به نام پروردگار مهربان

ریاضی ۳ دوازدهم

آموزش و مرور ویژهٔ امتحان نهایی

سارا واعظزاده

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

مهروماه

فهرست

فصل ۱	تابع	۷
فصل ۲	مثلثات	۶۳
فصل ۳	حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت	۱۰۳
فصل ۴	مشتق	۱۳۵
فصل ۵	کاربرد مشتق	۱۸۳
فصل ۶	هندسه	۲۱۳
فصل ۷	احتمال	۲۴۹
	فرمول‌نامه	۲۶۵

فصل اول

تابع

تابع

توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

درس اول

- توابع چندجمله‌ای
- توابع صعودی و نزولی

ترکیب توابع

درس دوم

- ترکیب توابع
- دامنهٔ تابع مرکب
- رسم نمودار توابع به کمک انتقال، انقباض و انبساط

تابع وارون

درس سوم

- توابع یک به یک
- وارون تابع
- محاسبهٔ ضابطهٔ وارون تابع
- ترکیب تابع با تابع وارون آن

درس ۱ توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

وعدهٔ ۱
توابع چندجمله‌ای

توابعی به فرم $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_0 , a_1 , \ldots , a_n$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ باشد، یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامند. دامنهٔ این توابع، مجموعهٔ اعداد حقیقی است؛ به عنوان نمونه:

الف تابع ثابت $f(x) = k$ تابع چندجمله‌ای با درجهٔ صفر است.

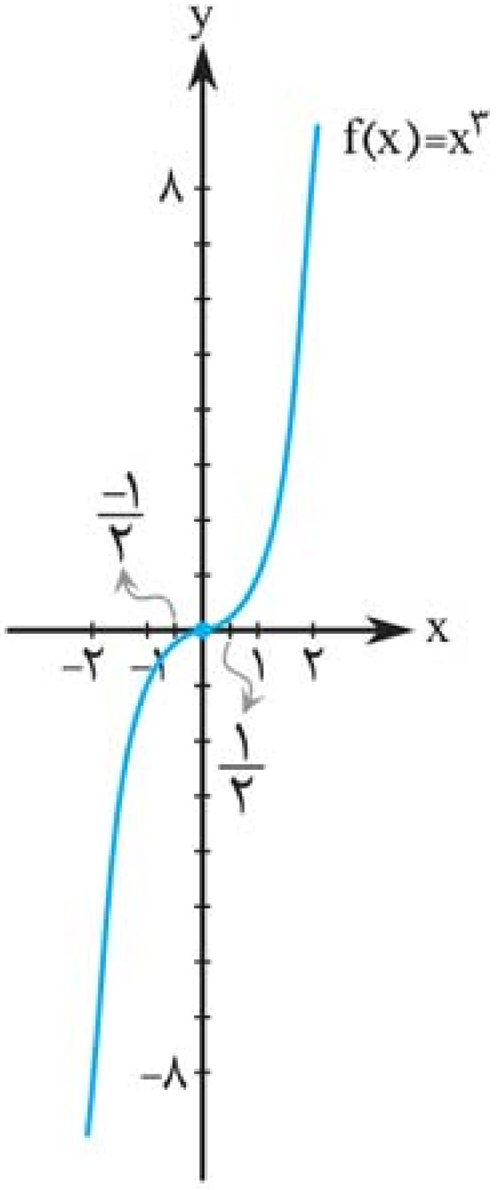
ب تابع خطی $f(x) = ax + b$ یک تابع چندجمله‌ای با درجهٔ یک است.

پ تابع درجهٔ دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ نیز تابعی چندجمله‌ای با درجهٔ دو است.

ت تابع چندجمله‌ای با ضابطهٔ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ یک تابع درجهٔ سه است. در اینجا به‌طور خاص تابع $f(x) = x^3$ را بررسی می‌کنیم؛

مثال: به کمک نقطه‌یابی نمودار تابع $f(x)=x^3$ را رسم کنید.

پاسخ

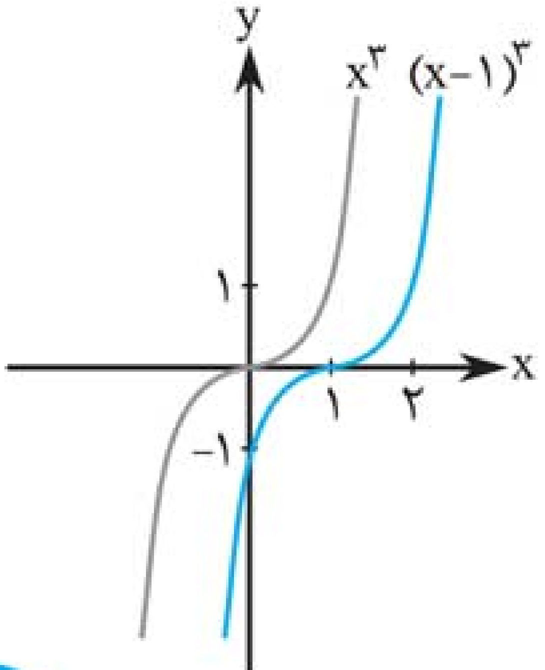


x	$f(x)=x^3$
-2	-8
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=(x-1)^3$

برای رسم این تابع کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم. برای رسم دقیق‌تر می‌توان از نقطه‌یابی کمک گرفت.

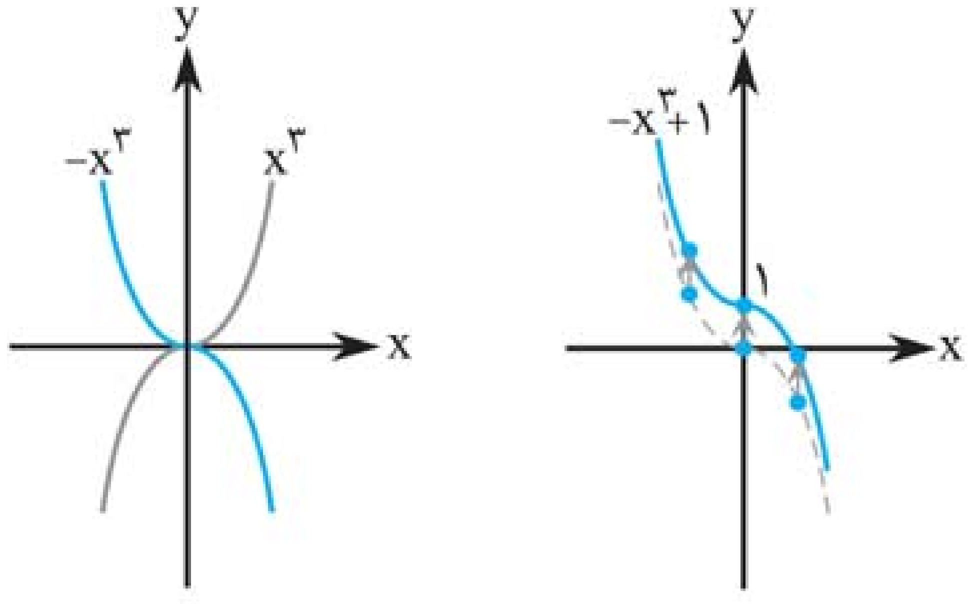


x	$y=(x-1)^3$
0	-1
1	0
2	1

ب) $y = -x^3 + 1$ (کار در کلاس صفحهٔ ۵)

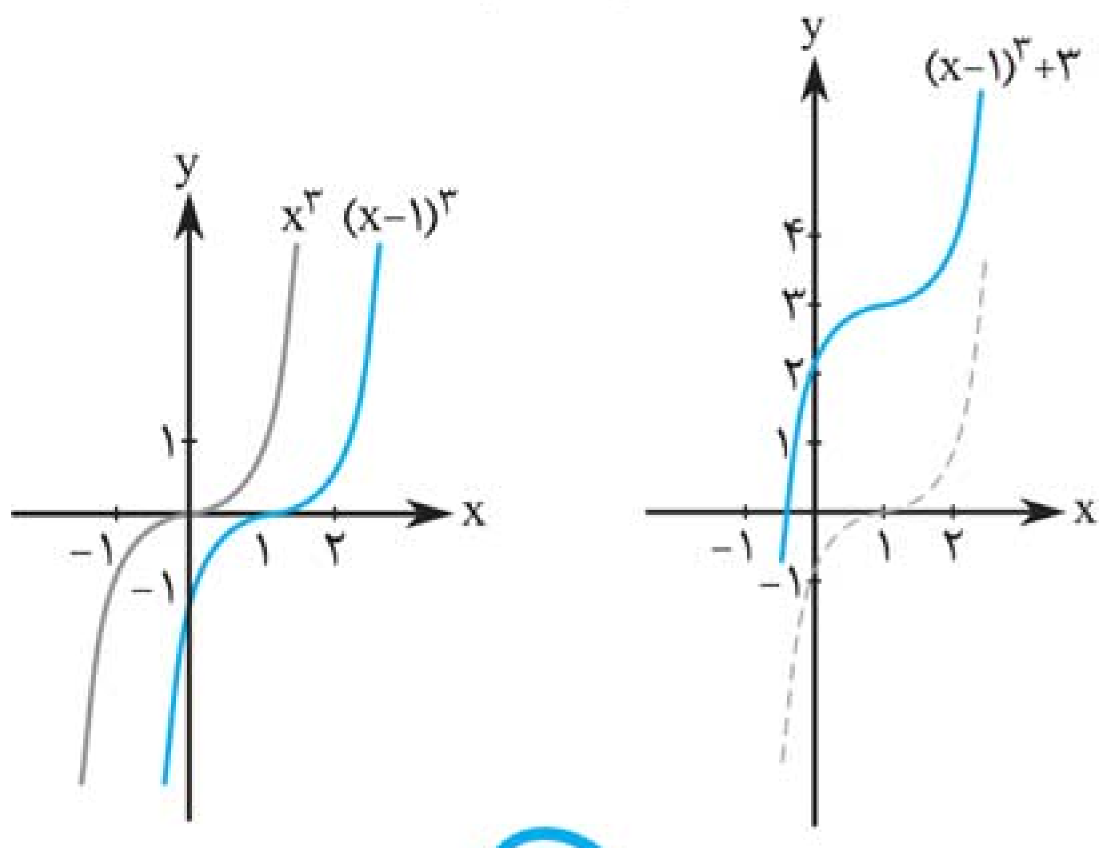
یادآوری: برای رسم نمودار $-f(x)$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم؛ یعنی در واقع به ازای هر x، مقادیر y ها قرینه می‌شود.

برای رسم این تابع در مرحلهٔ اول، نمودار $-x^3$ را رسم می‌کنیم؛ سپس نمودار رسم‌شده را ۱ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:



پ) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = (x-1)^3 + 3$

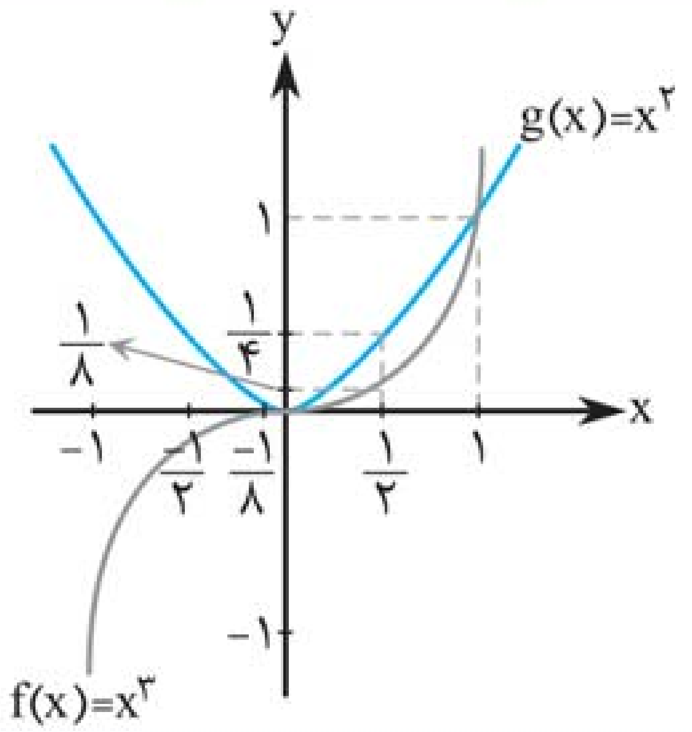
در مرحلهٔ اول نمودار تابع $(x-1)^3$ را رسم می‌کنیم؛ سپس آن را ۳ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:



مثال: نمودار دو تابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^2$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

پاسخ با نقطه‌یابی، نمودار دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:

x	f(x)	g(x)
-1	-1	1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	1	1



چاشنی: نمودار تابع $f(x) = x^3$ فقط در فاصلهٔ $(0, 1)$ زیر نمودار $g(x) = x^2$ قرار دارد.

درس ۱ تناوب و تانژانت

وعدهٔ ۱

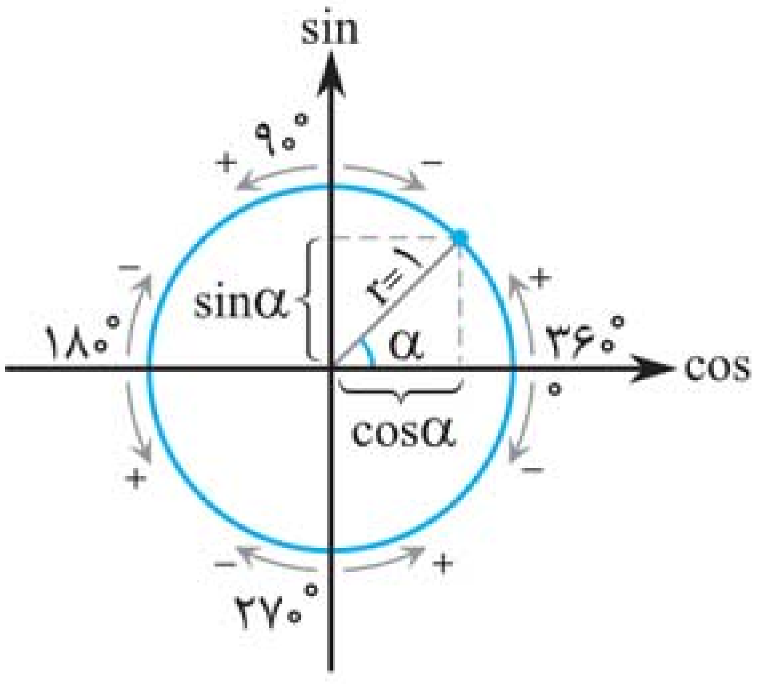
یادآوری

۱ دایرهٔ مثلثاتی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ واحد است.

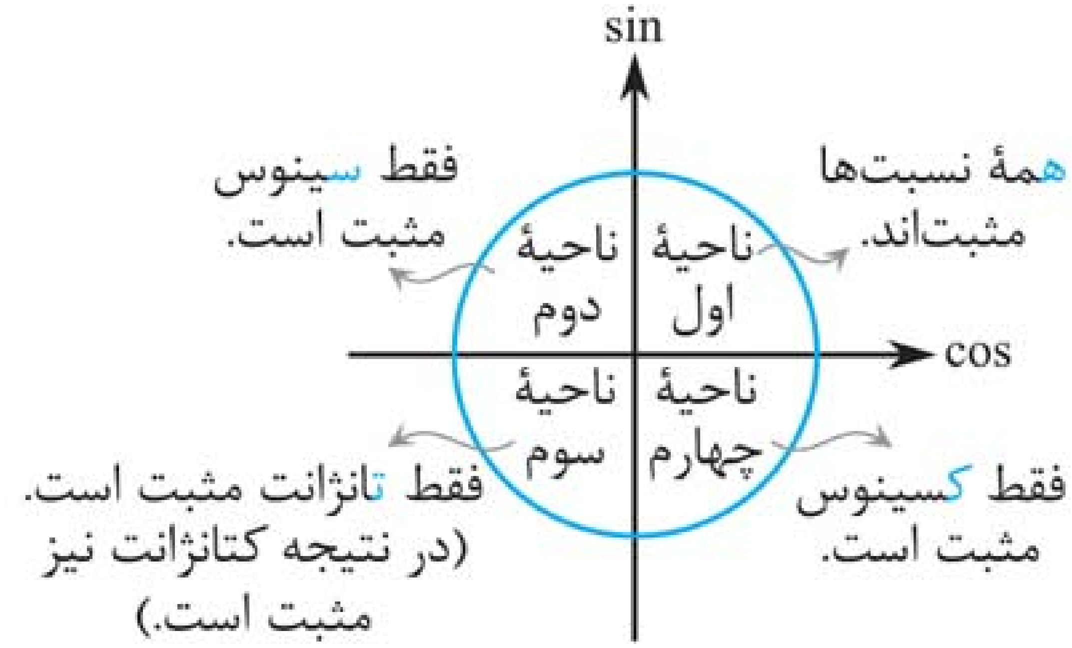
۲ محل برخورد محیط دایره با جهت مثبت محور x ها را صفر مثلثاتی می‌نامیم.

۳ از هر نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی اگر در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (ساعتگرد) حرکت کنیم، زاویه‌ای منفی و اگر خلاف جهت عقربه‌های ساعت (پادساعتگرد) حرکت کنیم، زاویه‌ای مثبت را طی کرده‌ایم.

۴ محور x ها را محور کسینوس و محور y ها را محور سینوس می‌نامیم.



۵ قاعدهٔ هستک برای نسبت‌های مثلثاتی مثبت به‌ترتیبِ ناحیه، روی دایرهٔ مثلثاتی به‌صورت زیر است:



۶ برای نشان دادن یک زاویه روی دایرهٔ مثلثاتی، همواره یک ضلع زاویه را روی قسمت مثبت محور x ها، ثابت در نظر می‌گیریم.

۷ برای هر زاویهٔ دلخواه α داریم:

۱ $$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\Rightarrow\begin{cases}\sin^{۲}\alpha=۱-\cos^{۲}\alpha\\ \cos^{۲}\alpha=۱-\sin^{۲}\alpha\\ -۱\le\sin\alpha\le۱\\ -۱\le\cos\alpha\le۱\end{cases}$$

۲ $$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\quad(\cos\alpha\neq۰)$$

۳ $$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad(\sin\alpha\neq۰)$$

۴ $$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=۱\Rightarrow\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{۱}{\cot\alpha}\quad(\cos\alpha\neq۰)\\ \cot\alpha=\dfrac{۱}{\tan\alpha}\quad(\sin\alpha\neq۰)\end{cases}$$

۵ $1+\tan^{2}\alpha=\dfrac{1}{\cos^{2}\alpha}\qquad(\cos\alpha\neq 0)$

۶ $1+\cot^{2}\alpha=\dfrac{1}{\sin^{2}\alpha}\qquad(\sin\alpha\neq 0)$

چاشنی: نسبت‌های مثلثاتی زوایای مهم بر حسب درجه و رادیان

زاویه \ نسبت	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$
0° یا 0 رادیان	0	1	0	ت ن
30° یا $\frac{\pi}{6}$ رادیان	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45° یا $\frac{\pi}{4}$ رادیان	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60° یا $\frac{\pi}{3}$ رادیان	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90° یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان	1	0	ت ن	0
180° یا π رادیان	0	-1	0	ت ن
270° یا $\frac{3\pi}{2}$ رادیان	-1	0	ت ن	0
360° یا 2π رادیان	0	1	0	ت ن

(ت ن یعنی تعریف‌نشده)

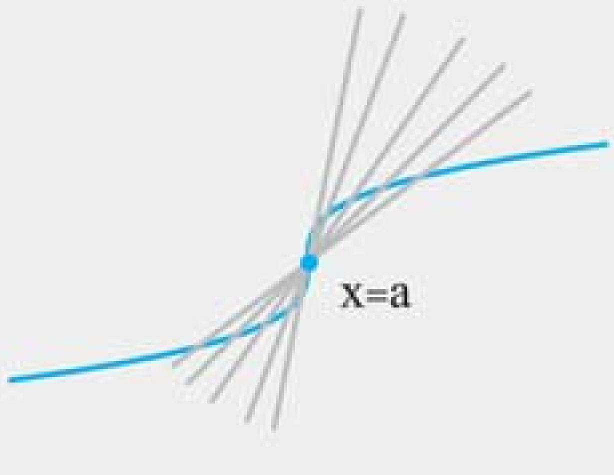
$$f'(\circ) = \lim_{x \to \circ} \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} = \lim_{x \to \circ} \frac{\sqrt[3]{x} \cancel{+1} \cancel{-1}}{x}$$

$$= \lim_{x \to \circ} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

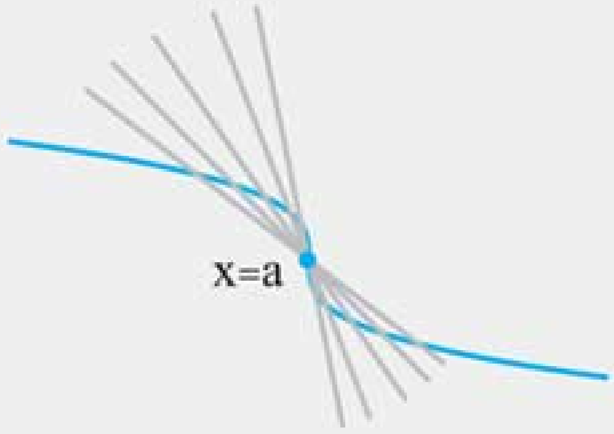
بنابراین تابع f در $x = \circ$ مشتق‌پذیر نیست. اگر از راست یا چپ به صفر نزدیک شویم، خطوط قاطع، شیب مثبت دارند و شیب این خط‌ها بزرگ و بزرگ‌تر شده و خط‌های قاطع به خط $x = \circ$ نزدیک می‌شوند. خط $x = \circ$ را **مماس قائم** منحنی می‌گوییم.

تعریف: اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ یا $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ در این‌صورت خط $x = a$ را **مماس قائم** بر منحنی f در نقطهٔ $(a, f(a))$ می‌نامیم.

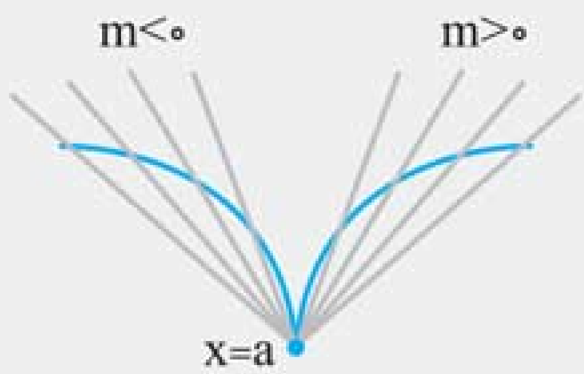
چاشنی: **الف** اگر $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ باشد، نمودار تابع در اطراف $x = a$ به‌صورت زیر است:



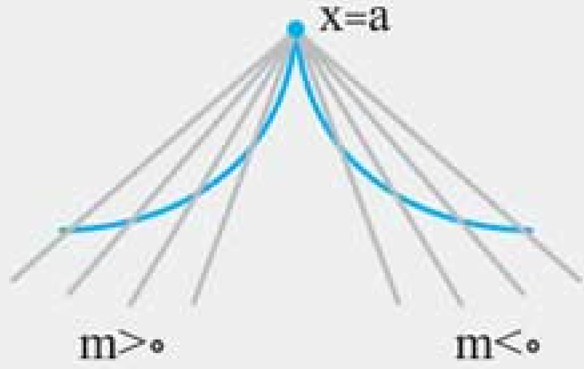
ب اگر $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ باشد، نمودار تابع در اطراف $x=a$ به‌صورت زیر است:



پ اگر $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ باشد، نمودار تابع در اطراف $x=a$ به‌صورت زیر است:



ت اگر $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ باشد، نمودار تابع f در اطراف $x=a$ به‌صورت زیر است:



مشتق

مثال: آیا تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; x\geq 0\\ x^2+4x & ; x<0\end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر است؟

پاسخ

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+4x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(x+4)}{\cancel{x}}=0+4=4$$

بنابراین تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

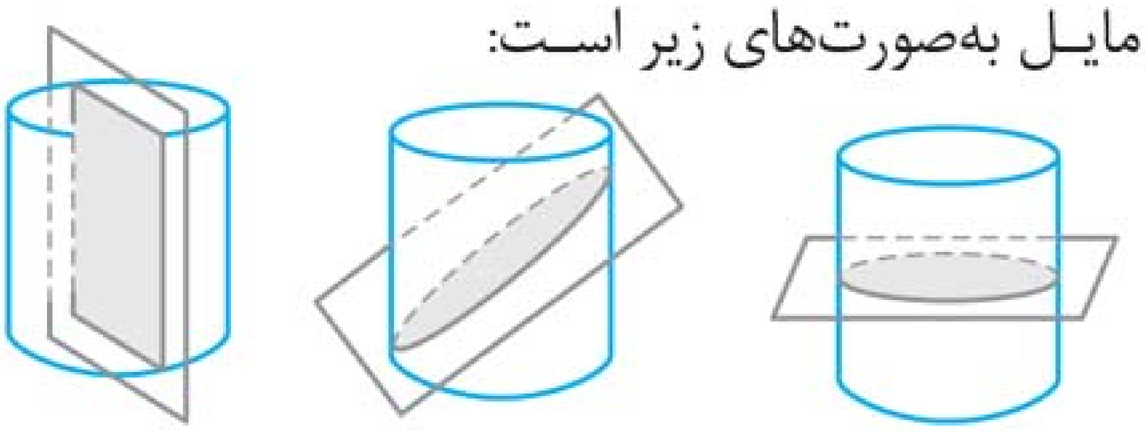
تعریف: فرض کنید نقطهٔ $A(x_0 , f(x_0))$ روی نمودار تابع f باشد و $f'_+(x_0)$ و $f'_-(x_0)$ هر دو متناهی باشند ولی برابر نباشند؛ یا یکی از آنها متناهی و دیگری نامتناهی باشد. در این‌صورت می‌گوییم نقطهٔ x_0 نقطهٔ گوشه‌ای برای تابع f است. به‌عنوان مثال $x=0$ در مثال قبل یک نقطهٔ گوشه‌ای برای تابع f است یا نقاط $x=2$ و $x=-2$ نقاط گوشه‌ای تابع $y=|x^2-4|$ هستند.

وعدهٔ ۲

برش

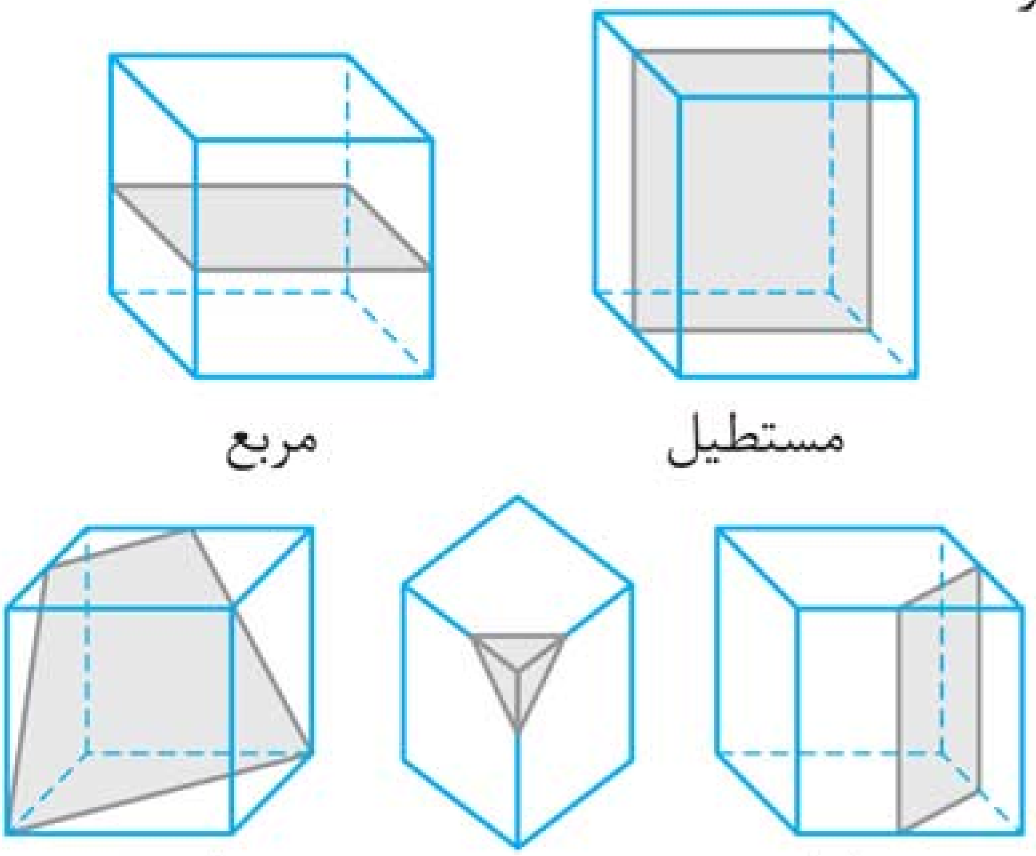
تعریف: شکل حاصل از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی، سطح مقطع این جسم نامیده می‌شود.

برای مثال سطح مقطع یک استوانهٔ توخالی با صفحه‌های عمودی، افقی و مایل به‌صورت‌های زیر است:



مستطیل　　بیضی　　دایره

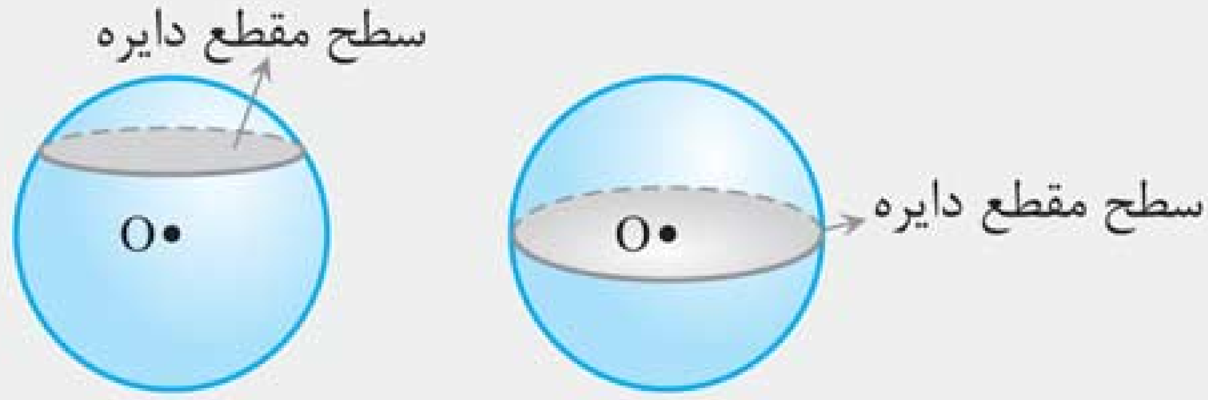
اگر استوانه توپر باشد، سطح مقطع استوانه، شکل‌های بیضی، دایره یا مستطیل به همراه نقاط داخل آن‌هاست. برای نمونه سطح مقطع حاصل از برخورد یک مکعب‌مستطیل با قاعدهٔ مربع، با صفحه‌های قائم، افقی و مایل به‌صورت زیر است:



مربع　　مستطیل

ذوزنقه　　مثلث　　مستطیل

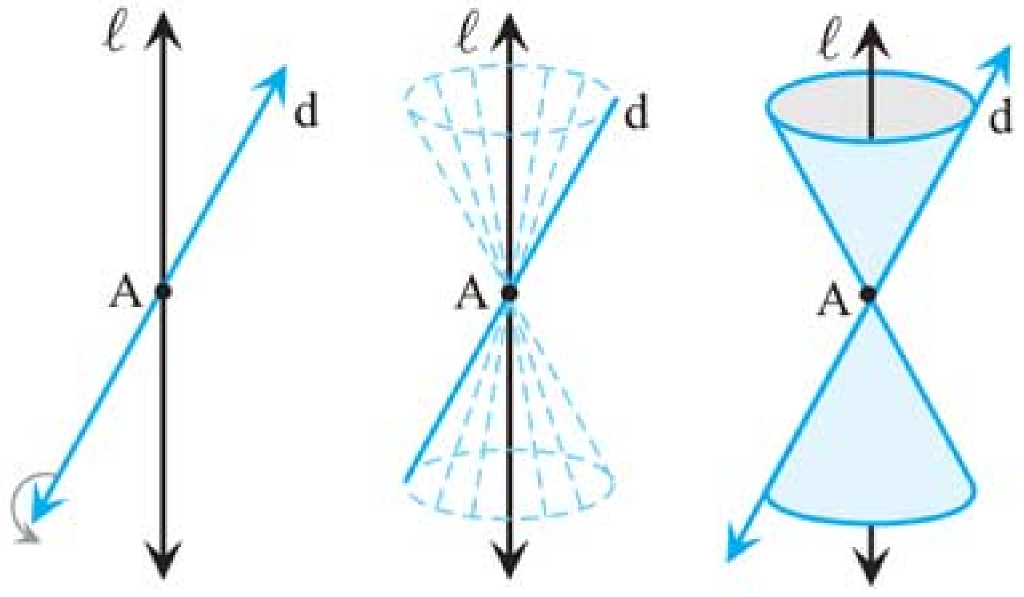
چاشنی: سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره همواره یک دایره است. بزرگ‌ترین دایره زمانی ایجاد می‌شود که صفحهٔ گذرنده از کره از مرکز کره بگذرد. اگر کره توپر باشد، سطح مقطع آن، دایره با نقاط درون دایره است.



وعدهٔ ۳

مقاطع مخروطی

فرض کنیم دو خط ℓ و d در نقطهٔ A متقاطع باشند. اگر خط d را حول ℓ دوران کامل دهیم، شکل حاصل را یک سطح مخروطی می‌نامند. ℓ را محور دوران، نقطهٔ A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامند.



پیوست

فرمول‌نامه

تابع

۱ دامنهٔ توابع گویا به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$، برابر است با:
$$D_f=\mathbb{R}-\{x \mid Q(x)=0\}$$

۲ دامنهٔ هر تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج برابر است با:
$$y=\sqrt{f(x)} \Rightarrow D_y=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\ge 0\}$$

دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ فرد همان دامنهٔ تابع زیر رادیکال است.

۳ تساوی دو تابع f و g:

الف دامنهٔ f و g با هم برابر باشد.

ب برای هر x از این دامنهٔ یکسان، $f(x)=g(x)$ باشد.

۴ اعمال روی توابع:

اگر f با دامنهٔ D_f و g با دامنهٔ D_g دو تابع باشند، آن‌گاه:

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)\ ,\ D_{f\pm g}=D_f\bigcap D_g$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)\ ,\ D_{fg}=D_f\bigcap D_g$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\ ,\ D_{\frac{f}{g}}=D_f\bigcap D_g-\{x \mid g(x)=0\}$$

۵ اگر K عددی مثبت باشد، دامنهٔ تابع $y=Kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $y=f(x)$ است.

۶ ترکیب توابع:

$$fog(x)=f(g(x)) \qquad D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

۷ تابع وارون: تابع f، وارون (f^{-1}) دارد، هرگاه یک‌به‌یک باشد:

$$\begin{cases} f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a \\ D_f=R_{f^{-1}}\ ,\ R_f=D_{f^{-1}} \end{cases}$$

۸ توابع صعودی و نزولی

الف f صعودی: $x_1 , x_2 \in D_f \ , x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

ب f نزولی: $x_1 , x_2 \in D_f \ , x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

مثلثات

۱ رابطهٔ تبدیل رادیان و درجه:

$$\underset{\text{زاویه به درجه}\leftarrow}{\frac{D}{180^\circ}} = \underset{\rightarrow\text{زاویه به رادیان}}{\frac{R}{\pi}}$$

۲ در دایره‌ای به شعاع r، طول کمان (ℓ) روبه‌رو به زاویهٔ θ (رادیان) برابر است با: $\ell = r \times \theta$

۳ اتحادهای مثلثاتی:

الف $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

ب $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

پ $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

ت $1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

ث $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

ج $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

چ $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

۴ دورهٔ تناوب:

الف دورهٔ تناوب $y = \sin ax$ و $y = \cos ax$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است.

ب دورهٔ تناوب توابعی به فرم $y = a\sin(bx+c)+d$ و $y = a\cos(bx+c)+d$ که در آن‌ها a، b، c و d اعداد حقیقی و $a , b \neq 0$ برابر با $\frac{2\pi}{|b|}$ است.