ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **ریاضی (۳) دوازدهم** از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم؛ بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

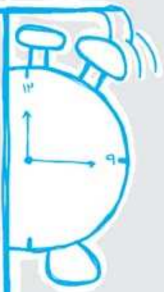
الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند؛ در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال مواجه خواهید شد. آزمون‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۹۸، شهریور ۹۸ و دی ۹۷ هستند.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها، همهٔ آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت، برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند. در این قسمت، همهٔ آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان ریاضی (۳) نیاز دارید، در ۱۷ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول تا چهارم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

بارم‌بندی درس ریاضی (۳)

شمارهٔ فصل		نوبت اول	نوبت دوم
فصل اول		۷	۲
فصل دوم		۵	۲
فصل سوم		۵	۲
فصل چهارم	تا صفحهٔ ۷۶	۳	۱
	صفحهٔ ۷۷ به بعد	–	۴
فصل پنجم		–	۳/۵
فصل ششم		–	۳/۵
فصل هفتم		–	۲
جمع		۲۰	۲۰

فصل اول

۱ درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید: — ۱

الف) برای دو تابع f و g با شرط آن‌که $f \neq g$ تساوی $(fog)(x) = (gof)(x)$ هیچ‌گاه برقرار نیست.

ب) بُرد تابع $2f(x-1)$ در حالت کلی با بُرد تابع $f(x)$ برابر نیست.

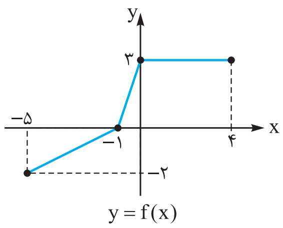
۲ ابتدا نمودار تابع f را رسم کنید سپس بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع اکیداً صعودی، اکیداً نزولی یا ثابت است، مشخص کنید. — ۱/۵

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$$

شما از سال دهم با رسم نمودارهای مختلف سروکار داشتین، ولی اگه یازم یادتون رفته چه‌طوری نمودار توابع رو رسم کنید به درس‌نامۀ آخر این کتاب یه نیگا بندازین.

۳ با رسم نمودار، وضعیت یکنوایی تابع $y = 2^x - 1$ را بررسی کنید، سپس در صورت امکان، ضابطه و نمودار تابع وارون آن را به دست آورید. — ۱/۲۵

۴ نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده است. نمودار توابع $y = \frac{1}{2}f(2x)$ و $y = -f(-x)$ را رسم کنید. — ۱/۲۵



۵ برای دو تابع $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x(1-x)}$ ضابطه و دامنۀ تابع fog را به دست آورید. — ۱/۲۵

۶ نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را رسم کرده سپس دامنه‌اش را طوری محدود کنید که یک‌به‌یک شود، در نهایت با در نظر گرفتن این دامنه، ضابطۀ وارون f را به دست آورید. — ۱/۲۵

فصل دوم

۷ مقادیر $\sin 15^\circ$، $\cos 15^\circ$ و $\tan 15^\circ$ را به دست آورید. — ۱/۵

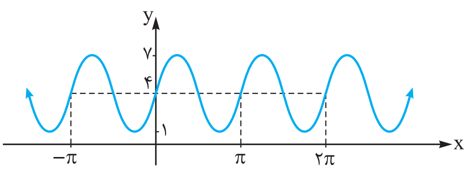
ما مقدارهای $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ رو نمی‌دونیم ولی $\sin 30^\circ$ و $\cos 30^\circ$ رو بلدیم، پس از فرمول‌های 2α استفاده می‌کنیم.

۸ معادلۀ مثلثاتی $\cos x(4\cos x - 9) = -5$ را حل کنید. جواب‌هایی را که در بازۀ $[0, 4\pi]$ قرار دارند تعیین کنید. — ۱/۵

۹ در جای خالی، عبارت مناسب قرار دهید: — ۰/۷۵

جواب معادلۀ $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ که در بازۀ $[0, \frac{\pi}{2}]$ واقع می‌باشد برابر با .... می‌باشد.

۱۰ نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x) = a\sin bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دورۀ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطۀ آن را مشخص کنید. — ۱/۵



فصل سوم

۱۱ مثلثی با مساحت ۹ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازۀ دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۱۸ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟ — ۱

۱۲ حاصل حدود زیر را به دست آورید: — ۲/۲۵

در محاسبۀ حد توابع کسری، اگر صورت کسر، عددی غیرصفر و مخرج کسر صفر شد باید نوع صفر رو تعیین کنید یعنی باید ببینید مخرج 0^+ می‌شود یا 0^-

الف) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2}$

ب) $\lim\limits_{t \to -\infty} \frac{1 - 9t^3}{t^2 + 2t}$

پ) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{4x}{(x-1)^3}$

۱۳ با توجه به جدول مقابل می‌توان گفت: ۱

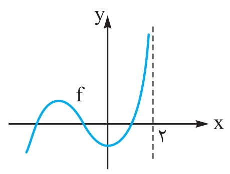
الف) حد تابع f وقتی $x \to +\infty$ برابر است با ....

ب) حد f وقتی $x \to -\infty$ برابر است با ....

x	$-\infty$	$\leftarrow$	-1000	-100	0	100	1000	$\rightarrow$	$+\infty$
$f(x)=\frac{1}{x}$	◯	$\leftarrow$	◯	◯	◯	◯	◯	$\rightarrow$	◯

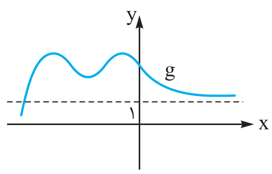
۱۴ برای هر شکل، یک عبارت حدی مناسب بنویسید. ۱/۵

الف)



(حد در x = ۲)

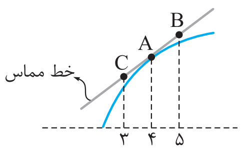
ب)



(حد در $+\infty$)

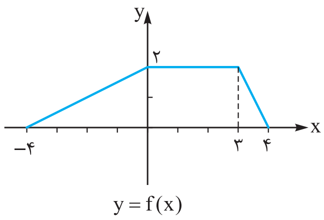
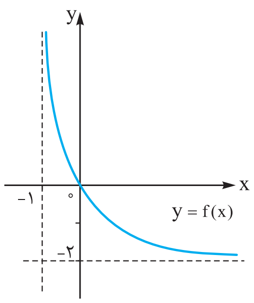
فصل چهارم

۱۵ برای تابع f در شکل مقابل داریم: $f'(4)=2$ و $f(4)=18$. مختصات نقاط B و C را به دست آورید. ۱/۵



موفق باشید — جمع نمرات ۲۰

ریاضی (۳)	رشته: علوم تجربی	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com
ردیف	آزمون شمارهٔ ۹	نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی خرداد ۹۸	نمره

ردیف	سؤال	نمره
۱	در جاهای خالی گزینهٔ مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید. الف) تابع $y=(x+1)^3$ در دامنهٔ تعریف خود .... (صعودی، نزولی) است. ب) هر چه خروج از مرکز بیضی .... (کوچک‌تر، بزرگ‌تر) شود، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر خواهد شد. پ) دو پیشامدی که با هم رخ ندهند، دو پیشامد .... (مستقل، ناسازگار) هستند.	۰/۷۵
۲	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. الف) دو تابع $f(x)=-\frac{2x+6}{7}$ و $g(x)=\frac{-7}{2}x-3$ وارون یکدیگرند. (درست، نادرست) ب) دورهٔ تناوب تابع $y=\tan x$ برابر 2π است. (درست، نادرست)	۰/۵
۳	دو تابع $f(x)=\sqrt{x-4}$ و $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۱
۴	با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار $y=\frac{1}{2}f(4x)$ را رسم کنید.  	۰/۵
۵	الف) مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=1-2\sin(\frac{-\pi}{3}x)$ را به دست آورید. ب) معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2\alpha-\sin\alpha+1=1$ را حل کرده، جواب‌های کلی آن را بنویسید.	۰/۵ ۱/۲۵
۶	A) حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید. آ) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[x]}{\sin x}$ ب) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}$ B) با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، حدهای خواسته‌شده را بنویسید. آ) $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$  	۱/۵ ۰/۵
۷	مشتق تابع $f(x)=x^3-2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x=-1$ به دست آورید.	۱
۸	تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<0\\ x^2-1 & x\geq 0\end{cases}$ را در نظر بگیرید: الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد. ب) ضابطهٔ تابع مشتق را بنویسید. پ) نمودار تابع f' را رسم کنید.	۱/۵
۹	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده‌کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(x^4-3x)^5$ ب) $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-x}$	۱/۵
۱۰	معادلهٔ حرکت متحرکی به صورت $f(t)=2t^2-t$، برحسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[0,4]$ با هم برابرند.	۱

ریاضی (۳)	رشته: علوم‌تجربی	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com	
ردیف	آزمون شمارهٔ ۹		نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی خرداد ۹۸	نمره
۱۱	اگر تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در $x = 1$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.			۱
۱۲	اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازهٔ $[-1, 3]$ به دست آورید.			۱/۲۵
۱۳	ورق فلزی مربع‌شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشهٔ آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبهٔ جعبه را به اندازهٔ x برمی‌گردانیم تا یک جعبهٔ درباز ساخته شود. مقدار x چه‌قدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟			۱/۲۵
۱۴	وضعیت دو دایره به معادلات $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید.			۲
۱۵	در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است. فاصلهٔ کانونی بیضی را به دست آورید.			۱/۲۵
۱۶	سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ آبی است. ظرف دوم شامل ۷ مهرهٔ سبز و ۳ مهرهٔ آبی است. ظرف سوم شامل ۶ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟			۱/۷۵
	موفق باشید		جمع نمرات	۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- الف) نادرست است؛ مثلاً اگر $f(x)=x$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ باشند، با آن‌که $f\neq g$ ولی تساوی $fog=gof$ برقرار است و هر دو تابع fog و gof با هم برابر می‌شوند:

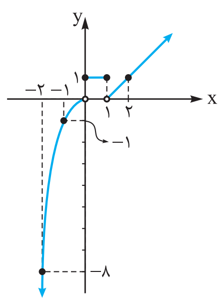
$$(fog)(x)=(gof)(x)=\frac{1}{x}$$

ب) درست است. مثلاً اگر بُرد $f(x)$ برابر با $[0,1]$ باشد بُرد $2f(x-1)$ برابر است با $[0,2]$.

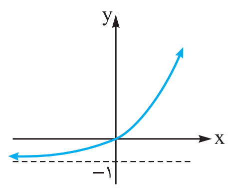
۲- ابتدا با توجه به هر ضابطه و دامنهٔ مربوط به آن، تک‌تک نمودارها را به روش نقطه‌یابی رسم می‌کنیم، سپس صعودی یا نزولی بودن یا ثابت‌بودن هر یک را بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & x<0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & -1 & -2 \\ y & 0 & -1 & -8 \end{array} \\ 1 & 0\leq x\leq 1 \Rightarrow y=1 \text{ خط افقی} \\ x-1 & x>1 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 \end{array} \end{cases}$$

واضح است که تابع در بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(1,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[0,1]$ ثابت است.



۳- با توجه به شکل مقابل، هر خط افقی، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس این تابع، یک‌به‌یک است. لذا وارون‌پذیر هم می‌باشد.
ضمناً تابع، اکیداً صعودی است.
حال برای به دست آوردن تابع وارون، باید x را برحسب y بنویسیم. ضمناً توجه دارید که وارون تابع نمایی، یک تابع لگاریتمی است و برعکس.



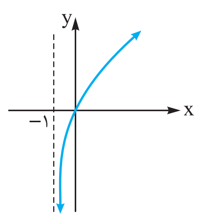
$y=2^x-1$

یافتن تابع وارون: $y=2^x-1 \Rightarrow 2^x=y+1$

$$\xrightarrow[\text{در مبنای ۲ می‌گیریم.}]{\text{از دو طرف لگاریتم}} \log_2 2^x=\log_2(y+1) \Rightarrow x=\log_2(y+1)$$

$$\xrightarrow[\text{به یکدیگر}]{\text{تبدیل اسم متغیرها}} y^{-1}(x)=\log_2(x+1)$$

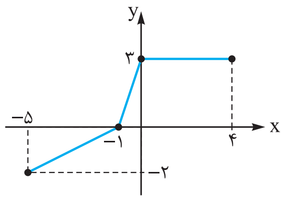
برای رسم نمودار y^{-1} باید نمودار $\log_2 x$ را ۱ واحد به چپ حرکت دهیم:
(یا می‌توانیم قرینهٔ نمودار $y=2^x-1$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم).



$y^{-1}=\log_2(x+1)$

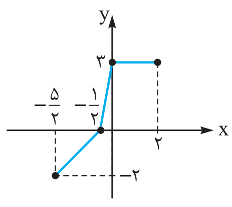
۴- دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $[-5,4]$ می‌باشد. حالا برای یافتن دامنهٔ $f(2x)$ باید طول تمام نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم؛ یعنی دامنهٔ تابع $f(2x)$ به صورت $[-\frac{5}{2},\frac{4}{2}]$ خواهد بود. زیرا:

$$-5\leq 2x\leq 4 \xrightarrow{\div 2} -\frac{5}{2}\leq x\leq 2$$



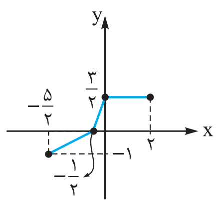
$y=f(x)$

طول نقاط را نصف می‌کنیم.



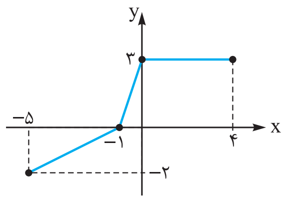
$y=f(2x)$

عرض نقاط را نصف می‌کنیم.



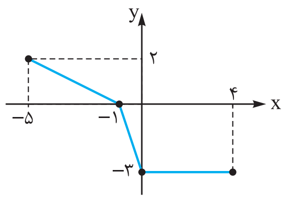
$y=\frac{1}{2}f(2x)$

حالا نمودار $y=-f(-x)$ را رسم می‌کنیم:



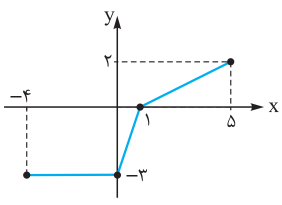
$y=f(x)$

قرینه نسبت به محور xها



$y=-f(x)$

قرینه نسبت به محور yها



$y=-f(-x)$

۵- ابتدا دامنهٔ توابع f و g را جداگانه به دست می‌آوریم. می‌دانید دامنهٔ توابع گویا به شکل $\frac{\bigcirc}{\square}$ برابر است با $\mathbb{R}-\{\square=\circ \text{ ریشه‌های معادلهٔ }\}$ و دامنهٔ توابع رادیکالی به شکل $\sqrt[\text{زوج}]{\square}$ برابر است با جواب نامعادلهٔ $\square\geq\circ$.

$$f(x)=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}\xrightarrow{\text{یافتن دامنه}}۱-x^۲=\circ\Rightarrow x^۲=۱$$

$$\Rightarrow x=\pm۱\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm۱\}$$

$$g(x)=\sqrt{x(۱-x)}\xrightarrow{\text{یافتن دامنه}}x(۱-x)\geq\circ\xrightarrow[\text{علامت}]{\text{جدول تعیین}}\circ\leq x\leq۱$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{\circ\leq x\leq۱\mid\underbrace{\sqrt{x(۱-x)}\neq\pm۱}_{\text{طرفین به توان ۲}}\}$$

$$x(۱-x)\neq۱$$
$$\downarrow$$
$$\Delta<\circ$$
$$\downarrow$$
$$x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D_{fog}=\{\circ\leq x\leq۱\mid x\in\mathbb{R}\}=[\circ,۱]$$

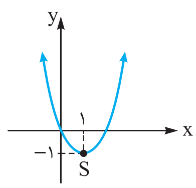
$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{۱+g^۲}{۱-g^۲}=\frac{۱+(\sqrt{x(۱-x)})^۲}{۱-(\sqrt{x(۱-x)})^۲}$$

۶- برای یافتن طول رأس می‌توانید از فرمول $x_S=\frac{-b}{۲a}$ استفاده کنید ولی روش سریع‌تر برای رسم تابع f این است که آن را به صورت عبارتی تبدیل کنیم که شامل $(x-a)^۲$ شود. برای این کار عدد $\frac{b^۲}{۴}$ را به عبارت اضافه و کم می‌کنیم:

$$y=x^۲-\underset{b}{۲x}\xrightarrow{\frac{b^۲}{۴}=۱}y=\underbrace{(x^۲-۲x+۱)}_{\text{اتحاد مربع}}-۱=(x-۱)^۲-۱$$

$$\Rightarrow S\begin{vmatrix}۱\\-۱\end{vmatrix}\ \text{مختصات رأس}$$

ضمناً سهمی min دارد، چون ضریب $x^۲$ مثبت است:



اگر مثلاً دامنه را به صورت $[۱,+\infty)$ تعریف کنیم، f یک‌به‌یک خواهد شد که در این صورت خواهیم داشت:

$$y=(x-۱)^۲-۱\Rightarrow(x-۱)^۲=y+۱$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}}x-۱=\pm\sqrt{y+۱}\xrightarrow{x\geq۱}x-۱=\sqrt{y+۱}$$

$$\Rightarrow x=۱+\sqrt{y+۱}\xrightarrow[\text{به یکدیگر}]{\text{تبدیل اسم متغیرها}}f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{x+۱}$$

(حالت $x\leq۱$ را خودتان بررسی کنید.)

۷- $$\cos۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\xrightarrow{\alpha=۱۵^\circ}\cos۳\circ^\circ=۱-۲\sin^۲۱۵^\circ$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱-۲\sin^۲۱۵^\circ\Rightarrow۲\sin^۲۱۵^\circ=۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\sin^۲۱۵^\circ=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}}\sin۱۵^\circ=\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}$$

$$\cos^۲۱۵^\circ=۱-\sin^۲۱۵^\circ=۱-\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۴-۲+\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}}\cos۱۵^\circ=\sqrt{\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴}}=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$$

$$\tan۱۵^\circ=\frac{\sin۱۵^\circ}{\cos۱۵^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{\cancel{۲}}}{\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{\cancel{۲}}}=\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}}$$

۸- $۴\cos^۲x-۹\cos x+۵=\circ$

با فرض $\cos x=t$ خواهیم داشت:

$$۴t^۲-۹t+۵=\circ\Rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=۸۱-۸\circ=۱$$

$$\Rightarrow t=\frac{۹\pm\sqrt{۱}}{۲(۴)}=\frac{۹\pm۱}{۸}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{۱\circ}{۸}=\frac{۵}{۴}\\ t=\frac{۸}{۸}=۱\end{cases}$$

$$t=\frac{۵}{۴}\Rightarrow\cos x=\frac{۵}{۴}>۱$$

(کسینوس یک زاویه نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۱ باشد.)

$$t=۱\Rightarrow\cos x=۱\Rightarrow x=۲k\pi\begin{cases}\xrightarrow{k=\circ}x=\circ\in[\circ,۴\pi]\\ \xrightarrow{k=۱}x=۲\pi\in[\circ,۴\pi]\\ \xrightarrow{k=۲}x=۴\pi\in[\circ,۴\pi]\end{cases}$$

۹- $\frac{\pi}{۱۲}$، توضیح: $\cos^۲x-\sin^۲x=\cos۲x$

$$\Rightarrow\cos۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\cos\frac{\pi}{۶}\Rightarrow۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$$

$$\xrightarrow{\div۲}x=k\pi\pm\frac{\pi}{۱۲}\xrightarrow{x\in[\circ,\frac{\pi}{۲}]}x=\frac{\pi}{۱۲}$$

۱۰- با توجه به شکل $\max=۷$ و $\min=۱$ و همچنین دورهٔ تناوب برابر با π است؛ بنابراین:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow|b|=۲\Rightarrow b=\pm۲$$

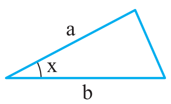
ضمناً توجه کنید که مقدار c همواره برابر است با میانگین max و min، لذا:

$$\max=۷,\min=۱\Rightarrow c=\frac{۷+۱}{۲}=۴$$

$$\max=|a|+c\Rightarrow|a|+۴=۷\Rightarrow|a|=۳\Rightarrow a=\pm۳$$

با توجه به شکل a و b هر دو باید هم‌علامت باشند، لذا: $a=۳$ و $b=۲$ یا $a=-۳$ و $b=-۲$، ولی ضابطهٔ تابع در هر دو حالت به شکل $y=۳\sin۲x+۴$ می‌باشد.

۱۱- اگر دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها از مثلثی را داشته باشیم (مانند شکل زیر) می‌توانیم مساحت آن را به دست آوریم.



$$\Rightarrow\text{مساحت }S=\frac{۱}{۲}a.b.\sin x$$

با توجه به اطلاعات مسئله، خواهیم نوشت:

$$\frac{۱}{\cancel{۲}}\times\cancel{۲}\times۱۸\times\sin x=۹\Rightarrow\sin x=\frac{۹}{۱۸}=\frac{۱}{۲}=\sin\underset{\alpha}{\boxed{\frac{\pi}{۶}}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\xrightarrow{k=\circ}x=\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\xrightarrow{k=\circ}x=\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}$$

پس مسئله دو جواب دارد، یعنی ۲ مثلث با خواص ذکرشده وجود دارند.

۱۲- الف)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}=\frac{0}{0}$$

عامل صفرشونده $(x+2)$ است؛ پس صورت و مخرج را بر $(x+2)$ تقسیم می‌کنیم.
البته مخرج به راحتی به کمک اتحاد جمله‌مشترک قابل تجزیه است:

$$x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$$

حالا صورت کسر را بر $x+2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l}
x^3-x^2-x+10 & x+2 \\ \cline{2-2}
-(x^3+2x^2) & x^2-3x+5 \\ \cline{1-1}
\quad -3x^2-x+10 & \\
\quad -(-3x^2-6x) & \\ \cline{1-1}
\qquad 5x+10 & \\
\qquad -(5x+10) & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \text{حد مورد نظر}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-3x+5)}{\cancel{(x+2)}(x+1)}$$

$$=\frac{(-2)^2-3(-2)+5}{-2+1}=\frac{15}{-1}=-15$$

ب)
$$\lim_{t\to-\infty}\frac{1-9t^3}{t^2+2t}=\lim_{t\to-\infty}\frac{-9t^3}{t^2}=\lim_{t\to-\infty}\frac{-9t}{1}=-9\times(-\infty)=+\infty$$

پ) اگر به جای xها ۱ بگذاریم، مخرج کسر صفر می‌شود، لذا باید حد چپ و راست را جداگانه محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{4x}{(x-1)^3}=\frac{4(1)}{(0^+)^3}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{4x}{(x-1)^3}=\frac{4(1)}{(0^-)^3}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

۱۳- به جای x در تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ اعداد داده‌شده را جایگزین می‌کنیم تا ببینیم مقادیر تابع به سمت چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند.

x	$-\infty \leftarrow$	-1000	-100	0	100	1000	$\rightarrow +\infty$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$0 \leftarrow$	$-0/001$	$-0/01$	تعریف‌نشده	$0/01$	$0/001$	$\rightarrow 0$

پس نتیجه می‌گیریم که:

الف) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

۱۴- الف) وقتی x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود، عرض نقاط تابع f از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر می‌شود. لذا: $\lim_{x\to2^-} f(x)=+\infty$

ب) وقتی x به سمت $+\infty$ نزدیک می‌شود، مقادیر تابع g به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند، لذا: $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$

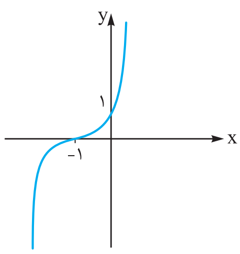
۱۵- در نقطهٔ A خط بر منحنی تابع مماس است، لذا $f'(4)$ همان شیب خط مماس است، مختصات نقطهٔ A هم که به شکل $(4,18)$ می‌باشد، لذا ابتدا معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$y-y_1=m(x-x_1)\xrightarrow[m=2]{A\left|\begin{smallmatrix}4\to x_1\\18\to y_1\end{smallmatrix}\right.} y-18=2(x-4)$$

$$\Rightarrow y=2x-8+18 \Rightarrow y=2x+10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=3} y=2(3)+10=16 \Rightarrow C\left|\begin{matrix}3\\16\end{matrix}\right. \\ \xrightarrow{x=5} y=2(5)+10=20 \Rightarrow B\left|\begin{matrix}5\\20\end{matrix}\right. \end{cases}$$

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)



۱- الف) صعودی، نمودار تابع $y=(x+۱)^۳$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور، نمودار $y=x^۳$ را ۱ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم:

واضح است که نمودار در کل $\mathbb{R}$ صعودی است.

ب) کوچک‌تر، می‌دانیم خروج از مرکز بیضی از رابطهٔ $e=\frac{c}{a}$ به دست می‌آید. هر چه‌قدر از مرکز بیشتر باشد به این معناست که کسر $\frac{c}{a}$ بزرگ‌تر می‌باشد لذا c از a مرتباً بزرگ‌تر می‌شود و بیضی کشیده‌تر می‌شود ولی هر چه‌قدر مقدار e کوچک‌تر شود کسر $\frac{c}{a}$ نیز کوچک‌تر می‌شود؛ یعنی c به a نزدیک‌تر می‌شود و بیضی به دایره شبیه‌تر می‌شود.

پ) ناسازگار

۲- الف) درست، اگر $(fog)(x)=(gof)(x)=x$ باشد دو تابع f و g وارون هم می‌باشند:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\frac{-۷}{۲}x-۳)$$

$$=-\frac{۲(\frac{-۷}{۲}x-۳)+۶}{۷}=-\frac{-۷x-۶+۶}{۷}=\frac{۷x}{۷}=x$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(-\frac{۲x+۶}{۷})=\frac{-۷}{۲}(-\frac{۲x+۶}{۷})-۳$$

$$=\frac{۲x+۶}{۲}-۳=x+۳-۳=x$$

پس f و g وارون هم هستند و جملهٔ داده‌شده، درست است.

ب) نادرست، دورهٔ تناوب توابع به شکل $y=\tan kx$ برابر $T=\frac{\pi}{|k|}$ می‌باشد، لذا دورهٔ تناوب $y=\tan x$ برابر است با:

$$T=\frac{\pi}{|۱|}=\pi$$

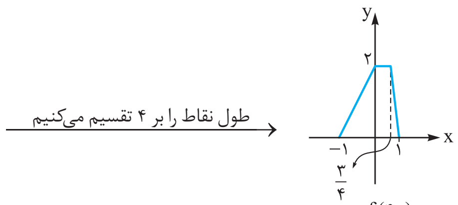
پس جملهٔ داده‌شده، نادرست است.

۳- می‌دانیم دامنهٔ تابع f برابر با $\{x\,|\,x\geq ۴\}$ و دامنهٔ تابع g برابر با $\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$ می‌باشد، لذا خواهیم داشت:

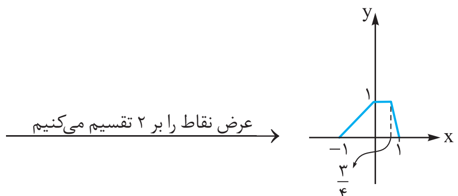
$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x\geq ۴\,|\,\sqrt{x-۴}\neq \pm ۱\}$$

$$=[۴,۵)\cup(۵,+\infty)$$

۴- برای رسم نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(۴x)$ ابتدا طول نقاط $f(x)$ را بر عدد ۴ تقسیم می‌کنیم، سپس عرض نقاط نمودار حاصل را نصف می‌کنیم لذا خواهیم داشت:



$y=f(۴x)$



$y=\frac{۱}{۲}f(۴x)$

۵- می‌دانیم در تابع $y=a\sin bx+c$ مقدار ماکزیمم برابر با $|a|+c$ و مقدار مینیمم برابر با $-|a|+c$ می‌باشد لذا در تابع $y=-۲\sin(-\frac{\pi}{۳}x)+۱$ خواهیم نوشت:

$$a=-۲,b=\frac{-\pi}{۳},c=۱$$

الف) $\max=|-۲|+۱=۳\ ,\ \min=-|-۲|+۱=-۱$

ب) $۱-۲\sin^۲\alpha-\sin\alpha+۱=۱\Rightarrow ۲\sin^۲\alpha+\sin\alpha-۱=۰\Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha=-۱\\ \sin\alpha=\frac{۱}{۲}\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\\ \alpha=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\ ,\ \alpha=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$

تذکر: برای حل معادلهٔ $۲\sin^۲\alpha+\sin\alpha-۱=۰$ می‌توانیم فرض کنیم $\sin\alpha=t$ سپس معادلهٔ $۲t^۲+t-۱=۰$ را به هر روش دلخواهی حل می‌کنیم.

۶- A)

آ) می‌دانیم عبارت $x\to ۰^-$ به این معناست که $-۱<x<۰$ لذا $[x]=-۱$ می‌باشد. ضمناً زاویهٔ ۰^- در ربع چهارم است، لذا سینوس آن ۰^- می‌شود. $\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$

ب) صورت و مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی یعنی در $x+\sqrt{x}$ ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-x}{(x+۲)(x-۱)(x+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x(x-۱)}{(x+۲)(x-۱)(x+\sqrt{x})}=+\frac{۱}{۶}$$

B) ب) $+\infty$ آ) -۲

۷- $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۳-۲+۳}{x+۱}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x^۲-x+۱)}{x+۱}=۳$$

۸- الف) ابتدا پیوستگی $f(x)$ را در $x=0$ بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(0)=0^2-1=-1 \\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2-1)=0^2-1=-1 \\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(2x-1)=2(0)-1=-1\end{cases}$$

پس f در $x=0$ پیوسته است. حالا مشتق‌های چپ و راست را در $x=0$ محاسبه می‌کنیم. (البته می‌توانید از روش رسم نمودار هم استفاده کنید.)

$$f'(x)=\begin{cases} 2 & x<0 \Rightarrow f'_-(0)=2 \\ 2x & x>0 \Rightarrow f'_+(0)=2(0)=0\end{cases}$$

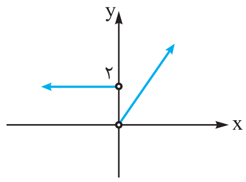
مشتق‌های چپ و راست در $x=0$ با هم برابر نیستند، پس $f'(0)$ وجود ندارد.

پس f در $x=0$ گوشه‌ای و مشتق‌ناپذیر است.

ب)

$$f'(x)=\begin{cases} 2 & x<0 \\ 2x & x>0\end{cases}$$

پ)



۹- می‌دانیم مشتق توابع به شکل $y=u^n$ به صورت $y'=nu'u^{n-1}$ می‌باشد. با فرض $u=x^4-3x$ و $n=5$ خواهیم داشت:

الف) $f'(x)=5(x^4-3x)^4(4x^3-3)$

ب) با توجه به این‌که:

$$y=\frac{f}{g} \Rightarrow y'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$$

خواهیم داشت:

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x)-(-1)\sqrt{x}}{(1-x)^2}$$

۱۰- اگر معادلهٔ حرکت متحرکی به شکل $y=f(t)$ باشد سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[a,b]$ برابر است با $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ و همچنین سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ $x=k$ برابر با $f'(k)$ می‌باشد. لذا داریم:

آهنگ متوسط $=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{28-0}{4}=7$

$$f'(t)=4t-1 \Rightarrow 4t-1=7 \Rightarrow t=2$$

۱۱- می‌دانیم طول نقطهٔ اکسترمم، در معادلهٔ $f'(x)=0$ صدق می‌کند، لذا داریم:

$$f'(x)=2ax+b \Rightarrow 0=2a+b \Rightarrow b=-2a$$

از طرفی مختصات نقطهٔ اکسترمم در خود تابع هم صادق است، بنابراین:

$$f(1)=7 \Rightarrow 7=a+b \xrightarrow{b=-2a} a=-7\,,\, b=14$$

۱۲- ابتدا طول نقاط بحرانی را با حل معادلهٔ $f'(x)=0$ به دست می‌آوریم:

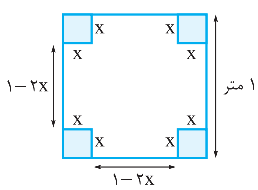
$$f'(x)=6x^2+6x-12 \Rightarrow f'(x)=x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases}x=-2\notin[-1,3]\\ x=1\end{cases}$$

پس طول نقاط بحرانی عبارت‌اند از: $x=-1$، $x=1$ و $x=3$. حالا عرض این نقاط را به دست می‌آوریم.

$$f(1)=-7\,,\, f(-1)=13\,,\, f(3)=45$$

$(1,-7)$ مینیمم مطلق و نقطهٔ $(3,45)$ ماکزیمم مطلق

۱۳- با توجه به شکل فرضی زیر، تابع حجم مکعب مستطیل را تشکیل داده و از آن مشتق گرفته، مساوی صفر قرار می‌دهیم تا نقطه یا نقاط بحرانی به دست آیند:



$$V(x)=(1-2x)^2\times x=x-4x^2+4x^3$$

$$V'(x)=1-8x+12x^2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}, x=\frac{1}{6}$$

$x=\frac{1}{6}$ قابل‌قبول است. توجه کنید که جواب $x=\frac{1}{2}$ قابل‌قبول نیست، چون به ازای آن، مقدار $(1-2x)$ برابر صفر می‌شود.

۱۴- ابتدا مرکز و شعاع دو دایره را به دست می‌آوریم، سپس اندازهٔ O_1O_2 یعنی خط‌المرکزین را محاسبه می‌کنیم و آن را با $|r_1-r_2|$ و r_1+r_2 مقایسه می‌کنیم.

$$O_1=(-1,2)\,,\, r_1=1\,,\, O_2\begin{cases}-\frac{a}{2}=1\\ -\frac{b}{2}=-2\end{cases}\,,\, r_2=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=2$$

$$d=\sqrt{(-1-1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{20} \Rightarrow \sqrt{20}>1+2=3$$

پس دو دایره متخارج هستند.

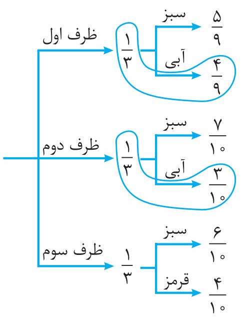
۱۵-

طول قطر کوچک: $2b=6 \Rightarrow b=3$ طول قطر بزرگ: $2a=8 \Rightarrow a=4$

$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=16-9=7 \Rightarrow c=\sqrt{7}$$

فاصلهٔ کانونی: $2c=2\sqrt{7}$

۱۶-



$$P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times 0=\frac{67}{270}$$

درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان

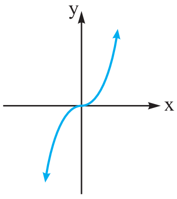
فصل ۱: تابع

درس ۱: توابع چندجمله‌ای ـ توابع صعودی و نزولی

توابع چندجمله‌ای

هر تابع که ضابطه‌اش به شکل $f(x) = ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + kx + c$ باشد یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n نام دارد.

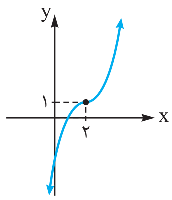
(n عدد صحیح نامنفی و $a \neq ۰$ است.) مثلاً تابع $f(x) = ۵x^۴ - ۸x + ۱$ یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۴ است. تابع $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ یک تابع درجهٔ ۳ است $(a \neq ۰)$. البته در کتاب درسی، تابع $y = x^۳$ مورد توجه قرار گرفته که نمودار آن به طور تقریبی به شکل روبه‌رو است:



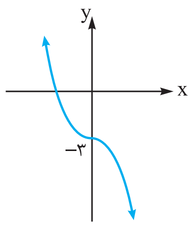
دامنه $= \mathbb{R}$, بُرد $= \mathbb{R}$

مثال **نمودار توابع $y_۱ = (x-۲)^۳ + ۱$ و $y_۲ = -x^۳ - ۳$ را به کمک نمودار $y = x^۳$ رسم کنید.**

پاسخ برای رسم نمودار $y_۱$ باید نمودار $x^۳$ را ۲ واحد به راست و سپس ۱ واحد به بالا انتقال دهیم که به نمودار روبه‌رو می‌رسیم:



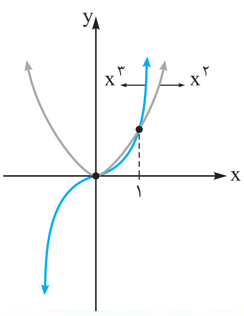
برای رسم نمودار $y_۲$ ابتدا نمودار $x^۳$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم سپس آن را ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



مقایسهٔ نمودار $y=x^۲$ و $y=x^۳$

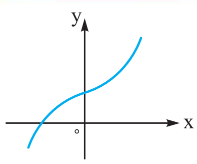
می‌دانید که اگر x هر عددی بین صفر و یک باشد، حاصل $x^۲$ بزرگ‌تر از $x^۳$ است پس در بازهٔ $(۰,۱)$ نمودار $x^۲$ بالاتر از $x^۳$ است ولی در بقیهٔ xهای مثبت، نمودار $x^۳$ بالاتر از $x^۲$ است.

در xهای منفی هم که واضح است مقدار $x^۲$ مثبت و مقدار $x^۳$ منفی است پس نمودار $x^۲$ بالاتر است.

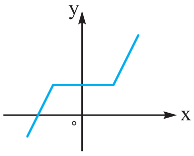


توابع یکنوا (صعودی یا نزولی)

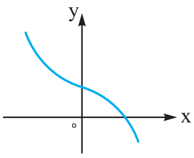
در تابع f اگر با افزایش مقادیر x مقادیر y هم مرتباً افزایش یابند، می‌گوییم f اکیداً صعودی است مانند تابع روبه‌رو:



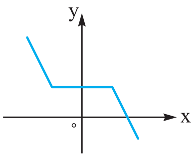
حالا اگر با افزایش مقادیر x مقادیر y زیاد شوند ولی بعضی نقاط نمودار، هم‌عرض باشند، می‌گوییم تابع f صعودی است مانند تابع روبه‌رو:



اکنون به کمک تعاریف قبل، می‌توانید تابع اکیداً نزولی و تابع نزولی را خودتان تعریف کنید.



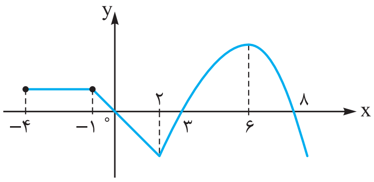
شکل (۱)



شکل (۲)

پس تابع مربوط به شکل (۱) اکیداً نزولی و تابع مربوط به شکل (۲) نزولی است.

نکته تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت $y = k$ می‌باشد. $(k \in \mathbb{R})$ ضمناً ممکن است تابعی در کل دامنهٔ خود، نه صعودی باشد نه نزولی ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد؛ مانند شکل روبه‌رو: این تابع در بازهٔ $[-۴,-۱]$ ثابت (هم صعودی و هم نزولی)، در بازه‌های $[-۱,۲]$ و $[۶,\infty)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[۲,۶]$ اکیداً صعودی است.



مثال **توابع زیر را رسم کرده و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.** (خرداد ۹۰)

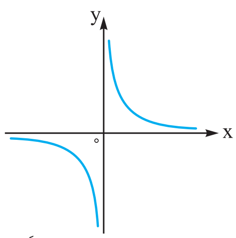
الف) $y = \frac{۱}{x}$

ب) $y = -\frac{۱}{x}$

پ) $f(x) = \begin{cases} x+۱ & x < -۲ \\ ۱ & -۲ < x < ۱ \\ -۲x & x > ۱ \end{cases}$

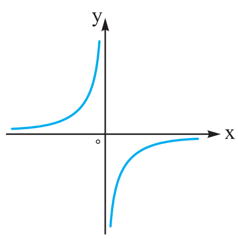
پاسخ

الف) $y = \frac{۱}{x} \Rightarrow$



تابع در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است ولی درکل $\mathbb{R}$، نه صعودی و نه نزولی است.

ب) $y = -\frac{۱}{x} \Rightarrow$

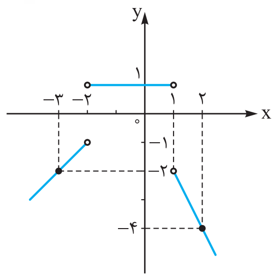


تابع در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است ولی درکل $\mathbb{R}$، نه صعودی و نه نزولی است.

پ) $f(x) = \begin{cases} x+۱ & x < -۲ \Rightarrow \\ ۱ & -۲ < x < ۱ \\ -۲x & x > ۱ \Rightarrow \end{cases}$

x	-۲	-۳
y	-۱	-۲

x	۱	۲
y	-۲	-۴



پس تابع f در بازهٔ $(-\infty,-۲)$ اکیداً صعودی، در بازهٔ $(-۲,۱)$ ثابت(هم صعودی، هم نزولی) و در بازهٔ $(۱,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

درس ۲: ترکیب توابع

تعریف ترکیب توابع و به دست آوردن آن

اگر f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، ترکیب توابع f و g را با نمادهای fog و gof نمایش می‌دهیم و خواهیم نوشت:

$$y=(fog)(x)=f(g(x))\ ,\ D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$
$$y=(gof)(x)=g(f(x))\ ,\ D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

مثال **اگر $f=\{(۳,۴),(۷,۸),(۵,۲)\}$ و $g=\{(۱,۳),(-۲,۷),(۵,۹)\}$ باشد، تابع fog را تشکیل دهید.** *(خرداد ۸۹)*

پاسخ

$$\begin{cases} ۱ \xrightarrow{g} ۳ \xrightarrow{f} ۴ \\ -۲ \xrightarrow{g} ۷ \xrightarrow{f} ۸ \Rightarrow fog=\{(۱,۴),(-۲,۸)\} \\ ۵ \xrightarrow{g} ۹ \xrightarrow{f} \times \end{cases}$$

دقت‌کنید ۹ در دامنهٔ f نیست!

ضمناً با توجه به جواب به دست آمده برای fog می‌توان گفت:

$$(fog)(۱)=۴\ ,\ (fog)(-۲)=۸$$

مثال **توابع $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ و $g(x)=\dfrac{x+۲}{x-۱}$ مفروض‌اند. اولاً دامنهٔ توابع f، g و gof را تعیین کنید، ثانیاً ضابطهٔ gof را بیابید، ثالثاً $(\dfrac{gof}{f-g})(۰)$ را محاسبه کنید.**

پاسخ

$$\text{اولاً}: f(x)=\sqrt{۴-x^۲} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} ۴-x^۲\ge ۰$$
$$\Rightarrow x^۲\le ۴ \Rightarrow -۲\le x\le ۲$$
$$g(x)=\frac{x+۲}{x-۱} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$
$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$
$$=\{x\in[-۲,۲] \mid \underbrace{\sqrt{۴-x^۲}\in\mathbb{R}-\{۱\}}_{\sqrt{۴-x^۲}\ne ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x\ne\pm\sqrt{۳}}\}=[-۲,۲]-\{\pm\sqrt{۳}\}$$

$$\text{ثانیاً}: (gof)(x)=g(f(x))=\frac{\sqrt{۴-x^۲}+۲}{\sqrt{۴-x^۲}-۱}$$

$$\text{ثالثاً}: (\frac{gof}{f-g})(۰)=\frac{(gof)(۰)}{f(۰)-g(۰)}=\frac{g(\overbrace{f(۰)}^{۲})}{۲-(-۲)}=\frac{۴}{۴}=۱$$

به دست آوردن $g(x)$ با داشتن $f(x)$ و $(fog)(x)$

ابتدا کل تابع g را در تابع f به جای xها قرار می‌دهیم تا fog به دست آید. سپس جواب آن را با fog که در فرض به ما داده شده مساوی قرار می‌دهیم تا g به دست آید.

مثال **اگر $f(x)=\dfrac{x}{۱+x}$ و $(fog)(x)=\dfrac{۱}{x}$ باشد، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را بیابید.** *(خرداد ۸۷)*

پاسخ

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{۱+g(x)} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{g(x)}{۱+g(x)}=\frac{۱}{x}$$
$$\Rightarrow x\,g(x)=۱+g(x) \Rightarrow \underbrace{x\,g(x)-g(x)}_{\text{فاکتوراز } g(x)}=۱$$
$$\Rightarrow g(x)(x-۱)=۱ \Rightarrow g(x)=\frac{۱}{x-۱}$$

به دست آوردن $f(x)$ با داشتن $g(x)$ و $(fog)(x)$

در این صورت فرض می‌کنیم که $g(x)=t$، سپس از این رابطه x را برحسب t پیدا کرده و در رابطهٔ fog که به ما داده شده قرار می‌دهیم. درنهایت t را به x تبدیل می‌کنیم.

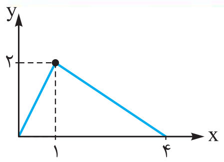
مثال **اگر $g(x)=۲x-۶$ و $(fog)(x)=۳x^۲-۷x$، آن‌گاه تابع $f(x)$ را به دست آورید.**

پاسخ

$$(fog)(x)=f(g(x)) \Rightarrow f(\underbrace{۲x-۶}_{t})=۳x^۲-۷x$$
$$۲x-۶=t \Rightarrow ۲x=t+۶ \Rightarrow x=\frac{t+۶}{۲}$$
$$\xrightarrow{\text{در تابع بالا}} f(t)=۳(\frac{t+۶}{۲})^۲-۷(\frac{t+۶}{۲})$$
$$\xrightarrow{\text{تبدیل t به x}} f(x)=۳(\frac{x+۶}{۲})^۲-۷(\frac{x+۶}{۲})$$

انتقال و تبدیل نمودارها

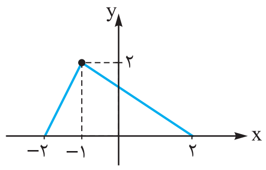
نمودار تابع f را به صورت مقابل فرض کنید:



$y=f(x)$

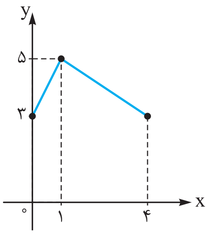
۱) برای رسم نمودار $y=f(x\pm k)$، ریشهٔ داخل پرانتز را به دست می‌آوریم و با توجه به علامت آن نمودار $f(x)$ را به چپ یا راست حرکت می‌دهیم؛ مثلاً برای رسم $y=f(x+۲)$ خواهیم داشت:

$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow$ نمودار $f(x)$ را ۲ واحد به چپ حرکت می‌دهیم.



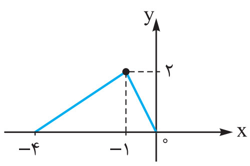
$y=f(x+۲)$

۲) برای رسم نمودار $y=f(x)\pm k$ نمودار f را با توجه به علامت $\pm k$ به بالا یا پایین منتقل می‌کنیم، ضمناً جهت حرکت موافق علامت این عدد می‌باشد یعنی اگر این عدد مثبت باشد به بالا و اگر منفی بود به پایین حرکت می‌کنیم.
مثلاً برای رسم $y=f(x)+۳$ با توجه به نمودار اولیهٔ f کافی است نمودار f را ۳ واحد به بالا حرکت دهیم:



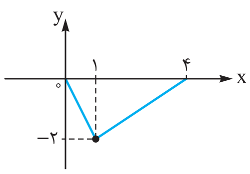
$y=f(x)+۳$

۳) برای رسم $y=f(-x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور yها قرینه کنیم (انعکاس دهیم):



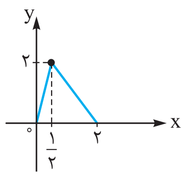
$y=f(-x)$

۴) برای رسم $y=-f(x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور xها قرینه کنیم (انعکاس دهیم):



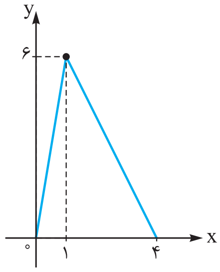
$y=-f(x)$

۵) برای رسم $y=f(kx)$ کافی است در نمودار f طول نقاط را بر k تقسیم کنیم. پس فقط دامنهٔ تابع تغییر می‌کند و برد بدون تغییر خواهد بود. مثلاً برای رسم $y=f(۲x)$ طول نقاط نمودار f را بر ۲ تقسیم می‌کنیم (نمودار فشرده‌تر می‌شود). به‌طور کلی اگر $|k|>۱$ باشد، نمودار به صورت افقی فشرده‌تر و اگر $|k|<۱$ باشد، نمودار به صورت افقی کشیده‌تر می‌شود.



$y=f(۲x)$

۶ برای رسم $y = kf(x)$ کافی است در نمودار f عرض نقاط را در عدد k ضرب کنیم. پس فقط برد تابع تغییر می‌کند. ضمناً اگر $|k| > 1$ باشد، نمودار به صورت عمودی کشیده‌تر و اگر $|k| < 1$ باشد، نمودار به صورت عمودی فشرده‌تر می‌شود. مثلاً نمودار $y = 3f(x)$ را رسم می‌کنیم:



$y = 3f(x)$

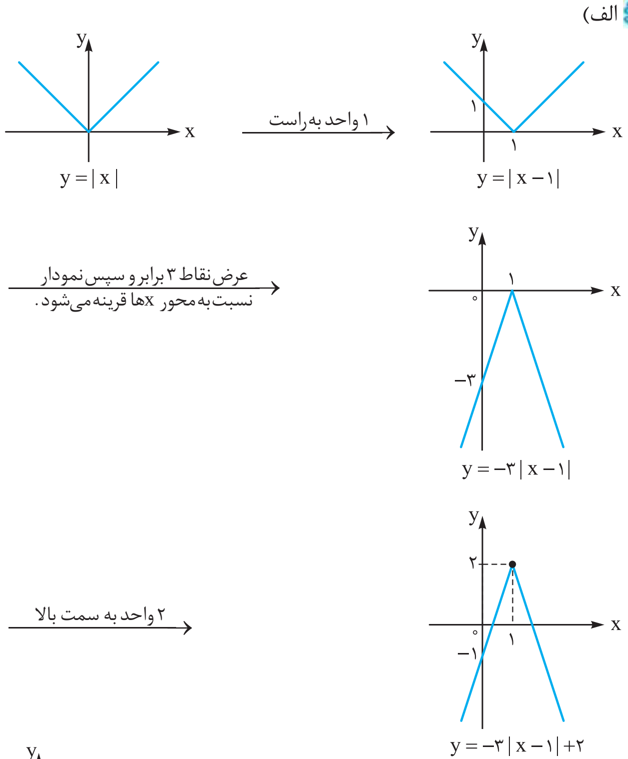
حال به‌عنوان تمرین، خودتان نمودار $y = -3f(x-2) + 3$ را رسم کنید.

مثال **به کمک قوانین انتقال و تبدیل، نمودار توابع زیر را رسم کنید:**

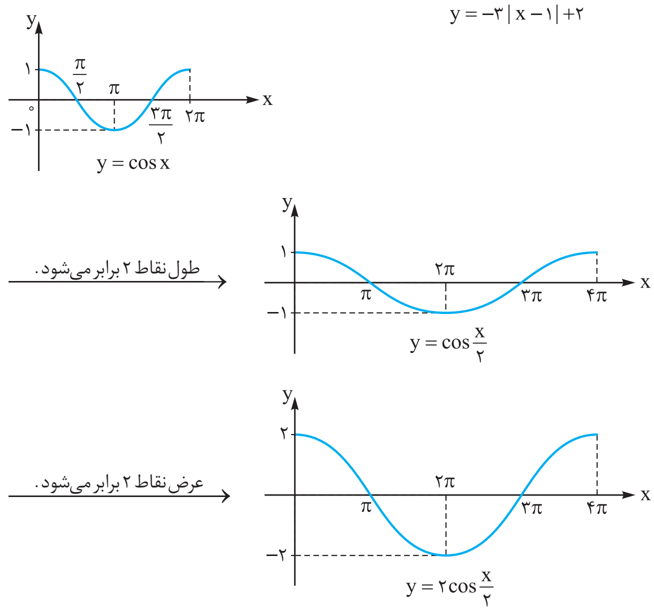
الف) $y = -3|x-1| + 2$

ب) $y = \square\cos\frac{x}{\square}$

پاسخ الف)



ب)

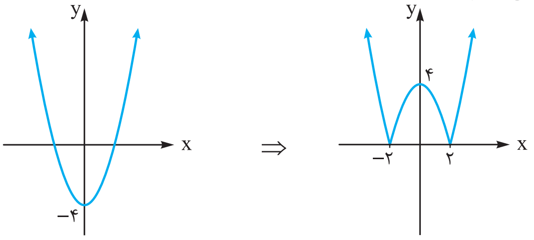


رسم نمودار |f|

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$، کافی است ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم کنیم سپس قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور xها قرار دارند نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

مثال **نمودار تابع $y = |x^2 - 4|$ را رسم کنید.**

پاسخ ابتدا نمودار $y = x^2 - 4$ را رسم کرده سپس قسمت پایین محور xها را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.

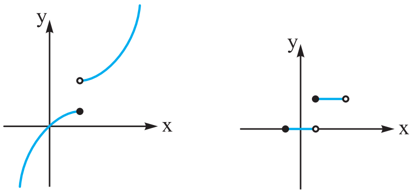


$y = x^2 - 4$ $\Rightarrow$ $y = |x^2 - 4|$

درس ۳: تابع وارون

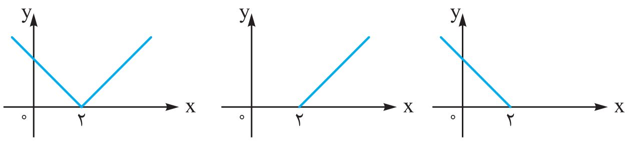
توابع یک‌به‌یک

هرگاه تابع f به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها داده شود، این تابع وقتی یک‌به‌یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی، عضو دوم مساوی نداشته باشند. از نظر هندسی، نمودار یک تابع وقتی یک‌به‌یک است که هر خط افقی دلخواه، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکند. مثلاً تابع (۱) یک‌به‌یک نیست ولی تابع (۲) یک‌به‌یک است.


شکل (۲) شکل (۱)

محدودکردن دامنه برای یک‌به‌یک شدن تابع

گاهی اوقات تابعی مانند f در دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست ولی اگر دامنه‌اش را محدود کنیم، یک‌به‌یک می‌شود. به عنوان مثال تابع $f(x) = |x-2|$ در دامنه‌اش یعنی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست ولی اگر دامنهٔ آن را به $[2, +\infty)$ یا $(-\infty, 2]$ محدود کنیم، تابع یک‌به‌یک خواهد شد. (البته در هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه هم، f یک‌به‌یک است.) این را هم بدانید که در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ اگر دامنه را به صورت $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ یا $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ محدود کنیم، تابع یک‌به‌یک خواهد شد.

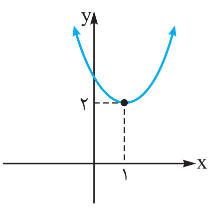


$f(x) = \|x-2\|$	$f(x) = \|x-2\|$	$f(x) = \|x-2\|$
$D_f = \mathbb{R}$	$D_f = [2, +\infty)$	$D_f = (-\infty, 2]$
(یک‌به‌یک نیست.)	(یک‌به‌یک است.)	(یک‌به‌یک است.)

مثال **یک‌به‌یک بودن یا نبودن تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ را بررسی کنید. اگر f یک‌به‌یک نبود، دامنهٔ آن را طوری محدود کنید که یک‌به‌یک شود.**

پاسخ بهتر است نمودار تابع را رسم کنیم و از روی آن، وضعیت یک‌به‌یکی تابع را بررسی کنیم: $y = x^2 - 2x + 3$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2(1)} = 1 \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در تابع}} y = 1^2 - 2(1) + 3 = 2 \Rightarrow S\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$$



پس تابع f در $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست ولی در بازه‌های $[1, +\infty)$ یا $(-\infty, 1]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه، یک‌به‌یک خواهد بود.