ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **ریاضی و آمار (۳) دوازدهم** از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

۱- آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم؛ بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲- آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند؛ در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال مواجه خواهید شد.

۳- پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها، همهٔ آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

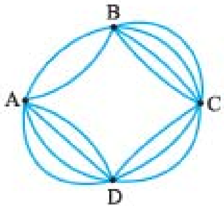
۴- درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت، برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند در این قسمت، همهٔ آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان ریاضی و آمار (۳) نیاز دارید، در ۱۳ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

راهکار، موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.

فهرست

فصل اول

۱ مطابق شکل روبه‌رو به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر C برویم و برگردیم به طوری که در مسیر برگشت، از شهری که گذشته عبور کند ولی از مسیر رفته شده استفاده نکند؟ (تمام جاده‌ها دوطرفه هستند.) ۱/۵



۲ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید: ۱

الف) $\frac{۸\times۷\times۶!}{۲!\times۷!}$

ب) $\frac{(n+۳)!}{(n+۱)!}$

۳ مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ چند زیرمجموعهٔ ۳عضوی دارد؟ ۱

۴ با ارقام ۰،۱،۳،۵،۶،۷،۸ و بدون تکرار ارقام: ۱/۵

الف) چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت؟

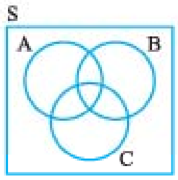
ب) چند عدد پنج‌رقمی فرد می‌توان ساخت؟

پ) چند عدد شش‌رقمی می‌توان ساخت که یکان آن ۷ و صدگان آن صفر است؟

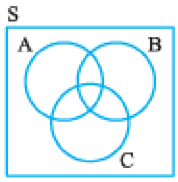
در ساختن اعداد به شرایط و محدودیت‌های سؤال توجه کنید. اگه مسئله شرط خاصی نداشت پُرکردن خانه‌ها رو از چپ به راست الهام بدین.

۵ در هر قسمت، پیشامد مطلوب را رنگ کنید: ۱

الف) A رخ دهد ولی B یا C رخ ندهند. (نه B رخ دهد نه C)



ب) A، B و C رخ دهند.



۶ سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» ظاهر شد آن‌گاه تاسی را می‌ریزیم در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم: ۱/۵

الف) فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A را که در آن، عدد ظاهرشده روی تاس زوج باشد یا حداقل یکی از سکه‌ها پشت بیاید با اعضا مشخص کنید.

۷ از جعبه‌ای که شامل ۱۰ سیب سالم و ۴ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبهٔ احتمال این‌که: ۳

الف) هر ۳ سیب سالم باشند. ب) ۲ سیب خراب باشند.

پ) تعداد سیب‌های سالم یکی بیشتر از لکه‌دارها باشد.

در حل مسائل احتمال، اولین قدم محاسبهٔ n(S) است و باید دقت کنید که در محاسبهٔ n(S) هیچ محدودیتی رو برای انتخاب افراد یا اشیاء در نظر نمی‌گیریم.

۸ در یک بازی ۱۱ نفره به هر شخصی یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس دو تاس را پرتاب می‌کنیم شخصی برنده است که شمارهٔ او با مجموع اعداد برآمده از تاس‌ها برابر باشد. ۲/۵

الف) احتمال برنده‌شدن چه شماره‌ای نسبت به بقیه بیشتر است؟

ب) احتمال برنده‌شدن کدام شماره‌ها از همه کم‌تر است؟

پ) دستگاه مختصاتی رسم کنید و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آن‌ها را بنویسید. سپس نمودار میله‌ای مناسب را رسم کنید.

۹ گام‌های مختلف چرخهٔ آمار در حل مسائل را فقط نام ببرید. ۲/۵

چرخهٔ آمار دارای ۵ گام (مرحله) است که تعریف اون‌ها بسیار مهمه.

ردیف	آزمون شماره ۱	نوبت اول پایهٔ دوازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم	نمره
	فصل دوم		
۱۰	اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنهٔ هر کدام از آن‌ها را مشخص کنید. الف) کاهش دمای هوا با دورشدن از سطح زمین زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ ☐ زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$ ☐ ب) میزان ساعات مطالعهٔ دانش‌آموزان یک کلاس براساس شمارهٔ هر دانش‌آموز در لیست کلاس زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ ☐ زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$ ☐ پ) حجم مکعبی به ضلع x سانتی‌متر زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ ☐ زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$ ☐ ت) تغییرات سطح آب یک دریاچه در ۱۰ سال اخیر زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ ☐ زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$ ☐ ث) میزان مصرف ماهانهٔ برق آپارتمان‌های با شمارهٔ ۱ تا ۱۰۰ یک مجتمع زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ ☐ زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$ ☐		۱/۲۵
۱۱	الف) برای دنبالهٔ ...,۱۷,۱۲,۷,۲ هم ضابطهٔ تابعی و هم رابطهٔ بازگشتی بنویسید. ب) برای دنبالهٔ ...,۱۶,۳,۱۶,۳,۱۶ یک رابطهٔ دوضابطه‌ای بنویسید.		۲
۱۲	اگر $a_n = \frac{n^۲}{(-۱)^n}$ ، $b_n = ۴$ و $c_n = ۴ + (-۱)^n$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. الف) $a_۱ + b_۸ - c_۲ = ?$ ب) $\frac{۲a_۲ \times \sqrt{b_۱}}{\|۳ - c_۴\|} = ?$	در دنباله‌ها عبارتی مثل a_1 معادل $f(1)$ در مبحث تابع است. یعنی در تابع به جای xها x میذاشتیم. ولی حالا در دنباله به جای nها n میذاریم.	۱/۲۵
	موفق باشید	جمع نمرات	۲۰

ردیف	آزمـــــون شمـــــارهٔ ۹ — نوبت دوم پایهٔ دوازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم	نمره

۱ — سادهٔ‌شدهٔ کسر $\frac{9!\times5!\times0!}{8!\times3!\times1!}$ را به دست آورید. (۱)

۲ — الف) به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۷ کتاب متمایز، انتخاب کرده و در یک ردیف بچینیم؟
ب) به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۷ کتاب متمایز، انتخاب کرده و به دوستمان هدیه دهیم؟ (۱)

۳ — دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم احتمالات زیر را به دست آورید: (۲)
الف) اعداد روشده از دو تاس، یکسان باشند.
ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد.
پ) حاصل‌ضرب اعداد برآمده از دو تاس کم‌تر از ۳۷ باشد.

۴ — با توجه به داده‌ها جدول زیر را کامل کنید: (R دامنه تغییرات است و SD همان انحراف معیار است.) (۱/۵)

متغیر	داده‌ها	شاخص‌های مرکزی		شاخص‌های پراکندگی		
		میانگین	میانه	IQR	SD	R
سن (سال)	۳۶,۴۰,۴۵,۵۱,۳۹,۴۱,۴۳,۴۵,۴۷					

کدام شاخص مرکزی و کدام شاخص پراکندگی برای متغیر سن در جدول بالا مناسب‌تر است؟

۵ — اگر جملهٔ عمومی یک دنباله به صورت $a_n=-5+3(n-1)$ باشد: (۱/۵)
الف) جملهٔ اول و اختلاف مشترک را به دست آورید.
ب) پنج جملهٔ اول را بنویسید.
پ) رابطهٔ بازگشتی دنباله چیست؟
ت) مجموع ۲۰ جمله اول دنباله چه‌قدر است؟

۶ — در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع دو جملهٔ سوم و چهارم ۲۰ و تفاضل جملهٔ سوم از جملهٔ پنجم ۶ است. جملهٔ اول و اختلاف مشترک دنباله را به دست آورید. (۱/۵)

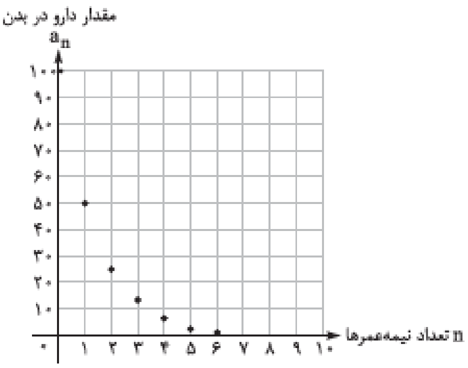
۷ — در یک منطقه، یک مُقَنّی (چاه‌کَن) در فاصله‌های مساوی، چاه‌هایی با عمق ۴۰، ۳۹/۵، ۳۹ و ... متر حفر می‌کند. اگر عمق آخرین چاه ۲/۵ متر باشد، این مقنی در کل، چند چاه حفر کرده است؟ (۱)

۸ — اگر جملات x، $x+2$ و $x+3$ سه جملهٔ اول از یک دنبالهٔ هندسی باشند، مقدار x و سپس جملهٔ هشتم دنباله را به دست آورید. (۲)

۹ — یک طراح داخلی، برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۲ صندلی، در ردیف دوم ۱۵ صندلی، در ردیف سوم ۱۸ صندلی مشخص کرده است. اگر همین نظمِ اضافه‌شدن صندلی در هر ردیف وجود داشته باشد، برای داشتن سالن سینما با ۲۵۵ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟ (۲)

۱۰ — در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ سوم برابر $\frac{1}{2}$ و جملهٔ ششم برابر ۴ است. جملهٔ عمومی این دنباله را مشخص کنید. (۲)

۱۱ — شخصی ۱۰۰ میلی‌گرم از دارویی را مصرف کرده است (مطابق شکل روبه‌رو) (۱/۵)
الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه‌عمر کم‌تر از ۱۰ میلی‌گرم خواهد بود؟ آیا می‌توان مشخص کرد مقدار دارو در بدن شخص، در چه زمانی به صفر خواهد رسید؟
ب) مقدار دارو در بدن شخص بعد از nاُمین نیمه‌عمر را به دست آورید. (به صورت رابطهٔ بازگشتی)
پ) ضابطهٔ تابعی (جمله عمومی) دنباله را مشخص کنید.



۱۲ — با استفاده از تعریف توان‌های گویا نشان دهید که $\sqrt{3}, \sqrt[4]{9}, \sqrt[60]{3^{30}}$ همگی با هم برابرند. (۱)

۱۳ — در یک آزمایشگاه، تعداد باکتری‌ها هر ساعت ۵ برابر می‌شوند اگر در حال حاضر ۱۰۰۰ باکتری موجود باشد، پس از گذشت ۲ ساعت و ۳۰ دقیقه تعداد باکتری‌ها چه‌قدر خواهد شد؟ (جواب را به شکل رادیکالی بنویسید.) (۱)

۱۴ — جمعیت کشوری در سال ۲۰۱۰ میلادی حدود ۳۰ میلیون نفر است. اگر جمعیت این کشور با نرخ ۲ درصد در حال کاهش باشد، جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۸ تقریباً چه‌قدر خواهد بود؟ (۱)

موفق باشید — جمع نمرات: ۲۰

پاســـخ‌نامــهٔ تشــریـحی

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- مسیر رفت:

$$\begin{cases} A\to B\to C : \text{تعداد حالت‌ها} = ۲\times ۴ = ۸ \\ \text{یا} \\ A\to D\to C : \text{تعداد حالت‌ها} = ۴\times ۳ = ۱۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالت‌های مسیر رفت} = ۸+۱۲=۲۰$$

مسیر برگشت:

$$\begin{cases} C\to B\to A : \text{تعداد حالت‌ها} = ۳\times ۱ = ۳ \\ \text{یا} \\ C\to D\to A : \text{تعداد حالت‌ها} = ۲\times ۳ = ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالت‌های مسیر برگشت} = ۳+۶=۹$$

$$\text{تعداد کل حالت‌های رفت و برگشت} = ۲۰\times ۹ = ۱۸۰$$

۲- الف)

$$\frac{۸\times ۷\times ۶!}{۲!\times ۷!}=\frac{۸\times \cancel{۷}\times \cancel{۶!}}{۲\times ۱\times \cancel{۷}\times \cancel{۶!}}=\frac{۸}{۲}=۴$$

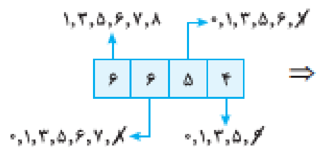
ب) $(n+۳)$ بزرگ‌تر از $(n+۱)$ است، پس آن را باز می‌کنیم تا به $(n+۱)$ برسیم:

$$\frac{(n+۳)!}{(n+۱)!}=\frac{(n+۳)(n+۲)\cancel{(n+۱)!}}{\cancel{(n+۱)!}}=(n+۳)(n+۲)$$

۳- تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$ مجموعهٔ A دارای ۶ عضو است، پس خواهیم نوشت:

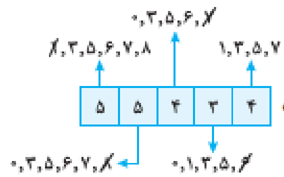
$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{(۶-۳)!\times ۳!}=\frac{۶!}{(۳!\times ۳!)}\Rightarrow \frac{\cancel{۶}\times ۵\times ۴\times \cancel{۳!}}{\cancel{۳\times ۲}\times ۱\times \cancel{۳!}}=۲۰$$

۴- الف) شرط خاص نداریم پس پُرکردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم:



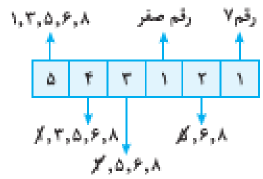
$\Rightarrow$ تعداد عددهای مطلوب $=۶\times ۶\times ۵\times ۴=۷۲۰$

ب) عددی فرد است که یکان آن فرد باشد، پس ابتدا خانهٔ مربوط به یکان را پُر می‌کنیم و سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم:



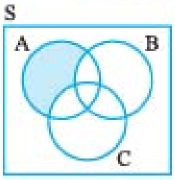
تعداد عددهای مطلوب $=۵\times ۵\times ۴\times ۳\times ۴=۱۲۰۰$

پ) یکان فقط باید ۷ باشد پس برای آن فقط ۱ انتخاب وجود دارد در مورد صدگان نیز فقط ۱ انتخاب (رقم صفر) داریم، پس ابتدا این دو خانه را پر می‌کنیم سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم و پُرکردن خانه‌ها را ادامه می‌دهیم:



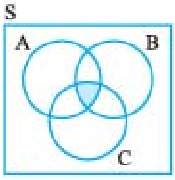
$\Rightarrow$ تعداد عددهای مطلوب $=۵\times ۴\times ۳\times ۱\times ۲\times ۱=۱۲۰$

۵- الف) فقط باید A رخ دهد یعنی باید قسمتی از A را رنگ کنیم که با B یا C اشتراک نداشته باشد.



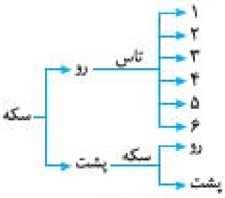
$(A-B)-C$

ب) می‌خواهیم هر ۳ پیشامد با هم رخ دهند. لذا قسمت مشترک A، B و C را رنگ می‌کنیم:



$A\cap B\cap C$

۶- الف) بهتر است یک نمودار درختی برای این مسئله رسم کنیم:



فضای نمونه $S=\{(ر,۱),(ر,۲),\dots,(ر,۶),(پ,ر),(پ,پ)\}$

ب) پیشامد مطلوب $A=\{(ر,۲),(ر,۴),(ر,۶),(پ,ر),(پ,پ)\}$

۷- ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را محاسبه می‌کنیم:

$$n(S)=\binom{۱۴}{۳}=\frac{۱۴!}{۱۱!\times ۳!}=\frac{۱۴\times ۱۳\times \cancel{۱۲}\times \cancel{۱۱!}}{\cancel{۱۱!}\times \cancel{۳\times ۲}\times ۱}=۳۶۴$$

الف)

$$n(A)=\underset{\text{سالم}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۱۰!}{۷!\times ۳!}=\frac{۱۰\times \cancel{۹}\times \cancel{۸}\times \cancel{۷!}}{\cancel{۷!}\times \cancel{۳}\times \cancel{۲}\times ۱}=۱۲۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲۰}{۳۶۴}$$

ب) وقتی ۲ سیب خراب است پس سیب سوم سالم است لذا داریم:

$$n(A)=\binom{۴}{۲}\times\binom{۱۰}{۱}=۶\times ۱۰=۶۰ \quad\Rightarrow\quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶۰}{۳۶۴}$$

پ) باید ۲ سیب سالم و ۱ سیب خراب انتخاب شود:

$$n(A)=\underset{\text{سالم}}{\binom{۱۰}{۲}}\times\underset{\text{خراب}}{\binom{۴}{۱}}=۴۵\times ۴=۱۸۰ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۸۰}{۳۶۴}$$

۸- الف و ب) بهتر است از جدول زیر استفاده کنیم: $(n(S)=۶^۲=۳۶)$

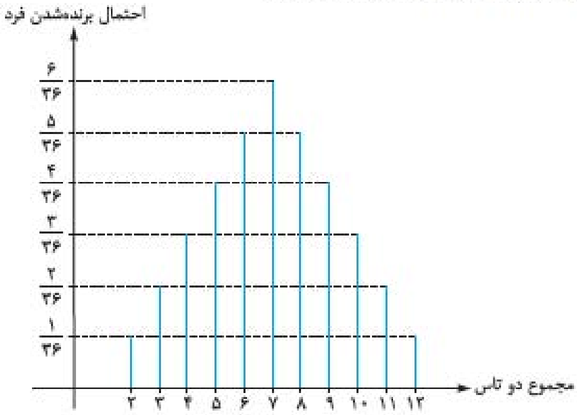
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۳۶}$$

مجموع دو تاس (A)	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
فراوانی (n(A))	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۳۶} \qquad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

از روی جدول معلوم است که احتمال برنده‌شدن فرد با شمارهٔ ۷ بیشتر از بقیه است و احتمال برنده‌شدن دو فرد با شماره‌های ۲ و ۱۲ از همه کم‌تر است. (خودتان احتمال برنده‌شدن بقیهٔ افراد را به کمک جدول محاسبه کنید.

پ)



۹- ۱) بیان مسئله (فهم مسئله، تعریف دقیق مسئله)

۲) طرح و برنامه‌ریزی (روش اندازه‌گیری، روش نمونه‌گیری، روش انجام کار)

۳) گردآوری، سامان‌دهی و پاک‌سازی داده‌ها

۴) تحلیل داده‌ها (مرتب‌کردن داده‌ها، استفاده از شاخص‌های مرکزی و پراکندگی، استفاده از نمودارها و جدول‌ها)

۵) بحث و نتیجه‌گیری و تفسیر نتایج (نتیجه‌گیری، نقد و بررسی، ایده‌های جدید)

۱۰- هر قسمت را به شکل (هم‌دامنه ← دامنه) می‌نویسیم سپس دامنه را بررسی می‌کنیم:

الف) ارتفاع از سطح زمین ← کاهش دما
دامنه: زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$

ب) شمارهٔ هر دانش‌آموز در کلاس ← میزان ساعات مطالعه
دامنه: زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$

پ) اندازهٔ ضلع مکعب ← حجم مکعب
دامنه: زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$

ت) شمارهٔ سال‌های اخیر (۱۰ سال اخیر) ← تغییرات سطح آب
دامنه: زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$

ث) شمارهٔ آپارتمان‌ها (۱ تا ۱۰۰) ← میزان مصرف برق
دامنه: زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$

۱۱- الف) جملات دنباله ۵تا ۵تا زیاد می‌شوند، لذا خواهیم داشت:

ضابطهٔ تابعی (جملهٔ عمومی): $a_n = 5n - 3$

رابطهٔ بازگشتی: $a_{n+1} = a_n + 5 \ , \ a_1 = 2$

ب) جملات دنباله، به صورت یک‌درمیان ۱۶ و ۳ هستند لذا چنین می‌نویسیم:

$$a_n = \begin{cases} 16 & \text{فرد } n \\ 3 & \text{زوج } n \end{cases}$$

۱۲- الف) $a_1 = \dfrac{1^2}{(-1)^1} = \dfrac{1}{-1} = -1$

$b_8 = 4 \ , \ c_2 = 4 + (-1)^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow a_1 + b_8 - c_2 = (-1) + 4 - 5 = -2$

ب) $a_3 = \dfrac{3^2}{(-1)^3} = \dfrac{9}{-1} = -9$

$b_1 = 4$

$c_4 = 4 + (-1)^4 = 4 + 1 = 5$

$$\Rightarrow \text{کسر} = \frac{2(-9) \times \sqrt{4}}{|3-5|} = \frac{-18 \times 2}{|-2|} = \frac{-36}{2} = -18$$

ب) $B=\{(۱,۳),(۳,۱),(۲,۲)\} \Rightarrow n(B)=۳$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

پ) می‌دانیم دو تاس هر عددی که بیایند حاصل‌ضربشان کم‌تر از ۳۷ است. پس بدون هیچ محاسبه‌ای می‌گوییم احتمال موردنظر برابر ۱ است.

۴- $\xrightarrow[\text{مربوط‌به‌سن}]{\text{مرتب‌کردن داده‌های}} ۳۶,\underbrace{۳۹,۴۰}_{Q_1=۳۹/۵},۴۱,\underbrace{۴۳}_{Q_۲=۴۳},۴۵,\underbrace{۴۵,۴۷}_{Q_۳=۴۶},۵۱$

$$R=\max-\min=۵۱-۳۶=۱۵$$

$$IQR=Q_۳-Q_۱=۴۶-۳۹/۵=۶/۵$$

$$\bar{x}=\frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}}=\frac{۳۸۷}{۹}=۴۳$$

$$S^۲=\frac{(۳۶-۴۳)^۲+(۳۹-۴۳)^۲+(۴۰-۴۳)^۲+(۴۱-۴۳)^۲}{۹}$$

$$+\frac{(۴۳-۴۳)^۲+۲(۴۵-۴۳)^۲+(۴۷-۴۳)^۲+(۵۱-۴۳)^۲}{۹}$$

$$\Rightarrow S^۲=\frac{۱۶۶}{۹}\xrightarrow{\text{جذر}} S=\sqrt{\frac{۱۶۶}{۹}}=\frac{\sqrt{۱۶۶}}{۳}$$

داده یا داده‌های دورافتاده نداریم پس بهتر است از میانگین و انحراف معیار استفاده کنیم. (اگر دادهٔ دورافتاده داشتیم از میانه و چارک‌ها استفاده می‌کردیم.)

۵- الف) $a_n=-۵+۳(n-۱)=-۵+۳n-۳=۳n-۸$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{n=۱} a_۱=۳(۱)-۸=-۵ \\ \xrightarrow{n=۲} a_۲=۳(۲)-۸=-۲ \end{cases} \Rightarrow d=a_۲-a_۱=(-۲)-(-۵)=۳$$

ب) $\xrightarrow{\text{پنج جملهٔ اول}} -۵,-۲,۱,۴,۷,...$ ($+۳$ $+۳$ $+۳$ $+۳$)

پ) به هر جمله ۳ واحد اضافه می‌شود تا جملهٔ بعدی به دست آید لذا:

$a_{n+1}=a_n+۳$ و $a_۱=-۵$

ت) $S_n=\frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d)\xrightarrow[n=۲۰]{a=-۵,d=۳}$

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲(-۵)+۱۹\times۳)=۱۰(\overbrace{-۱۰+۵۷}^{۴۷})=۴۷۰$$

۶-
$$\begin{cases} a_۲+a_۴=۲۰ \xrightarrow{\text{باز می‌کنیم}} (a+d)+(a+۳d)=۲۰ \\ \Rightarrow ۲a+۵d=۲۰ \\ a_۵-a_۲=۶ \xrightarrow{\text{باز می‌کنیم}} (a+۴d)-(a+۲d)=۶ \\ \Rightarrow ۲d=۶ \Rightarrow d=۳ \end{cases}$$

حالا مقدار d را در رابطهٔ اول قرار می‌دهیم:

$$۲a+۵d=۲۰ \xrightarrow{d=۳} ۲a+۵(۳)=۲۰$$

$$\Rightarrow ۲a=۲۰-۱۵ \Rightarrow ۲a=۵ \Rightarrow a=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

۷- عمق چاه‌ها مرتباً و به مقدار ثابت کاهش می‌یابند پس با یک دنبالهٔ حسابی مواجه‌ایم. ضمناً اختلاف مشترک جملات برابر $-۰/۵$ یا $-\frac{۱}{۲}$ است. (چون عمق هر چاه، نسبت به چاه قبلی ۰/۵ متر کم‌تر است.)

$a_۱=۴۰$ و $d=-\frac{۱}{۲}$ و $a_n=۲/۵$ و $n=?$

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow ۲/۵=۴۰+(n-۱)(-\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow ۲/۵=۴۰-\frac{۱}{۲}n+\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}n=۴۰+\frac{۱}{۲}-۲/۵$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}n=۴۰+\frac{۱}{۲}-\frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{\cancel{۲}}n=\frac{۸۰+۱-۵}{\cancel{۲}}$$

$$\Rightarrow n=۸۰+۱-۵=۷۶$$

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)

۱- $$\frac{۹!\times۵!\times۰!}{۸!\times۳!\times۱!}=\frac{(۹\times\cancel{۸!})\times(۵\times۴\times\cancel{۳!})\times۱}{\cancel{۸!}\times\cancel{۳!}\times۱}=۱۸۰$$

توجه دارید که: $۰!=۱$ و $۱!=۱$

۲- الف) بهتر است از روش پُرکردن خانه‌ها استفاده کنیم:

۷	۶	۵

کتاب اول — انتخاب کتاب دوم — انتخاب کتاب سوم

$\Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $=۷\times۶\times۵=۲۱۰$

البته از فرمول تبدیل یعنی $P(۷,۳)$ هم می‌توانستید استفاده کنید چون ترتیب انتخاب‌ها مهم هستند.

ب) هدیه‌دادن به دوستان، ترتیب خاصی ندارد پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌ها}=\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۴!\times۳!}=\frac{۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}\times۳\times۲\times۱}=۳۵$$

۳- $n(S)=۶^۲=۳۶$

الف) $A=\{(۱,۱),(۲,۲),...,(۶,۶)\} \Rightarrow n(A)=۶$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

۸- می‌دانیم که در یک دنبالهٔ هندسی اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی باشند، داریم:

$$a,b,c \Rightarrow b^2=ac$$

$$\underbrace{x}_{a},\underbrace{x+2}_{b},\underbrace{x+3}_{c} \Rightarrow (x+2)^2=x(x+3) \Rightarrow \cancel{x^2}+4x+4=\cancel{x^2}+3x$$

$$\Rightarrow 4x-3x=-4 \Rightarrow x=-4 \xrightarrow{\text{نوشتن جملات}} -4,-2,-1,...$$

$$\Rightarrow r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2} \Rightarrow a_8=ar^7=-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=-2^2\times\frac{1}{2^7}=-\frac{1}{2^5}=-\frac{1}{32}$$

۹- تعداد صندلی‌ها در ردیف‌های اول، دوم، سوم و ... را به ترتیب a_1، a_2، a_3 و ... می‌نامیم. ضمناً تعداد صندلی‌ها یک دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند از طرفی می‌دانیم $S_n=255$ می‌باشد پس باید n را پیدا کنیم: $d=a_2-a_1=15-12=3$

$$S_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d) \xrightarrow[S_n=255]{a=12,d=3} 255=\frac{n}{2}(2(12)+(n-1)\times3)$$

$$\Rightarrow 255=\frac{n}{2}(24+3n-3)$$

$$\Rightarrow 255=\frac{n}{2}(3n+21) \Rightarrow 510=3n^2+21n$$

ضرب می‌کنیم

$$\Rightarrow 3n^2+21n-510=0 \xrightarrow{\div 3} \underbrace{n^2+7n-170}_{\text{تجزیه به کمک اتحاد جملهٔ مشترک}}=0$$

$$\Rightarrow (n+17)(n-10)=0 \Rightarrow \begin{cases} n=-17 & (\text{غ ق ق}) \\ n=10 & (\text{ق ق}) \end{cases}$$

۱۰-

$$\begin{cases} a_6=4 \\ a_3=\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{جملات را باز می‌کنیم.}} \begin{cases} ar^5=4 \\ ar^2=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{برهم تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین دو تساوی را}} \frac{ar^5}{ar^2}=\frac{\frac{4}{1}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow r^3=8 \Rightarrow r^3=2^3 \Rightarrow r=2$$

$$ar^2=\frac{1}{2} \xrightarrow{r=2} a\times 2^2=\frac{1}{2} \Rightarrow 4a=\frac{1}{2} \Rightarrow 8a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{8}$$

$$a_n=ar^{n-1} \Rightarrow a_n=\frac{1}{8}\times 2^{n-1}=\frac{1}{2^3}\times 2^{n-1}=2^{n-1-3}=2^{n-4}$$

۱۱- الف) از روی شکل معلوم می‌شود که نیمه‌عمر دارو ۱ ساعت است؛ چون بعد از پایان هر ۱ ساعت مقدار دارو در بدن،نصف می‌شود. واضح است که بعد از گذشت حداقل ۴ نیمه‌عمر،مقدار دارو کم‌تر از ۱۰ میلی‌گرم باقی می‌ماند. ضمناً نمی‌توان زمان صفرشدن مقدار دارو در بدن را مشخص کرد چون از روی نمودار معلوم است که نقاط به محور xها مرتباً نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند ولی آن را قطع نمی‌کنند. ولی اگر n خیلی زیاد شود (n تعداد نیمه‌عمرهاست) می‌توان مقدار باقی‌ماندهٔ دارو را تقریباً صفر فرض کرد.

ب) $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ و $a_1=50$

پ) $a_n=ar^{n-1} \Rightarrow a_n=100\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

تذکر مهم: همان‌طور که قبلاً هم گفتیم در این مسائل، a با a_1 فرق دارد یعنی الان a مقدار اولیهٔ دارو است، (که برابر ۱۰۰ می‌باشد) ولی a_1 مقدار دارو بعد از گذشت یک نیمه‌عمر است، (که برابر ۵۰ می‌باشد.) پس در مسائل نیمه‌عمر و کلاً مسائلی که با گذشت زمان، مقدار ماده کم یا زیاد می‌شود a با a_1 متفاوت است.

۱۲- می‌دانیم که: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ لذا خواهیم داشت:

$$\sqrt{3}=\sqrt[2]{3^1}=3^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=3^{\frac{2}{4}}=3^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[60]{3^{30}}=3^{\frac{30}{60}}=3^{\frac{1}{2}}$$

پس همگی اعداد داده‌شده با هم برابرند.

۱۳- ۲ ساعت و ۳۰ دقیقه برابر ۲/۵ ساعت است، لذا:

$$\text{تعداد باکتری‌های جدید}=\text{تعداد اولیهٔ باکتری‌ها}\times 5^{2/5}=1000\times 5^{2/5}$$

$$=1000\times 5^{\frac{5}{2}}=1000\times\sqrt[2]{5^5}=1000\times\sqrt[2]{5^4\times 5}=1000\times 5^2\times\sqrt{5}=25000\sqrt{5}$$

۱۴- گفته‌شده رشد جمعیت در حال کاهش است پس با یک مسئله زوال مواجه‌ایم:

$$f(t)=c(1-r)^t$$

$$\xrightarrow[c=30]{t=8,\,r=\%2} f(8)=30\,(1-0/02)^8=30\times(0/98)^8 \text{ میلیون نفر}$$

درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان

فصل ۱: آمار و احتمال

درس ۱: شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

اصل جمع: اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، به طوری که نتوان این دو عمل را با هم انجام داد، در این صورت این دو عمل را به $(m+n)$ طریق می‌توان انجام داد. حرف «یا» نشان‌دهندهٔ این است که باید از اصل جمع استفاده کنیم. (اصل جمع برای بیشتر از ۲ عمل هم برقرار است.) مثلاً اگر علی بتواند برای رفتن به دانشگاه از ۳ خط تاکسی یا ۴ خط اتوبوس یا ۲ خط مترو استفاده کند، تعداد حالت‌های رفتن او به دانشگاه برابر است با: $۳+۴+۲=۹$

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحلهٔ متوالی اول و دوم انجام شود، به طوری که مرحلهٔ اول به m طریق و هر یک از حالت‌های مرحلهٔ اول به n طریق انجام شود، در کل آن عمل به $m\times n$ طریق، قابل انجام است. حرف «و» نشان می‌دهد که باید از اصل ضرب استفاده کنیم. توجه کنید که در اصل ضرب، ما دو یا چند عمل را به طور متوالی انجام می‌دهیم. یعنی همهٔ کارها (عمل‌ها) با هم انجام می‌شوند.

مثلاً فرض کنید امیر ۲ جفت کفش، ۳ پیراهن و ۵ شلوار دارد تعداد حالت‌هایی که او می‌تواند از کفش‌ها و پوشاک خود استفاده کند طبق اصل ضرب برابر است با:

تعداد حالت‌ها $= ۲\times۳\times۵=۳۰$

مثال: مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری دربارهٔ توسعهٔ شرکت، ۲۶ نفر از سهامداران را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۱۶ نفر آن‌ها در گروه A و بقیه در گروه B قرار می‌گیرند.

الف) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۲۶ نفر مشورت بگیرد؟

ب) او به چند طریق می‌تواند از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرطی که از هر گروه با ۱ نفر مشورت کند؟

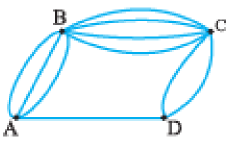
پاسخ: الف) باید از اصل جمع استفاده کنیم. چون مدیرعامل فقط می‌تواند ۱ نفر را از گروه A یا B انتخاب کند: تعداد حالت‌ها $= ۱۶+۱۰=۲۶$

ب) باید از اصل ضرب استفاده کنیم. چون مدیر می‌خواهد هم با گروه A و هم با گروه B مشورت کند؛ یعنی دو عمل را با هم انجام می‌دهد (به طور متوالی) لذا:

تعداد حالت‌ها $= ۱۶\times۱۰=۱۶۰$

استفاده از اصل جمع و اصل ضرب به طور هم‌زمان

در بعضی از سؤالات، مخصوصاً سؤالات مربوط به سفر از یک شهر به یک شهر دیگر، هم از اصل ضرب و هم از اصل جمع استفاده می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید.



مثال: فردی می‌خواهد از شهر A به شهر C برود. او به چند طریق (حالت) می‌تواند این کار را انجام دهد به شرطی که:

الف) محدودیت خاصی نداشته باشد.

ب) حتماً از شهر B بگذرد.

پاسخ: الف) برای رفتن از A به C دو مسیر کلی وجود دارد:

$$\begin{cases} A\to B\to C \text{ : مسیر}\quad \text{تعداد حالت‌ها} = ۳\times۴=۱۲ \\ A\to D\to C \text{ : مسیر}\quad \text{تعداد حالت‌ها} = ۱\times۲=۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}} \text{تعداد کل حالت‌ها} = ۱۲+۲=۱۴$$

ب) این فرد می‌خواهد از A به C برود و حتماً از B هم عبور کند، لذا فقط یک مسیر $A\to B\to C$ وجود دارد.

تعداد حالت‌های مسیر $= ۳\times۴=۱۲$

نماد فاکتوریل

فاکتوریل را با نماد «!» نشان می‌دهیم؛ اگر n عدد طبیعی باشد $n!$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n!=n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\cdots\times۳\times۲\times۱$$

یعنی برای محاسبهٔ $n!$ عدد n را در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خود ضرب می‌کنیم. مثلاً:

$$۱!=۱\ ,\ ۲!=۲\times۱=۲\ ,\ ۳!=۳\times۲\times۱=۶\ ,\ ۴!=۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$$

ضمناً توجه کنید که $۰!=۱$ می‌باشد. همچنین اگر بخواهیم کسری مانند $\frac{۱۰!}{۸!}$ را حساب کنیم لزومی ندارد ۱۰ و ۸ را تا ۱ باز کنیم، چون وقت‌گیر خواهد بود بلکه بهتر است ۱۰ را تا ۸ باز کنیم، فقط حواستان باشد موقع بازکردن یک عدد هر جا متوقف شدیم، باید علامت ! بگذاریم:

$$\frac{۱۰!}{۸!}=\frac{۱۰\times۹\times\cancel{۸!}}{\cancel{۸!}}=۹۰$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید:

الف) $۵!-۳!=?$

ب) $\frac{۴!\times۵!\times۰!}{۸!\times۱!}=?$

پاسخ: الف)

$$\begin{cases} ۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰ \\ ۳!=۳\times۲\times۱=۶ \end{cases} \Rightarrow ۵!-۳!=۱۲۰-۶=۱۱۴$$

دقت کنید که $(۵!-۳!)$ با $۲!$ برابر نمی‌شود.

ب)

$$\frac{۴!\times۵!\times۰!}{۸!\times۱!}=\frac{(\cancel{۴}\times\cancel{۳}\times\cancel{۲}\times۱)\times\cancel{۵!}\times۱}{(\cancel{۸}\times۷\times\cancel{۶}\times\cancel{۵!})\times۱}=\frac{۱}{۱۴}$$

در این سؤال، دیدیم ۸ به ۵ نزدیک‌تر است تا ۸ نسبت به ۴. پس ۸ را تا ۵ باز کردیم.

جایگشت

به هر یک از حالت‌های کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز، یک جایگشت آن n شیء می‌گوییم و تعداد آن‌ها برابر با $n!$ می‌باشد. مثلاً با حروف a، b و c می‌توانیم کلمات زیر را بسازیم (بدون توجه به بامعنی یا بی‌معنی بودن کلمات):

abc ، acb ، bac ، bca ، cab ، cba

۶ جایگشت (کلمه) ایجاد شد.

البته اگر فقط تعداد جایگشت‌ها را بخواهیم، می‌گوییم چون ۳ حرف متمایز داریم، تعداد جایگشت‌ها (کلمات) برابر با $۳!$ می‌باشد: تعداد جایگشت‌ها $= ۳!=۳\times۲\times۱=۶$

روش کلی ساختن اعداد و کلمات: معمولاً برای ساختن اعداد و کلمات از روش پرکردن خانه‌ها استفاده می‌کنیم. اگر بخواهیم کلمات فارسی بسازیم، خانه‌ها را از راست به چپ پر می‌کنیم، ولی اگر بخواهیم کلمات لاتین یا اعداد را بسازیم، خانه‌ها را از چپ به راست پر می‌کنیم. البته باید به شرایط و محدودیت‌های سؤال، حتماً توجه کنیم؛ مثلاً اگر گفته شود عدد زوج بسازید، در جایگاه یکان (اولین خانهٔ سمت راست) باید رقم‌های زوج قرار دهیم، سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم و پرکردن خانه‌ها را ادامه می‌دهیم.

مثال: با ارقام ۰،۱،۲،۵،۶،۷ و بدون تکرار ارقام:

الف) چند عدد ۶رقمی می‌توان ساخت؟

ب) چند عدد ۵رقمی و فرد می‌توان ساخت؟

پ) چند عدد ۵رقمی و زوج می‌توان ساخت؟

ت) چند عدد ۴رقمی مضرب ۵ می‌توان ساخت؟

پاسخ: الف) هیچ عددی با صفر شروع نمی‌شود، پس برای پرکردن اولین خانهٔ سمت چپ، ۵ انتخاب وجود دارد (یکی از ارقام ۱،۲،۵،۶،۷) در تمامی سؤالاتی که گفته می‌شود تکرار ارقام غیرمجاز است، پس از پرکردن هر خانه، باید، یکی از ارقام استفاده‌شده را به دلخواه خط بزنیم:

خانه‌ها را از چپ به راست پر می‌کنیم

۱،۲،۵،۶،۷ — ۰،۱،۲،۵،~~۶~~ — ۰،۱،~~۲~~ — ۰،۱،۲،۵،۶،~~۷~~ — ۰،۱،۲،~~۵~~ — ۰،~~۱~~

۵	۵	۴	۳	۲	۱

طبق اصل ضرب ⟵ تعداد عددهای مطلوب = ۵×۵×۴×۳×۲×۱ = ۶۰۰

ب) عددی فرد است که یکان آن فرد باشد، پس اولین خانهٔ سمت راست به ۳ حالت پر می‌شود، (یکی از ارقام ۱، ۵، ۷) سپس به سراغ خانهٔ سمت چپ می‌رویم و پرکردن خانه‌ها را ادامه می‌دهیم. (از چپ به راست حرکت می‌کنیم.)

۱،۲،۵،۶،~~۷~~ — ۰،۱،۲،۵،~~۶~~ — ۰،۱،۲،~~۵~~ — ۰،۱،~~۲~~ — ۱،۵،۷

۴	۴	۳	۲	۳

اصل ضرب ⟵ تعداد عددهای مطلوب = ۴×۴×۳×۲×۳ = ۲۸۸

پ) باید ۲ حالت جداگانه در نظر بگیریم، یک بار حالتی که یکان صفر باشد و بار دیگر حالتی که یکان صفر نباشد (۲ یا ۶ باشد)، سپس جواب‌ها را با هم جمع می‌کنیم. شاید بپرسید چه موقع این کار را انجام می‌دهیم؟ فقط وقتی که صفر جزء رقم‌های داده‌شده باشد و بخواهیم عدد زوج یا مضرب ۵ بسازیم این کار را انجام می‌دهیم. البته تکرار ارقام هم باید غیرمجاز باشد.

حالت اول:

۱،۲،۵،۶،۷ — ۱،۲،۵،۶،~~۷~~ — ۱،۲،۵،~~۶~~ — ۱،۲،~~۵~~ — فقط صفر

۵	۴	۳	۲	۱

⇐ تعداد عددها = ۵×۴×۳×۲×۱ = ۱۲۰

حالت دوم:

۱،~~۲~~،۵،۶،۷ — ۰،۱،۵،۶،~~۷~~ — ۰،۱،۵،~~۶~~ — ۰،۱،~~۵~~ — ارقام ۲ یا ۶

۴	۴	۳	۲	۲

⇐ تعداد عددها = ۴×۴×۳×۲×۲ = ۱۹۲

⇐ تعداد کل عددهای مطلوب = ۱۲۰+۱۹۲ = ۳۱۲

ت) باز هم باید ۲ حالت جداگانه در نظر بگیریم. یکی وقتی یکان صفر باشد، یکی وقتی یکان ۵ باشد:

حالت اول:

۱،۲،۵،۶،۷ — ۱،۲،۵،۶،~~۷~~ — ۱،۲،۵،~~۶~~ — فقط صفر

۵	۴	۳	۱

⇐ تعداد عددها = ۵×۴×۳×۱ = ۶۰

حالت دوم:

۱،۲،~~۵~~،۶،۷ — ۰،۱،۲،۶،~~۷~~ — ۰،۱،۲،~~۶~~ — فقط ۵

۴	۴	۳	۱

⇐ تعداد عددها = ۴×۴×۳×۱ = ۴۸

⇐ تعداد کل عددهای مطلوب = ۶۰+۴۸ = ۱۰۸

مثال: با حروف کلمهٔ «ولایت» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمهٔ ۵حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمهٔ ۵حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ی» ختم شود؟

پاسخ: الف) چون می‌خواهیم کلمات فارسی بسازیم، خانه‌ها را از راست به چپ پر می‌کنیم:

و،ل،ا،ی،ت — و،ل،ا،ی،~~ت~~ — و،ل،ا،~~ی~~ — و،ل،~~ا~~ — و،~~ل~~ — ~~و~~

۱	۲	۳	۴	۵

⇐ تعداد کلمات مطلوب = ۵×۴×۳×۲×۱ = ۱۲۰

ب) برای خانه‌های اول و آخر فقط ۱ انتخاب داریم، لذا:

فقط «و» — ل،ا،ت — ل،ا،~~ت~~ — ~~ل~~،ا — فقط «ی»

۱	۱	۲	۳	۱

⇐ تعداد کلمات مطلوب = ۱×۳×۲×۱×۱ = ۶

تبدیل r شیء از n شیء

اگر بخواهیم از بین n شیء مختلف، r شیء را انتخاب کنیم، به شرطی که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها کنار هم مهم باشد، می‌توانیم از فرمول تبدیل استفاده کنیم:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

البته به جای استفاده از فرمول بالا، می‌توانیم از همان روش پرکردن خانه‌ها نیز استفاده کنیم.

مثال: به چند طریق می‌توانیم از بین ۷ شرکت‌کننده در یک مسابقه به ۳ نفر اول جایزه دهیم؟

پاسخ: **روش اول:** در مسابقات، ترتیب انتخاب‌ها مهم است، لذا از فرمول تبدیل استفاده می‌کنیم:

$$P(۷,۳)=\frac{۷!}{(۷-۳)!}=\frac{۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}}=۲۱۰$$

روش دوم: می‌توانیم از روش پرکردن خانه‌ها استفاده کنیم:

نفر اول — نفر دوم — نفر سوم

۷	۶	۵

⇐ تعداد حالت‌ها = ۷×۶×۵ = ۲۱۰

ترکیب r شیء از n شیء

اگر بخواهیم از بین n شیء متمایز، r شیء را انتخاب کنیم و ترتیب انتخاب‌ها مهم نباشد از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

مثال: **از بین ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز به چند طریق می‌توانیم ۳ مهره را انتخاب کنیم، به طوری که:**

الف) محدودیتی نداشته باشیم.

ب) هر ۳ مهره آبی باشند.

پ) حداقل ۲ مهره آبی باشند.

پاسخ: در این‌جا ترتیب انتخاب مهره‌ها مهم نیست، پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

الف) ۳ مهره را باید از بین ۹ مهرهٔ موجود انتخاب کنیم: (۹ = ۴ + ۵)

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{6!\times 3!} = \frac{9\times 8\times 7\times \cancel{6!}}{\cancel{6!}\times 3\times 2\times 1} = 84$$

ب) ۳ مهرهٔ آبی را باید از بین ۴ مهرهٔ آبی موجود انتخاب کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{1!\times 3!} = \frac{4\times \cancel{3!}}{1\times \cancel{3!}} = 4$$

پ) حداقل ۲ مهره، باید آبی باشند؛ یعنی ۲ مهرهٔ آبی و ۱ مهرهٔ قرمز باید انتخاب شوند و یا هر ۳ مهره، آبی انتخاب شوند، لذا:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \overset{\text{۲ آبی}}{\binom{4}{2}} \overset{\text{و}}{\times} \overset{\text{۱ قرمز}}{\binom{5}{1}} \overset{\text{یا}}{+} \overset{\text{۳ آبی}}{\binom{4}{3}} = 6\times 5 + 4 = 34$$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی برابر با $\binom{n}{r}$ می‌باشد.

مثلاً در مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی A برابر است با:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{2!\times 4!} = \frac{6\times 5\times \cancel{4!}}{2\times 1\times \cancel{4!}} = 15$$

نکته: برای یافتن تعداد وترها و تعداد مثلث‌های ساخته‌شده با تعدادی نقطه که روی محیط یک دایره قرار دارند، باز هم از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم.

مثال: ۱۰ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. با آن‌ها چند وتر و چند مثلث متمایز می‌توان ساخت؟

پاسخ: هر وتر روی دایره دارای ۲ نقطهٔ ابتدایی و انتهایی است، لذا:

$$\text{تعداد وترها} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{8!\times 2!} = \frac{10\times 9\times \cancel{8!}}{\cancel{8!}\times 2\times 1} = 45$$

هر مثلث دارای ۳ رأس است؛ بنابراین:

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\times 3!} = \frac{10\times 9\times 8\times \cancel{7!}}{\cancel{7!}\times 3\times 2\times 1} = 120$$

انتخاب اجباری

اگر بخواهیم از بین n شیء متمایز، r شیء را انتخاب کنیم به شرطی که k شیء به خصوص حتماً انتخاب شوند، آن‌گاه تعداد حالت‌های ممکن برابر با $\binom{n-k}{r-k}$ می‌باشد.

مثال: مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد که همگی آن‌ها شامل g باشند؟

پاسخ: می‌خواهیم g در تمام زیرمجموعه‌ها باشد، پس یک انتخاب اجباری داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4!\times 2!} = \frac{6\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}\times 2\times 1} = 15$$

درس ۲: احتمال

پدیده‌های قطعی و تصادفی

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجهٔ آن‌ها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گوییم. در پدیده‌های تصادفی از همهٔ نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از این‌که کدام نتیجه، قطعاً رخ می‌دهد، اطمینان نداریم. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، یک برآمد می‌گوییم. ضمناً به مجموعهٔ شامل تمام نتایج ممکن، فضای نمونهٔ آزمایش می‌گوییم و آن را با S نمایش می‌دهیم. تعداد عضوهای S را با $n(S)$ نمایش می‌دهیم. معمولاً لازم نیست تمام اعضای S را بنویسیم، چون عملی وقت‌گیر است. فقط کافی است $n(S)$ را به دست آوریم.

مثال: قطعی یا تصادفی بودن پدیده‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وجود دانش‌آموزی که سن او بیشتر از ۱۰ سال باشد در کلاس دوازدهم یک مدرسهٔ روزانه

ب) پرتاب سکه در مسابقهٔ فوتبال توسط داور برای تعیین مالکیت توپ

پ) خارج‌شدن ۱ مهرهٔ سفید از کیسه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید (با چشم بسته یک مهره را انتخاب کرده‌ایم.)

ت) در یک بازی بین دو نفر، سکه‌ای پرتاب می‌شود و به دنبال آن تاسی انداخته می‌شود. اگر شخصی سکه‌اش «رو» و تاسش زوج بیاید، برنده است. تعیین برنده، قبل از بازی، پدیده‌ای قطعی است یا تصادفی؟

پاسخ: الف) پدیدهٔ قطعی است، چون تمام دانش‌آموزان کلاس دوازدهم این مدرسه بالای ۱۰ سال سن دارند.

ب) پدیدهٔ تصادفی است؛ چون نمی‌دانیم سکه «رو» می‌آید یا «پشت».

پ) پدیدهٔ قطعی است؛ چون رنگ مهرهٔ انتخابی حتماً سفید است و از قبل قابل پیش‌بینی است.

ت) پدیدهٔ تصادفی است؛ چون نمی‌توانیم بگوییم حتماً سکه «رو» و تاس «زوج» می‌آید.

مثال: در هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر، تعداد اعضای فضای نمونه را به دست آورید. (در قسمت‌های الف، ب و پ اعضای S را نیز بنویسید.)

الف) پرتاب یک تاس — **ب) پرتاب یک سکه**

پ) پرتاب یک تاس و یک سکه — **ت) پرتاب ۳ تاس**

ث) انتخاب ۳ نفر از بین ۵ معلم و ۲ دانشجو

پاسخ: الف) $S=\{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow n(S)=6$

ب) $S=\{\text{ر},\text{پ}\} \Rightarrow n(S)=2$

پ) $S=\{\underbrace{(\text{ر},1),(\text{ر},2),\dots,(\text{ر},6)}_{\text{۶ تا}},\underbrace{(\text{پ},1),(\text{پ},2),\dots,(\text{پ},6)}_{\text{۶ تا}}\}$

$\Rightarrow n(S)=12$

ت) $n(S)=6\times 6\times 6=216$

ث) $n(S)=\binom{7}{3}=\frac{7!}{4!\times 3!}=\frac{7\times 6\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}\times 3\times 2\times 1}=35$

پیشامد تصادفی

به هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونهٔ S یک پیشامد تصادفی می‌گوییم. پیشامدها را معمولاً با حروف A، B و C نمایش می‌دهیم و تعداد اعضای آن‌ها را با $n(A)$، $n(B)$ و $n(C)$ نمایش می‌دهیم.

مثال: در پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر و تعداد اعضایشان را مشخص کنید:

الف) عدد ظاهرشده، اول باشد. (پیشامد A)

ب) عدد ظاهرشده، حداقل ۴ باشد. (پیشامد B)

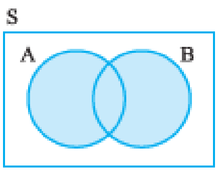
پ) عدد ظاهرشده، حداکثر ۴ باشد. (پیشامد C)

پاسخ: الف) $A=\{2,3,5\} \Rightarrow n(A)=3$:اعداد اول

ب) $B=\{4,5,6\} \Rightarrow n(B)=3$:حداقل ۴ یعنی خود ۴ یا بیشتر

پ) $C=\{1,2,3,4\} \Rightarrow n(C)=4$:حداکثر ۴ یعنی خود ۴ یا کم‌تر

اعمال روی پیشامدها



اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند، آن‌گاه اجتماع و اشتراک A و B، تفاضل B از A و متمم مجموعهٔ A به صورت زیر تعریف می‌شوند. (قسمت‌های رنگی)

$$\xrightarrow{\text{اجتماع A و B}} \underset{\downarrow}{A\cup B} = \{x\in S \mid x\in A \overset{\text{یا}}{\vee} x\in B\}$$

حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهند.