با درجهٔ m حذف شد، از m رأس بعدی، هر کدام یک واحد کم می‌کنیم).

مرحله ۳: درجه‌های به دست آمده را به طور نزولی (بزرگ به کوچک) مرتب می‌کنیم و مرحلهٔ دوم را تکرار می‌کنیم. اگر در حین تکرار، ادامه کار ممکن نشد و یا درجهٔ منفی به دست آمد، درجه‌های داده شده، مربوط به گراف ساده نیست و اگر پس از چند مرحله تکرار، تمام درجه‌ها صفر شدند، درجه‌های داده شده، مربوط به یک گراف ساده است.

تذکر: روش بالا، الگوریتم هاول ـ حکیمی نامیده می‌شود.

برای مثال، می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا درجه‌های ۵,۳,۱,۲,۱,۴ مربوط به یک گراف ساده می‌باشد یا نه؟ داریم:

مرحله ۱: درجه‌ها را به طور نزول مرتب می‌کنیم: ۵,۴,۳,۲,۱,۱

مرحله ۲: درجهٔ ۵ (که ماکزیمم است) را حذف و از ۵ رأس بعدی، هر کدام یک واحد کم می‌کنیم:

$$\cancel{۵},\underbrace{۴,۳,۲,۱,۱}_{\text{۵رأس بعدی}} \Rightarrow ۳,۲,۱,۰,۰$$

مرحله ۳: مرحلهٔ ۲ را برای درجه‌های به دست آمده تکرار می‌کنیم. یعنی درجهٔ ۳ را حذف و از ۳ رأس بعدی، هر کدام یک واحد کم می‌کنیم:

$$\cancel{۳},\underbrace{۲,۱,۰}_{\text{۳رأس بعدی}},۰ \Rightarrow ۱,۰,-۱,۰$$

از آن‌جایی‌که درجهٔ منفی به دست آمده است، پس درجه‌های داده شده مربوط به یک گراف ساده نیست.

مثال: می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا درجه‌های یک گراف ساده می‌تواند اعداد ۶,۴,۱,۱,۶,۳,۱,۲,۲ باشد یا نه؟

مرحله ۱: درجه‌ها را به طور نزولی مرتب می‌کنیم: ۶,۶,۴,۳,۲,۲,۱,۱,۱

مرحله ۲: یک رأس با درجهٔ ۶ (که ماکزیمم است) حذف می‌کنیم و از ۶ رأس بعدی، هر کدام یک واحد کم می‌نماییم:

$$\cancel{۶},\underbrace{۶,۴,۳,۲,۲,۱}_{\text{۶رأس بعدی}},۱,۱ \Rightarrow ۵,۳,۲,۱,۱,۰,۱,۱$$

مرحله ۳: درجه‌های به دست آمده را به طور نزولی مرتب می‌کنیم و مرحلهٔ ۲ را تکرار می‌نماییم.

$$\cancel{۵},\underbrace{۳,۲,۱,۱,۱}_{\text{۵رأس بعدی}},۱,۰ \Rightarrow ۲,۱,۰,۰,۰,۱,۰$$

دوباره درجه‌های به دست آمده را به طور نزولی مرتب می‌کنیم و مرحلهٔ ۲ را تکرار می‌نماییم:

$$\cancel{۲},\underbrace{۱,۱}_{\text{۲رأس بعدی}},۰,۰,۰,۰ \Rightarrow ۰,۰,۰,۰,۰$$

از آن‌جایی تمام درجه‌ها صفر شدند، پس درجه‌های داده شده مربوط به یک گراف ساده است.

نکته: در هر گراف G، از مرتبهٔ p و اندازهٔ q همواره داریم:

$$\boxed{\delta(G)\leq\frac{۲q}{p}\leq(G)}$$

توجه کنید که ۲q، مجموع درجه‌های رأس‌های گراف و p تعداد رأس‌ها (مرتبهٔ گراف) را نشان می‌دهد، پس $\frac{۲q}{p}$، **میانگین درجه‌های گراف** را نشان می‌دهد و می‌دانیم میانگین همواره بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده قرار دارد.

تست: در گراف G با ۲۵ رأس، اگر درجهٔ هر رأس حداکثر ۷ باشد، آن‌گاه بیشترین تعداد یال در گراف G کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۶۴ ۳) ۷۲ ۴) ۸۷

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به این‌که $p=۲۵$ و $\Delta(G)=۷$، لذا به کمک نکتهٔ ۲ داریم:

$$\frac{۲q}{p}\le\Delta(G)\Rightarrow\frac{۲q}{۲۵}\le ۷\xrightarrow{\times ۲۵}۲q\le\underbrace{۷\times ۲۵}_{۱۷۵}\xrightarrow{\div ۲}q\le ۸۷/۵\xrightarrow{q\in W}\max(q)=۸۷$$

تست: در یک گراف با میانگین درجه‌های ۲/۴، تعداد یال‌ها یکی بیشتر از تعداد رأس‌ها است. اندازهٔ این گراف کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲ با توجه به فرض مسأله داریم:

$$\begin{cases}\frac{۲q}{p}=۲/۴\xrightarrow{\times P}۲q=۲/۴p\xrightarrow{\div ۲}q=۱/۲p \quad (*)\\ q=p+۱\xrightarrow{(*)}۱/۲p=p+۱\Rightarrow ۰/۲p=۱\Rightarrow p=۵\end{cases}$$

پس $q=۵+۱=۶$ است.

هشدار: در یک مسأله، اگر هر دو عدد $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ معلوم باشند، آن‌گاه نمی‌توان از نامساوی مطرح شده در نکتهٔ ۲ استفاده کرد.

برای مثال، در گراف G از مرتبهٔ $p=۱۰$ با فرض $\Delta(G)=۶$ و $\delta(G)=۳$، نمی‌توان نتیجه گرفت $۳\le\frac{۲q}{p}\le ۶$. زیرا با فرض درستی این نامساوی به $۳\le\frac{۲q}{۱۰}\le ۶$ و در نتیجه $۱۵\le q\le ۳۰$ دست می‌یابیم. اما اگر این گراف دارای ۱۵ یال باشد، در این صورت $۲q=۳۰$ و لذا درجهٔ تمام رأس‌ها برابر ۳ است و این نتیجه با فرض $\Delta(G)=۶$ در تناقض می‌باشد. بنابراین برای تضمین این‌که گراف شامل درجه‌های ماکزیمم و مینیمم باشد، داریم:

یک گام فراتر: در گراف G از مرتبهٔ p و اندازهٔ q، با معلوم بودن $\Delta(G)$ و $\delta(G)$:

$$\underbrace{((P-۱)\cdot\delta(G))+\Delta(G)}\le ۲q\le\underbrace{((p-۱)\cdot\Delta(G))+\delta(G)}$$

کمترین عدد برای مجموع درجه‌های گراف در حالتی است که $(p-۱)$ رأس با درجهٔ می‌نیمم و یک رأس با درجهٔ ماکزیمم وجود دارد.

بیشترین عدد برای مجموع درجه‌های گراف در حالتی است که $(p-۱)$ رأس با درجهٔ ماکزیمم و یک رأس با درجهٔ می‌نیمم وجود دارد.

پس در مثال بالا، داریم:

$$((۱۰-۱)\times ۳)+۶\le ۲q\le((۱۰-۱)\times ۶)+۳\Rightarrow ۳۳\le ۲q\le ۵۷\xrightarrow{\div ۲}۱۶/۵\le q\le ۲۸/۵\xrightarrow{q\in W}۱۷\le q\le ۲۸$$

روش دوم می توان برای یافتن حداکثر تعداد یال‌های گراف، ابتدا تمام درجه‌ها را، برابر با $\Delta(G)=۶$ در نظر گرفت: ۶,۶,۶,۶,۶,۶,۶,۶,۶,۶

سپس یکی از آن‌ها را تبدیل به عدد $\delta(G)=۳$ کرد و چون گراف با یک رأس فرد غیرممکن است، پس لازم است یکی دیگر از درجه‌ها برابر با یک عدد فرد و تا حد ممکن نزدیک به $\Delta(G)$ باشد، که در این‌جا عدد ۵ است.

$$\underbrace{۶,۶,۶,۶,۶,۶,۶,۶,۵,۳}_{\text{۱۰ تا}}\xrightarrow{+}۲q=۵۶\Rightarrow q=۲۸$$

به همین ترتیب برای یافتن حداقل تعداد یال‌های گراف، ابتدا تمام درجه‌ها را برابر با $\delta(G)=۳$، سپس یکی را تبدیل به عدد $\Delta(G)=۶$ می‌کنیم و چون ۹ رأس فرد (۹ رأس با درجهٔ ۳) غیرممکن است، پس درجهٔ یکی دیگر از رأس‌ها را زوج و تا حد ممکن نزدیک به $\delta(G)$ در نظر می‌گیریم. داریم:

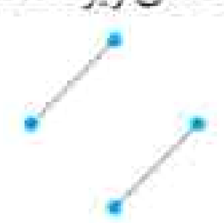
$$۶,۴,۳,۳,۳,۳,۳,۳,۳,۳\xrightarrow{+}۲q=۳۴\Rightarrow q=۱۷$$

بنابراین $۱۷\le q\le ۲۸$ است.

گراف k ـ منتظم

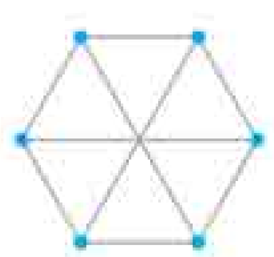
گرافی را که درجهٔ تمام رأس‌های آن با هم مساوی و برابر با عدد k می‌باشد، گراف k ـ منتظم می‌نامند.

برای مثال، گراف‌های زیر منتظم‌اند:



گراف ۱ـ منتظم مرتبهٔ ۴
(درجهٔ تمام رأس‌ها برابر ۱ است)

گراف ۲ـ منتظم مرتبهٔ ۵
(درجهٔ تمام رأس‌ها برابر ۲ است)



گراف ۳ـ منتظم مرتبهٔ ۶
(درجهٔ تمام رأس‌ها برابر ۳ است)

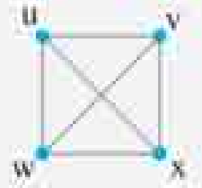
مسیر در گراف کامل

از آن‌جایی که در گراف کامل، تمام رأس‌ها دو به دو مجاور (همسایه) می‌باشند، بنابراین هر دنباله‌ای از رأس‌های متمایز گراف کامل، تشکیل یک مسیر می‌دهد.

تست: اگر u و v دو رأس دلخواه و متمایز از گراف k_4 باشند، چند $u-v$ مسیر متفاوت وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۲ در گراف k_4، به جز u و v، دو رأس دیگر وجود دارد. تمام $u-v$ مسیرها در گراف k_4 عبارت‌اند از:



«گراف k_4»

به طول ۱ $\Rightarrow uv \Rightarrow$ ۱ مسیر

به طول ۲ $\Rightarrow u \underset{\text{۲ انتخاب}}{\underline{\ ?\ }} v \Rightarrow$ ۲ مسیر

به طول ۳ $\Rightarrow u \underset{\text{۲ انتخاب}}{\underline{\ ?\ }} \underset{\text{۱ انتخاب}}{\underline{\ ?\ }} v \Rightarrow$ مسیر $(2\times1)=2$

$\Rightarrow$ ۵ مسیر

در گراف k_5، بین دو رأس دلخواه و متمایز u, v چند $u-v$ مسیر وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۴ **روش اول** در گراف k_5، به جز u ، v ، سه رأس دیگر وجود دارد. تمام $u-v$ مسیرها در گراف k_5 عبارت‌اند از:

به طول ۱ $\Rightarrow uv \Rightarrow$ ۱ مسیر

به طول ۲ $\Rightarrow u \underset{\text{۳ انتخاب}}{\underline{\ ?\ }} v$ ۳ مسیر

به طول ۳ $\Rightarrow u \underset{\text{۳ انتخاب}}{\underline{\ ?\ }} \underset{\text{۲ انتخاب}}{\underline{\ ?\ }} v \Rightarrow$ مسیر $(3\times2)=6$

به طول ۴ $\Rightarrow u \underset{\text{۳ انتخاب}}{\underline{\ ?\ }} \underset{\text{۲ انتخاب}}{\underline{\ ?\ }} \underset{\text{۱ انتخاب}}{\underline{\ ?\ }} v$ مسیر $(3\times2\times1)=6$

$\Rightarrow$ ۱۶ مسیر

روش دوم

راهبرد: اگر u و v دو رأس دلخواه و متمایز گراف k_p باشند، تعداد $u-v$ مسیرهای متفاوت در این گراف برابر است با: $\boxed{\lfloor (p-2)!\times e \rfloor}$

(به طوری‌که $e=2/718$ عدد نپر نام دارد)

- به کمک راهبرد داریم: $\lfloor (5-2)!\times 2/718 \rfloor = \lfloor 16/308 \rfloor = 16$

در گراف k_7، بین دو رأس دلخواه و متمایز u و v چند $u-v$ مسیر به طول ۴ وجود دارد؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۹۶

پاسخ: گزینه ۲ گراف k_7، به جز u و v، دارای ۵ رأس دیگر است. از طرفی $u-v$ مسیرهای به طول ۴، همگی شامل ۵ رأس می‌باشند.

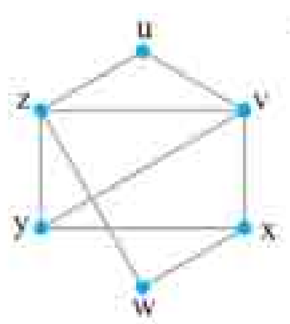
پس جواب عبارت است از: $u \underset{\text{۵ انتخاب}}{\underline{\ ?\ }} \underset{\text{۴ انتخاب}}{\underline{\ ?\ }} \underset{\text{۳ انتخاب}}{\underline{\ ?\ }} v \Rightarrow 5\times4\times3=60$

دور در گراف

مسیری که ابتدا و انتهایش یک رأس از گراف باشد، دور نامیده می‌شود. پس دور همانند مسیر، به جز رأس ابتدا و رأس انتها (که یکسان‌اند)، رأس و یال تکراری ندارد.

طول دور: تعداد یال‌های موجود در دور را طول دور می‌نامند، که همواره یکی کمتر از تعداد رأس‌های موجود در دور می‌باشد.

- برای مثال، در گراف شکل مقابل، داریم:



دور به طول ۳ است (شامل ۴ رأس) می‌باشد $\Leftarrow uvzu$

دور به طول ۴ است (شامل ۵ رأس می‌باشد) $\Leftarrow vxyzv$

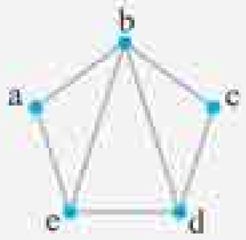
دور به طول ۵ است(شامل ۶ رأس می‌باشد) $\Leftarrow uvxwzu$

نتیجه: ۱ دنبالهٔ $v_1v_2\cdots v_nv_1$ $(n\geq 3)$ از رأس‌های دوبه‌دو متمایز، که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامند.

۲ دور به طول n شامل $n+1$ رأس است، که n رأس آن متمایزند. (رأس انتها، تکرار رأس ابتدا است)

- برای مثال، در گراف شکل بالا، دور به طول ۳ شامل ۴ رأس است، که ۳ رأس آن متمایزند.

۳ دوری با طول کمتر از ۳ وجود ندارد.



تست: در گراف شکل مقابل، چند دور وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه۴ دورهای مختلف را می‌نویسیم:

دورهای به طول ۴ $\xrightarrow{\text{چهارضلعی‌ها}}$ abdea, bcdeb دورهای به طول ۳ $\xrightarrow{\text{مثلث‌ها}}$ abea, bedb, bcdb

دورهای به طول ۵ $\xrightarrow{\text{پنج‌ضلعی‌ها}}$ abcdea

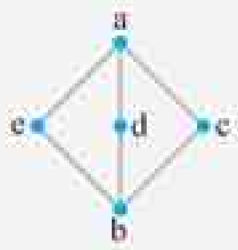
همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در این گراف، ۶ دور وجود دارد.

در گرافی با درجهٔ رأس‌های ۲، ۲، ۲، ۳، ۳، که دو رأس با درجهٔ بزرگ‌تر مجاور نیستند، چند دور به طول ۴ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه۳ ابتدا به رسم گراف می‌پردازیم (توجه کنید که این گراف شامل ۵ رأس است). سپس دورهای به طول ۴ (چهارضلعی‌ها) را می‌یابیم. داریم:

$\underbrace{\text{acbda , adbea , acbea}}_{\text{۳ دور به طول ۴}}$



در گراف G، اگر $\delta(G) \geq k$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟ $(k \in N)$

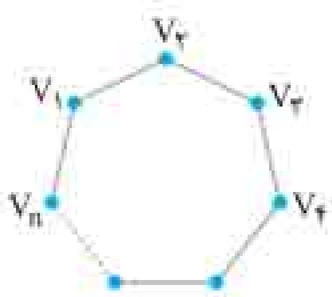
۱) گراف G شامل مسیری به طول بزرگ‌تر یا مساوی k است. ۲) گراف G لزوماً شامل یک مسیر به طول $k+1$ است.
۳) گراف G شامل دوری به طول k است. ۴) گراف G لزوماً شامل دوری به طول $k+1$ است.

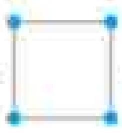
پاسخ: گزینه ۱ اگر v_1 یک رأس دلخواه از گراف G باشد، به طور حتم رأس v_1 به رأس دیگری مانند v_2 متصل است (زیرا درجهٔ تمام رأس‌ها حداقل k است). رأس v_2 نیز به رأس دیگری به جز رأس v_1، متصل است (زیرا هر رأس این گراف، دست‌کم به k رأس دیگری وصل می‌باشد). فرض می‌کنیم v_2، به جز رأس v_1، به رأسی مانند v_3 متصل است. رأس v_3، به رأسی از مجموعهٔ $V(G)-\{v_1, v_2\}$ متصل می‌باشد، که آن رأس را v_4 می‌نامیم و اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، رأس v_K به رأسی از مجموعهٔ $V(G)-\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ متصل است، که آن را V_{k+1} می‌نامیم (توجه کنید که درجهٔ رأس v_K، حداقل برابر k است. یعنی رأس v_K، به جز اتصال به $(k-1)$ رأس $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$، به رأس دیگری نیز متصل است).
بنابراین مسیر $v_1 v_2 v_3 \cdots v_K v_{k+1}$، که شامل $(k+1)$ رأس می‌باشد، یک مسیر به طول k در گراف G است.

نتیجه: ۱ در گراف G، اگر $\delta(G) \geq k$، آن‌گاه مسیری با طول حداقل k وجود دارد. $(k \in N)$.
با استدلالی مشابه استدلال بالا می‌توان نشان داد:
۲ در گراف G، اگر $\delta(G) \geq 2$، آن‌گاه گراف G حداقل یک دور دارد.

گراف C_n

گرافی که تنها از یک دورِ n رأسی تشکیل شده باشد، گراف C_n نامیده می‌شود.



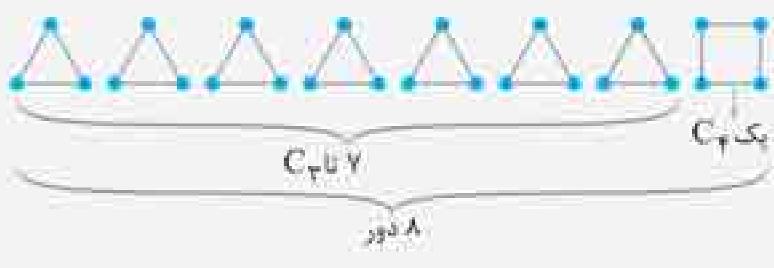
برای مثال، گراف  یک C_5 و گراف  یک C_4 است.

نکته: ۱ هر گراف C_n، همواره ۲ـ منتظم n رأسی (۲ـ منتظم از مرتبهٔ n) است. پس همواره $\Delta(C_n)=\delta(C_n)=2$ می‌باشد.
۲ هر گراف C_n، دارای n رأس و n یال است.
۳ با n رأس متمایز $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$، تعداد گراف‌های C_n برابر با $\frac{(n-1)!}{2}$ است. (چرا؟)

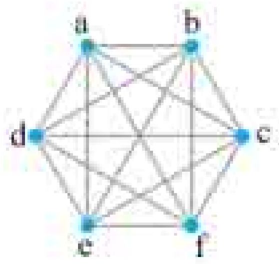
تست: در یک گراف با ۲۵ رأس درجهٔ ۲، حداکثر چند دور وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینه۴ اگر گراف C_{25} تشکیل دهیم که یک دور وجود دارد. اما اگر با ۲۵ رأس درجهٔ ۲، بخواهیم حداکثر دورها را بیابیم، می‌توان تا آن‌جا که ممکن است گراف‌های C_3 (و سپس C_4 و...) تشکیل دهیم. داریم:



دور در گراف کامل



گراف k_p، $p \geq ۳$، همواره دوری به طول m دارد به طوری‌که $m = ۳, \dots, p$.

برای مثال، گراف $k_۶$، همواره دور به طول ۳، دور به طول ۴، دور به طول ۵ و دور به طول ۶ دارد.

دور به طول ۳ : abca   دور به طول ۴ : abcda

دور به طول ۵: abcdea   دور به طول ۶: abcdefa

نکته: تعداد دورهای به طول m در گراف k_p، $p \geq ۳$، برابر است با

جایگشت دایره‌ای m رأس متمایز

$$\binom{p}{m} \times \frac{(m-۱)!}{۲}$$

انتخاب m رأس از p رأس
(دور به طول m شامل m رأس متمایز است)

نصف دورها تکراری می‌باشند
(به صورت رفت و برگشت‌اند)

برای مثال، تعداد دورهای به طول ۳ در گراف $k_۴$، برابر است با:

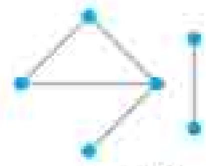
$$\binom{۴}{۳} \times \frac{(۳-۱)!}{۲} = ۴$$

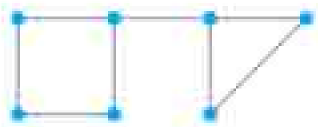
که عبارت‌اند از: abca، abda ، acda ، bcdb

همبندی و ناهمبندی یک گراف

یک گراف را همبند می‌گوییم هر گاه بین هر دو رأسِ آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این صورت آن گراف را ناهمبند می‌نامیم.

برای مثال، داریم:

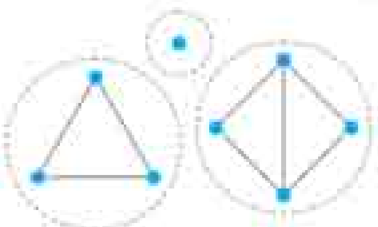

«گراف ناهمبند»


«گراف همبند»

نتیجه: (۱) برای تشخیص همبندی یک گراف، کافی است به کمک تجسم ذهنی، یک رأس گراف را از صفحه بکشید، اگر تمام رأس‌ها از صفحه کَنده شدند، گراف همبند و اگر رأسی (رأس‌هایی)، روی صفحه باقی ماند، گراف ناهمبند است.

(۲) هر گراف ناهمبند، از قسمت‌های همبند تشکیل شده است، که به هر قسمت یک مؤلفهٔ همبندی گفته می‌شود.

برای مثال، در گراف ناهمبند روبه‌رو، سه مؤلفهٔ همبندی وجود دارد.



(۳) هر گراف همبند، با بیش از یک رأس، فاقد رأس تنها است، اما عکس آن لزوماً درست نیست. یعنی هر گرافی که فاقد رأس تنها است، لزوماً همبند نیست.

به عبارت دیگر

$\boxed{p>۱ \text{ گراف همبند } G \text{ با مرتبهٔ } \Rightarrow \delta(G) \geq ۱}$

(۴) اگر گراف G از مرتبهٔ p، یک رأس فول داشته باشد (به عبارت دیگر $\Delta(G)=p-۱$ باشد)، آن‌گاه گراف G همواره همبند است. (زیرا یک رأس به تمام رأس‌ها متصل است).

$\boxed{\Delta(G) = p-۱ \Rightarrow \text{ گراف } G \text{ همواره همبند است}}$

(۵) اگر G یک گراف ناهمبند باشد، آن‌گاه گراف $\bar{G}$ همبند است.

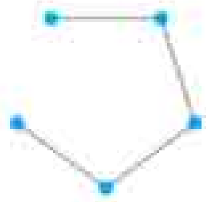
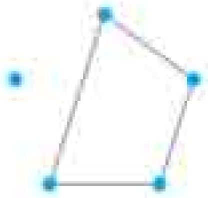
تست: درجه‌های رأس‌های گراف همبند G به صورت a ، b ، ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲ است. کمترین عدد a+b کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ۴ می‌دانیم مجموع درجه‌های رأس‌های گراف G، همواره عددی زوج (2q) است. از آن‌جایی که ۱۴=۲+۳+۴+۵ عددی زوج می‌باشد، پس a+b نیز باید عددی زوج باشد. بنابراین گزینه‌های ۱ ، ۳ حذف می‌شوند. حال اگر a+b=۲ باشد، از آن‌جایی‌که گراف G همبند است، پس a≠۰ و b≠۰ (چرا؟) و لذا a=۱ و b=۱ می‌باشد. اما گرافی همبند با درجه‌های ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۱ ، ۱ قابل رسم نیست. زیرا با وجود دو رأس ۵ ، ۴، دو رأس درجهٔ ۱ غیرممکن است. بنابراین a+b=۴ را می‌پذیریم.

نکته: ① یک گراف همبند از مرتبهٔ p، حداقل $p-1$ یال دارد.

- عکس نکتهٔ ۱، لزوماً درست نیست. یعنی اگر گرافی p رأس و $p-1$ یال داشته باشد، ممکن است گراف همبند نباشد.

برای مثال، گراف همبند از مرتبهٔ ۵، حداقل ۴ یال دارد:  اما گرافی با ۵ رأس و ۴ یال، همواره همبند نیست: 

نتیجه: در گراف G از مرتبهٔ p و اندازهٔ q داریم:

$q < p-1 \Rightarrow$ گراف G همواره ناهمبند است

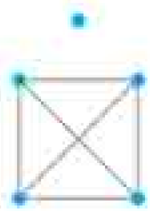
تست: گرافی با درجه‌های ۳، ۲، ۲، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱ همواره چگونه است؟

۱) همبند ۲) ناهمبند ۳) فاقد دور ۴) دارای ۲ دور

پاسخ: گزینه ۲ واضح است که $p=8$ می‌باشد و جمع درجه‌ها برابر ۱۲ است، پس $2q=12$ و در نتیجه $q=6$. از آن‌جایی‌که $q<p-1$ می‌باشد، پس گراف همواره ناهمبند است.

② یک گراف ناهمبند از مرتبهٔ p، حداکثر $\binom{p-1}{2}$ یال دارد.

- برای آن‌که گراف از مرتبهٔ p، ناهمبند باشد، یک رأس را تنها در نظر می‌گیریم و با سایر رأس‌ها ($p-1$ رأس باقی مانده) گراف کامل می‌سازیم تا بیشترین یال به دست آید. تعداد یال‌های گراف $k_{(p-1)}$ برابر با $\binom{p-1}{2}$ است.

برای مثال، یک گراف از مرتبهٔ ۵، حداکثر $6=\binom{5-1}{2}$ یال دارد. 

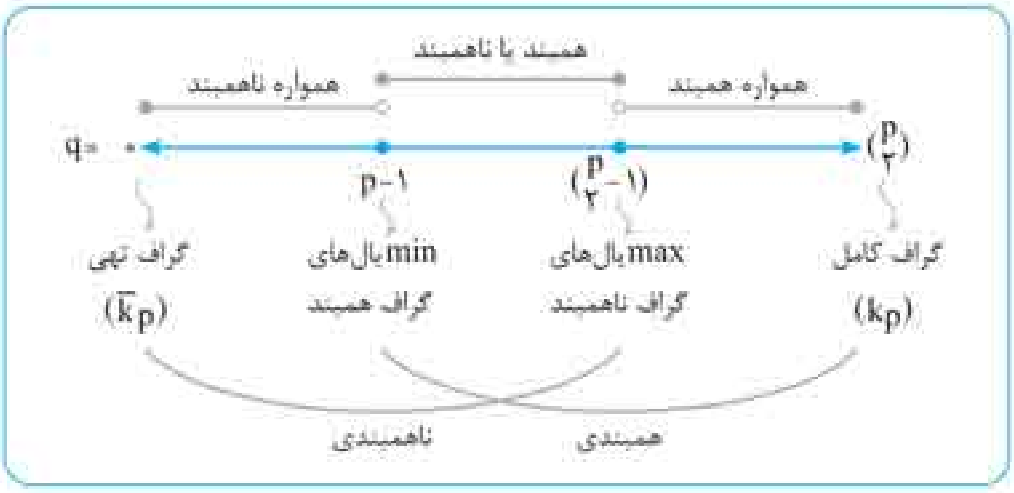
نتیجه: در گراف G از مرتبهٔ P و اندازهٔ q داریم:

$q > \binom{p-1}{2} \Rightarrow$ گراف G همواره همبند است

برای مثال، یک گراف با $p=5$ و $q=7$ همواره همبند است. زیرا $q>\binom{p-1}{2}$ می‌باشد. توجه کنید که $7>\binom{5-1}{2}$ است.

جمع‌بندی

در گراف G از مرتبهٔ P و اندازهٔ q داریم:



تست: کدام‌یک از گراف‌های زیر همواره همبند است؟

۱) گرافی با ۶ رأس و ۱۱ یال ۲) گرافی با ۶ رأس و ۹ یال

۳) گرافی با ۷ رأس و ۱۱ یال ۴) گرافی با ۷ رأس و ۹ یال

پاسخ: گزینه ۱ تنها در گزینهٔ یک، $q>\binom{P-1}{2}$ است.

مدلسازی با گراف: احاطه‌گری

شروع بحث «احاطه‌گری»: از صفحهٔ شطرنج

می‌توان گفت مسألهٔ زیر، به لحاظ تاریخچه‌ای، نقطهٔ آغازین بحث احاطه‌گری در گراف‌ها می‌باشد.

مسأله وزیرهای احاطه‌گر

می‌دانیم طبق قوانین بازی شطرنج، مهرهٔ وزیر می‌تواند در جهت عمودی، افقی و مورّب به تعداد دلخواه حرکت کند. بنابراین یک مهرهٔ وزیر، همانند شکل روبه‌رو، می‌تواند در حرکت بعدی خود، در هر یک از خانه‌هایی که با علامت x مشخص شده‌اند، قرار گیرد. در واقع همهٔ خانه‌های مشخص شده، توسط وزیر تهدید می‌شوند و به عبارتی همهٔ این خانه‌ها توسط وزیر، احاطه شده‌اند. حال این سؤال مطرح است که «حداقل چند مهرهٔ وزیر لازم است که با چینش مناسب، تمام صفحهٔ شطرج را بپوشاند یا احاطه کنند؟ (یعنی هر خانهٔ صفحهٔ شطرنج که در آن وزیر قرار نگرفته است، توسط حداقل یک وزیر تهدید شده باشد.)»

در شکل روبه‌رو، نشان می‌دهیم که حداقل۵ وزیر برای احاطه کردن همهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنج لازم است.

در ادامه چند نوع دیگر از این مسائل، که مورد علاقهٔ شطرنج بازها بوده است، ارائه می‌کنیم. تمام این مسائل، بحث احاطه‌گری را دربر می‌گیرند.

مسئله ۱: حداقل تعداد مهره‌های لازم از یک نوع خاص (وزیر، شاه، رخ، اسب، فیل) را بیابید، به طوری‌که:

الف) همهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنج احاطه شوند.

ب) همهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنج احاطه شوند، به گونه‌ای که تمام خانه‌های خالی تهدید شوند، اما هیچ دو مهرهٔ مورد استفاده‌ای، یکدیگر را تهدید نکنند.

مسئله ۲: حداکثر تعداد مهره‌های لازم از یک نوع خاص (وزیر، شاه، رخ، اسب، فیل) را بیابید، به طوری‌که در صفحه شطرنج چیده شوند و هیچ دو مهره‌ای همدیگر را تهدید نکنند.

تست: در صفحهٔ شطرنج شکل مقابل با توجه به ۴ وزیر مشخص شده، با انجام کدام مورد زیر تمام خانه‌های صفحهٔ شطرنج احاطه می‌شوند؟

۱) قرار دادن یک وزیر در خانهٔ به مختصات ۴ افقی و ۸ عمودی

۲) قرار دادن دو وزیر، یکی در خانهٔ به مختصات ۴ افقی و ۸ عمودی و یکی در خانهٔ به مختصات ۸ افقی و ۴ عمودی

۳) قرار دادن یک وزیر در خانهٔ به مختصات ۴ افقی و ۴ عمودی

۴) قرار دادن دو وزیر یکی در خانهٔ به مختصات ۴ افقی و ۴ عمودی و یکی در خانهٔ به مختصات ۲ افقی و ۵ عمودی

پاسخ: گزینه۳ خانه‌هایی که توسط این ۴ وزیر احاطه شده‌اند، در شکل روبه‌رو، مشخص کرده‌ایم. بنابراین با قرار دادن یک وزیر در خانهٔ به مختصات ۴ افقی و ۴ عمودی، تمام خانه‌های مشخص شده با ○، که احاطه نشده بودند، نیز احاطه خواهند شد.

احاطه‌گری در گراف

در هر گراف یافتن رأس (رأس‌هایی) از مجموعهٔ رأس‌های گراف، که با تمام رأس‌های دیگر گراف مجاور باشند یا به عبارت دیگر همهٔ رأس‌ها را احاطه نمایند، احاطه‌گری در گراف گفته می‌شود.

به عنوان مثال در یک محله، می‌خواهیم شورایی تشکیل دهیم که هر یک از ساکنین این محله، که عضو این شورا نیستند، حداقل با یکی از عضوهای شورا آشنا باشند. اگر افراد را با رأس‌ها و آشنا بودن دو نفر را با یک یال نشان دهیم، باید شورا متشکل از رأس‌هایی باشد، که سایر رأس‌ها، لااقل با یکی از رأس‌های شورا مجاور باشند. این مسأله، احاطه‌گری در گراف را نشان می‌دهد. به عبارت دیگر مجموعهٔ اعضای شورا، باید تمام افراد محله را احاطه نمایند.

مجموعه‌های احاطه‌گر در گراف

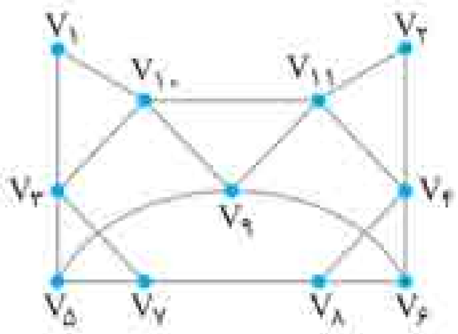
① مجموعهٔ احاطه‌گر

تعریف: زیرمجموعهٔ D از مجموعهٔ رأس‌های گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گرِ گراف G می‌گوییم، هرگاه هر رأس از گراف G، یا به مجموعهٔ D تعلق داشته باشد یا حداقل با یکی از رأس‌های متعلق به مجموعهٔ D، مجاور (همسایه) باشد. به عبارت دیگر:

مجموعهٔ D یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف G است اگر و تنها اگر: $\boxed{D \subseteq V(G) \wedge \left(\forall v \in V(G); N_G[v] \cap D \neq \varnothing\right)}$

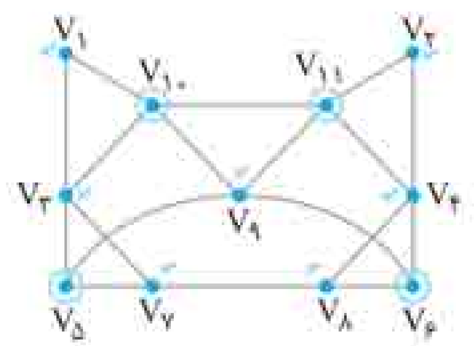
- می‌توان نتیجه گرفت که بزرگ‌ترین مجموعهٔ احاطه‌گر برای هر گراف، مجموعهٔ رأس‌های آن می‌باشد.

برای مثال، با توجه به گراف شکل مقابل، هر یک از مجموعه‌های

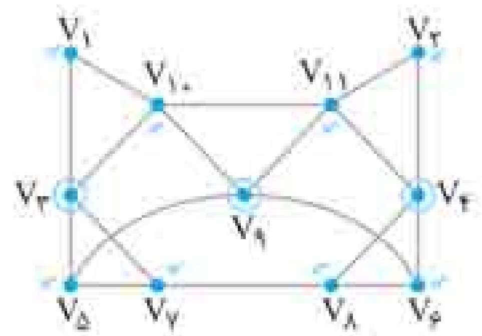


$$D_1 = \{v_5, v_6, v_{10}, v_{11}\}$$
$$D_2 = \{v_9, v_3, v_4\}$$
$$D_3 = \{v_1, v_2, v_{10}, v_5, v_6\}$$

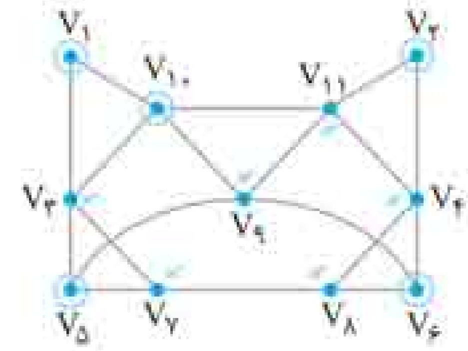
یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف G می‌باشند. زیرا با در نظر گرفتن هر کدام، سایر رأس‌های گراف G احاطه می‌شوند.



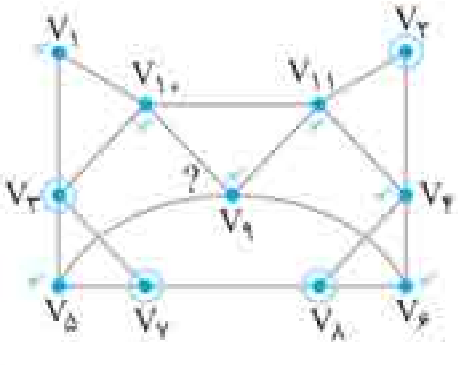
$D_1 = \{v_5, v_6, v_{10}, v_{11}\}$



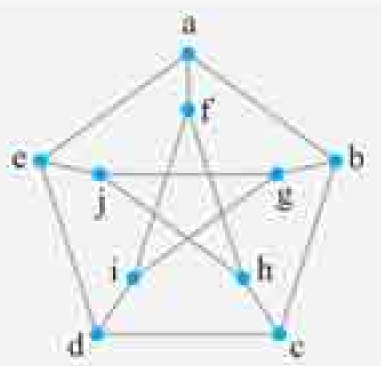
$D_2 = \{v_9, v_3, v_4\}$



$D_3 = \{v_1, v_2, v_{10}, v_5, v_6\}$



اما مجموعهٔ $D_4 = \{v_2, v_3, v_7, v_8\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف G نیست. زیرا رأس v_9 با هیچ کدام از عضوهای مجموعهٔ D_4، مجاور (همسایه) نیست. به عبارت دیگر از آن‌جایی که $N_G[v_9] = \{v_9, v_{10}, v_{11}, v_5, v_6\}$ است، واضح است که $N_G[v_9] \cap D_4 = \varnothing$. پس مجموعهٔ D_4، تعریف مجموعهٔ احاطه‌گر را نقض کرده است.



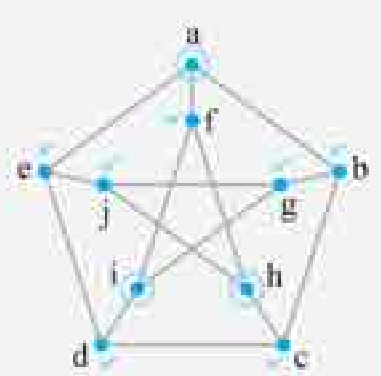
① تست: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برای گراف شکل مقابل، یک مجموعهٔ احاطه‌گر نیست؟

۱) $\{a,b,c,d,e\}$ ۲) $\{f,g,h,i,j\}$

۳) $\{a,i,h\}$ ۴) $\{a,j,g,h,b\}$

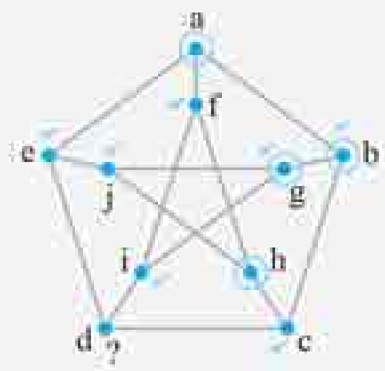
پاسخ: گزینه ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: این مجموعه، یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. زیرا هر کدام از رأس‌های f، g، h، i و j با یکی از رأس‌های این مجموعه مجاورند. مثلاً f با a مجاور است، g با b مجاور است و...



گزینهٔ ۲: مجموعه مشخص شده، یک مجموعه احاطه‌گر است. زیرا هر کدام از رأس‌های a، b، c، d و e با یکی از رأس‌های آن مجاورند. مثلاً a با f مجاور است و...

گزینهٔ ۳: با توجه به شکل مقابل، این مجموعه نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. زیرا تمام رأس‌های گراف را احاطه کرده است.

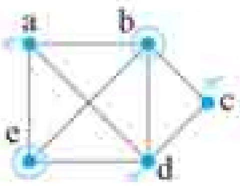


گزینهٔ ۴: با توجه به شکل مقابل، این مجموعه، نمی‌تواند یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف داده شده محسوب شود. زیرا رأس d احاطه نمی‌شود.
توجه کنید که $N_G[d]=\{d,e,i,c\}$، که هیچ اشتراکی با مجموعهٔ داده شده ندارد.

۲) مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم

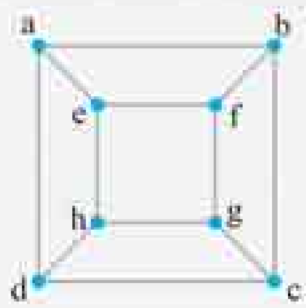
تعریف: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر یک گراف، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم می‌گویند.

- تعداد عضوهای مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم گراف G را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامند و آن را با نماد $\gamma(G)$ نشان می‌دهند.
- یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم از گراف G را، یک γ ـ **مجموعه** نیز می‌گویند.



برای مثال، مجموعهٔ $\{b,e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای گراف G در شکل روبه‌رو می‌باشد.

زیرا با کمتر از ۲ عضو، نمی‌توان تمام رأس‌های گراف را احاطه کرد. پس $\gamma(G)=۲$ و لذا مجموعهٔ $\{b,e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای گراف G است. البته این گراف مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم دیگری نیز دارد. مانند $\{c,a\}$، $\{a,d\}$ و...



تست: برای گراف شکل مقابل، کدام مجموعه، می‌تواند مجموعه احاطه‌گر مینیمم این گراف باشد؟

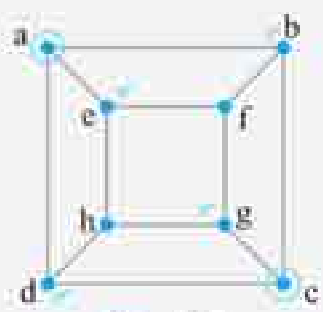
۱) $\{a,c\}$
۲) $\{f,b,g\}$
۳) $\{b,h\}$
۴) $\{h,c\}$

پاسخ: (گزینه۳) ابتدا به بررسی گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ می‌پردازیم، که کمترین عضو را دارند. در صورت نیافتن پاسخ، به سراغ گزینهٔ ۲ می‌رویم.

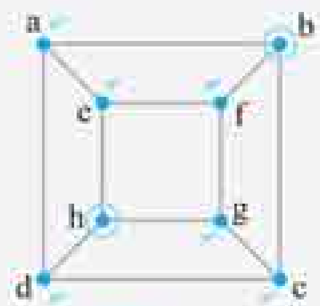
گزینهٔ «۱»: با توجه به شکل ۱، مجموعهٔ $\{a,c\}$ احاطه‌گر نیست. زیرا رأس‌های h,f احاطه نشده‌اند.

گزینهٔ «۳»: با توجه به شکل ۲، مجموعهٔ $\{b,h\}$ تمام رأس‌های گراف را می‌تواند احاطه کند. پس همین گزینه را می‌پذیریم.

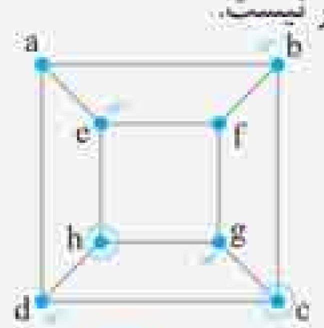
گزینهٔ «۴»: به کمک شکل ۳، درمی‌یابیم که مجموعهٔ $\{h,c\}$ نمی‌تواند رأس‌های f,a را احاطه نماید. پس یک مجموعهٔ احاطه‌گر نیست.



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

توجه کنید که مجموعهٔ $\{f,b,g\}$ در گزینهٔ ۲، یک مجموعهٔ احاطه‌گر می‌باشد، اما مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم نیست.

یک گام فراتر: یک روش پیشنهادی برای یافتن مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم گراف G

می‌دانیم هر رأس گراف G، تمام عضوهای متعلق به مجموعهٔ همسایگی بستهٔ خود را احاطه می‌کند. به عبارت دیگر هر رأس مانند v از گراف G، همواره به تعداد $|N_G[v]|$ یا $\deg_G(v)+۱$ رأس را احاطه می‌نماید، که این عدد را توان احاطه‌گری رأس v می‌نامیم.

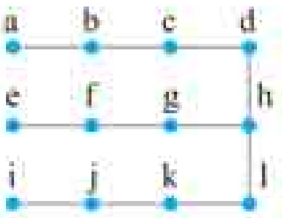
حال برای یافتن مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم گراف G به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مرحلهٔ ۱: عدد مربوط به توان احاطه‌گری تمام رأس‌های گراف G را می‌یابیم (در این مرحله، عددِ توان احاطه‌گری هر رأس، یکی بیشتر از درجهٔ آن رأس است)

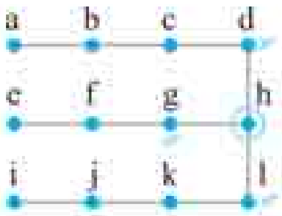
مرحلهٔ ۲: رأسی که بیشترین عددِ توان احاطه‌گری را دارد، به عنوان اولین عضو در مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم قرار می‌دهیم. توجه کنید که اگر عددِ توان احاطه‌گری این رأس با مرتبهٔ گراف برابر باشد، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم گراف G، تک‌عضوی است. (در این مرحله، اگر چند رأسِ گراف، ماکزیمم عددِ توان احاطه‌گری را داشته باشند، یکی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم.)

مرحلهٔ ۳: عددِ توان احاطه‌گری سایر رأس‌های گراف را دوباره می‌یابیم. توجه کنید که این عدد، فقط تعداد رأس‌هایی را نشان می‌دهد که مجاور با رأس موردنظر می‌باشند و توسط رأس مورد استفاده در مرحلهٔ ۲ احاطه نشده‌اند. در ضمن ممکن است خودِ رأس موردنظر احاطه شده باشد، که در این صورت در عددِ توان احاطه‌گری خودش محاسبه نمی‌شود.

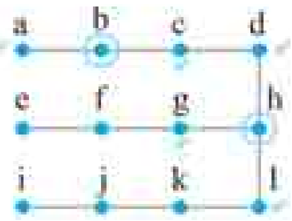
مرحلهٔ ۴: در بین اعداد به دست آمده از توان احاطه‌گری سایر رأس‌ها، رأسی را که بزرگ‌ترین عدد توان احاطه‌گری را دارد انتخاب می‌کنیم و در مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم قرار می‌دهیم. اگر مجموع دو عدد توان احاطه‌گری این دو رأس برابر با مرتبهٔ گراف شود، کار تمام و مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم گراف G تکمیل شده است. در غیر این صورت دوباره به مرحلهٔ ۳ می‌رویم.



- برای مثال، می‌خواهیم مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم گراف G در شکل مقابل را بیابیم.

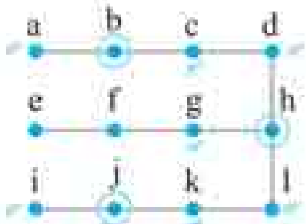


مرحلهٔ ۱: واضح است که رأس h ماکزیمم درجه را دارد و لذا بیشترین عددِ توان احاطه‌گری را در بین رأس‌های این گراف دارا می‌باشد (که این عدد برابر ۴ است). پس در مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، ابتدا رأس h را قرار می‌دهیم. از آن‌جایی که عددِ توان احاطه‌گری رأس h برابر ۴ و مرتبهٔ گراف G برابر ۱۲ است، پس هنوز مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم تکمیل نشده است.



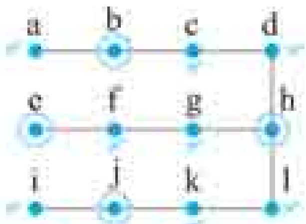
مرحلهٔ ۲: در بین رأس‌های باقی‌مانده دو رأس b و j دارای بیشترین عددِ توان احاطه‌گری می‌باشند، که این عدد برابر ۳ است (رأس b، خودش و دو رأس a و c و رأس j، خودش و دو رأس i و k را احاطه می‌نمایند). اکنون یکی از این دو رأس، مثلاً رأس b را، انتخاب می‌کنیم و در مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم قرار می‌دهیم. داریم:

$$\{\underbrace{h}_{4},\underbrace{b}_{3}\}$$



مرحلهٔ ۳: همان‌طور که می‌بینید، مجموع دو عددِ توانِ احاطه‌گری دو رأس h و b برابر ۷ است و با مرتبه گراف (عدد ۱۲) برابر نیست. اکنون بین رأس‌های باقی‌مانده، همچنان رأس j بیشترین عددِ توان احاطه‌گری را دارد (عدد ۳). پس با انتخاب رأس j در مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم داریم:

$$\{\underbrace{h}_{4},\underbrace{b}_{3},\underbrace{j}_{3}\}$$



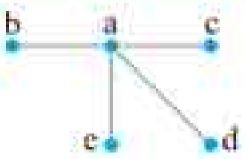
باز هم مجموع اعداد توانِ احاطه‌گری این سه رأس با مرتبهٔ گراف برابر نیست. پس مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم تکمیل نشده است. اکنون در بینِ دو رأس باقی‌مانده f و e هر دو عددِ توانِ احاطه‌گری یکسان و برابر ۲ دارند. پس با انتخاب یکی از آن‌ها (به دلخواه)، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، تکمیل می‌گردد و مجموع اعدادِ توانِ احاطه‌گری هر ۴ رأس برابر با ۱۲ (مرتبهٔ گراف) است.

$$\{\underbrace{h}_{4},\underbrace{b}_{3},\underbrace{j}_{3},\underbrace{e}_{2}\}$$

کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری یک گراف

نکته: اگر در گراف G از مرتبهٔ n، رأس با درجهٔ $n-1$ (رأس فول) وجود داشته باشد، آن‌گاه عدد احاطه‌گری گراف G برابر ۱ است. به عبارت دیگر در گراف n رأسی G داریم:

$$\boxed{\Delta(G)=n-1 \Leftrightarrow \gamma(G)=1}$$



برای مثال، در گراف G (شکل روبه‌رو)، با ۵ رأس، از آن‌جایی رأس a با درجهٔ ۴ می‌باشد (یعنی رأس فول است و با سایر رأس‌ها مجاور می‌باشد)، پس $\gamma(G)=1$. یعنی مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، $\{a\}$ است.

نتیجه: در هر گراف کامل، همواره $\gamma(G)=1$. (زیرا در گراف k_n، همواره $\Delta(k_n)=n-1$ و لذا $\gamma(k_n)=1$)

هشدار: $\boxed{1}$ اگر در گراف G، $\gamma(G)=1$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت گراف G، یک گراف کامل است و تنها می‌توان گفت، گراف G حداقل یک رأس فول دارد.

نتیجه: گراف G، از مرتبهٔ n با $\gamma(G)=1$، حداقل $n-1$ یال و حداکثر $\binom{n}{2}$ یال دارد.

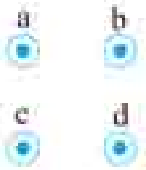
زیرا اگر $\gamma(G)=1$، می‌توان گفت گراف G حداقل یک رأس با درجهٔ $n-1$ (یک رأس فول) دارد. پس حداقل $n-1$ یال رسم می‌شود. در حالت حداکثر می‌توان گفت، گراف G یک گراف کامل است و $\binom{n}{2}$ یال دارد.

تست: در یک گراف ۸ رأسی با $\gamma(G)=1$، تعداد یال‌ها برابر کدام عدد نمی‌باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

پاسخ: $\boxed{\text{گزینه ۱}}$ با توجه به نتیجهٔ بالا، تعداد یال‌های این گراف حداقل $8-1=7$ و حداکثر $\binom{8}{2}=28$ است. پس برابر ۶ نمی‌تواند باشد.

۲ در گراف تهی، عدد احاطه‌گری با مرتبهٔ گراف برابر است. به عبارت دیگر در گراف $\overline{k}_n$، همواره $\gamma(G)=n$.



برای مثال، عدد احاطه‌گری در گراف مقابل، $\gamma(\overline{k}_4)=4$ است.

نکته: اگر G یک گراف n رأسی (از مرتبهٔ n) باشد، آن‌گاه

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta(G)+1} \right\rceil \le \gamma(G) \le n-\Delta(G)$$

برای اثبات می‌توان گفت در یک گراف با یک رأس ماکزیمم، که درجهٔ آن Δ می‌باشد، $\Delta+1$ رأس احاطه می‌شوند (زیرا تعداد رأس‌های مجاور، برابر Δ می‌باشند و با خودش، $\Delta+1$ رأس احاطه می‌گردد). پس در بدترین حالت، اگر همین یک رأس با درجهٔ Δ باشد، آن‌گاه خودِ این رأس و $n-(\Delta+1)$ رأس دیگر در مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم گراف G قرار دارند، پس $\gamma(G)\le(n-(\Delta+1))+1$ و در نتیجه $\gamma(G)\le n-\Delta(G)$ است. در بهترین حالت، اگر تمام رأس‌ها با درجهٔ Δ باشند، در این صورت تعداد رأس‌های مورد نیاز برای احاطهٔ کل رأس‌های گراف، حداقل برابر با $\frac{n}{\Delta+1}$ می‌باشد و چون عدد صحیح موردنظر است، لذا $\gamma(G)\ge\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$.

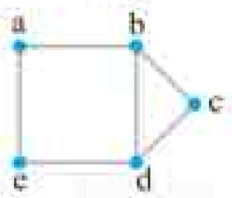
تذکر: نماد جزء صحیح (براکت) به صورت $\lfloor\ \rfloor$ یا $[\ ]$ می‌باشد و آن را کف و نماد سقف به صورت $\lceil\ \rceil$ است. توجه کنید که کف، عدد اعشاری خود را رو به پایین و سقف، رو به بالا گرد می‌کند. پس در محاسبهٔ کف (جزء صحیح) x، اولین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x و در محاسبهٔ سقف x، اولین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی با x را در نظر می‌گیریم.

به عبارت دیگر:

$$[x]=\lfloor x \rfloor=\begin{cases} x & ;\quad x\in\mathbb{Z} \\ \text{بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از } x & ;\quad x\notin\mathbb{Z} \end{cases} \qquad \lceil x \rceil=\begin{cases} x & ;\quad x\in\mathbb{Z} \\ \text{کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از } x & ;\quad x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

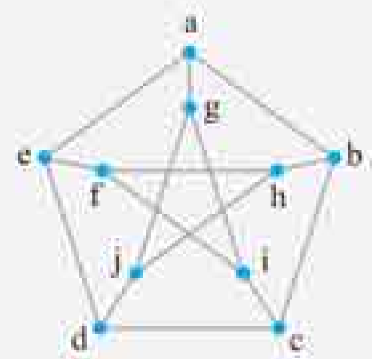
به عنوان مثال $\lfloor ۲/۷ \rfloor=[۲/۷]=۲$ و $\lceil ۲/۷ \rceil=۳$ یا $\lfloor -۳/۷ \rfloor=[-۳/۷]=-۴$ و $\lceil -۳/۷ \rceil=-۲$
(بدیهی است که اگر $x\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه $[x]=\lceil x \rceil$).

برای مثال، جهت یافتن عدد احاطه‌گری گراف G، در شکل مقابل، با توجه به این‌که تعداد رأس‌های گراف $n=۵$ و $\Delta(G)=۳$ است، داریم:



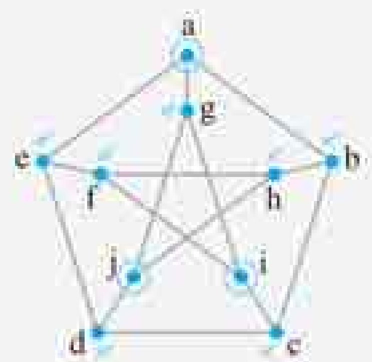
$$\left\lceil \frac{۵}{۳+۱} \right\rceil \le \gamma(G) \le ۵-۳ \xrightarrow{\left\lceil \frac{۵}{۴} \right\rceil=۲} ۲\le\gamma(G)\le۲ \Rightarrow \gamma(G)=۲$$

تست: عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ با توجه به این‌که در این گراف ۳ـ منتظم، تعداد رأس‌های $n=۱۰$ و $\Delta(G)=۳$ است، پس $\left\lceil \frac{۱۰}{۳+۱} \right\rceil \le \gamma(G) \le ۱۰-۳$ و یا $۳\le\gamma(G)\le۷$ می‌باشد (پس گزینهٔ «۴» حذف می‌گردد). از طرفی می‌دانیم مجموعهٔ $\{a,i,j\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای این گراف است. پس $\gamma(G)=۳$.
(توجه کنید که در این گراف، $\gamma(G)$ با $\left\lceil \frac{n}{\Delta(G)+1} \right\rceil$ برابر می‌باشد.)



نتیجه: در هر گراف k-منتظم G، با n رأس همواره داریم:

$$\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil \le \gamma(G) \le n-k$$

(زیرا در گراف kـ منتظم، همواره $\Delta(G)=k$ است.)

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵

۱۴۰۶. مرتبهٔ یک گراف ساده ۶ است. کدام گزینه نمی‌تواند اندازهٔ این گراف باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) صفر

۱۴۰۷. G گرافی ساده از اندازهٔ ۱۴ با ۳ رأس تنها (درجه صفر) است. حداقل مرتبهٔ G چند است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۱۴۰۸. تعداد گراف‌های ساده از مرتبهٔ ۶ و اندازهٔ ۳ کدام است؟ (رأس‌ها نام‌گذاری نشده‌اند)

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۵

۱۴۰۹. چند گراف ساده از مرتبهٔ ۵ و اندازهٔ ۲ وجود دارد؟ (رأس‌ها نام‌گذاری نشده‌اند)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴۱۰. چند گراف ساده با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ وجود دارد که همگی فقط ۳ یال داشته باشند؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۰

۱۴۱۱. با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف ساده با دقیقاً ۳ یال وجود دارد که همگی فاقد یال ab باشند؟

۱) ۳۶ ۲) ۸۴ ۳) ۵۵ ۴) ۷۲

۱۴۱۲. با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف ساده با فقط ۳ یال وجود دارد، به طوری‌که همگی شامل یال ab باشند؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۸۴ ۴) ۶۰

۱۴۱۳. با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف ساده وجود دارد؟

۱) $۲^{۵}$ ۲) $۲^{۱۰}$ ۳) $۲^{۱۵}$ ۴) ۵×۲^{۵}

۱۴۱۴. با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف ساده وجود دارد که همگی شامل یال ab باشند؟

۱) $۲^{۱۰}-۱$ ۲) $۲^{۱۰-۱}$ ۳) $۲^{۱۰}-۱۰$ ۴) $۲^{۶}$

۱۴۱۵. با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف ساده وجود دارد که همگی فاقد یال ab باشند؟

۱) $۲^{۱۰}-۱$ ۲) $۲^{۱۰-۱}$ ۳) $۲^{۱۰}-۱۰$ ۴) $۲^{۱۰}-۴$

۱۴۱۶. با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف ساده وجود دارد که همگی فاقد یال ab و شامل یال‌های bc و ac باشند؟

۱) $۲^{۹}$ ۲) $۲^{۸}$ ۳) $۲^{۷}$ ۴) $۲^{۶}$

۱۴۱۷. با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف ساده می‌توان رسم کرد به طوری‌که حداقل شامل یال‌های ab، bc، cd و de باشد؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۱۸

۱۴۱۸. با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف ساده می‌توان رسم کرد به طوری‌که حداقل شامل یکی از یال‌های ab، bc و cd باشند؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۵۱۲ ۳) ۶۱۹ ۴) ۸۹۶

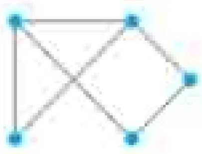
۱۴۱۹. با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف ساده با دقیقاً ۲ یال مشترک در یک رأس وجود دارد؟

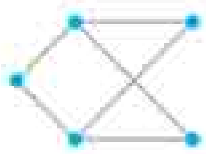
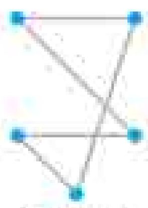
۱) ۱۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۴۵

۱۴۲۰. با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف ساده با دقیقاً دو یال وجود دارد به طوری‌که این دو یال رأس مشترک نداشته باشند؟

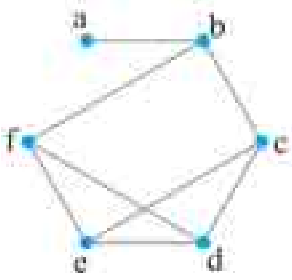
۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

۱۴۲۱. کدام گراف با گراف مقابل یک‌ریخت نیست؟



۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۴۲۲. با توجه گراف G در شکل مقابل، تعداد زیر گراف‌های از مرتبهٔ ۶ و اندازهٔ ۴ برای گراف G کدام‌اند؟



۱) ۲۴

۲) ۳۶

۳) ۵۶

۴) ۷۰

۱۴۲۳. در گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$، اگر $N_G(a)=\{b,c,d\}$، $N_G(b)=\{a,c\}$، $N_G(c)=\{a,b\}$، $N_G(d)=\{a,f\}$، $N_G(f)=\{d\}$ و $N_G[e]=\{e\}$، آن‌گاه اندازهٔ گراف G کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۷

۱۴۲۴. در گراف G، اگر $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,...,v_6\}$ و $N_G(v_1)$ دارای ۵ عضو و مجموعه‌های $N_G(v_i)$ برای $2\leq i\leq 6$، تک عضوی باشند، آن‌گاه اندازهٔ گراف G کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۴۲۵. در گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$، اگر برای $i=1,2,...,6$، همواره $N_G[v_i]=V(G)$، آن‌گاه گراف G کدام است؟

۱) k_6 ۲) $\overline{k}_6$ ۳) C_6 ۴) P_6

۱۴۲۶. گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$، اگر مجموعه‌های $N_G[v_i]$ برای $i=1,2,...,6$ تک‌عضوی باشند، گراف G کدام است؟

۱) k_6 ۲) $\overline{k}_6$ ۳) C_6 ۴) P_6

۱۴۲۷. درجه‌های رأس‌های گراف G، اعداد ۱، ۱، ۱، ۵، a، b می‌باشد. $a+b$ چند جواب دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴۲۸. گراف G از مرتبهٔ ۱۵، رأس تنها ندارد. این گراف حداقل چند یال دارد؟

۱) ۱۴ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۴۲۹. در یک گراف ساده درجه‌ها به صورت $5,5,3,3,x,y$ می‌باشد. کم‌ترین مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴۳۰. فرض کنید G گرافی از مرتبهٔ ۲۰ است. اگر این گراف فقط ۸ رأس با درجهٔ صفر داشته باشد، در این صورت بیش‌ترین تعداد ممکن برای $\Delta(G)$ در این گراف کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۹

۱۴۳۱. در گرافی که ۱۶ رأس دارد، تعداد رأس‌های زوج عددی .... و تعداد رأس‌های فرد عددی .... است.

۱) فرد ـ فرد ۲) فرد ـ زوج ۳) زوج ـ فرد ۴) زوج ـ زوج

۱۴۳۲. گراف G با ۱۰ یال، دو رأس با درجهٔ ۴ دارد. اگر درجهٔ سایر رأس‌های آن برابر ۳ باشد، مرتبهٔ آن کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۴۳۳. درجهٔ تمام رأس‌های یک گراف از مرتبهٔ P و اندازهٔ q برابر ۳ یا ۱ است. اگر درجهٔ نیمی از رأس‌ها برابر یک باشد، آنگاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $p=q$ ۲) $q>P$ ۳) $q<P$ ۴) $\frac{P-1}{2}>q$

۱۴۳۴. درجهٔ هر رأس یک گراف از مرتبهٔ P و اندازه q برابر ۶ یا ۷ می‌باشد. تعداد رأس‌های با درجهٔ ۶ کدام است؟

۱) $6P-2q$ ۲) $7P-2q$ ۳) $2q-7P$ ۴) $2q-6P$

۱۴۳۵. در گرافی از مرتبهٔ ۹، هفت رأس از درجهٔ x و بقیه رأس‌ها از درجهٔ y می‌باشند. اگر اندازهٔ این گراف برابر با ۱۴ باشد، مقدار y کدام است؟ $(y\geq x)$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۴۳۶. یک گراف از مرتبه $P=9$ و اندازه $q=11$ دارای یک رأس از درجهٔ $\delta=1$ و یک رأس از درجهٔ $\Delta=4$ است. این گراف چند رأس درجه ۲ دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۴۳۷. در یک گراف، تعداد رأس‌های با درجهٔ $\Delta=7$ و تعداد رأس‌های با درجهٔ ۴ با هم برابرند و بقیه رأس‌ها از درجهٔ ۳ است. اگر این گراف ۲۳ یال داشته باشد، مرتبهٔ آن کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۴۳۸. گراف سادهٔ G از مرتبهٔ ۱۵، دارای x رأس درجهٔ صفر است. اگر $\Delta(G)=x$ بیش‌ترین مقدار اندازهٔ G چند است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۰

۱۴۳۹. در گراف G از مرتبه ۶، $\Delta(G)+\delta(G)=8$، حداقل مقدار q چند است؟ $(\Delta\neq\delta)$

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۱۴۴۰. گراف G از مرتبهٔ ۱۰ و اندازهٔ ۱۲، چهار رأس با درجهٔ $\Delta(G)$ و ۶ رأس با درجهٔ $\delta(G)$ دارد. حاصل $\Delta(G)+\delta(G)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴۴۱. گراف G از مرتبهٔ ۷، دو رأس با درجهٔ $\Delta=5$ و چهار رأس با درجهٔ $\delta=3$ دارد. این گراف چند یال دارد؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۱۴۴۲. در گراف ساده و غیرمنتظم G، درجهٔ تمام رأس‌ها ۱ یا ۳ است. اگر این گراف ۱۰ یال داشته باشد، برای مرتبهٔ آن چند جواب وجود دارد؟

۱) ۱۳ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۴۴۳. چند گراف سادهٔ G با $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ و اندازهٔ ۵ وجود دارد که درجهٔ رأس a برابر ۴ باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴۴۴. چند گراف سادهٔ G با $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$، و اندازهٔ ۵ وجود دارد که درجهٔ رأس a برابر ۳ باشد؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۷۵

۱۴۴۵. در گرافی با هفت رأس، $\Delta=3$ است، حداکثر تعداد یال‌ها کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۱۴۴۶. در گراف G با ۱۷ یال، درجهٔ هر رأس حداقل ۳ می‌باشد. در این صورت حداکثر مرتبهٔ گراف کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۷

۱۴۴۷. فرض کنید G گراف ساده‌ای با ۱۱ رأس است، به طوری‌که ماکسیمم درجهٔ رأس‌های آن $\Delta(G)=5$ است. این گراف حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲۷ ۲) ۱۷ ۳) ۳۷ ۴) ۳۸

۱۴۴۸. چند گراف ساده با شرایط $P=7$ ، $q=10$ و $\delta=3$ وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۴۴۹. درگرافی با $P=6$ و $q=10$ ، اگر ماکزیمم درجهٔ گراف، دو برابر مینیمم درجهٔ آن باشد، آن‌گاه این گراف چند رأس با درجهٔ مینیمم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۵۰. در گرافی با ۸ رأس که $\delta=2$ و $\Delta=5$ می‌باشد. حداکثر چند یال وجود دارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۹ ۳) ۱۸ ۴) ۱۷

۱۴۵۱. در گراف G از مرتبهٔ ۱۷، که در آن $\delta=9$ و $\Delta=10$ می‌باشد، q چند مقدار می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۴۵۲. در گراف G ، از مرتبهٔ ۶ و اندازهٔ ۱۱، اگر $\Delta(G)=2\delta(G)=4$ ، آن‌گاه گراف G ، چند رأس با درجهٔ ماکزیمم دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۴۵۳. اگر درجه‌های گراف ساده G از مرتبه ۸ تشکیل تصاعد عددی بدهند، آن‌گاه $\frac{\Delta(G)}{\delta(G)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۷

۱۴۵۴. به ازای کدام مقدار k ، گراف سادهٔ G با ۷ رأس، یک گراف k− منتظم است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۴۵۵. مجموع تعداد یال‌ها و تعداد رأس‌های یک گراف ۸ـ منتظم برابر ۶۰ است. این گراف چند رأس دارد؟

۱) ۴۸ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

۱۴۵۶. در یک گراف ۵ـ منتظم از مرتبهٔ P و اندازهٔ q رابطه $4q-7P=30$ برقرار است. $P+q$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۱۵ ۳) ۳۵ ۴) ۲۰

۱۴۵۷. به ازای چه مقدار صحیح و نامنفی k، یک گراف ساده از مرتبه ۱۲ می‌تواند k ـ منتظم باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۱۴۵۸. به ازای چند مقدار صحیح و نامنفی k، یک گراف ساده از مرتبهٔ ۱۳ می‌تواند k ـ منتظم باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۳ ۴) ۱۲

۱۴۵۹. در یک گراف k ـ منتظم با اندازهٔ ۱۰ برای k چند جواب وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۶۰. تعداد یال‌های یک گراف ۳ـ منتظم از مرتبهٔ 2P ، پنج واحد بیش‌تر از تعداد یال‌های یک گراف ۵ـ منتظم از مرتبهٔ P است. P برابر کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

۱۴۶۱. در یک گراف k ـ منتظم تعداد یال‌ها ۳ واحد بیش‌تر از تعداد رأس‌هاست. برای k چند جواب وجود دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴۶۲. چند گراف ۲ـ منتظم مرتبهٔ ۹ وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۴۶۳. مجموع اندازه و مرتبهٔ یک گراف کامل برابر با ۱۴۵ است. این گراف چند یال دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۴۶۴. تعداد یال‌های یک گراف کامل از ۳ برابر تعداد رأس‌های آن، ۴ واحد بیش‌تر است. درجهٔ هر رأس این گراف کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴۶۵. هر دو رأس متمایز گراف G از مرتبهٔ P و اندازهٔ q مجاورند و $P+q=105$ می‌باشد. آنگاه Δ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

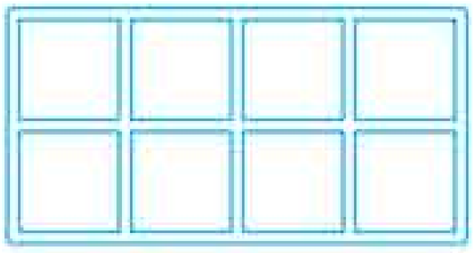
۱۴۶۶. اختلاف تعداد یال‌های دو گراف کامل، که تعداد رأس‌های یکی دو برابر دیگری است، برابر ۳۵ است. در گراف با تعداد رأس کم‌تر مجموع تعداد رأس‌ها و تعداد یال‌ها کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۱ ۴) ۲۸

۱۴۶۷. چند گراف ساده با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ وجود دارد که سه رأس با درجهٔ ۴ و دو رأس با درجهٔ ۳ داشته باشد؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۱۶۷۰. در شکل روبه‌رو، نقشهٔ یک منطقهٔ شهری ارائه شده است. قرار است در برخی از تقاطع‌ها، یک افسر راهور قرار گیرد، به طوری‌که هر تقاطع فاقد افسر با تقاطع‌های دارای افسر توسط یک خیابان دسترسی داشته باشند. کمترین تعداد افسرهای راهور موردنیاز کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

آزمون فصل

۱۶۷۱. در یک گراف ساده از مرتبهٔ ۶، درجه رأس‌های آن، به کدام صورت می‌تواند باشد؟

۱) ۵,۴,۳,۲,۲,۰ ۲) ۵,۴,۳,۲,۲,۱

۳) ۵,۴,۳,۲,۱,۱ ۴) ۵,۴,۳,۳,۲,۱

۱۶۷۲. در یک گراف با ۳ رأس تنها، میانگین درجه‌های رأس‌ها برابر ۳ می‌باشد. اگر درجه‌های رأس‌های غیر تنها ۴ یا ۵ باشد. این گراف چند رأس زوج دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۶۷۳. در گراف ساده G از مرتبهٔ ۹، مینیمم درجه برابر ۳ می‌باشد. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۹ ۳) ۳۱ ۴) ۳۳

۱۶۷۴. چند گراف ۵ـ منتظم مرتبهٔ ۸ وجود دارد؟ (رأس‌ها نام‌گذاری نشده‌اند)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶۷۵. در یک گراف ساده با درجهٔ رأس‌های ۴,۴,۳,۳,۲,۲ که دو رأس با مینیمم درجه مجاورند. تعداد دورها با طول ۶ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۶۷۶. یک گراف از مرتبهٔ ۱۱، که از ۳ مولفه تشکیل شده است، حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۱ ۳) ۳۶ ۴) ۴۵

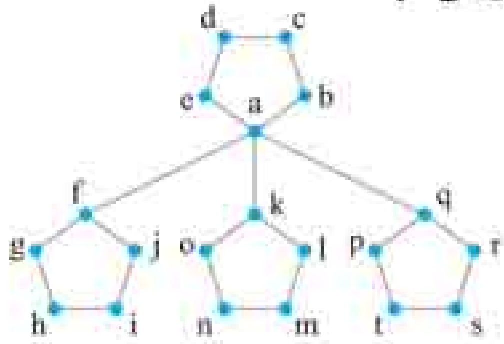
۱۶۷۷. در یک گراف ناهمبند ساده که $P = ۱۳$ و $q = ۶۵$، چند رأس با درجهٔ ۱۱ وجود دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۶۷۸. اگر حاصل‌ضرب درجه‌های یک گراف برابر ۷۲ باشد، با حذف چند یال آن، گراف C_5 تشکیل می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۶۷۹. با افزودن کدام رأس‌ها به مجموعهٔ $\{a,c,s,m,k,j,f\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف روبه‌رو حاصل می‌شود؟



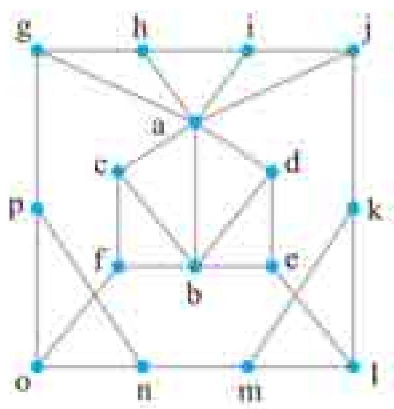
۱) h,n

۲) g,m,r

۳) h,P

۴) i,m,e

۱۶۸۰. در گراف روبه‌رو، γ ـ مجموعه کدام است؟



۱) $\{a,l,o\}$

۲) $\{a,b,l,p\}$

۳) $\{b,m,n\}$

۴) $\{h,i,m,n\}$

پاسخ‌های تشریحی

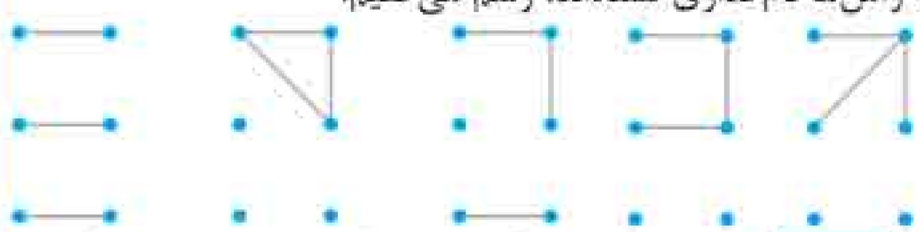
۱۴۰۶. (گزینه ۱) می‌دانیم در هر گراف از مرتبهٔ p و اندازهٔ q همواره داریم: $0 \le q \le \binom{p}{2}$. پس:

$$0\le q\le\binom{p}{2} \xrightarrow{P=6} 0\le q\le \binom{6}{2} \Rightarrow 0\le q\le 15$$

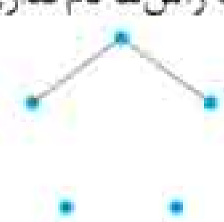
گزینهٔ «۱» نمی‌تواند تعداد یال‌های این گراف باشد زیرا تعداد حداکثر یال‌های این گراف ۱۵ است.

۱۴۰۷. (گزینه ۳) ۳ رأس تنها را کنار می‌گذاریم. در این صورت با توجه به این‌که $q=14$ می‌باشد، پس حداقل ۶ رأس لازم است. (زیرا با ۵ رأس، حداکثر $10=\binom{5}{2}$ یال امکان‌پذیر است. اما با ۶ رأس تا $15=\binom{6}{2}$ یال ممکن است). بنابراین حداقل مرتبهٔ گراف G برابر $9=3+6$ است.

۱۴۰۸. (گزینه ۴) بیش‌ترین تعداد گراف‌های غیریکریخت را، با توجه به این‌که رأس‌ها نام‌گذاری نشده‌اند، رسم می‌کنیم.



۱۴۰۹. (گزینه ۳) بیش‌ترین تعداد گراف غیریکریخت را رسم می‌کنیم: (دقت کنید رأس‌ها نام‌گذاری نشده‌اند.)



رسم دو یال مجاور

رسم دو یال غیرمجاور

۱۴۱۰. (گزینه ۳) چون $p=5$ می‌باشد، پس حداکثر تعداد یال‌های این گراف با $10=\binom{5}{2}$ است و باید فقط ۳ یال از ۱۰ یال انتخاب شود که به $120=\binom{10}{3}$ حالت ممکن است.

۱۴۱۱. (گزینه ۲) چون $p=5$ است، پس حداکثر یال‌ها $10=\binom{5}{2}$ می‌باشد. یال ab حذف می‌شود. بنابراین کافی است از میان $\binom{5}{2}-1=9$ یال باقی‌مانده (جز یال ab)، سه یال را انتخاب کنیم، که به $84=\binom{9}{3}$ حالت ممکن است.

۱۴۱۲. (گزینه ۱) می‌دانیم $p=5$، پس حداکثر $10=\binom{5}{2}$ یال وجود دارد و چون یال ab به کار گرفته شده است، لذا ۲ یال دیگر از ۹ یال باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم (که همراه یال ab، گراف با ۳ یال رسم نماییم)، که این عمل به $36=\binom{9}{2}$ حالت ممکن است.

۱۴۱۳. (گزینه ۲) حداکثر تعداد یال‌های گرافی با ۵ رأس برابر است با $10=\binom{5}{2}$ و می‌توان صفر یال، یک یال، دو یال و... و یا هر ده یال را انتخاب کرد، پس داریم: $\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\dots+\binom{10}{10}=2^{10}$

۱۴۱۴. (گزینه ۲) حداکثر یال‌های این گراف $10=\binom{5}{2}$ است، با مصرف شدن یال ab، ۹ یال دیگر باقی می‌ماند، که از بین آنها می‌توان صفر یال یا یک یال و... یا هر ۹ یال را انتخاب کرد. پس جواب عبارت است از:

$$\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\dots+\binom{9}{9}=2^9=2^{10-1}$$

۱۴۱۵. (گزینه ۲) حداکثر یال‌های این گراف $10=\binom{5}{2}$ است با حذف یال ab، ۹ یال دیگر باقی می‌ماند که می‌توان صفر یال یا یک یال یا دو یال و... و یا هر ۹ یال را انتخاب کرد. پس جواب عبارت است از:

$$\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\dots+\binom{9}{9}=2^9=2^{10-1}$$

۱۴۱۶. (گزینه ۳) می‌دانیم $P=5$ و حداکثر یال‌ها $10=\binom{5}{2}$ است. پس تعداد کل گراف‌های ساده برابر 2^{10} می‌باشد. از طرفی می‌دانیم به ازای هر شامل (فاقد) یال، یکی از توان کم می‌شود. پس جواب 2^7 است.

۱۴۱۷. (گزینه ۱) حداکثر تعداد یال‌های این گراف $10=\binom{5}{2}$ است، با توجه به این‌که ۴ یال از آن‌ها مصرف شده، پس $(6=10-4)$ ۶ یال دیگر باقی می‌ماند. که از این تعداد یال باقی‌مانده می‌توان صفر یال یا یک یال و... و یا هر شش یال را انتخاب کرد که این امر به $2^6=64$ حالت ممکن است.

۱۴۱۸. (گزینه ۴) تعداد کل گراف‌های ساده با پنج رأس داده شده برابر است با $2^{\binom{5}{2}}=2^{10}$. تعداد گراف‌های ساده به طوری‌که فاقد سه یال ab، bc و cd باشند (به ازای هر فاقد یک واحد از توان کم می‌شود) 2^7 می‌باشد. پس جواب تست $2^{10}-2^7=896$ (روش متمم) می‌باشد.

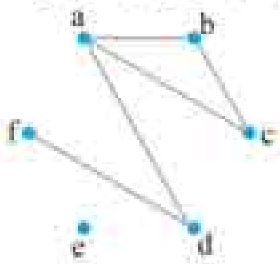
۱۴۱۹. (گزینه ۳) ابتدا رأسی را که قرار است به صورت رأس مشترک باشد از بین ۵ رأس گراف انتخاب می‌کنیم، که این عمل به $5=\binom{5}{1}$ روش امکان‌پذیر است. اما قرار است این رأس به ۲ رأس دیگر از ۴ رأس باقی‌مانده متصل شود، که $6=\binom{4}{2}$ روش برای این امر ممکن است. پس جواب $5\times6=30$ است.

۱۴۲۰. (گزینه ۱) می‌دانیم حداکثر یال‌های این گراف $10=\binom{5}{2}$ است و تعداد گراف‌های ساده با دقیقاً ۲ یال برابر با $45=\binom{10}{2}$ می‌باشد، که مطابق سؤال قبل در ۳۰ مورد دو یال رأس مشترک دارند (انتخاب یک رأس به عنوان رأس مشترک به $5=\binom{5}{1}$ ممکن است و قرار است ۲ رأس دیگر از ۴رأس باقی‌مانده متصل شود، که $6=\binom{4}{2}$ روش ممکن است. پس جواب $30=5\times6$) و پاسخ تست برابر است با $45-30=15$.

۱۴۲۱. گزینه ۲ در گراف گزینهٔ «۲»، دو رأس درجه ۳ با هم مجاور نیستند.

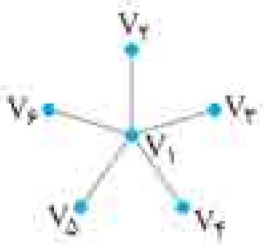
۱۴۲۲. گزینه ۴ چون زیرگراف‌های از مرتبهٔ ۶ موردنظر است، پس تمام رأس‌های گراف G، مورد استفاده قرار می‌گیرند. اما از ۸ یال گراف G، فقط ۴ یال را می‌توانیم انتخاب کنیم، که این عمل به $\binom{۸}{۴}=۷۰$ حالت امکان‌پذیر است.

۱۴۲۳. گزینه ۱ گراف را رسم می‌کنیم. طبق فرض مسأله، رأس a با رأس‌های c، b و d همسایه است. پس به آن‌ها وصل می‌شود. رأس b با رأس‌های c,a همسایه است.



رأس d به رأس‌های f,a متصل می‌شود.
رأس e نیز تنهاست. زیرا مجموعهٔ همسایگی بستهٔ آن تک‌عضوی است. پس این گراف ۵ یال دارد.

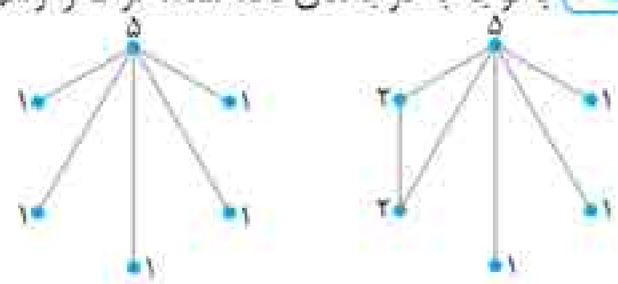
۱۴۲۴. گزینه ۲ از آن‌جایی‌که $P=۶$ و تعداد رأس‌های مجاور با رأس v_1 برابر ۵ است (چرا؟)، پس رأس v_1، یک رأس فول می‌باشد. یعنی به تمام رأس‌های v_2، v_3، ...، v_6 متصل است و چون هر کدام از رأس‌های v_2، v_3، ...، v_6 با یک رأس مجاورند (چون همسایگی باز آن‌ها تک‌عضوی است)، پس همگی فقط به رأس v_1 متصل‌اند. بنابراین گراف G به صورت زیر می‌باشد و دارای ۵ یال است.



۱۴۲۵. گزینه ۱ اگر مجموعهٔ همسایگی بستهٔ یک رأس از گراف، با مجموعهٔ رأسی گراف برابر باشد، یعنی آن رأس به تمام رأس‌های دیگر گراف وصل است. به عبارت دیگر یک رأس فول می‌باشد. در این سؤال تمام رأس‌ها چنین خاصیتی دارند. یعنی تمام رأس‌ها، فول می‌باشند. پس گراف کامل است.

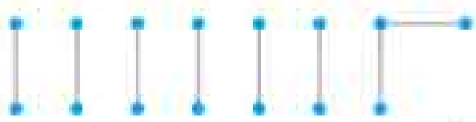
۱۴۲۶. گزینه ۲ چون همسایگی بستهٔ تمام رأس‌ها، تک‌عضوی است، پس تمام رأس‌ها تنها می‌باشند و در نتیجه گراف تهی مرتبهٔ ۶ حاصل می‌شود.

۱۴۲۷. گزینه ۳ با توجه به درجه‌های داده شده، گراف را رسم می‌کنیم.

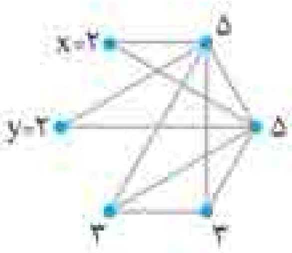


$a+b=۲+۲=۴$ $\quad$ $a+b=۱+۱=۲$

۱۴۲۸. گزینه ۳ با کم‌ترین یال ممکن، ۱۵ رأس را درگیر می‌کنیم تا رأسی منفرد باقی نماند.

 $\Leftarrow$ حداقل ۸ یال می‌خواهیم

۱۴۲۹. گزینه ۲ با رسم گراف داده شده داریم:



۱۴۳۰. گزینه ۱ رأس‌های با درجهٔ صفر را کنار می‌گذاریم، که در این صورت ۱۲ رأس می‌ماند $(۱۲=۸-۲۰)$. که درجهٔ یک رأس از ۱۲ رأس باقی‌مانده حداکثر ۱۱ است.

۱۴۳۱. گزینه ۴ می‌دانیم اگر p عددی زوج باشد، آن‌گاه تعداد رأس‌های زوج گراف نیز عددی زوج است.

۱۴۳۲. گزینه ۳ اگر فرض کنیم گراف دارای p رأس می‌باشد. چون $q=۱۰$، طبق قضیهٔ جمع درجه‌ها داریم:

$$\underbrace{۴+۴}_{۲\text{تا}}+\underbrace{۳+\cdots+۳}_{(p-۲)\text{تا}}=۲\times۱۰\Rightarrow ۸+۳(p-۲)=۲۰\Rightarrow p=۶$$

۱۴۳۳. گزینه ۱ مطابق صورت سؤال، درجه نیمی از رأس‌ها ۱ و نیمی دیگر ۳ است بنابراین:

$$\text{جمع درجه‌ها}=\underbrace{۱+\cdots+۱}_{\frac{p}{۲}\text{تا}}+\underbrace{۳+\cdots+۳}_{\frac{p}{۲}\text{تا}}=۲q$$

$$\Rightarrow \frac{p}{۲}\times۱+\frac{p}{۲}\times۳=۲q\Rightarrow ۲p=۲q\Rightarrow p=q$$

۱۴۳۴. گزینه ۲ می‌دانیم تعداد کل رأس‌ها برابر p است. جمع درجه‌ها را می‌یابیم:

$$\underbrace{۶+\cdots+۶}_{x\text{تا}}+\underbrace{۷+\cdots+۷}_{(p-x)\text{تا}}=۲q\Rightarrow x\times۶+(p-x)\times۷=۲q$$

$$\Rightarrow x=۷P-۲q$$

۱۴۳۵. گزینه ۴

$$\text{جمع درجه‌ها}=\underbrace{x+\cdots+x}_{۷\text{تا}}+\underbrace{y+y}_{۲\text{تا}}=۲\times\underbrace{۱۴}_{q}\Rightarrow ۷x+۲y=۲۸$$

$$\xrightarrow[(y\ge x)]{\text{مقداردهی}} x=۲,\ y=۷$$

۱۴۳۶. گزینه ۱ با توجه به فرض، ۷ رأس از این گراف از درجه ۲ یا ۳ می‌باشد.

$$\text{جمع درجه‌ها}=\underset{\delta}{۱}+\underbrace{۲+\cdots+۲}_{x\text{تا}}+\underbrace{۳+\cdots+۳}_{(۷-x)\text{تا}}+\underset{\Delta}{۴}=۲\times۱۱$$

$$\Rightarrow ۱+x\times۲+(۷-x)\times۳+۴=۲۲\Rightarrow x=۴$$

۱۴۳۷. گزینه ۳

$$\text{جمع درجه‌ها}=\underbrace{۷+\cdots+۷}_{x}+\underbrace{۴+\cdots+۴}_{x}+\underbrace{۳+\cdots+۳}_{y}=۲\times۲۳$$

$$\Rightarrow ۷x+۴x+۳y=۴۶\Rightarrow ۱۱x+۳y=۴۶\xrightarrow{\text{مقداردهی}}x=۲,y=۸$$

$$\Rightarrow p=x+x+y=۲+۲+۸=۱۲$$

۱۴۳۸. گزینه ۲ یک رأس را به عنوان رأس با درجهٔ ماکزیمم در نظر می‌گیریم. در این صورت ۱۴ رأس دیگر وجود دارد. از آن‌جایی‌که $\Delta(G)=x$ و x رأس تنها نیز وجود دارد، پس $x=۷$ می‌باشد (یعنی ۷ رأس با درجه صفر و ۷ رأس نیز به رأس با درجهٔ ماکزیمم متصل‌اند). بنابراین ۸ رأس درگیر و ۷ رأس تنها می‌باشند. با ۸ رأس درگیر می‌توان یک k_8 ساخت (تا بیشترین تعداد یال به کار رود). پس گراف G، حداکثر می‌توان $\binom{۸}{۲}=۲۸$ یال داشته باشد.

۱۴۳۹. گزینه ۲ با توجه به این‌که $\Delta(G)\le P-۱$، پس از روی فرض داده شده، $\Delta(G)=۵$ و $\delta(G)=۳$ قابل قبول است. برای آن‌که کمترین تعداد یال را داشته باشیم، درجهٔ یک رأس را ۵ و پنج رأس دیگر را ۳ در نظر می‌گیریم.

$$\text{جمع درجه‌ها}=۵+۳+۳+۳+۳+۳=۲۰\Rightarrow ۲q=۲۰\Rightarrow q=۱۰$$

۱۴۴۰. گزینه ۳

$$\text{جمع درجه‌ها}=\underbrace{\Delta+\cdots+\Delta}_{۴\text{تا}}+\underbrace{\delta+\cdots+\delta}_{۶\text{تا}}=۲\times۱۲$$

$$\Rightarrow ۴\Delta+۶\delta=۲۴\Rightarrow ۲\Delta+۳\delta=۱۲$$

که جواب‌ها $\Delta=۳$ و $\delta=۲$ قابل قبول است. پس $\Delta+\delta=۵$.

۱۴۴۱. گزینه ۱ این گراف دو رأس با درجهٔ ۵، چهار رأس با درجهٔ ۳ و یک رأس درجهٔ x دارد که $۳\le x\le ۵$. اما چون مجموع درجه‌ها عددی زوج است، داریم: $۵+۵+۳+۳+۳+۳+x=۲q\Rightarrow ۲۲+x=۲q$
نتیجه می‌گیریم که x عددی زوج است و $۳\le x\le ۵$، بنابراین $x=۴$ و در نتیجه $۲q=۲۶, q=۱۳$ است.

۱۴۴۲. گزینه۳ در این گراف $q=۱۰$ است و داریم:

$$\text{جمع درجه‌ها}=\underbrace{۱+\cdots+۱}_{x\text{تا}}+\underbrace{۳+\cdots+۳}_{y\text{تا}}=۲\times۱۰\Rightarrow x+۳y=۲۰$$

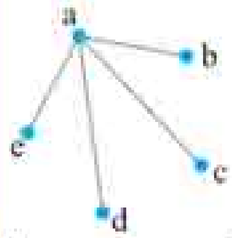
(چون گراف غیرمنتظم است، لذا $x\neq۰$ و $y\neq۰$) یا مقداردهی جواب‌های زیر برای y,x در نتیجه برای مرتبهٔ گراف وجود دارند.

$(x=۵ , y=۵)\Rightarrow p=۱۰$ $\quad$ $(x=۲ , y=۶)\Rightarrow p=۸$

$(x=۱۱, y=۳)\Rightarrow p=۱۴$ $\quad$ $(x=۸ , y=۴)\Rightarrow p=۱۲$

$(x=۱۷ , y=۱)\Rightarrow p=۱۸$ $\quad$ $(x=۱۴, y=۲)\Rightarrow p=۱۶$

۱۴۴۳. گزینه۴ باید ۴ یال از رأس a بگذرد تا درجهٔ آن برابر ۴ شود. پس فقط یک یال دیگر (تا $q=۵$ شود) باید انتخاب شود. از طرفی این گراف حداکثر $\binom{۵}{۲}=۱۰$ یال دارد، که ۴ یال آن مصرف شده است و ۶ یال باقی می‌ماند. بنابراین برای انتخاب یک یال موردنظر، $\binom{۶}{۱}=۶$ حالت وجود دارد.



۱۴۴۴. گزینه۳ چون $\deg_G(a)=۳$ است، پس رأس a باید به ۳ رأس از ۴ رأس دیگر متصل شود، که این عمل به $\binom{۴}{۳}=۴$ روش ممکن است. حال با ۴ رأس باقی‌مانده، حداکثر $\binom{۴}{۲}=۶$ یال وجود دارد که ۲ یال آن را لازم داریم و لذا $\binom{۶}{۲}=۱۵$ حالت پیش می‌آید. پس جواب $۴\times۱۵=۶۰$ است.

۱۴۴۵. گزینه۲

$$\frac{۲q}{p}\le\Delta\Rightarrow\frac{۲q}{۷}\le۳\Rightarrow q\le\frac{۲۱}{۲}\xrightarrow{q\in W}\max(q)=۱۰$$

۱۴۴۶. گزینه۲

$$\delta\le\frac{۲q}{p}\Rightarrow۳\le\frac{۲\times۱۷}{p}\Rightarrow p\le\frac{۳۴}{۳}\Rightarrow\max(p)=۱۱$$

۱۴۴۷. گزینه۱

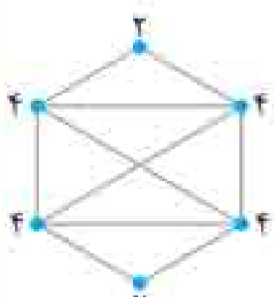
$$\frac{۲q}{p}\le\Delta\Rightarrow\frac{۲q}{۱۱}\le۵\Rightarrow q\le\frac{۵۵}{۲}\Rightarrow\max(q)=۲۷$$

۱۴۴۸. گزینه۱ می‌دانیم $\delta\le\frac{۲q}{p}\le\Delta$، پس طبق فرض مسأله داریم: $۳\le\frac{۲\times۱۰}{۷}$ که تناقض است و لذا چنین گرافی وجود ندارد.

۱۴۴۹. گزینه۲ اگر این گراف را G بنامیم، می‌دانیم $\Delta(G)\le p-۱$ و در نتیجه $\Delta(G)\le۵$. از طرفی داریم:

$$\frac{۲q}{p}\le\Delta(G)\Rightarrow\frac{۲\times۱۰}{۶}\le\Delta(G)\Rightarrow۴/\cdots\le\Delta(G)$$

پس $۴\le\Delta(G)\le۵$ و چون طبق فرض مسأله $\Delta(G)=۲\delta(G)$ می‌باشد، بنابراین $\Delta(G)$ عددی زوج است و لذا $\Delta(G)=۴$ قابل قبول است. پس $\delta(G)=۲$. اکنون با رسم این گراف درمی‌یابیم که ۲ رأس با درجهٔ مینیمم دارد.



۱۴۵۰. گزینه۳ می‌دانیم $۲q\le(p-۱)\cdot\Delta+\delta$، بنابراین

$$۲q\le(۸-۱)\times۵+۲\Rightarrow q\le\frac{۳۷}{۲}\xrightarrow{q\in W}\max(q)=۱۸$$

۱۴۵۱. گزینه۲ می‌دانیم:

$$(p-۱)\cdot\delta(G)+\Delta(G)\le۲q\le(p-۱)\times\Delta(G)+\delta(G)$$

بنابراین:

$$\underbrace{(۱۷-۱)\times۹+۱۰}_{۱۵۴}\le۲q\le\underbrace{(۱۷-۱)\times۱۰+۹}_{۱۶۹}\xrightarrow{\div۲}۷۷\le q\le۸۴/۵$$

$$\xrightarrow{q\in W}q=۷۷,۷۸,۷۹,۸۰,۸۱,۸۲,۸۳,۸۴\Rightarrow \text{۸ جواب}$$

۱۴۵۲. گزینه۴ از آن‌جایی که $\Delta(G)=۴$ و $\delta(G)=۲$، پس درجهٔ تمام رأس‌های این گراف ۲، ۳ و ۴ می‌باشند. از طرفی داریم:

$$\text{جمع درجه‌ها}=۲q\Rightarrow\underbrace{\underbrace{۲+\cdots+۲}_{x\text{تا}}+\underbrace{۳+\cdots+۳}_{y\text{تا}}+\underbrace{۴+\cdots+۴}_{(۶-(x+y))\text{تا}}}_{۶\text{تا}}=۲\times۱۱$$

اکنون داریم: $x\times۲+y\times۳+(۶-(x+y))\times۴=۲۲\Rightarrow۲x+y=۲$

می‌دانیم y,x اعدادی حسابی‌اند (چرا؟)، پس تنها جواب‌های قابل قبول $x=۱$ و $y=۰$ است. یعنی این گراف ۱ رأس با درجهٔ ۲، صفر رأس با درجهٔ ۳ و ۵ رأس با درجهٔ ۴ دارد. (توجه کنید که جواب $x=۰$ و $y=۲$ غیر قابل قبول است، زیرا در این گراف $\delta(G)=۲$ و لذا صفر رأس با درجهٔ ۲ یک تناقض است.)

۱۴۵۳. گزینه۱ توجه: درجه‌های یک گراف ساده هیچ‌گاه تشکیل یک تصاعد نمی‌دهند، مگر در حالتی که تمام درجه‌ها با هم برابر باشند که در این صورت: $\Delta(G)=\delta(G)$

۱۴۵۴. گزینه۳ با توجه به رابطه $p.k=۲q$ در گراف k ـ منتظم، k و P هر دو فرد نمی‌باشند (زیرا ضرب دو عدد فرد، عددی فرد است و در طرف دیگر تساوی مضرب ۲ که عددی زوج است وجود دارد) در نتیجه گزینه‌های «۱» و «۲» نادرست‌اند. و از طرفی چون $p=۷$ است، پس $k<۷$ می‌باشد و گزینهٔ «۴» نیز نادرست است.

۱۴۵۵. گزینه۳ در این گراف ۸ـ منتظم داریم $۸P=۲q$ و با توجه به فرض مسأله داریم:

$$\begin{cases}۸p-۲q=۰\\p+q=۶۰\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}p=۱۲ , q=۴۸$$

۱۴۵۶. گزینه۳ در گراف ۵ـ منتظم داریم $۵p=۲q$ و داریم:

$$\begin{cases}۵p-۲q=۰\\۴q-۷p=۳۰\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}p=۱۰,q=۳۵$$

$$\Rightarrow p+q=۲۵+۱۰=۳۵$$

۱۴۵۷. گزینه۴

می‌دانیم $۱۲\times k=۲q$، یعنی $۱۲k$ باید عددی زوج باشد و لذا k هر عدد دلخواه بین ۰ تا ۱۱ است. یعنی $k=۰,۱,۲,\ldots,۱۱$.

۱۴۵۸. گزینه۲

$$p\cdot k=۲q\Rightarrow۱۳k=۲q\xrightarrow[r<p]{\text{زوج است}\,k}k=۰,۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲$$

۱۴۵۹. گزینه۳ می‌دانیم $p.k=۲q$، پس $p.k=۲\times۱۰$. از طرفی در هر گراف از مرتبهٔ p، درجهٔ هر رأس حداکثر $p-۱$ است، در نتیجه $r<p$ و می‌توان نوشت:

$$p\cdot k=۲۰\Rightarrow(k=۱,p=۲۰),(k=۲,p=۱۰),(k=۴,p=۵)$$

۱۴۶۰. گزینه۴ اگر تعداد یال‌های گراف ۳ـ منتظم مرتبهٔ $۲p$ را $q_۱$ و تعداد یال‌های گراف ۵ـ منتظم از مرتبهٔ p را $q_۲$ فرض کنیم، داریم:

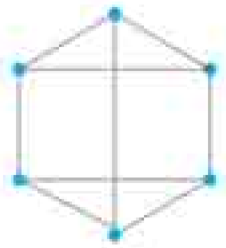
$$q_۱=\frac{(۲p)\times۳}{۲}\Rightarrow q_۱=۳p \quad , \quad q_۲=\frac{p\times۵}{۲}$$

از طرفی طبق فرض $q_۱=q_۲+۵$. پس: $۳P=\frac{p\times۵}{۲}+۵\Rightarrow p=۱۰$

۱۴۶۱. گزینه۲

$$p\cdot k=۲q\xrightarrow{q=p+۳}p\cdot k=۲(p+۳)\Rightarrow p\cdot k=۲p+۶$$

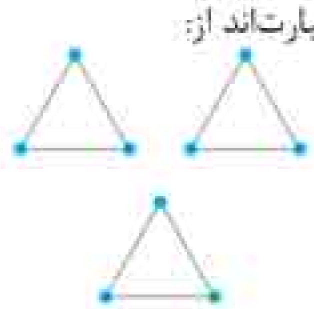
$$\Rightarrow p\cdot k-۲p=۶\Rightarrow p=\frac{۶}{K-۲}\in\mathbb{N}$$



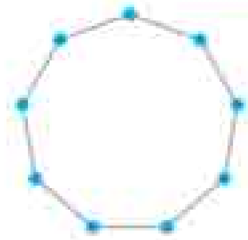
اگر $k=0,1,2$ باشد، برای p مقدار قابل قبولی حاصل نمی‌شود و اگر $k=3$، آن‌گاه $p=6$ به دست می‌آید که گراف آن قابل رسم است.

برای $k=4,5,...$ جواب‌ها قابل قبولی برای p به دست نمی‌آید زیرا در همه موارد $p<k$ و غیرممکن است.

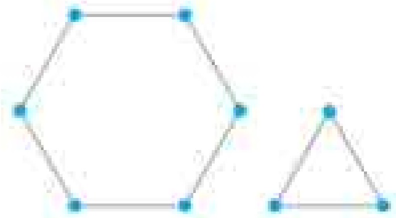
۱۴۶۲. (گزینه ۳) گراف غیربکریخت عبارت‌اند از:



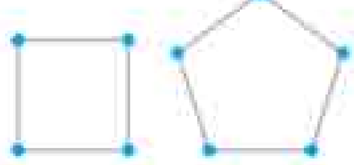
C_3, C_3, C_3



C_9



C_6, C_3



C_5, C_4

۱۴۶۳. (گزینه ۱)

$$\begin{cases} p+q=45 \\ q=\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2} \end{cases} \Rightarrow 45-p=\frac{p(p-1)}{2}$$

$$\Rightarrow p^2+p-90=0 \Rightarrow (p+10)(p-9)=0$$

گراف کامل است در نتیجه $p=9$ و از آنجا $q=36$.

۱۴۶۴. (گزینه ۱) با توجه به فرض مسأله $q=3p+4$ و چون گراف کامل است پس $q=\frac{p(p-1)}{2}$. در نتیجه داریم:

$$3p+4=\frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow p^2-7p-8=0 \Rightarrow p=8$$

چون گراف کامل است درجه هر رأس آن $p-1$ یعنی $8-1=7$ می‌باشد.

۱۴۶۵. (گزینه ۳) گراف موردنظر، گراف کامل مرتبهٔ p است و در نتیجه $q=\binom{p}{2}$. بنابراین فرض داریم:

$$p+q=105 \Rightarrow p+\binom{p}{2}=105 \Rightarrow p+\frac{p(p-1)}{2}=105$$

$$\Rightarrow p^2+p-210=0 \Rightarrow (p-14)(p+15)=0 \Rightarrow p=14$$

در نتیجه گراف موردنظر k_{14} است که در آن درجه هر رأس برابر $14-1=13$ است. در نتیجه $\Delta=13$.

۱۴۶۶. (گزینه ۲) اگر یکی از گراف‌ها را k_m و دیگری را k_n بنامیم آنگاه $n=2m$ و چون تعداد یال‌های آنها به اندازهٔ ۳۵ اختلاف دارند داریم:

$$\binom{n}{2}=\binom{m}{2}+35 \Rightarrow \binom{2m}{2}=\binom{m}{2}+35 \xrightarrow{\text{مقداردهی}} \begin{cases} m=5 \\ n=10 \end{cases}$$

در نتیجه مجموع تعداد یال‌ها و رأس‌های گراف k_5 موردنظر است که برابر است با $\binom{5}{2}+5=15$.

۱۴۶۷. (گزینه ۲) در واقع گراف موردنظر همان k_5 است که یک یال آن حذف شده است. اما اشتباه نکنید پاسخ مسأله گزینهٔ «۱» نیست.
چون رأس‌های گراف نام‌گذاری شده‌اند و این‌که کدام یال حذف شود گراف‌های متمایزی ایجاد می‌کند. پس با حذف هر یال از گراف k_5 با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ گرافی با مشخصات داده شده خواهیم داشت. در نتیجه کافی است از $\binom{5}{2}=10$ یال گراف k_5 یکی را برگزینیم که به ۱۰ حالت امکان‌پذیر است.

۱۴۶۸. (گزینه ۳) چون گراف کامل است، پس

$$q=\binom{p}{2}\xrightarrow{q=4p}4p=\frac{p(p-1)}{2}\Rightarrow\cdots\Rightarrow p=9$$

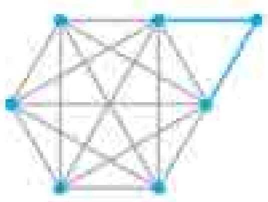
برای حذف دو یال، هر قدر تعداد رأس‌های دست‌نخورده بیش‌تر باشد، تعداد رأس‌های با درجهٔ ماکزیمم بیشتر می‌شود. در نتیجه باید دو یال در یک رأس مشترک باشند، که در این صورت درجهٔ ۳ رأس کاهش می‌یابد و ۶ رأس باقی‌مانده از درجهٔ ماکسیمم می‌باشند.

۱۴۶۹. (گزینه ۴) برای آن‌که در گراف G، بیشتر رأس‌ها تنها باشند، باید با یال‌های داده شده، کمترین رأس را به هم وصل کنیم.

استراتژی حل: در گراف G، با مرتبه و اندازهٔ معلوم، اگر بیشترین رأس تنها موردنظر باشد، باید با یال‌های داده شده، بزرگ‌ترین گراف کامل را بسازیم.

بنابراین با ۶ یال داده شده، می‌توانیم بزرگ‌ترین گراف کامل، یعنی گراف k_4 را بسازیم (توجه کنید که گراف k_4، دارای $\binom{4}{2}=6$ یال است) و لذا ۴ رأس درگیر می‌باشند و $12-4=8$ رأس باقی‌مانده، تنها می‌باشند.

۱۴۷۰. (گزینه ۲) برای آن‌که رأس‌های بیشتری از گراف G، رأس تنها باشند، باید با یال‌های داده شده، بزرگ‌ترین گراف کامل را بسازیم. می‌دانیم گراف k_6، دارای $\binom{6}{2}=15$ و گراف k_7 دارای $\binom{7}{2}=21$ یال است. پس با ۱۷ یال داده شده می‌توانیم ابتدا یک گراف k_6 بسازیم (۱۵ یال مصرف می‌شود) و سپس دو یال دیگر را توسط یک رأس دیگر به دو رأس از رأس‌های گراف k_6 متصل نماییم. در این صورت ۷ رأس درگیر و $20-7=13$ رأس تنها می‌باشند.



۱۴۷۱. (گزینه ۱) بزرگ‌ترین گراف کامل را با یال‌های داده شده می‌سازیم، تا رأس‌های بیشتری از گراف G، تنها باشند. می‌دانیم گراف k_8، دارای $\binom{8}{2}=28$ است. پس ابتدا با درگیر کردن ۸ رأس، یک گراف k_8 می‌سازیم و سپس یک یال از آن برمی‌داریم تا $q=27$ شود، که در این صورت باز هم همان ۸ رأس درگیر می‌باشند و $20-8=12$ رأس از گراف G، ایزوله‌اند.

۱۴۷۲. (گزینه ۳) واضح است که در این گراف $p=6, q=15$ است.

استراتژی حل: اگر در گراف G، هر دو عدد p و q معلوم باشند و درجه رأس‌ها مورد سؤال واقع شود، گراف داده شده را با گراف کامل هم مرتبه با آن مقایسه می‌کنیم.

بنابراین با توجه به $p=6$، این گراف را با گراف k_6 مقایسه می‌کنیم. در گراف k_6، می‌دانیم $q=\binom{6}{2}=15$. پس گراف G، یک گراف کامل مرتبهٔ ۶ است و لذا $G=k_6$. بنابراین در گراف G درجهٔ تمام رأس‌ها برابر $6-1=5$ است.