

ریاضی و آمار ۱۱

فصل اول

آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

درس ۱: گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

درس ۲: استدلال ریاضی



گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

درس ۱: گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

یادآوری (منطق)

همانگونه که با تعریف منطق در سال دهم آشنا شدید:

منطق در لغت: به معنی «آنچه به گفته درآمده» است و عموماً آن را به معنی «بررسی استدلال‌ها» تعبیر می‌کنند.

کاربرد منطق: تشخیص اعتبار استدلال‌ها است. امروزه از علم منطق علاوه بر فلسفه در ریاضیات و علوم مربوط به رایانه نیز کاربرد دارد.

مفهوم منطق: منطق، روش درست فکر کردن است و با تکیه بر این تعبیر می‌توان ادعا کرد که منطق‌دانان و افرادی که با منطق مأنوس‌ترند بسیار کمتر از دیگران در استدلال‌ها اشتباه می‌کنند.

منطق ریاضی

از میان انواع مختلف منطق و کاربردهای آن، در این فصل از این کتاب با منطق ریاضی که شاخه‌ای از ریاضیات است و به بیان ریاضی‌گونه (ریاضی‌وار) منطق می‌پردازد، آشنا می‌شویم. اگر ریاضیات را به‌عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، منطق ریاضی، دستور این زبان خواهد بود.

گزاره

در بین جملاتی که در این دستور زبان اشاره شده از آنها استفاده می‌کنیم، جملات خبری از اهمیت و جایگاه ویژه‌ای برخوردارند و به ویژه صدق و کذب یا راست و دروغ بودن یا درستی و نادرستی این خبرها برای ما و مخاطب ما اهمیت دارد.

در منطق ریاضی به هر جمله خبری که بتوانیم در حال حاضر یا در آینده دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) را به آن نسبت بدهیم، یک گزاره گفته می‌شود؛ هر چند علم به درستی و یا نادرستی آن عبارت نداشته باشیم، اما بدانیم که همواره درست و یا همواره نادرست است و اعمال نظر شخصی در درستی یا نادرستی عبارت دخیل نباشد.

جمله‌های غیر خبری مانند «کجا می‌روی؟» یا «چه هوای دلگیری» و همچنین جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آنها را تعیین کنیم مانند «درس ریاضی سخت‌تر از درس عربی است»، گزاره محسوب نمی‌شوند؛ زیرا نظر افراد مختلف در مورد ارزش آن متفاوت است، پس نمی‌توانیم دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست را به آن نسبت دهیم.

به عنوان مثال: عبارت « $1 - 2^{1001}$ عددی اول است.» یک گزاره است. زیرا اولاً یک جمله خبری است (خبری را به ما رسانده است.) و ثانیاً دارای ارزش (درست یا نادرست) است.

دقت کنید؛ شاید ما حاصل عبارت $1 - 2^{1001}$ را ندانیم، اما می‌دانیم که یا عددی اول هست و یا نیست. پس برای گزاره بودن، ارزش عبارت مهم نیست، مهم این است که بدانیم دارای ارزش است. اگر ارزش درست داشته باشد گزاره درست و اگر ارزش نادرست داشته باشد یک گزاره نادرست است.

یادآوری: طبق تعریف، عددی طبیعی مثل a را عددی اول گوئیم، هرگاه فقط دو مقسوم علیه (شمارنده) داشته باشد. (یادمان باید باشد که عدد 1 و خود آن عدد یعنی a ، دو شمارنده بدیهی عدد طبیعی a هستند.) و عددی که بیشتر از دو شمارنده داشته باشد عددی مرکب خواهد بود.

مثال

عدد 1 اول است یا مرکب؟

پاسخ: عدد 1 فقط یک شمارنده دارد (خود عدد 1)، پس طبق تعریف عدد اول، عددی اول نیست، و چون بیشتر از دو شمارنده ندارد، عدد مرکب هم نمی‌باشد. (عدد 1 تنها عدد طبیعی است که نه اول است و نه مرکب)

مثال

در تعریف گزاره، منظور از عبارت «جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آنها را تعیین کنیم» چیست؟ مثلاً در مثالی که زدیم « $1 - 2^{1001}$ عددی اول است.» اگر شخصی نتواند ارزش این عبارت را تعیین کند. آیا این عبارت از نظر او گزاره نیست؟

پاسخ: منظور از تعیین ارزش در عبارت فوق این است که عبارت دارای ارزش ثابت و مشخص باشد و بستگی به نظر افراد و یا شرایط خاصی، ارزش آن تغییر نکند، یعنی عبارت قابلیت ارزش‌گذاری‌های مختلف نداشته باشد.

کدام یک از جملات زیر گزاره‌اند؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

- الف) حاصل $\sqrt{2} - 2$ عددی مثبت است.
 ب) بیا جلوتر.
 ت) ماشین سفید از ماشین سیاه زیباتر است.
 ج) لباس سفید از لباس سیاه روشن‌تر است.
 پ) $4 < 2$
 ث) $0 = 5 \times 5 - 5$
 ج) عدد $2 + \pi$ عددی گنگ است.

پاسخ: الف) یک گزاره است (چون جمله‌ای خبری است و دارای ارزش ثابت است.) و ارزش این گزاره نادرست است.
 ب) یک گزاره نیست. زیرا جمله‌ای خبری نیست.
 پ) یک گزاره است. چون جمله‌ای خبری است و جمله آن به صورت «عدد چهار کوچک‌تر از دو است» می‌باشد و ارزش این گزاره نادرست است.
 ت) نمی‌تواند یک گزاره باشد زیرا ارزش‌گذاری آن مختلف است و نمی‌توانیم ارزش مشخص برای آن تعیین کنیم.
 ث) یک گزاره است و ارزش آن نادرست است؛ زیرا حاصل این تساوی برابر ۲۵- می‌باشد.
 ج) یک گزاره است و ارزش آن راست (درست) است.
 چ) یک گزاره است. زیرا روشن‌تر بودن برای رنگ لباس ملاک مشخصی دارد و به نظر افراد بستگی ندارد. ارزش آن درست است.

ترکیب گزاره‌ها (گزاره‌های مرکب)

در منطق ریاضی و جبر گزاره‌ها برای نمایش هر گزاره معمولاً از یکی از حروف انگلیسی کوچک مانند p یا q یا r یا ... استفاده می‌کنیم.

عبارت «ایران در قاره آسیا و هلند در قاره آفریقا است.» را در نظر بگیرید. آیا این عبارت یک گزاره است؟

پاسخ: چون یک جمله خبری است که قابلیت بررسی صدق و کذب دارد، پس یک گزاره است.
ارزش این گزاره را بررسی کنید.
 در بررسی ارزش این گزاره باید دو موضوع را بررسی کنیم. اول اینکه «آیا ایران در قاره آسیا قرار دارد یا ندارد» و دوم اینکه «آیا هلند در قاره آفریقا قرار دارد یا قرار ندارد». پس برای تعیین ارزش برخی از گزاره‌ها و برای راحتی کار، بهتر است آن گزاره را به چند گزاره ساده‌تر که بررسی آنها کار راحت‌تری به نظر می‌آید تقسیم کنیم و با تعیین ارزش گزاره‌های جزئی‌تر ارزش گزاره اصلی را پیدا کنیم.
 در این مثال اگر p را گزاره «ایران در قاره آسیا و هلند در قاره آفریقا است.» در نظر بگیریم و همچنین q را گزاره «ایران در قاره آسیا قرار دارد.» و r را گزاره «هلند در قاره آفریقا قرار دارد» در نظر بگیریم، می‌توانیم بگوییم گزاره‌های «p» و «q و r» معادل یکدیگر هستند. یعنی گزاره p ترکیبی از دو گزاره است که با حرف ربط «و» از یکدیگر جدا شده‌اند.
 ارزش گزاره‌های مرکب را می‌توان با تعیین ارزش گزاره‌های تشکیل دهنده (زیرگزاره‌ها، گزاره‌های فرعی یا مولفه‌های گزاره اصلی) همراه با نحوه ارتباط (رابطه‌های مختلف) بین آنها کاملاً تعیین کرد.

رابطه‌های گزاره‌ای

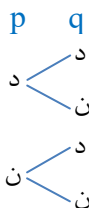
در این فصل انواع ترکیب‌های زیر را در گزاره‌ها بررسی می‌کنیم که الفاظ متناسب با هر ترکیب را **رابطه‌های گزاره‌ای** می‌نامیم.

- «نقیض یک گزاره»: با رابط یا عبارت «چنین نیست که» و علامت «~»
- «ترکیب عطفی دو گزاره»: با رابط یا حرف «و» و علامت «∧» (در بعضی از کتاب‌ها از علامت «&» استفاده می‌کنند).
- «ترکیب فصلی دو گزاره»: با رابط یا حرف «یا» و علامت «∨»
- «ترکیب شرطی دو گزاره»: با رابط یا حرف «اگر» و علامت «⇒»
- «ترکیب دو شرطی دو گزاره»: با رابط یا حرف «اگر و فقط اگر» و علامت «⇔»

جدول وضعیت ارزشی گزاره

می‌دانیم که ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. پس برای هر گزاره دلخواه دو حالت ارزشی می‌توانیم در نظر بگیریم. وقتی می‌خواهیم ارزش ترکیب‌های مختلفی از دو یا چند گزاره را بررسی کنیم، یکی از راه‌های مطمئن و گاهی طولانی این است که جدول وضعیت ترکیبی و ارزشی گزاره‌ها را بنویسیم و تمام حالت‌های ممکن در ترکیب آن گزاره‌ها را بررسی کنیم. در زیر جدول وضعیت ارزشی و تمام حالت‌های ممکن ارزشی برای ۲، ۳ و ۴ گزاره، مشخص شده است.

جدول وضعیت ارزشی دو گزاره مانند p, q:



p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

تعداد گزاره‌ها $\rightarrow 2^2 = 4$

جدول وضعیت ارزشی سه گزاره مانند p، q و r:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

تعداد گزاره‌ها $2^3 = 8$

جدول وضعیت ارزشی چهار گزاره مانند p، q، r و s:

p	q	r	s
د	د	د	د
د	د	د	ن
د	د	ن	د
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
د	ن	د	ن
د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	د
ن	د	د	ن
ن	د	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن
ن	ن	ن	د
ن	ن	ن	ن

تعداد گزاره‌ها $2^4 = 16$

نتیجه: جدول وضعیت ارزشی برای n گزاره، دارای 2^n حالت مختلف ارزشی است.

نقیض یک گزاره

اگر p یک گزاره باشد، آنگاه «چنین نیست که p» را «نقیض p» نامیده و با علامت « $\sim p$ » نشان می‌دهیم. چون هر گزاره جمله‌ای خبری است، پس حتماً دارای فعل است و برای بیان نقیض آن گزاره کافی است فعل جمله را نفی کنیم.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

واضح است که با این کار اگر گزاره داده شده یعنی p درست باشد، آنگاه نقیض p ($\sim p$) نادرست و اگر p نادرست باشد، آنگاه $\sim p$ (نقیض p) درست خواهد بود. به‌طور خلاصه در جدول روبه رو داریم:

نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را نوشته و سپس ارزش هر کدام را مشخص کنید.

الف) X عددی مثبت است. (ب) $7 = 4 - 3$

پاسخ: الف) صورت اول: چنین نیست که X عددی مثبت است. صورت دوم: X عددی مثبت نیست.

ب) صورت اول: چنین نیست که $7 = 4 - 3$ ، صورت دوم: $7 \neq 4 - 3$

اگر X عددی مثبت باشد، ارزش نقیض گزاره «الف» نادرست است؛ زیرا X عددی مثبت بود، پس اگر گزاره «الف» را p در نظر بگیریم و ارزش آن درست باشد، گزاره $\sim p$ ، نادرست است. ارزش نقیض گزاره «ب» درست است، زیرا حاصل $4 - 3$ برابر با $7 - 7$ می‌باشد، پس اگر گزاره «ب» را q در نظر بگیریم ارزش $\sim q$ ، درست است.

نکته بسیار مهم: باید توجه کرد که برای نوشتن نقیض «X مثبت است» نمی‌توانیم از عبارت «X منفی یا صفر است» استفاده کنیم. زیرا درست است که هر عدد می‌تواند فقط سه حالت «مثبت یا صفر یا منفی» را داشته باشد و از لحاظ معنا و مفهوم وقتی عدد مثبت نیست پس حتماً منفی یا صفر است؛ اما ما در منطق گزاره‌ها با معنا و مفهوم عبارت کاری نداریم و تنها صورت استدلال بر ایمان مهم است. پس نقیض گزاره «X مثبت است»، گزاره «X مثبت نیست» یا «چنین نیست که X مثبت است» خواهد بود. پس برای نوشتن نقیض گزاره p فقط از دو عبارت زیر استفاده می‌کنیم:

«چنین نیست که p» یا «منفی کردن فعل گزاره p»

نتیجه: در منطق نقیض گزاره «m عددی گویا است»، گزاره «m عددی گنگ است» نیست. در واقع گزاره «m عددی گنگ است» نتیجه‌ای است که با معلومات علم ریاضی از «نقیض گزاره m عددی گویا است» یعنی «m عددی گویا نیست» به دست می‌آید.

تذکر

اگر p و q دو گزاره باشند و از لحاظ ارزشی مخالف یکدیگر باشند (یکی درست و دیگری نادرست باشد) آنگاه لزومی ندارد که حتماً نقیض یکدیگر باشند. اما اگر دو گزاره نقیض یکدیگر باشند آنگاه حتماً از لحاظ ارزشی مخالف یکدیگر هستند (یکی درست و دیگری نادرست است). برای درک بهتر به مثال زیر توجه کنید.

مثال: اگر p گزاره «۲ عددی اول است» و q گزاره «۳ عددی منفی است» باشد، آنگاه p یک گزاره درست و q یک گزاره نادرست است؛ اما p و q نقیض یکدیگر نیستند.

ترکیب عطفی دو گزاره

اگر p و q دو گزاره باشند گزاره «p و q» را ترکیب عطفی p با q نامیده و آن را با نماد « $p \wedge q$ » نشان می‌دهیم که علامت « \wedge » را عاطف و p و q را مؤلفه‌های عاطف می‌نامیم.

وقتی گزاره‌ای از دو گزاره دیگر تشکیل شده باشد که بین آن دو گزاره، حرف ربط «و» قرار گرفته باشد لفظ «و» بین دو گزاره ایجاب می‌کند که برای درستی گزاره اولیه باید هر دو گزاره تشکیل شده درست باشند. مثلاً برای درستی گزاره «علی پسری ایرانی و ۱۲ ساله است» باید گزاره «علی پسری ایرانی است» و «علی ۱۲ سال دارد» هر دو با هم درست باشند و نادرستی حداقل یکی از آنها نادرستی گزاره مرکب «علی پسری ایرانی و ۱۲ ساله است» را موجب خواهد شد. گزاره‌های مرکب زیر را در نظر بگیرید:

(الف) ۴ عددی زوج است و $-۲۵ = -۵^۲$ (ب) ۴ عددی زوج است و $۲۵ = ۵^۲$

(ج) ۴ عددی زوج نیست و $-۲۵ = -۵^۲$ (د) ۴ عددی زوج نیست و $۲۵ = ۵^۲$

این گزاره‌ها ترکیب عطفی دو گزاره هستند، می‌دانیم که ۴ عددی زوج است و $-۲۵ = -۵^۲$ (می‌دانیم $۲۵ = (-۵)^۲$). پس تنها گزاره «الف» دارای ارزش درست است و سایر گزاره‌ها نادرست هستند؛ زیرا در سایر گزاره‌ها حداقل (دست‌کم) یکی از گزاره‌های تشکیل دهنده‌شان نادرست می‌باشد. پس می‌توان جدول ارزشی را برای ترکیب عطفی دو گزاره به صورت زیر رسم کرد.

جدول ارزشی ترکیب عطفی دو گزاره

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

نکته ۱: پس ملاحظه شد که ترکیب عطفی دو گزاره مانند p و q، یعنی « $p \wedge q$ » فقط در حالتی درست (راست) است که هر دو گزاره درست (راست) باشند.

نکته ۲: از الفاظی که از نظر منطقی مترادف عاطف است لفظ «ولی=اما» است.

به عنوان مثال: گزاره «۲ زوج است ولی اول است.» به معنی «۲ زوج است و ۲ اول است.» خواهد بود که البته گزاره‌ای راست (درست) است.

ترکیب فصلی دو گزاره

اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره «p یا q» را ترکیب فصلی p با q نامیده و آن را با نماد « $p \vee q$ » نشان می‌دهیم که علامت « \vee » را فاصل و p و q را مؤلفه‌های فاصل می‌نامیم.

وقتی گزاره‌ای از دو گزاره دیگر تشکیل شده باشد که بین آن دو گزاره، حرف ربط «یا» قرار گرفته باشد لفظ «یا» بین دو گزاره ایجاب می‌کند که برای درستی گزاره اولیه باید حداقل یکی از دو گزاره تشکیل شده درست باشند و این گزاره هنگامی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند (نادرستی یکی کافی نیست). مثلاً برای درستی گزاره «علی پسری ایرانی یا ۱۲ ساله است» باید از میان گزاره «علی پسری ایرانی است» یا گزاره «علی ۱۲ سال دارد» حداقل یکی درست باشند و اگر هر دو با هم نادرست باشند (علی ایرانی نباشد و ۱۲ ساله نباشد) گزاره مرکب «علی پسری ایرانی یا ۱۲ ساله است» به ناچار نادرست خواهد شد. گزاره‌های مرکب زیر را در نظر بگیرید:

- (الف) ۴ عددی زوج است یا $-۲۵ = -۵^۲$
 (ب) ۴ عددی زوج است یا $۲۵ = ۵^۲$
 (ج) ۴ عددی زوج نیست یا $-۲۵ = -۵^۲$
 (د) ۴ عددی زوج نیست یا $۲۵ = ۵^۲$

این گزاره‌ها ترکیب فصلی دو گزاره هستند، می‌دانیم که ۴ عددی زوج است و $-۲۵ = -۵^۲$. اما لفظ «یا» ایجاب می‌کند که برای درستی هر یک از گزاره‌ها، حداقل (دست کم) یکی از گزاره‌های تشکیل دهنده آنها باید درست باشند. پس تنها گزاره «د» نادرست (دروغ) است و سایر گزاره‌ها درست (راست) هستند، زیرا در بقیه گزاره‌ها حداقل (دست کم) یکی از گزاره‌های تشکیل دهنده گزاره اصلی، درست (راست) می‌باشد. پس می‌توان جدول ارزشی را برای ترکیب فصلی دو گزاره به صورت زیر رسم کرد.

جدول ارزشی ترکیب فصلی دو گزاره

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

نکته پس ملاحظه شد که ترکیب فصلی دو گزاره تنها وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره نادرست باشند.

نکته مهم: باید توجه کنید که این «یا» که یای منطقی نامیده می‌شود با لفظ عادی «یا» که در استعمال عادی برای ترکیب گزاره‌ها به کار می‌رود تفاوت دارد. در استعمال عادی لفظ «یا» در گزاره ترکیب شده، فقط و فقط وقتی راست (درست) است که یکی از گزاره‌های تشکیل دهنده گزاره اصلی درست و گزاره تشکیل دهنده دیگری نادرست باشد، در واقع لفظ عادی «یا» دو گزاره را از یکدیگر جدا می‌کند و امکان با هم رخ دادن هر دو وجود ندارد که این نوع «یا» را یای مانع جمع می‌نامیم.

در این کتاب و در منطق، لفظ «یا» همواره به معنی منطقی به کار می‌رود ولی «یای مانع جمع» را با تکرار لفظ «یا» و نیز با لفظ «إلا» مشخص می‌کنند. پس «یای منطقی» به معنی «p یا q یا هر دو» به کار می‌رود و «یای مانع جمع» به معنی «p یا q ولی نه هر دو» استفاده می‌شود.

به عنوان مثال: گزاره‌های «یا ۵ فرد یا ۵ زوج است» و «۵ فرد است و إلا زوج است» به یک معنی هستند که مشخص کننده «یای مانع جمع» است و ارزش آن درست است.

ترکیب شرطی دو گزاره

اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره «اگر p آنگاه q» یا «p نتیجه می‌دهد q را» و یا «q از p نتیجه می‌شود» ترکیب شرطی p با q نامیده می‌شود و آن را با نماد « $p \Rightarrow q$ » نشان می‌دهیم. در این جا گزاره p را «مقدم» و گزاره q را «تالی» می‌نامیم.

در منطق سال دهم با مفهوم قضیه و استدلال و همچنین با دو نوع قضیه آشنا شدید، ۱- قضیه حملی ۲- قضیه شرطی در منطق سال دهم قضایای جمله‌های خبری بودند که می‌توان راجع به صدق و کذب آنها سخن گفت، اما نظر افراد می‌توانست در مورد آنها متفاوت باشد؛ مثلاً در منطق سال دهم عبارت «قورمه‌سبزی غذای خوش مزه‌ای است» یک قضیه بود که در منطق گزاره‌ها که در این فصل از کتاب ریاضی آمار (۲) با آن آشنا شدید یک گزاره نیست.

اما قضایای شرطی که در سال گذشته با آنها آشنا شدید، رابطه بسیار نزدیکی با گزاره‌های شرطی که در اینجا با آنها آشنا می‌شوید دارند. در قضایای شرطی که در منطق سال دهم خواندید، بین مقدم و تالی حتماً ارتباط (نسبت) خاصی برقرار بود. در واقع با شرط داشتن مقدم، تالی به دست می‌آمد (قضیه شرطی متصل (منطق سال دهم)). در منطق سال دهم ما ارزش خود گزاره شرطی را بررسی نمی‌کردیم. یعنی بررسی نمی‌کردیم که آیا این گزاره شرطی درست است یا خیر؟ مثلاً در قیاس استثنایی، مقدمه اول همواره یکی از قضایای شرطی بود (کتاب مشاوران آموزش مبحث قیاس استثنایی) یعنی در واقع خود قضیه شرطی یکی از مقدماتمان در قیاس بود که درستی آن را پذیرفته‌ایم. حال در اینجا می‌خواهیم ارزش خود گزاره شرطی را در صورت درستی یا نادرستی مقدم و تالی بررسی کنیم. توجه داشته باشید که در اینجا کاری به روند اثبات قضیه شرطی نداریم؛ یعنی کاری نداریم که چگونه به کمک مقدم، تالی به دست آمده است؟ در واقع در منطق گزاره‌ها ممکن است در گزاره شرطی مقدم و تالی اصلاً ارتباطی با یکدیگر نداشته باشند. مثلاً گزاره «اگر ۷ فرد است آنگاه ۲۵ بر ۵ بخش پذیر است.» را در نظر بگیرید.

برای آنکه ۲۵ بر ۵ بخش‌پذیر باشد اصلاً نیازی به فرد بودن عدد ۷ نیست. برای بخش‌پذیر بودن، باید عدد ۲۵ را بر ۵ تقسیم کنیم، اگر باقیمانده صفر شد آنگاه بخش‌پذیر است و اگر صفر نشد نتیجه می‌گیریم که بخش‌پذیر نیست. پس ممکن است در منطق گزاره‌ها بین مقدم و تالی هیچ‌گونه ارتباط منطقی وجود نداشته باشد. **در منطق گزاره‌ها، ما درستی مقدم و تالی را مستقلاً بررسی می‌کنیم؛** یعنی درستی یا نادرستی هر یک را بدون در نظر گرفتن ارتباط با دیگری جداگانه بررسی می‌کنیم (البته ممکن است در بعضی از گزاره‌های شرطی بین مقدم و تالی ارتباط منطقی یا ریاضی برقرار باشد؛ مثلاً گزاره «اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد آن‌گاه رابطه فیثاغورث در آن مثلث برقرار است»). پس در واقع در منطق گزاره‌ها ما مقدم و تالی را به عنوان دو گزاره مستقل از یکدیگر بررسی می‌کنیم و ارزش آنها را جداگانه تعیین می‌کنیم. در منطق گزاره‌ها برای گزاره شرطی چهار حالت زیر را برای مقدم و تالی می‌توان در نظر گرفت:

حالت اول: اگر مقدم و تالی هر دو درست باشند؛ مقدم درست و تالی درست ← ارزش گزاره شرطی درست است

یعنی از مقدمات (فرضیات) درست به نتیجه درست برسیم. در این صورت نمی‌توانیم ایرادی از کل گزاره شرطی بگیریم، پس ارزش گزاره شرطی درست است.

حالت دوم: اگر مقدم درست و تالی نادرست باشد؛ مقدم درست و تالی نادرست ← ارزش گزاره شرطی نادرست است

یعنی اگر از مقدمات (فرضیات) درست به نتیجه نادرست برسیم آنگاه ارزش کل گزاره شرطی نادرست است، زیرا فرضیات درست به نتیجه‌ای نادرست منجر شده است.

حالت سوم: اگر مقدم نادرست و تالی درست باشد؛ مقدم نادرست و تالی درست ← ارزش گزاره شرطی درست است

مطلب بسیار مهم: اگر از فرضیات نادرست به نتیجه‌ای درست رسیده باشیم، نمی‌توانیم ایرادی از کل گزاره شرطی بگیریم؛ زیرا: اولاً تالی درست است و ثانیاً به خاطر شرطی که در قضیه شرطی وجود دارد، یعنی کلمه «اگر»، می‌توانیم بگوییم طبق این قضیه شرطی، با شرط آنکه مقدم برقرار باشد، آن‌گاه قضیه شرطی درست است (که می‌دانیم مقدم برقرار نیست). در واقع چون نمی‌توانیم شرایط برقراری فرض (مقدم) را مهیا کنیم نمی‌توانیم ایرادی از گزاره شرطی بگیریم، پس ارزش گزاره شرطی درست است.

حالت چهارم: اگر مقدم و تالی هر دو نادرست باشند؛ مقدم نادرست و تالی نادرست ← ارزش گزاره شرطی درست است

یعنی اگر از فرضیات نادرست به نتیجه‌ای نادرست برسیم، باز هم چون نمی‌توانیم شرط برقراری فرض را که شرط لازم برای گزاره شرطی است برقرار کنیم، پس نمی‌توانیم آن گزاره را رد کنیم، پس گزاره شرطی در این حالت نیز درست است. پس جدول ارزشی ترکیب شرطی دو گزاره به صورت زیر خواهد بود.

جدول ارزشی ترکیب شرطی دو گزاره

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

نکته ۱: ملاحظه می‌شود که ترکیب شرطی دو گزاره فقط زمانی نادرست است که مقدم (p) درست و تالی (q) نادرست باشد. در سایر حالات ترکیب شرطی دو گزاره همواره درست (راست) است. پس می‌توان گفت ترکیب شرطی دو گزاره معادل است با ترکیب فصلی نقیض مقدم با تالی. به عبارت دیگر ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ معادل است با $\sim p \vee q$ که این موضوع را با جدول ارزشی گزاره‌ها نیز می‌توان نشان داد.

نکته ۲: ملاحظه شد که وقتی ارزش مقدم گزاره شرطی یعنی p، نادرست باشد، همواره ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ دارای ارزش درست بوده و این بدین معنی بود که وقتی ارزش مقدم گزاره شرطی نادرست باشد ارزش درست یا نادرست بودن تالی یعنی q، هیچ تأثیری در ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ندارد؛ در این حالت می‌گوییم گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به انتهای مقدم (نفی مقدم) دارای ارزش درست است.

ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید.
الف) اگر $۳ \leq ۲$ آنگاه $۸ = ۶$ است.
ج) اگر برف سیاه است، آنگاه ۱۴ زوج است.

ب) اگر ۱۴ عددی زوج است، آنگاه برف سیاه است.

پاسخ: در قسمت «الف» اگر گزاره « $۳ \leq ۲$ » را معادل p و گزاره « $۸ = ۶$ » را معادل q در نظر بگیریم، ملاحظه می‌شود که گزاره p نادرست و گزاره q نیز نادرست است، ولی گزاره « $p \Rightarrow q$ » درست است؛ زیرا از بیان گزاره‌ای نادرست مانند p به نتیجه‌ای نادرست رسیدن مانند q عجیب و دور از انتظار نیست.
در قسمت «ب» اگر گزاره « ۱۴ عددی زوج است» را معادل p و گزاره «برف سیاه است» را معادل q در نظر بگیریم ملاحظه می‌شود که گزاره p ارزشی درست و گزاره q ارزشی نادرست دارد، پس نتیجه می‌گیریم که « $p \Rightarrow q$ » نادرست است؛ زیرا در منطق ریاضی از گزاره‌ای درست مانند p نباید گزاره‌ای نادرست مانند q نتیجه‌گیری شود.
در قسمت «ج» برخلاف قسمت «ب» ملاحظه می‌شود که جای مقدم و تالی عوض شده، یعنی می‌توانیم آن را به صورت « $q \Rightarrow p$ » در نظر بگیریم، لذا ارزش « $q \Rightarrow p$ » درست است یعنی از یک گزاره نادرست مانند q می‌توانیم گزاره‌ای درست مانند p را نتیجه بگیریم.

نکته در گزاره‌های عطفی $(p \wedge q)$ و فصلی $(p \vee q)$ دیدید که ارزش‌های این گزاره‌های مرکب، مستقل از ترتیب قرار گرفتن هر یک از گزاره‌های ساده بودند؛ ولی ارزش گزاره شرطی به این صورت نیست؛ یعنی ممکن است « $p \Rightarrow q$ » درست ولی « $q \Rightarrow p$ » نادرست باشد و یا بالعکس ممکن است « $p \Rightarrow q$ » نادرست و « $q \Rightarrow p$ » درست باشد.

ترکیب دو شرطی گزاره‌ها

اگر p و q دو گزاره باشند و بخواهیم از گزاره p ، گزاره q را نتیجه بگیریم و همچنین از گزاره q ، گزاره p را نتیجه بگیریم از نماد « $p \Leftrightarrow q$ » استفاده می‌کنیم و آن را گزاره دو شرطی دو گزاره p و q می‌نامیم. در واقع این گزاره از ترکیب عطفی دو گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » و « $q \Rightarrow p$ » تشکیل شده است که می‌توان آن را به صورت مقابل نوشت:
این گزاره را به صورت‌های « p نتیجه می‌دهد q را و q نتیجه می‌دهد p را»، «اگر p آنگاه q و اگر q آنگاه p »، «اگر p آنگاه q و برعکس»، « p شرط لازم و کافی برای q و برعکس» یا « p اگر و تنها اگر q » می‌خوانیم. در واقع گزاره دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » همان گزاره « $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ » است.

مثال: ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) ۴ عددی زوج است اگر و تنها اگر $-۲۵ = -۵^۲$ (ب) ۴ عددی زوج است اگر و تنها اگر $۲۵ = ۵^۲$
ج) ۴ عددی زوج نیست اگر و تنها اگر $-۲۵ = -۵^۲$ (د) ۴ عددی زوج نیست اگر و تنها اگر $۲۵ = ۵^۲$

پاسخ: با توجه به تعریف ترکیب دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » که معادل با « $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ » لذا با مشخص کردن ارزش هر یک از گزاره‌های فوق نتیجه می‌گیریم که گزاره‌های دو شرطی «الف» و «د» درست و گزاره‌های «ب» و «ج» نادرست‌اند.

جدول ارزشی ترکیب دو شرطی دو گزاره

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

نکته ملاحظه می‌شود که ارزش گزاره دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » فقط و فقط وقتی درست (راست) است که گزاره‌های ساده p و q هم ارزش باشند. یعنی یا هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند.

تعریف: اگر گزاره‌های p و q هم‌ارزش باشند، هم‌ارزش بودن آنها را با نماد « $p \equiv q$ » نشان می‌دهیم.

نتیجه: اگر « $p \equiv q$ » آنگاه گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » درست است و برعکس اگر گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » دارای ارزش درست باشد آنگاه « $p \equiv q$ ».

تذکره: در منطق گزاره‌ها به کمک جدول ارزش‌ها، قوانین و هم‌ارزی‌های زیر را می‌توان نشان داد. در قوانین زیر «T» را معادل «درست» و «F» را معادل «نادرست» در نظر می‌گیریم. این قوانین در حل مسائل و تست‌ها بسیار کاربرد دارند، آنها را حتماً خوب یاد بگیرید.

- (۱) قانون خودنمایی: $p \Rightarrow p$ (پ) $p \wedge p \equiv p$ (ب) $p \vee p \equiv p$ (الف)
- (۲) قانون جابجایی (تعویض‌پذیری): $p \Rightarrow q \Leftrightarrow q \Rightarrow p$ (پ) $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (ب) $p \vee q \equiv q \vee p$ (الف)
- (۳) قانون شرکت‌پذیری (انجمنی): $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ (ب) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ (الف)
- (۴) قانون پخش‌پذیری (توزیع‌پذیری): $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (ب) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (الف)
- (۵) قانون جذب: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (ب) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (الف)

(۶) قانون همانی:

- (الف) $p \vee F \equiv p$: در ترکیب فصلی هر گزاره با نقیض خودش همواره ارزش درست دارد.
 (ب) $p \wedge T \equiv p$: در ترکیب عطفی اگر ارزش یکی از گزاره‌ها درست باشد، ارزش کل گزاره هم‌ارز با گزاره دیگر است.
 (پ) $p \vee T \equiv T$: در ترکیب فصلی اگر ارزش یکی از گزاره‌ها درست باشد، ارزش کل گزاره درست است.
 (ت) $p \wedge F \equiv F$: در ترکیب عطفی اگر ارزش یکی از گزاره‌ها نادرست باشد، ارزش کل گزاره نادرست است.

(۷) قانون متمم‌گیری:

- (الف) $p \vee \sim p \equiv T$: ترکیب فصلی هر گزاره با نقیض خودش همواره ارزش درست دارد.
 (ب) $p \wedge \sim p \equiv F$: ترکیب عطفی هر گزاره با نقیض خودش همواره ارزش نادرست دارد.
 (پ) $\sim \sim T \equiv T$: نقیض هر گزاره درست همواره نادرست است.
 (ت) $\sim \sim F \equiv F$: نقیض هر گزاره نادرست همواره درست است.
 (ث) $\sim(\sim p) \equiv p$: نقیض نقیض هر گزاره، همواره با آن گزاره هم‌ارز است.

- (۸) قانون دموگان: $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (ب) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ (الف)
- (۹) قانون عکس نقیض: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$
- (۱۰) تبدیل گزاره شرطی به فصلی: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$
- (۱۱) تبدیل گزاره فصلی به شرطی: $(p \vee q) \equiv (\sim p \Rightarrow q)$
- (۱۲) قوانین عطف مقدمات: $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ (ب) $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (الف)

تمرین‌های درس اول از فصل اول

۱. کدام‌یک از عبارات زیر گزاره است؟ چرا؟

- (الف) عدد ۲۰۳۵۷۴۱ اول است. $\frac{۳۵}{۰} = ۰$ (ب)
- (ج) $\sqrt{-۱} = -۱$ (ه) $x + ۵ = ۳$
- (د) زمین به دور خورشید می‌چرخد. (و) $\Gamma^n + ۱$ به ازای هر عدد طبیعی n، اول است.
- (ز) لطفاً تخته پاک‌کن را در جای خودش قرار بده. (ح) چه هوای گرمی!
- (ط) وقت کردی پیش ما بیا! (ی) احمد دانشجو است.
- (ک) در کره مریخ ده‌گونه مختلف گیاه وجود دارد. (ل) $۲ \in \{۲, ۴, ۶, ۰\}$
- (م) $۵ \subset \{۳, ۵, ۷\}$ (ن) $\{۵\} \subset \{۳, ۵, ۷\}$

۲. فرض کنید گزاره p معادل «هوا سرد است» و گزاره q معادل «باران می‌بارد» باشد؛ جمله لفظی ساده‌ای برای بیان هر یک از گزاره‌های زیر بنویسید.

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------|---------------------|
| (الف) $\sim p$ | (ب) $p \wedge q$ | (ج) $p \vee q$ |
| (د) $q \Leftrightarrow p$ | (هـ) $p \Rightarrow \sim q$ | (و) $q \vee \sim p$ |
| (ز) $\sim p \wedge \sim q$ | (ح) $p \Leftrightarrow \sim q$ | (ط) $\sim \sim q$ |
| (ی) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow p$ | | |

۳. ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

- (الف) اگر $1 < 5$ آنگاه $2 = 3$ است.
 (ب) اگر ۶ زوج است، آنگاه برف سیاه است.
 (ج) اگر برف سیاه است، آنگاه ۶ زوج است.

۴. ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

- (الف) ایران در آسیاست اگر و فقط اگر $-3^2 = -9$
 (ب) ایران در اروپاست اگر و فقط اگر $-3^2 = -9$
 (ج) ایران در آسیاست اگر و فقط اگر $-3^2 = 9$
 (د) ایران در اروپاست اگر و فقط اگر $-3^2 = 9$

۵. فرض کنید p معادل گزاره «او بلند قد است» و q معادل گزاره «او خوش اندام است» باشد هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را به شکل علامتی یا نمادها و رابط‌های بین p و q بنویسید.

- (الف) او بلند قد و خوش اندام است.
 (ب) او بلند قد است ولی خوش اندام نیست.
 (ج) این درست نیست که او بلند قد نیست یا خوش اندام است.
 (د) او نه بلند قد است، و نه خوش اندام.
 (هـ) او بلند قد است، یا او بلند قد نیست و خوش اندام است.
 (و) چنین نیست که او بلند قد نیست یا خوش اندام نیست.

۶. در سؤالات زیر به جای \square عدد یا علامت مناسب قرار دهید؛ به طوری که گزاره‌های حاصل درست باشند.

- (الف) $-5 \times \square = +5$ (ب) $\square \times \frac{3}{7} = 0$ (ج) $(\square + 8)^2 = 36$
 (د) $\frac{8 \times \square}{3} \in \{9, 2, \frac{1}{3}\}$ (هـ) $4 + \square \notin Z$ (و) $0 \in \{\square\}$ (ز) $4(\square - 7) = 20$

۷. اگر گزاره $x < y$ و گزاره $2x < 2y$ باشد. بیان ریاضی $p \Leftrightarrow q$ چیست؟

۸. گزاره «شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه M روی عمود منصف پاره خط AB باشد آن است که MA=MB» را با حروف گزاره‌ای بنویسید.

۹. گزاره «اگر $x < y$ و $y < z$ آنگاه $x < z$ » را به زبان منطق ریاضی بنویسید.

۱۰. با استفاده از حروف گزاره‌ای، گزاره «چنین نیست که احمد دانش آموز و مریض است، احمد دانش آموز نیست یا احمد مریض نیست و بالعکس» را به زبان منطق ریاضی بنویسید.

۱۱. ارزش درستی هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را مشخص کنید.

- (الف) اگر $-5 = 0$ آنگاه $3 \times (-2) = -5$
 (ب) این درست نیست که $4 + 5 = 10$ اگر و فقط اگر $10 + 10 = 100$
 (ج) این درست نیست که $\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{4}$ یا $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
 (د) این نادرست است اگر مشهد در عراق است، آنگاه کربلا در ایران است.

۱۲. جدول راستی ترکیبات منطقی زیر را به دست آورید.

- | | |
|--|---|
| (الف) $\sim (p \wedge q)$ | (ب) $\sim p \wedge q$ |
| (ج) $\sim (p \vee q)$ | (د) $\sim (p \vee \sim q)$ |
| (هـ) $p \vee \sim (p \wedge q)$ | (و) $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$ |
| (ز) $\sim (p \Rightarrow \sim q)$ | (ح) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ |
| (ط) $\sim (p \wedge q) \vee \sim (p \Leftrightarrow q)$ | (ی) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$ |
| (س) $(p \Rightarrow q) \vee \sim (p \Leftrightarrow \sim q)$ | (ث) $[p \Rightarrow (\sim q \vee r)] \wedge \sim [q \vee (p \Leftrightarrow \sim r)]$ |
| (م) $(p \wedge \sim q) \vee r$ | (ن) $\sim p \vee (q \wedge \sim r)$ |
| (س) $(p \vee \sim r) \wedge (q \vee \sim r)$ | |

منطق و گزاره‌های منطقی

۱۳. کدام عبارت صحیح است؟

- ۱) جملات غیرخبری که بتوانیم دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست را به آنها نسبت دهیم یک گزاره هستند.
- ۲) جملات خبری که موافق با نظر ما نیستند یک گزاره نادرست می‌باشند.
- ۳) اگر ارزش یک جمله خبری را ندانیم، آن جمله خبری یک گزاره نیست.
- ۴) کاربرد منطق در تشخیص اعتبار استدلال‌هاست.

۱۴. کدام عبارت صحیح است؟

- ۱) هر جمله خبری یک گزاره است.
- ۲) بعضی از گزاره‌ها جمله خبری نیستند.
- ۳) بعضی از جملات خبری گزاره نیستند.
- ۴) هر گزاره یک جمله خبری درست است.

۱۵. چه تعداد از جملات خبری زیر گزاره نیست؟

- الف) عدد $1 - 2576$ عددی اول است.
 - ب) در درس ریاضی مبحث تابع از معادله درجه ۲ آسان‌تر است.
 - پ) تخته را پاک کن.
 - ت) $\sqrt{2}$ عددی گویا است.
- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۶. کدام عبارت صحیح است؟

- ۱) جمله «شهر تهران بزرگ‌تر از شهر مشهد است.» یک گزاره نیست.
- ۲) جمله «شهر تهران زیباتر از شهر مشهد است.» یک گزاره است.
- ۳) جمله «شهر تهران پرجمعیت‌تر از شهر مشهد نیست.» یک گزاره نادرست است.
- ۴) جمله «به نظر احمد، شهر تهران مهم‌تر از شهر مشهد است.» یک گزاره نیست.

۱۷. تعداد حالت‌های ارزشی برای پنج گزاره، چند برابر تعداد حالت‌های ارزشی سه گزاره است؟

- ۱) دو برابر
- ۲) سه برابر
- ۳) چهار برابر
- ۴) هشت برابر

نقیض یک گزاره

۱۸. نقیض کدام گزاره درست نوشته شده است؟

- ۱) گزاره: «علی برادر زهرا نیست.»؛ نقیض گزاره: «زهرا خواهر علی است.»
- ۲) گزاره: «۲ عددی غیر اول نیست.»؛ نقیض گزاره: «۲ عددی اول است.»
- ۳) گزاره: «عدد ۷ زوج است.»؛ نقیض گزاره: «عدد ۷ فرد است.»
- ۴) گزاره: «دایره ضلع ندارد.»؛ نقیض گزاره: «چنین نیست که دایره ضلع ندارد.»

۱۹. نقیض کدام گزاره در مقابل آن درست نوشته نشده است؟

- ۱) گزاره: «عدد ۱۲ کوچک‌تر از عدد ۱۱ است.»؛ نقیض گزاره: «عدد ۱۲ نا کوچک‌تر از عدد ۱۱ است.»
- ۲) گزاره: «ارسطو شاگرد افلاطون نیست.»؛ نقیض گزاره: «ارسطو شاگرد افلاطون است.»
- ۳) گزاره: «عدد ۵ زوج است.»؛ نقیض گزاره: «عدد ۵ زوج نیست.»
- ۴) گزاره: «مربع چهار ضلع برابر ندارد.»؛ نقیض گزاره: «چنین نیست که مربع چهار ضلع برابر ندارد.»

ترکیب عطفی دو گزاره

۲۰. اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند و گزاره $p \wedge q$ ترکیبی از آن دو گزاره باشد، در مورد درستی یا نادرست گزاره $p \wedge q$ کدام عبارت صحیح است؟

- ۱) این ترکیب فصلی فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره p و q ارزش درست داشته باشند.
- ۲) درستی گزاره p ، یا درستی گزاره q ، درستی گزاره $p \wedge q$ را نتیجه می‌دهد.
- ۳) برای نادرستی گزاره $p \wedge q$ ، کافی است یکی از گزاره‌های p یا q نادرست باشند.
- ۴) درستی گزاره $p \wedge q$ ، لزوماً درستی گزاره p را نتیجه نمی‌دهد.

۲۱. اگر گزاره‌های p و q هر دو نادرست باشند، آنگاه کدام گزاره زیر دارای ارزش درست است؟
 ۱) $p \wedge q$ ۲) $\sim p \wedge q$ ۳) $p \wedge \sim q$ ۴) $\sim p \wedge \sim q$

۲۲. کدام یک از گزینه‌های زیر با گزاره « 121 مضرب 12 نیست و $\sqrt{3}$ مثبت است» هم‌ارزش است.
 ۱) «اگر n عددی زوج باشد آنگاه n^2 زوج است و اگر n^2 زوج باشد، آنگاه n زوج است»
 ۲) « 5 عددی فرد است و 4 عددی اول است.»
 ۳) « 2 عددی اول نیست و همهٔ سوره‌های قرآن با بسم‌الله شروع نمی‌شوند.»
 ۴) اگر عددی مثبت نباشد، یا منفی است یا صفر است و ارزش گزاره « $\sim p$ » همواره نادرست است.

۲۳. ترکیب عطفی کدام یک از گزاره‌های زیر با گزاره « 24 ، برابر 16 است»، گزاره‌ای با ارزش درست است؟
 ۱) 20° عددی اول است.
 ۲) 57 عددی اول است و 2 عددی زوج است.
 ۳) عدد 5 زوج نیست.
 ۴) هر گزاره‌ای می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

۲۴. در جای خالی کدام عبارت را می‌توان قرار داد تا گزاره حاصل یک گزاره نادرست باشد؟ «تمام سوره‌های قرآن با بسم‌الله شروع می‌شود و»
 ۱) کتاب قرآن 114 سوره دارد.
 ۲) 51 عددی اول است و 15 عددی اول نیست.
 ۳) افلاطون شاگرد سقراط است.
 ۴) هر گزاره‌ای می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

ترکیب فصلی دو گزاره

۲۵. در جای خالی کدام عبارت را می‌توان قرار داد تا گزاره حاصل یک گزاره نادرست باشد؟ «تمام سوره‌های قرآن با بسم‌الله شروع می‌شود یا»
 ۱) کتاب قرآن 114 سوره دارد.
 ۲) 51 عددی اول است و 15 عددی اول نیست.
 ۳) افلاطون شاگرد سقراط است.
 ۴) هر گزاره‌ای می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

۲۶. اگر p گزاره‌ای دلخواه و q گزاره‌ای نادرست باشد، آنگاه کدام گزاره زیر همواره دارای ارزش درست است؟
 ۱) $\sim p \vee q$ ۲) $p \vee q$ ۳) $\sim p \vee p$ ۴) $\sim p$

ترکیب عطفی و فصلی دو گزاره

۲۷. اگر T گزاره همیشه درست، F گزاره همیشه نادرست و p گزاره‌ای دلخواه باشد، کدام هم‌ارزی زیر همواره برقرار نیست؟
 ۱) $T \wedge F \equiv F$ ۲) $T \vee F \equiv T$ ۳) $P \wedge T \equiv P$ ۴) $P \vee T \equiv P$

۲۸. اگر p و q گزاره‌هایی دلخواه باشند، ارزش چه تعداد از گزاره‌های زیر نامشخص است؟ (T گزاره همواره درست و F گزاره همواره نادرست است.)
 الف) $q \vee \sim p \equiv T$ ب) $p \vee \sim p \equiv T$ پ) $p \wedge \sim p \equiv T$ ت) $\sim p \vee F \equiv F$ ث) $p \wedge T \equiv T$ ج) $\sim p \wedge T \equiv F$
 ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۹. گزاره $\sim(p \vee \sim q)$ در کدام حالت درست است؟
 ۱) p و q هر دو درست باشند. ۲) p و q هر دو نادرست باشند. ۳) p درست و q نادرست باشد. ۴) p نادرست و q درست باشد.

۳۰. اگر ارزش گزاره $p \wedge (q \vee r)$ درست باشد، آنگاه در مورد ارزش گزاره $\sim(p \vee q) \wedge r$ می‌توانیم بگوییم
 ۱) اگر q نادرست باشد، ارزش گزاره نادرست است.
 ۲) با گزاره q هم‌ارزش است.
 ۳) اگر ارزش گزاره r را بدانیم، ارزش گزاره معلوم می‌شود.
 ۴) حتماً نادرست است.

۳۱. اگر گزاره $\sim p \vee (q \wedge p)$ نادرست باشد و r گزاره‌ای درست باشد، آنگاه در مورد گزاره $q \wedge (p \vee \sim r)$ کدام عبارت صحیح نیست؟
 ۱) با گزاره p هم‌ارزش است.
 ۲) با گزاره $q \wedge r$ هم‌ارزش است.
 ۳) همواره درست است.
 ۴) بدون دانستن ارزش گزاره r نیز می‌توان ارزش آن را مشخص کرد.

۳۲. اگر ارزش گزاره $(\sim p \vee r) \wedge p$ درست باشد، ارزش گزاره r چیست؟
 ۱) همواره درست است.
 ۲) همواره نادرست است.
 ۳) r نادرست است در صورتی که p درست باشد.
 ۴) r نادرست است در صورتی که p نادرست باشد.

۳۳. در مورد گزاره $(p \wedge q) \vee \sim [(p \vee \sim q) \wedge q]$ کدام گزینه درست است؟
 ۱) برابر نقیض گزاره q می‌باشد. ۲) همواره نادرست است. ۳) برابر نقیض گزاره p می‌باشد. ۴) همواره درست است.

۳۴. کدام هم‌ارزی نادرست است؟
 ۱) $q \vee (\sim p \wedge p) \equiv q$ ۲) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ ۳) $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ ۴) $p \wedge (\sim q \wedge p) \equiv p$

ترکیب شرطی دو گزاره

۳۵. کدام گزینه در مورد گزاره شرطی « $q \Rightarrow p$ » نادرست است؟
 ۱) p را مقدم و q را تالی می‌نامیم ۲) گزاره شرطی به انتفای q دارای ارزش درست است.

۳) اگر q نادرست باشد، همواره گزاره شرطی دارای ارزش درست است. ۴) اگر q نادرست باشد، ارزش گزاره شرطی درست است.

۳۶. اگر گزاره p دارای ارزش درست باشد، در آن صورت گزاره $[v \Rightarrow (s \Rightarrow (r \Rightarrow (q \Rightarrow p)))]$ هم‌ارز کدام گزینه است؟
 ۱) $p \Rightarrow \sim p$ ۲) $v \Rightarrow \sim v$ ۳) $\sim p \Rightarrow p$ ۴) $\sim v \Rightarrow v$

۳۷. اگر $r \Rightarrow s$ درست باشد، ارزش گزاره $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow s)$ کدام است؟
 ۱) ارزش آن به q بستگی دارد. ۲) ارزش آن بستگی به p دارد. ۳) درست ۴) نادرست

۳۸. گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ هم‌ارز منطقی کدام گزینه است؟
 ۱) $q \Rightarrow p$ ۲) $p \Rightarrow q$ ۳) $p \wedge \sim q$ ۴) $q \wedge \sim p$

ترکیب عطفی، فصلی و شرطی دو گزاره

۳۹. گزاره $p \Rightarrow \sim q$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟
 ۱) $p \vee q$ ۲) $p \vee \sim q$ ۳) $\sim p \vee q$ ۴) $\sim p \vee \sim q$

۴۰. گزاره مرکب $p \vee q$ چه شرطی برای گزاره $p \Rightarrow \sim q$ است؟
 ۱) شرط لازم ۲) شرط کافی ۳) شرط لازم و کافی ۴) شرط نه لازم و نه کافی

۴۱. اگر گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p$ درست باشند، آنگاه کدام گزاره زیر همواره درست است؟
 ۱) $p \vee \sim q$ ۲) q ۳) $\sim q \wedge p$ ۴) $q \vee \sim p$

۴۲. از درستی p و $p \vee q$ کدام عبارت زیر نتیجه می‌شود؟
 ۱) q ۲) $p \Rightarrow q$ ۳) $q \Rightarrow p$ ۴) $\sim p \vee q$

۴۳. اگر p و q درست و r نادرست باشد، آنگاه کدام گزاره زیر همواره درست است؟
 ۱) $(p \Rightarrow q) \vee \sim q$ ۲) $(\sim r \Rightarrow \sim p) \vee \sim q$ ۳) $(\sim r \Rightarrow q) \wedge \sim p$ ۴) $(q \Rightarrow p) \wedge r$

۴۴. کدام یک از گزاره‌های زیر نمی‌تواند همواره درست باشد؟
 ۱) $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ ۲) $p \Rightarrow \sim q$ ۳) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ ۴) $p \Rightarrow (q \Rightarrow (q \Rightarrow p))$

۴۵. ارزش کدام گزاره همواره با ارزش p برابر نیست؟
 ۱) $p \vee (p \wedge \sim p)$ ۲) $p \wedge (p \vee \sim p)$ ۳) $p \Rightarrow p$ ۴) $\sim p \Rightarrow p$

۴۶. اگر p گزاره نادرست باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر همیشه درست است؟
 ۱) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ۲) $p \Leftrightarrow q$ ۳) $p \wedge q$ ۴) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$

۴۷. اگر گزاره‌های p, q, r و $p \Rightarrow q$ و $\sim q$ درست باشند، کدام گزاره زیر درست است؟
 ۱) p ۲) q ۳) r ۴) $p \wedge \sim q$

۴۸. اگر گزاره‌های $\sim p \Rightarrow q$ و $p \Rightarrow q$ درست باشند، کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟
 ۱) p ۲) $\sim p$ ۳) q ۴) $\sim q$

۴۹. گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ چگونه است؟
 ۱) همیشه درست است. ۲) همیشه نادرست است. ۳) هم‌ارز گزاره $p \Rightarrow q$ است. ۴) هم‌ارز گزاره $q \Rightarrow p$ است.

۵۰. ترکیب شرطی $\sim p \Rightarrow (p \wedge q)$ با کدام شرط نادرست است؟
 ۱) p و q هر دو درست باشند. ۲) p درست و q نادرست باشد. ۳) p و q هر دو نادرست باشد. ۴) p نادرست و q درست باشد.

۵۱. ترکیب شرطی $q \Rightarrow (p \vee q)$ با کدام شرط نادرست است؟
 ۱) p و q هر دو درست باشند. ۲) p نادرست و q درست باشد. ۳) p درست و q نادرست باشد. ۴) p و q هر دو نادرست باشند.

۵۲. اگر ترکیب شرطی $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge r)$ نادرست و q نادرست باشد، ارزش p و r کدام است؟
 ۱) p درست، r نادرست ۲) p درست، r درست ۳) p نادرست، r درست ۴) p نادرست، r نادرست

۵۳. اگر گزاره $p \Rightarrow (p \wedge q)$ نادرست باشد، در این صورت ارزش گزاره $(r \wedge q) \Rightarrow s$ چگونه است؟
 ۱) همیشه درست است. ۲) همیشه نادرست است. ۳) بستگی به ارزش گزاره‌های r و s دارد. ۴) با گزاره $r \Rightarrow s$ هم‌ارزش است.

۵۴. اگر گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد. در این صورت ارزش کدام یک از گزاره‌های مرکب زیر قطعاً نادرست است؟

۱) $(q \Rightarrow p) \wedge r$ ۲) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$ ۳) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ ۴) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

۵۵. اگر گزاره‌ای درست و q و r گزاره‌هایی دلخواه باشند، در این صورت کدام گزاره زیر همواره درست است؟
 ۱) $p \Rightarrow (p \wedge q)$ ۲) $p \Rightarrow (\sim p \vee q)$ ۳) $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee r)$ ۴) $(q \wedge r) \Rightarrow \sim p$

۵۶. اگر p یک گزاره درست و q و r گزاره‌هایی دلخواه باشند، کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟
 ۱) $(\sim p \vee q) \Rightarrow r$ ۲) $(\sim p \wedge q) \Rightarrow r$ ۳) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ ۴) $(p \vee q) \Rightarrow r$

۵۷. اگر p گزاره‌ای نادرست و q و r گزاره‌هایی دلخواه باشند، در این صورت کدام گزاره زیر درست است؟
 ۱) $p \wedge (q \vee r)$ ۲) $(r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ ۳) $(p \vee q) \Rightarrow (q \wedge r)$ ۴) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

۵۸. گزاره $p \wedge ((p \Rightarrow q) \wedge \sim q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟
 ۱) گزاره همیشه درست ۲) گزاره همیشه نادرست ۳) p ۴) $p \Rightarrow q$

۵۹. گزاره $\sim p \wedge (p \Rightarrow q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟
 ۱) p ۲) q ۳) $\sim p$ ۴) $\sim q$

۶۰. گزاره $\sim q \wedge (\sim q \Rightarrow r)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟
 ۱) $q \vee \sim r$ ۲) q ۳) $\sim r$ ۴) $\sim q \wedge r$

۶۱. اگر p درست و q نادرست باشد، گزاره $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge q)$ با کدام گزاره هم‌ارزش است؟
 ۱) $p \wedge \sim q$ ۲) $\sim (q \wedge r)$ ۳) $\sim p \vee q$ ۴) $p \vee r$

۶۲. گزاره $q \Rightarrow \sim [(p \Rightarrow q) \wedge \sim p]$ هم‌ارز منطقی با کدام گزاره زیر است؟
 ۱) $p \Rightarrow q$ ۲) $\sim p \Rightarrow q$ ۳) p ۴) $\sim p \Rightarrow \sim q$

۶۳. گزاره $p \Rightarrow [q \wedge (r \Rightarrow q)]$ هم‌ارز کدام گزینه است؟
 ۱) $\sim p \vee \sim q$ ۲) $\sim p \vee q$ ۳) $p \Rightarrow r$ ۴) $p \vee q$

نقیض و عکس نقیض گزاره شرطی

۶۴. نقیض گزاره «اگر a زوج باشد، آن‌گاه $a+1$ فرد است.» کدام گزاره است؟
 ۱) نه a زوج است و نه $a+1$ فرد است. ۲) هم a زوج است و هم $a+1$ فرد است. ۳) a زوج است و $a+1$ فرد نیست. ۴) a زوج نیست و $a+1$ فرد است.

۶۵. عکس نقیض ترکیب شرطی $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$ برابر کدام است؟
 ۱) $p \Rightarrow p \vee q$ ۲) $p \Rightarrow p \wedge q$ ۳) $\sim p \Rightarrow p \wedge q$ ۴) $p \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

۶۶. گزاره $(\sim p \vee q) \Rightarrow r$ معادل کدام گزاره است؟
 ۱) $\sim r \Rightarrow (p \wedge q)$ ۲) $\sim r \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ ۳) $\sim r \Rightarrow (p \vee q)$ ۴) $\sim r \Rightarrow (p \vee \sim q)$

قانون عطف مقدمات

۶۷. هم‌ارز منطقی گزاره $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ کدام است؟

- تاییدی $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ ۱) $q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ۲) $(p \vee q) \Rightarrow r$ ۳) $p \Rightarrow (q \vee r)$ ۴)

۶۸. هم‌ارز منطقی گزاره $p \Rightarrow [q \Rightarrow \sim(p \Rightarrow \sim q)]$ کدام است؟

- تاییدی همیشه درست است. ۱) همیشه نادرست است. ۲) $p \Rightarrow q$ ۳) $\sim p \Rightarrow q$ ۴)

۶۹. گزاره $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ در کدام حالت نادرست است؟

- تاییدی p و q درست، r نادرست ۱) p و q نادرست، r درست ۲) p درست، q و r نادرست ۳) p نادرست، q و r درست ۴)

۷۰. گزاره $\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)$ هم‌ارز منطقی کدام گزینه است؟

- تاییدی $(p \wedge q) \wedge r$ ۱) $(p \vee q) \vee r$ ۲) $(p \vee q) \wedge r$ ۳) $(p \vee \sim q) \vee r$ ۴)

۷۱. نقیض گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [q \Rightarrow (q \wedge r)]$ هم‌ارز کدام گزینه است؟

- تاییدی $\sim q \vee r$ ۱) $\sim q \wedge r$ ۲) $q \vee \sim r$ ۳) $q \wedge \sim r$ ۴)

ترکیب دو شرطی دو گزاره

۷۲. در مورد گزاره دو شرطی « $q \Leftrightarrow p$ » کدام گزینه نادرست است؟

- ۱) اگر p و q هر دو گزاره‌هایی درست باشند، ارزش گزاره دو شرطی « $q \Leftrightarrow p$ » درست است.
 ۲) گزاره دو شرطی « $q \Leftrightarrow p$ » همان گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ است.
 ۳) اگر ارزش گزاره دو شرطی « $q \Leftrightarrow p$ » درست باشد آنگاه گزاره‌های p و q گزاره‌هایی با ارزش درست هستند.
 ۴) اگر p و q گزاره‌هایی نادرست باشند، آنگاه ارزش گزاره « $q \Leftrightarrow p$ » درست است.

۷۳. اگر گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت ارزش کدام یک از گزاره‌های مرکب زیر نادرست است؟

- تاییدی $(\sim p \Leftrightarrow q) \vee r$ ۱) $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$ ۲) $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ ۳) $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$ ۴)

۷۴. گزاره $p \Leftrightarrow q$ ، هم‌ارز منطقی ترکیب فصلی گزاره $p \wedge q$ با کدام گزاره است؟

- تاییدی $\sim p \vee q$ ۱) $\sim p \wedge q$ ۲) $\sim(p \wedge q)$ ۳) $\sim(p \vee q)$ ۴)

۷۵. گزاره $(p \wedge q) \Leftrightarrow q$ در کدام حالت همیشه درست است؟

- تاییدی q درست ۱) p نادرست ۲) q نادرست ۳) $p \wedge q$ نادرست ۴)

۷۶. اگر $(p \wedge q) \Rightarrow r$ نادرست باشد، کدام گزاره زیر نادرست است؟

- تاییدی $(q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee r)$ ۱) $(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)$ ۲) $(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \vee r)$ ۳) $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (r \Rightarrow p)$ ۴)



استدلال ریاضی

در درس گذشته با گزاره‌ها و انواع ترکیب گزاره‌ها و همچنین جدول ارزشی گزاره‌ها آشنا شدید و در این درس با نحوه تبدیل گزاره‌های توصیفی به نمادهای ریاضی، یکی از انواع قیاس‌ها یعنی قیاس استثنایی، مغالطه در استدلال، ایراد در مغالطه، عکس نقیض گزاره شرطی و انواع خطا در استدلال آشنا می‌شوید.

نحوه تبدیل گزاره‌های توصیفی به نمادهای ریاضی

در کتاب ریاضی سال دهم در درس اول از فصل دوم با مفهوم معادله و مسائل توصیفی آشنا شدید. سوالی که شاید خیلی از شما سال‌های گذشته از معلم‌های ریاضی‌تان و حتی شاید از خودتان پرسیده باشید این است که ما چرا اصلاً باید ریاضی بخوانیم و ریاضی به چه درد ما و زندگی‌مان می‌خورد؟ و این فرمول‌های سخت ریاضی را چرا باید یاد بگیریم؟ جواب این سوالات این است که ریاضیات از همان ابتدا برای این به وجود آمد که بتواند مشکلات زندگی را حل کند و برخی مسائل را ساده‌تر و قابل فهم‌تر برای ما بکند. در واقع فرمول‌ها و روابط ریاضی همان نوع ارتباط بین داشته‌ها و خواسته‌های مسائل ما هستند. به مثال زیر توجه کنید.

نیما از پسر عمویش کیان سه سال بزرگ‌تر است، اگر بدانیم حاصل ضرب سن آنها ۴۰ می‌باشد، کیان چند سال دارد؟

پاسخ: برای حل این سوال باید بین سن نیما و کیان یک ارتباط برقرار کنیم و کار ریاضی پیدا کردن نوع این ارتباط است. در ابتدا بهتر است برای راحتی کار و مختصر نویسی از متغیرها یا نمادهای ریاضی استفاده کنیم تا حجم نوشتاری ما کاهش یابد، مثلاً می‌توانیم سن نیما را X و سن کیان را Y در نظر بگیریم (این کار فقط برای راحتی کار انجام شد و نه چیز دیگر) حال باید بین X و Y ارتباط برقرار کنیم. چون نیما از کیان سه سال بزرگ‌تر است پس می‌توانیم بنویسیم: $X = Y + 3$
چون حاصل ضرب سن آنها برابر ۴۰ است پس می‌توانیم بنویسیم: $X \times Y = 40$
مطمئناً شما هم با من هم عقیده هستید که کار کردن با این دو فرمول ریاضی بسیار ساده‌تر از کارکردن با صورت فارسی مسئله است، در صورتیکه هر دو، یک مفهوم را بیان می‌کنند. پس ما باید یاد بگیریم که چگونه مسائل توصیفی فارسی را به صورت نمادهای ریاضی بنویسیم.

عبارت زیر را به زبان فارسی بازنویسی کنید.

«دو برابر مکعب عددی از نصف مجذور آن عدد به علاوه ۳ بیشتر نیست.»

پاسخ: عددی که می‌خواهیم را X می‌گیریم و سعی می‌کنیم جمله صورت سوال را به صورت عبارت‌های ریاضی بازنویسی کنیم. «دو برابر مکعب عددی» یعنی « $2 \times X^3 = 2X^3$ »، حالا باید چه چیزی را پیدا کنیم؟ یک بار دیگر صورت سوال را بخوانید و کلمات کلیدی صورت سوال را مشخص کنید. عبارت‌های «دو برابر مکعب عدد»، «نصف مجذور آن عدد به علاوه ۳» و «بیشتر نیست» عبارت‌های کلیدی صورت سوال هستند. آنها را به صورت نمادهای ریاضی می‌نویسیم.

(پرانتر را فراموش نکنید و مجذور را با جذر اشتباه نگیرید) $\frac{1}{2} \times X^2 + 3 = \left(\frac{X^2}{2}\right) + 3$ → نصف مجذور آن به علاوه ۳

(وقتی بیشتر نیست، نتیجه می‌گیریم کوچک‌تر یا مساوی است) $\rightarrow \leq$ → بیشتر نیست

یادتان باشد که ریاضی را از سمت چپ می‌خوانیم. عبارت « $a > b$ » را به صورت « a بزرگ‌تر از b » می‌خوانیم، نه به صورت « b کوچک‌تر از a » (البته هر دو گزاره هم‌ارزش هستند و با داشتن هر یک دیگری به دست می‌آید اما بنا به قرارداد، بهتر است گزاره اول را به کار ببریم)

$$2X^3 \leq \frac{X^2}{2} + 3$$

حال باید طبق صورت سوال، ارتباط بیت عبارت‌های کلیدی را مشخص کنیم. پس خواهیم داشت:

پس ما از صورت سوال به یک نامعادله ریاضی رسیدیم که با حل آن و محاسبه مقدار X ، عددی را که می‌خواهیم به دست خواهد

آمد. $2X^3 \leq \frac{X^2}{2} + 3$. برای اینکه از عدد ۲ در مخرج کسر خلاص شویم، طرفین نامساوی را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم.

یادتان باشد که اگر به جای ۲، عدد ۲- بود، جهت نامساوی را باید برعکس می‌کردیم.

اگر در یک نامساوی جبری، طرفین نامساوی را در عددی منفی ضرب کنیم و یا طرفین را بر عددی منفی تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض خواهد شد.

$$2x^3 \leq \frac{x^2}{3} + 3 \Rightarrow 2 \times 2x^3 \leq 2\left(\frac{x^2}{3} + 3\right) \Rightarrow 4x^3 \leq x^2 + 6$$

یادتان باشد که عدد ۲ را هم باید در $\frac{x^2}{3}$ ضرب کنید و هم در عدد ۳.

حال باید تمام جملات و عبارتهایی که مجهول (x) دارند را به یک سمت معادله و عبارتهای معلوم و اعداد را به سمت دیگر معادله منتقل کنیم. (دقت کنید که علامتها را درست تغییر بدهید.) x^2 را به سمت چپ نامساوی می‌بریم (بهتر است بگوییم دو طرف نامساوی را با $-x^2$ جمع می‌کنیم) پس خواهیم داشت:

$$4x^3 \leq x^2 + 6 \Rightarrow 4x^3 - x^2 \leq 6$$

حال باید از جملات مشترک فاکتور بگیریم، در عبارت سمت چپ از x^2 فاکتور می‌گیریم:

با فاکتورگیری، از عبارت $4x^3$ ، عبارت $4x$ و از عبارت $-x^2$ ، عبارت -1 باقی می‌ماند.

$$4x^3 - x^2 \leq 6 \Rightarrow x^2(4x - 1) \leq 6$$

تذکر

برای تسلط یافتن به حل معادله و نامعادله حتماً فصل‌های اول و دوم کتاب ریاضی آمار (۱) پایه دهم را خوب مطالعه کنید و تمرین زیاد حل کنید.

الف) نامساوی $x^2(4x - 1) \leq 6$ را به زبان فارسی بازنویسی کنید.

پاسخ الف): باید دقت کنید که در سمت چپ نامعادله دو عبارت داریم که در هم ضرب شده‌اند که یکی « x^2 » و دیگری « $4x - 1$ » است؛ یعنی ما ابتدا ضرب دو عبارت را دیدیم. یعنی می‌توانیم بگوییم: حاصل ضرب «مجذور عددی» در «چهار برابر آن عدد منهای یک»، کوچک‌تر یا مساوی ۶ است. این عبارت را با عبارت صورت مثال قبل مقایسه کنید. ظاهراً این دو عبارت با هم متفاوت هستند و هیچ ارتباطی با یکدیگر ندارند؛ اما ما به کمک تبدیل آنها به عبارتهای ریاضی و روابط ریاضی نشان دادیم که عدد خواسته شده در هر دو عبارت یکسان است.

ب) بیشترین مقدار تفاضل $\frac{1}{5}$ مربع عددی، از ۳ برابر آن عدد، را بیابید.

پاسخ ب): آن عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم و کلمات کلیدی را در صورت سوال پیدا می‌کنیم.

«بیشترین مقدار»، «تفاضل $\frac{1}{5}$ مربع عددی، از» و «۳ برابر آن عدد» عبارتهای کلیدی هستند.

حال سعی می‌کنیم آنها را به صورت عبارتهای ریاضی بنویسیم. $\frac{1}{5}$ مربع عدد را به صورت $\frac{1}{5}x^2$ می‌نویسیم و چون تفاضل آن را از ۳ برابر خود آن عدد (x) می‌خواهد، لذا علامت منها قبل از $\frac{1}{5}x^2$ قرار می‌گیرد، پس صورت کلی تا اینجا به شکل $3x - \frac{1}{5}x^2$ «تفاضل $\frac{1}{5}$ مربع عددی، از ۳ برابر آن عدد» خواهد بود. سوال از ما بیشترین مقدار این عبارت را می‌خواهد. در فصل سوم کتاب ریاضی و آمار (۱) با حل این گونه مسائل آشنا شدیم که در آنجا برای یافتن بیشترین یا کمترین مقدار تابع درجه ۲ از فرمول $x = -\frac{b}{2a}$ استفاده می‌کردیم. لذا ابتدا باید صورت استاندارد چند جمله‌ای را بنویسیم یعنی: $-\frac{1}{5}x^2 + 3x$ و برای حل به صورت

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = 3 \end{cases} \quad x = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(-\frac{1}{5})} = \frac{-3}{-\frac{2}{5}} = \frac{-3}{-\frac{2}{5}} = \frac{15}{2}$$

مقابل عمل می‌کنیم:

حال با جای گذاری این مقدار به ازای x در صورت معادله، بیشترین مقدار آن به دست خواهد آمد، یعنی:

$$-\frac{1}{5}x^2 + 3x \xrightarrow{x=\frac{15}{2}} -\frac{1}{5}\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{15}{2}\right) = -\frac{225}{4} + \frac{45}{2} = \frac{-225 + 450}{4} = \frac{225}{4}$$

پ) بیشترین مقدار اختلاف مربع ثلث عددی، از ۴ برابر همان عدد چیست؟ ابتدا این سوال را خودتان حل کنید و سپس با پاسخ نوشته شده مقایسه کنید.

پاسخ پ): در این مثال نیز با توجه به مثال «ب» ابتدا عدد صورت سوال را x در نظر می‌گیریم و کلمات کلیدی را در صورت سوال پیدا می‌کنیم. «بیشترین مقدار»، «اختلاف»، «مربع ثلث عددی» و «۴ برابر آن عدد» عبارت‌های کلیدی هستند.

ابتدا ثلث عدد را یعنی $\frac{1}{3}x$ و بعد مربع ثلث عدد یعنی $(\frac{1}{3}x)^2$ را به دست آورده و چون اختلاف آن را از ۴ برابر همان x خواسته است پس صورت کلی معادله به شکل $4x - (\frac{1}{3}x)^2$ خواهد بود، که اگر این معادله را به صورت استاندارد شده بنویسیم به صورت

$$-\frac{1}{9}x^2 + 4x = 0 \quad \text{نوشته خواهد شد و عدد مورد نظر را از فرمول } x = -\frac{b}{2a} \text{ که در آن } \begin{cases} a = -\frac{1}{9} \\ b = 4 \end{cases} \text{ می‌باشد به دست می‌آوریم؛ یعنی:}$$

$$x = -\frac{4}{2(-\frac{1}{9})} = \frac{-4}{-\frac{2}{9}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{9}} = \frac{36}{2} = 18$$

با جای‌گذاری این مقدار x در صورت معادله بیشترین مقدار را به دست می‌آوریم:

$$-\frac{1}{9}(18)^2 + 4(18) = 18(-\frac{1}{9} \times 18 + 4) = 18(-2 + 4) = 36$$

این بار به جای محاسبه $(18)^2$ از عامل مشترک یعنی ۱۸ فاکتور می‌گیریم: 36 پس نیازی به انجام محاسبات طولانی و استفاده از ماشین حساب نیست.

ت) بیشترین مقدار مساحت مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۲۰ سانتی‌متر، چند سانتی‌متر مربع است؟

پاسخ ت): اگر محیط را داشته باشیم چگونه باید مساحت را پیدا کنیم؟ برای شکل‌هایی مثل مربع و دایره روش حل معلوم است، کافی است به کمک محیط طول ضلع مربع یا شعاع دایره را محاسبه کنیم و بعد به کمک آنها مقدار مساحت را به دست آوریم. اما مساحت مستطیل از حاصل ضرب طول و عرض به دست می‌آید که در این سوال هیچ کدام را نداریم.

اگر همانند قبل، خواسته مسئله را (مساحت مستطیل را) x در نظر بگیریم، آنگاه خود x به دو مقدار مجهول دیگر یعنی طول و عرض وابسته است که هیچ کدام را نداریم؛ پس ابتدا به کمک داده‌های مسئله (محیط مستطیل) طول و عرض و یا رابطه‌ای بین آنها را به دست می‌آوریم و سپس به کمک آن رابطه‌ها یا مقادیر به دست آمده، مساحت را محاسبه کنیم. پس به دنبال رابطه‌ی محیط با طول و عرض مستطیل هستیم، یعنی قبل از حل این سوال باید به این سوال پاسخ دهیم که اگر محیط مستطیلی ۱۲۰ سانتی‌متر باشد، طول و عرض آن چه مقادیری می‌توانند داشته باشند (سوال جدید یا کمکی). برای اینکه در متغیرها دچار اشتباه نشویم طول مستطیل را y و عرض آن را t در نظر می‌گیریم طبق رابطه‌ی محیط مستطیل داریم:

$$2(y+t) = 120 \Rightarrow \frac{120}{2} = y+t \Rightarrow y+t = 60$$

حال با جای‌گذاری داریم:

پس فهمیدیم که مجموع طول و عرض مستطیل باید برابر ۶۰ سانتی‌متر باشد، پس سوال را به صورت زیر می‌توانیم بازنویسی کنیم. بیشترین مساحت مستطیل‌هایی که مجموع طول و عرض آنها برابر ۶۰ سانتی‌متر است، چند سانتی‌متر مربع است؟ چون مساحت از حاصل ضرب طول در عرض مستطیل به دست می‌آید پس به دنبال بیشترین مقدار برای حاصل ضرب دو عدد هستیم که حاصل جمع آنها برابر مقدار ثابت ۶۰ باشد. حال معلومات و خواسته مسئله را به صورت نماد ریاضی می‌نویسیم. $\text{Max}(t \times y)$ نماد ماکزیمم یا بیشترین مقدار است)

سوال اصلاً سخت نیست، کافی است از رابطه $y+t=60$ ، یکی از متغیرها (y یا t) را بر حسب متغیر دیگر به دست آورده و در رابطه

$$y+t=60 \Rightarrow y=60-t \Rightarrow y \times t = (60-t)t = 60t - t^2$$

$t \times y$ جای‌گذاری کنیم.

پس باید مقدار y را بیابیم در صورتیکه $60t - t^2$ بیشترین مقدار باشد.

پس ابتدا عبارت $60t - t^2$ را به صورت استاندارد $-t^2 + 60t$ می‌نویسیم و سپس به کمک فرمول $t = -\frac{b}{2a}$ (که در این رابطه $a = -1$ و $b = 60$ است) مقدار y را به دست می‌آوریم.

تذکر: متغیر t در این رابطه نقش همان x را در معادله درجه ۲ دارد (مراقب باشید تغییر نام حروف متغیرها شما را به اشتباه نیندازد).

$$t = \frac{-60}{2(-1)} = \frac{-60}{-2} = 30$$

با جای‌گذاری $t=30$ در رابطه $-t^2 + 60t$ مقدار بیشترین حاصل ضرب (بیشترین مساحت) به دست می‌آید.

$$-(30)^2 + 60(30) = -900 + 1800 = 900$$

نکته بسیار مهم: اگر در رابطه $y+t=60$ مقدار $t=30$ را جای‌گذاری کنیم آنگاه داریم: $y=30$ یعنی مقدار y و t مساوی شد.

نتیجه مهم: بیشترین مساحت مستطیل‌هایی که دارای محیط برابر هستند، هنگامی به دست می‌آید که طول و عرض مستطیل‌ها برابر باشند؛ یعنی مستطیل تبدیل به مربع شود.

بیشترین مقدار مساحت مستطیل‌هایی که دارای محیطی برابر ۱۰۰ سانتی‌متر هستند چقدر است؟

پاسخ: چون مستطیل تبدیل به مربع می‌شود پس داریم: بیشترین مساحت $25 \times 25 = 625$ طول ضلع $25 = 100 \div 4$

قیاس استثنایی

در منطق سال دهم، با اقسام قیاس آشنا شدید و آموختید که قیاس دو نوع است: ۱- قیاس اقترانی ۲- قیاس استثنایی. در هر دو نوع قیاس دو مقدمه (در اینجا گزاره) داریم که با فرض درستی دو مقدمه، به نتیجه‌ای می‌رسیم. در قیاس اقترانی اجزای نتیجه در میان دو مقدمه پخش شده است که اشکال مختلف آن را در سال گذشته خواندید. اما در قیاس استثنایی که در این بخش از دیدگاه منطق ریاضی به آن خواهیم پرداخت «نتیجه استدلالت» یا «نقیض نتیجه» در یکی از دو مقدمه آمده است.

مثال برای «نتیجه استدلالت» در یکی از دو مقدمه:

مقدمه اول: اگر دو خط L_1 و L_2 موازی باشند، آنگاه L_1 و L_2 هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

مقدمه دوم: دو خط L_1 و L_2 با یکدیگر موازی هستند.

نتیجه: L_1 و L_2 هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

این نوع استدلال را می‌توان به‌طور کلی به شکل زیر صورت‌بندی کرد:

مقدمه اول: اگر «الف» آنگاه «ب».

مقدمه دوم: «الف»

∴ «ب»

و یا با استفاده از نمادگذاری‌های منطقی داریم:

$$\frac{p \Rightarrow q}{p} \therefore q$$

در واقع چون درستی مقدمه اول را که یک گزاره شرطی است پذیرفته‌ایم، با فرض مقدمه دوم (همان «مقدم» در قضیه شرطی اول) به وضوح نتیجه (همان «تالی» در مقدمه اول) به‌دست می‌آید.

نکته از نماد «∴» به‌جای عبارت «نتیجه» استفاده می‌شود.

مثال برای «نقیض نتیجه» در یکی از دو مقدمه:

مقدمه اول: اگر دو خط L_1 و L_2 موازی باشند آنگاه L_1 و L_2 یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

مقدمه دوم: دو خط L_1 و L_2 یکدیگر را قطع می‌کنند.

نتیجه: دو خط L_1 و L_2 با یکدیگر موازی نیستند.

این نوع استدلال را نیز می‌توان به‌طور کلی به‌شکل زیر صورت‌بندی کرد:

مقدمه اول: اگر «الف» آنگاه «ب».

مقدمه دوم: «نقیض ب»

∴ «نقیض الف»

و یا با استفاده از نمادگذاری منطق گزاره‌ها داریم:

$$\frac{p \Rightarrow q}{\sim q} \therefore \sim p$$

دلیل این نتیجه‌گیری این است که چون هر کدام از دو مقدمه را به‌عنوان یک گزاره درست پذیرفته‌ایم، از درستی مقدمه دوم متوجه می‌شویم که مقدمه اول یک گزاره شرطی با تالی نادرست است. اکنون طبق ویژگی «گزاره شرطی درست با تالی نادرست»، باید مقدم آن (p) نیز نادرست باشد؛ پس باید «نقیض مقدم» درست باشد، که «نقیض مقدم» همان نتیجه به‌دست آمده از قیاس استثنایی است.

نتیجه‌گیری منطقی: چون در قیاس استثنایی مقدمه اول و مقدمه دوم را به‌عنوان فرض پذیرفته‌ایم پس می‌توانیم ترکیب عطفی دو گزاره را بنویسیم و از ترکیب عطفی آن دو گزاره، گزاره نتیجه را نتیجه بگیریم، یعنی:

$$\frac{p \Rightarrow q}{\sim q} \therefore \sim p \quad \text{حالت دوم: } \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

$$\frac{p \Rightarrow q}{p} \therefore q \quad \text{حالت اول: } \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

تمرین

به کمک جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید گزاره‌های شرطی فوق، گزاره‌های همواره درست هستند.

تذکر گاهی در قیاس استثنایی مقدمه اول یک حکم کلی را بیان می‌کند و مقدمه دوم یک گزاره جزئی است.

مثال: مقدمه اول: هر مربع یک مستطیل است.

مقدمه دوم: چهارضلعی ABCD یک مربع است.

نتیجه: چهارضلعی ABCD یک مستطیل است.

مغالطه در استدلال

گاهی از قیاس استثنایی به شکل نادرست استفاده می‌شود و منجر به نتیجه‌گیری نادرست می‌شود. به این گونه استدلال‌ها **مغالطه** می‌گویند.

مثال ۱ مقدمه اول: اگر علی دیر از خواب بیدار شود آنگاه دیر به مدرسه می‌رسد.

مقدمه دوم: علی دیر به مدرسه رسیده است.

نتیجه: علی دیر از خواب بیدار شده است.

اگر استدلال فوق را به زبان ریاضی بنویسیم خواهیم داشت:

$$\frac{\left\{ \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \end{array} \right.}{\therefore p}$$

ایراد مغالطه: در این نوع قیاس استثنایی مقدمه دوم باید p باشد و نه q ، لذا با توجه به قیاس استثنایی این استدلال نادرست است.

مثلاً در مثال فوق ممکن است دلیل دیگری مثل ترافیک شدید یا اتفاقات دیگر باعث شده باشد که علی دیر به مدرسه رسیده باشد.

مثال ۲ مقدمه اول: اگر علی به موقع به مدرسه برسد آنگاه به موقع از خواب بیدار شده است.

مقدمه دوم: علی به موقع به مدرسه نرسیده است.

نتیجه: علی به موقع از خواب بیدار نشده است.

اگر استدلال فوق را به زبان ریاضی بنویسیم خواهیم داشت:

$$\frac{\left\{ \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \sim p \end{array} \right.}{\therefore \sim q}$$

ایراد مغالطه: در این نوع قیاس استثنایی مقدمه دوم باید نقیض q باشد و نه نقیض p ، لذا با توجه به قیاس استثنایی این استدلال نادرست است.

مثلاً در مثال فوق ممکن است دلیل دیگری مثل ترافیک شدید یا اتفاقات دیگر باعث شده باشد که علی به موقع به مدرسه نرسیده باشد.

برهان عکس نقیض

در منطق گزاره‌ها نشان دادیم که دو گزاره $p \Rightarrow q$ و $\sim q \Rightarrow \sim p$ هم‌ارزند. یعنی اگر بخواهیم ثابت کنیم که گزاره $p \Rightarrow q$ درست است و

اثبات این موضوع کار دشواری باشد، می‌توانیم به جای اثبات $p \Rightarrow q$ درستی گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ را نشان دهیم.

در این حالت می‌گوییم «عکس نقیض» گزاره اصلی را ثابت کردیم، این نوع نتیجه‌گیری را برهان عکس نقیض می‌گوییم.

ثابت کنید «اگر \sqrt{x} منفی باشد آنگاه x عددی منفی است.»

پاسخ: ابتدا عبارت توصیفی صورت سوال را به صورت نمادهای گزاره‌ای می‌نویسیم.

اگر فرض کنیم: \sqrt{x} منفی است: p و x منفی است: q . پس باید نشان دهیم $p \Rightarrow q$ درست است.

برای این کار از عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ یعنی گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ استفاده می‌کنیم.

یعنی نشان می‌دهیم که «اگر x منفی نباشد آنگاه \sqrt{x} منفی نیست.»

اثبات: اگر x منفی نباشد آنگاه یا x صفر است یا x مثبت است. اگر x صفر باشد آنگاه $\sqrt{x} = 0$ پس \sqrt{x} منفی نیست.

اگر x مثبت باشد آنگاه \sqrt{x} عددی مثبت است پس \sqrt{x} منفی نیست.

پس در هر دو حالت ثابت کردیم «اگر x منفی نباشد آنگاه \sqrt{x} منفی نیست.»

و این گزاره هم‌ارز است با گزاره «اگر \sqrt{x} منفی باشد آنگاه x منفی است.» لذا قضیه ثابت شده است.

در روند رسیدن به خواسته سوال، یا همان «استدلال» یا «اثبات به کمک قواعد ریاضی و منطقی»، گاهی ممکن است دچار خطا شویم، این خطا گاهی به دلیل بی دقتی در انجام محاسبات است و گاهی به دلیل عدم آگاهی ما از موضوع یا قواعد و قوانین ریاضیات. کشف محل اشکال در استدلال همواره ساده نیست و نیاز به دقت در محاسبات و علم به قواعد و قوانین ریاضی دارد. چند نمونه از این خطاها را در زیر بررسی می‌کنیم.

مسئله

الف) در مراحل حل معادله $2x(x-2)=0$ خطاها در کدام مرحله وجود دارند؟ آنها را مشخص کنید.

$$2x(x-4)=0$$

$$1) 2x \times x - 4 = 0$$

$$2) 2x^2 = 4$$

$$3) x^2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$4) x = \sqrt{2}$$

پاسخ:

خطاها:

۱- در مرحله اول $2x$ باید در کل پرانتز ضرب شود ولی فقط در x ضرب شده است.

۲- در مرحله چهارم در جذرگیری ریشه منفی در نظر گرفته نشده است و $x = -\sqrt{2}$ نیز یک جواب است. زیرا $(-\sqrt{2})^2 = 2$.

ب) در مراحل حل معادله $2x(x-2)=0$ خطاهای موجود در استدلال را مشخص کنید.

$$2x(x-4)=0$$

$$1) \frac{2x(x-4)}{2x} = \frac{0}{2x}$$

$$2) \frac{\cancel{2x}(x-4)}{\cancel{2x}} = \frac{0}{2x} \Rightarrow x-4=0$$

$$3) x=4$$

پاسخ: خطاها: در مرحله اول نمی‌توانیم طرفین معادله را بر x یا $2x$ تقسیم کنیم

زیرا ممکن است x برابر صفر باشد و تقسیم بر صفر در ریاضیات تعریف نشده است.

(اگر می‌دانستیم که x برابر صفر نیست می‌توانستیم تقسیم کنیم).

پ) در مراحل ساده کردن کسر $\frac{(2x+5)(x-2)}{x^2-4}$ خطاها را مشخص کنید.

$$\frac{(2x+5)(x-2)}{x^2-4} \xrightarrow{\text{مرحله اول}} \frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\xrightarrow{\text{مرحله دوم}} \frac{\cancel{(x-2)}(2x+5)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{2x+5}{x+2} \xrightarrow{\text{مرحله سوم}} \frac{\cancel{2x}+5}{\cancel{x}+2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$$

پاسخ: خطاها:

در مرحله دوم مجاز به ساده کردن عبارت و حذف جملات مشابه در صورت و مخرج هستیم

زیرا بین جملات حذف شده و باقیمانده صورت و مخرج، علامت ضرب وجود دارد.

اما در مرحله سوم مجاز نیستیم که x را در صورت و مخرج ساده کنیم

زیرا بین جملات حذف شده و جملات باقیمانده علامت جمع یا تفریق وجود دارد.

ت) معادله $\frac{(2x+5)(x-2)}{x^2-4} = 0$ در زیر حل شده است، خطاهای حل معادله را مشخص کنید.

$$\frac{(2x+5)(x-2)}{x^2-4} \xrightarrow{\text{مرحله اول}} \frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = 0 \xrightarrow{\text{مرحله دوم}} \frac{(2x+5)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{2x+5}{x+2} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مرحله سوم}} \frac{2x+5}{x+2} \times \frac{1}{2x+5} = 0 \times \frac{1}{2x+5} = 0 \xrightarrow{\text{مرحله چهارم}} \frac{\cancel{2x+5}}{x+2} \times \frac{1}{\cancel{2x+5}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x+2} = 0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

پاسخ: خطاها:

در مرحله دوم

مجاز به ساده کردن عبارت و حذف جملات مشابه در صورت و مخرج هستیم زیرا بین جملات حذف شده و باقیمانده صورت و مخرج علامت ضرب وجود دارد.

اما در مرحله سوم

مجاز نیستیم که طرفین معادله را در عبارتی که علامت آن را نمی‌دانیم ضرب یا تقسیم کنیم

و بعد صورت و مخرج را ساده کنیم.

(برای محاسبه x کافی است بعد از مرحله دوم

صورت کسر را برابر صفر قرار داده و معادله را حل کنیم).

ث) عبارت $\sqrt{16+36}$ ساده شده است، خطاهای محاسبات در کدام مرحله وجود دارند؟

$$\sqrt{16+36} \xrightarrow{\text{مرحله اول}} \sqrt{4^2+6^2} \xrightarrow{\text{مرحله دوم}} \sqrt{4^2} + \sqrt{6^2} \xrightarrow{\text{مرحله سوم}} 4+6=10$$

پاسخ: خطاها:

۱- در محاسبات رادیکالی، رادیکال مجموع دو عبارت را نمی‌توان به صورت حاصل جمع رادیکال‌های آنها نوشت.

به عبارت دیگر $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ اما اگر بین دو عبارت زیر رادیکال عمل ضرب بود می‌توانیم بنویسیم: $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. پس خطا در مرحله اول به دوم وجود دارد.

چند نکته در انجام محاسبات در نامعادلات

نکته ۱: در نامعادلات و نامساوی‌های جبری نمی‌توان دو طرف نامساوی را در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم کرد مگر آنکه علامت آن عدد را بدانیم.

حالت اول: اگر دو طرف نامساوی در صفر ضرب شود، دو طرف نامساوی برابر صفر خواهد شد که بی‌معنی است.

$$3x-2 \leq x+1 \Rightarrow (3x-2) \times 0 \leq (x+1) \times 0 \Rightarrow 0 \leq 0$$

مثال ۱

حالت دوم: اگر دو طرف نامساوی در عددی منفی ضرب شود حتماً جهت نامساوی باید عوض شود.

$$3x-2 \leq x+1 \Rightarrow (3x-2) \times -2 \leq (x+1) \times -2 \Rightarrow -6x+4 \geq -2x-2$$

مثال ۲

حالت سوم: اگر دو طرف نامساوی را در عددی مثبت ضرب کنیم اشکالی ندارد و جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$3x-2 \leq x+1 \Rightarrow (3x-2) \times 2 \leq (x+1) \times 2 \Rightarrow 6x-4 \leq 2x+2$$

مثال ۳

نکته ۲: اگر $a < b$ آنگاه $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ و اگر $a < b < 0$ آنگاه $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$

$$0.2 < 0.4 \Rightarrow \frac{1}{.2} > \frac{1}{.4} \Rightarrow \frac{1}{.2} > \frac{1}{.4} \Rightarrow 5 > 2.5$$

مثال ۴

$$-4 < -2 \Rightarrow \frac{1}{-4} > \frac{1}{-2} \Rightarrow -0.25 > -0.5$$

مثال ۵

نکته ۳: اگر $0 \leq a < 1$ آنگاه $\sqrt{a} > a$ و $a > a^2$ و $(a^2 < a < \sqrt{a})$

$$0.1 > (0.1)^2 = 0.01 \text{ و } 0.1 = \sqrt{0.1} > 0.1$$

مثال ۶

نکته ۴: اگر $1 < a$ آنگاه $\sqrt{a} < a$ و $a < a^2$ و $(\sqrt{a} < a < a^2)$

۷۷. گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی (با علائم و نمادهای ریاضی) بازنویسی کنید.

- (الف) مجموع هر عدد حقیقی منفی با معکوسش از ۲- کوچک‌تر است.
 (ب) حاصل ضرب هر دو حقیقی مثبت، کوچک‌تر یا مساوی مربع نصف مجموع همان دو عدد است.
 (ج) حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آنها است.
 (د) مجموع مربعات دو عدد، بزرگ‌تر یا مساوی دو برابر مجموع آن دو عدد منهای یک است.
 (هـ) مجموع مربعات سه عدد، بزرگ‌تر یا مساوی مجموع حاصل ضرب دوجه‌دوی آن سه عدد است.

۷۸. عبارات زیر را به زبان ریاضی بازنویسی کنید در صورت امکان حل کنید.

- (الف) بیشترین مقدار تفاضل $\frac{1}{9}$ مربع عددی، از ۶ برابر آن عدد، را بیابید.
 (ب) بیشترین مقدار اختلاف مربع نصف عددی، از ۶ برابر همان عدد چیست؟
 (ج) عدد حقیقی بین دو عدد صفر و ۳ پیدا کنید که اختلاف ۳ برابر آن عدد با مربع خودش بیشترین مقدار باشد.
 (د) مستطیل‌هایی با ابعاد متفاوت موجود است باریک‌ترین آنها به ابعاد ۲۰ و ۶۰ می‌باشد. به ازای هر یک واحد که به عرض آن افزوده شود، ۲ واحد از طول آن کم می‌شود. بیشترین مساحت بین این مستطیل‌ها را بیابید.

۷۹. ثابت کنید اگر x و y دو عدد حقیقی باشند و $x \neq 3$ و $x + 4y^2 = 7$ آنگاه $y \neq -1$ است.

۸۰. با استفاده از عکس نقیض برای گزاره‌های زیر استدلال ارائه نمائید. (اثبات کنید).

(الف) اگر $x \neq 1$ و $\frac{y^3}{2x} = 4$ باشد، آنگاه داریم: $y \neq 2$

(ب) اگر $x \neq 4$ و $x^3 + y^3 = 65$ آنگاه $y \neq 1$ است.

(ج) اگر $y \neq 1$ و $x^3 + 2y = 10$ آنگاه $x \neq 2$ است.

(د) اگر n عدد طبیعی و $3n + 2$ عددی فرد باشد، آنگاه n نیز عددی فرد است.

(هـ) اگر n یک عدد طبیعی و $5n + 3$ زوج باشد، آنگاه n یک عدد فرد است.

(و) اگر $n \in \mathbb{Z}$ و n^2 فرد باشد آنگاه n نیز فرد است.

۸۱. برای گزاره زیر یک استدلال نادرست ارائه شده است دلیل نادرستی استدلال را بیان کنید.

گزاره: تساوی $\sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = 2\sqrt{11}$ برقرار است.

استدلال:

$$\sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = \sqrt{\frac{12 \times \cancel{3} + 4 \times 16}{2 \times \cancel{3}}} = \sqrt{\frac{12 + \cancel{3} \times 16}{\cancel{3}}} = \sqrt{12 + 32} = \sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = 2\sqrt{11}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس دوم از فصل اول

تبدیل گزاره‌های توصیفی به نمادهای ریاضی

۸۲. در کدام گزینه، گزاره فارسی به صورت نادرست به نماد ریاضی تبدیل شده است؟

۱) مجموع مکعبات دو عدد بزرگ‌تر از مکعب مجموع آن دو عدد است $(x+y)^3 < x^3 + y^3$

۲) ۱۵ درصد قیمت فروش کالایی برابر نصف سود آن است (x را قیمت فروش کالا و y را قیمت خرید آن در نظر بگیرید): $\frac{15}{100}x = \frac{x-y}{2}$

۳) تفاضل جذر عددی از نصف مجذور آن برابر مربع آن عدد است: $\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} = x^2$

۴) ریشه سوم مربع عددی از جذر مکعب آن عدد بزرگ‌تر نیست: $\sqrt[3]{x^2} \leq \sqrt{x^3}$

۸۳. نماد ریاضی عبارت «دو برابر تفاضل عددی از نصف آن عدد با مربع معکوس آن عدد برابر است» کدام است؟

۱) $2\left(\frac{x}{2} - x\right) = \frac{1}{x^2}$ ۲) $2\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2$ ۳) $2\left(x - \frac{x}{2}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2$ ۴) $\frac{x}{2} - 2x = \left(\frac{1}{x}\right)^2$

۸۴. نماد ریاضی چه تعداد از گزاره‌های زیر در مقابل آن درست نوشته شده است؟

الف) حاصل ضرب عددی در ربع آن عدد کوچک‌تر از چهار برابر آن عدد به علاوه ۲ است: $x \times \frac{1}{4}x < 4x + 2$

ب) سه برابر تفاضل نصف عددی از ۲۰ برابر آن عدد بزرگ‌تر از جذر مکعب آن عدد است: $3\left(\frac{1}{2}x - 20x\right) > \sqrt{x^3}$

پ) مربع مجموع دو عدد از مجموع مجذور مربع‌های آنها کوچک‌تر نیست: $(x+y)^2 \geq (x^2)^2 + (y^2)^2$

ت) مجموع معکوس‌های دو عدد حقیقی بزرگ‌تر از معکوس مجموع‌های آنها نیست: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x+y}$

ث) حاصل جذر معکوس عددی بزرگ‌تر از معکوس جذر ثلث آن عدد است: $\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{3}}}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۵. در یک کارخانه اگر x تعداد کالای تولید شده و p قیمت هر واحد کالا باشد. آن‌گاه تعداد کالای تولید شده ۵۰۰ تومان بیش‌تر از ۱۵ برابر مجذور قیمت کالا است. معادله درآمد کارخانه از کالای مورد نظر کدام است؟

تائیدی

۱) $R(x) = (15x)^2 + 500$ ۲) $R(x) = 500 + 15x^2$ ۳) $R(x) = x\sqrt{\frac{x-500}{15}}$ ۴) $R(x) = x\sqrt{\frac{x-500}{(15)^2}}$

۸۶. کمترین مقداری که از کسر کردن ۷ برابر عددی از مربع آن عدد به علاوه ۶، به دست می‌آید، چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{-25}{4}$ ۳) $\frac{-25}{2}$ ۴) $\frac{-37}{2}$

قیاس استثنایی و مغالطه

۸۷. نتیجه استدلال زیر کدام است؟

تائیدی

مقدمه ۱: اگر هوا بارانی باشد، آن‌گاه مردم کت قرمز می‌پوشند.

مقدمه ۲: هوا بارانی است.

نتیجه:

۱) زمین خیس می‌شود.

۲) آسمان ابری است.

۳) مردم کت قرمز می‌پوشند.

۴) هر نتیجه‌ای که با هوای بارانی مرتبط باشد می‌تواند صحیح باشد.

۸۸. نتیجه استدلال زیر کدام است؟

تالیف

مقدمه ۱: اگر شیراز پایتخت ایران باشد آن‌گاه شهر اصفهان در شمال پایتخت ایران قرار دارد.

مقدمه ۲: شهر اصفهان در شمال پایتخت ایران قرار ندارد.

نتیجه:

- ۱ شهر اصفهان در جنوب پایتخت ایران قرار دارد. ۲ شهر شیراز در جنوب پایتخت ایران قرار دارد.
۳ شهر اصفهان پایتخت ایران نیست. ۴ شهر شیراز پایتخت ایران نیست.

تالیف

۸۹. نتیجه استدلال زیر کدام است؟

مقدمه ۱: اگر شیراز پایتخت ایران باشد آنگاه شهر اصفهان در شمال پایتخت ایران قرار دارد.

مقدمه ۲: شهر شیراز پایتخت ایران نیست.

نتیجه:

- ۱ شهر اصفهان در شمال پایتخت ایران قرار ندارد. ۲ شهر اصفهان در جنوب پایتخت ایران قرار دارد.
۳ شهر اصفهان پایتخت ایران است. ۴ هیچ نتیجه منطقی از مقدمات فوق نمی‌توان به دست آورد.

تالیف

۹۰. کدام گزینه در مورد استدلال زیر صحیح نیست؟

مقدمه ۱: اگر دو خط بر هم عمود باشند، آن‌گاه زاویه بین دو قطر ۹۰ درجه است.

مقدمه ۲: دو خط L_1, L_2 بر هم عمود هستند.

نتیجه: زاویه بین دو خط L_1, L_2 برابر ۹۰ درجه است.

- ۱ نماد ریاضی این استدلال به صورت « $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ » است. ۲ این استدلال یک «قیاس استنتاجی» است.
۳ نتیجه به دست آمده، نتیجه یک گزاره عطفی است. ۴ نتیجه به دست آمده ممکن است نادرست باشد.

تالیف

۹۱. در مورد «استدلال زیر» چه تعداد از گزاره‌های «الف» تا «ت» صحیح هستند.

مقدمه ۱: اگر مثلثی متساوی‌الساقین نباشد، آن‌گاه متساوی‌الاضلاع هم نخواهد بود.

مقدمه ۲: مثلث ABC یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.

نتیجه: مثلث ABC یک مثلث متساوی‌الساقین است.

- الف) این استدلال یک مغالطه است. ب) نتیجه به دست آمده از این استدلال قطعاً نادرست است.
پ) روش این استدلال، نادرست است. ت) نتیجه این استدلال قطعاً درست است.
ث) این استدلال یک «قیاس استنتاجی» است.

- ۱ یک مورد ۲ دو مورد ۳ سه مورد ۴ چهار مورد

تالیف

۹۲. در مورد استدلال زیر کدام گزینه صحیح نیست؟

مقدمه ۱: اگر یکان عددی برابر صفر باشد، آن‌گاه آن عدد بر ۵ بخش پذیر است.

مقدمه ۲: عددی بر ۵ بخش پذیر است.

نتیجه: رقم یکان عدد a برابر صفر است.

- ۱ روش این نوع استدلال نادرست است. ۲ این استدلال یک مغالطه است.
۳ نتیجه این استدلال ممکن است درست باشد. ۴ با توجه به مقدمات، نتیجه قطعاً درست است.

تالیف

۹۳. در مورد استدلال زیر چه تعداد از گزاره‌های «الف» تا «ج» صحیح هستند.

مقدمه ۱: عدد a بر ۲ بخش پذیر است اگر و تنها اگر رقم یکان آن زوج باشد.

مقدمه ۲: رقم یکان عدد x زوج است.

نتیجه: عدد x بر ۲ بخش پذیر است.

- الف) این استدلال یک مغالطه است. ب) نتیجه این استدلال قطعاً درست است.
پ) روش این استدلال، نادرست است. ت) این استدلال یک «قیاس استثنایی» است.
ث) در این استدلال از قیاس استثنایی به شکل نادرست استفاده شده است. ج) نتیجه این استدلال ممکن است نادرست باشد.

- ۱ یک مورد ۲ دو مورد ۳ سه مورد ۴ چهار مورد

۹۴. در کدام گزینه از قیاس استنتاجی به شکل نادرست استفاده نشده است؟ تأییدی

۱) مقدمه اول: اگر اعداد a و b اول باشند، آن‌گاه ab مرکب است.

مقدمه دوم: عدد ۲۲ مرکب است.

نتیجه: اعداد ۲ و ۱۱ اعداد اول هستند.

۲) مقدمه اول: اگر باران ببارد، آن‌گاه زمین خیس می‌شود.

مقدمه دوم: زمین خیس نشده است.

نتیجه: باران نیاریده است.

۳) مقدمه اول: اگر مربع عددی زوج باشد، آن‌گاه آن عدد زوج است.

مقدمه دوم: ۸ عددی زوج است.

نتیجه: ۶۴ عددی زوج است.

۴) مقدمه اول: اگر p و q هر دو گزاره‌های نادرستی باشد، آن‌گاه گزاره $p \wedge q$ گزاره‌ای نادرست است.

مقدمه دوم: گزاره $p \wedge q$ دارای ارزش نادرست است.

نتیجه: گزاره‌های p و q دارای ارزش نادرست هستند.

عکس نقیض گزاره شرطی و خطای در استدلال

۹۵. کدام گزینه هم‌ارز گزاره «اگر در گزاره شرطی، مقدم دارای ارزش نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره شرطی درست است.» می‌باشد؟ تأییدی

۱) اگر در گزاره شرطی، مقدم دارای ارزش درست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره شرطی درست است.

۲) اگر در گزاره شرطی، مقدم دارای ارزش درست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره شرطی نادرست است.

۳) اگر در گزاره شرطی، ارزش گزاره شرطی درست باشد، آن‌گاه مقدم آن گزاره شرطی دارای ارزش درست است.

۴) اگر در گزاره شرطی، ارزش گزاره شرطی نادرست باشد، آن‌گاه مقدم آن گزاره شرطی دارای ارزش درست است.

۹۶. به جای اثبات گزاره شرطی «برای دو عدد a و b اگر $a \leq 0, b \leq 0$ آن‌گاه $a + b \leq 0$ کدام گزاره شرطی را می‌توان ثابت کرد؟ تأییدی

۱) اگر $a \geq 0, b \geq 0$ آن‌گاه $a + b \geq 0$

۲) اگر $a + b \leq 0$ آن‌گاه $a \leq 0, b \leq 0$

۳) اگر $a + b > 0$ آن‌گاه $a > 0, b > 0$

۴) اگر $a + b > 0$ آن‌گاه $a > 0$ یا $b > 0$

۹۷. گزاره «اگر ۷ زوج باشد، آن‌گاه ۷۷ اول است.» هم‌ارز کدام گزاره است؟ تأییدی

۱) اگر ۷ فرد باشد، آن‌گاه ۷۷ اول نیست.

۲) اگر ۷۷ اول نباشد، آن‌گاه ۷ زوج نیست.

۳) اگر ۷ فرد باشد، آن‌گاه ۷۷ اول است.

۴) اگر ۷۷ اول باشد، آن‌گاه ۷ زوج است.

۹۸. گزاره «اگر یک چهارضلعی مربع باشد، آن‌گاه اضلاعش مساویند.» هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ تأییدی

۱) اگر اضلاع یک چهارضلعی مساوی نباشند، آن‌گاه چهارضلعی مربع است.

۲) اگر اضلاع یک چهارضلعی مساوی باشند، آن‌گاه چهارضلعی مربع است.

۳) اگر اضلاع یک چهارضلعی مساوی نباشند، آن‌گاه چهارضلعی مربع نیست.

۴) اگر اضلاع یک چهارضلعی مساوی باشند، آن‌گاه چهارضلعی مربع نیست.

۹۹. اگر $y = \frac{2x-5}{3+3x}$ آن‌گاه در کدام یک از استدلال‌های زیر مقدار x بر حسب y درست به دست آمده است؟ تالیفی

۱) $y = \frac{2x-5}{3+3x}$ ۱

۲) $y = \frac{2x-5}{2x+x+3}$

۳) $y = \frac{\cancel{2x}-5}{\cancel{2x}+x+3} = \frac{-5}{x+3}$

۴) $y(x+3) = -5$

۵) $yx+3y = -5$

۶) $yx = -3y-5$

۷) $x = \frac{-3y-5}{y}$

۱) $y = \frac{2x-5}{3+3x}$ ۲

۲) $y = \frac{2x-5}{3(1+x)}$

۳) $3y(1+x) = 2x-5$

۴) $3y+x = 2x-5$

۵) $3y+5 = 2x-x$

۶) $3y+5 = x$

۱) $y = \frac{2x-5}{3+3x}$ ۳

۲) $y(3+3x) = 2x-5$

۳) $3y+3x = 2x-5$

۴) $-2x+3x = -3y-5$

۵) $x = -3y-5$

۱) $y = \frac{2x-5}{3+3x}$ ۴

۲) $y(3+3x) = 2x-5$

۳) $3y+3xy = 2x-5$

۴) $3xy = 2x-5-3y$

۵) $3xy-2x = -5-3y$

۶) $x(3y-2) = -3y-5$

۷) $x = \frac{-3y-5}{3y-2}$



پاسخنامه تشریحی

۲. در قسمت «الف» اگر گزاره $5 < 1$ را معادل p و گزاره $3 = 2$ را معادل q در نظر بگیریم، ملاحظه می‌شود که گزاره p دروغ و گزاره q نیز دروغ است، ولی نتیجه $q \Rightarrow p$ راست است؛ زیرا از بیان گزاره‌های نادرست مانند p به نتیجه‌ای نادرست رسیدن مانند q عجیب و دور از انتظار نیست.

در قسمت «ب» اگر گزاره 6 زوج است را معادل p و گزاره برف سیاه است را معادل q در نظر بگیریم ملاحظه می‌شود که گزاره p ارزشی راست و گزاره q ارزشی نادرست دارد، پس نتیجه می‌گیریم که $q \Rightarrow p$ نادرست است؛ زیرا در منطق ریاضی از گزاره‌ای درست مانند p نباید گزاره‌ای نادرست مانند q نتیجه‌گیری شود.

در قسمت «ج» برخلاف قسمت «ب» ملاحظه می‌شود که جای مقدم و تالی عوض شده، یعنی می‌توانیم آن را به صورت $q \Rightarrow p$ در نظر بگیریم، لذا ارزش $q \Rightarrow p$ درست است یعنی از یک گزاره نادرست مانند q می‌توانیم گزاره‌ای درست مانند p را نتیجه بگیریم.

۴. با توجه به تعریف ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ که معادل با $(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q)$ است، لذا با مشخص کردن ارزش هر یک از گزاره‌های فوق نتیجه می‌گیریم که گزاره‌های دو شرطی (الف) و (د) درست و گزاره‌های (ب) و (ج) نادرست‌اند.

۵. با توجه به تمرین «۲» خواهیم داشت:

الف) $p \wedge q$	ب) $p \wedge \sim q$
ج) $\sim(p \vee q)$	د) $\sim p \wedge \sim q$
ه) $p \vee (\sim p \wedge q)$	و) $\sim(\sim p \vee \sim q)$

۶. الف) می‌دانیم هر عدد ضربدر (-1) با قرینه‌اش برابر می‌شود.

$$-5 \times \boxed{-1} = +5$$

ب) با توجه به اینکه هر عدد ضربدر صفر با صفر برابر می‌شود

پس به جای $\boxed{\quad}$ عدد صفر را باید قرار داد.

$$\boxed{0} \times \frac{3}{7} = 0$$

ج) باید حاصل داخل پرانتز یکی از اعداد (6) یا (-6) شود تا مربع آن با 36 برابر شود، لذا چون مثبت 8 داریم پس باید

$$\text{معادله } \boxed{\quad} + 8 = 6 \text{ یا } \boxed{\quad} + 8 = -6 \text{ را حل کنیم. لذا داریم:}$$

$$\boxed{\quad} + 8 = -6 \Rightarrow \boxed{\quad} = -6 - 8 \Rightarrow \boxed{\quad} = -14$$

یا

$$\boxed{\quad} + 8 = 6 \Rightarrow \boxed{\quad} = 6 - 8 \Rightarrow \boxed{\quad} = -2 \Rightarrow (\boxed{\quad} + 8)^2 = 36$$

د) با توجه به علامت عضویت باید به جای $\boxed{\quad}$ عددی را قرار دهیم که حاصل کل کسر با یکی از اعداد مجموعه برابر باشد، لذا با توجه به مخرج کسر که عدد 3 می‌باشد و یکی از اعضای

$$\text{مجموعه نیز برابر } \frac{1}{3} \text{ است لذا کافی است معادله } \frac{8 \times \boxed{\quad}}{3} = \frac{1}{3}$$

را حل کنیم. چون مخرج‌ها مساوی هستند خواهیم داشت:

۱. با توجه به خواص گزاره‌ها که جمله‌های خبری هستند و فقط دارای یک ارزش درستی یا نادرستی می‌باشند خواهیم داشت:

الف) فارغ از درستی یا نادرستی جمله، یک گزاره می‌باشد.

ب) یک گزاره است. ارزش آن نادرست است.

ج) یک گزاره است. ارزش آن نادرست است.

د) یک گزاره است. ارزش آن درست است.

ه) به خودی خود یک گزاره نیست؛ مگر اینکه به جای x عدد یا نامی قرار دهند که یا درست است یا نادرست. آن وقت یک گزاره می‌شود.

و) یک گزاره است. چون به جای n فقط می‌توان اعداد طبیعی را قرار داد که یا درست هستند یا نادرست.

ز) یک جمله خواهشی است و درستی یا نادرستی از آن استنباط نمی‌شود.

ح) گزاره نیست، زیرا درستی یا نادرستی از آن استنباط نمی‌شود و نوعی بیان احساس است.

ط) گزاره نیست. چون یک جمله خبری نیست.

ی) گزاره است. چون درستی و نادرستی آن قابل بررسی است.

ک) گزاره است. فارغ از درستی یا نادرستی آن در هر صورت یک گزاره می‌باشد.

ل) یک گزاره درست است.

م) یک گزاره نادرست است زیرا عدد 5 فقط عضو مجموعه است و زیرمجموعه آن نیست، زیرا شرایط زیرمجموعه بودن یکی این است که خودش باید مجموعه باشد، یعنی نماد «آکولاد» را داشته باشد و دیگری اینکه مجموعه اولی هر چه دارد مجموعه دومی نیز داشته باشد.

ن) یک گزاره درست است با توجه به تعریف زیرمجموعه که در قسمت قبل بیان شد.

۲. با توجه به نمادهای (رابطه‌های) داده شده و معنی آنها که در هر

حالت « \wedge » را با «و»، « \vee » را با «یا»، « \sim » را با «چنین نیست که» یا «نه» و « \Rightarrow » را با «اگر ... آن‌گاه» و « \Leftrightarrow » را با

«اگر و فقط اگر» معنی می‌کنیم و سپس ساده کردن جمله خواهیم داشت:

الف) هوا سرد نیست.

ب) هوا سرد است و باران می‌بارد.

ج) هوا سرد است یا باران می‌بارد.

د) باران می‌بارد اگر و فقط اگر هوا سرد است.

ه) اگر هوا سرد است، آنگاه باران نمی‌بارد.

و) باران می‌بارد یا هوا سرد نیست.

ز) هوا سرد نیست و باران نمی‌بارد.

ح) هوا سرد است اگر و فقط اگر باران نمی‌بارد.

ط) چنین نیست که باران نمی‌بارد. (در این گزاره ملاحظه می‌شود که معنی آن معادل «باران می‌بارد» می‌باشد.)

ی) اگر هوا سرد است و باران نمی‌بارد، آنگاه هوا سرد است.

۹. با توجه به حروف گزاره‌ای p ، q و r که اگر به ترتیب آنها را برای $x < y$ ، $x < z$ و $y < z$ به کار ببریم خواهیم داشت:

$$(p \wedge q) \Rightarrow r$$

۱۰. با استفاده از حروف گزاره‌ای p و q که اگر به ترتیب برای گزاره‌های «احمد دانش آموز است» و «احمد مریض است» به کار ببریم خواهیم داشت:

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

۱۱. الف) فرض کنیم p گزاره « $5 = -(-2) \times 3$ » و q گزاره « $5 - 5 = 0$ » باشد، با توجه به اینکه p نادرست و q درست است. بنابر جدول ارزش درستی ترکیب شرطی، نتیجه می‌گیریم $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است.

ب) فرض می‌کنیم p گزاره « $10 + 5 = 4$ » و q گزاره « $10 + 10 = 10$ » باشد. با توجه به نادرستی هر دو گزاره p و q نتیجه می‌گیریم که $p \Leftrightarrow q$ درست است و با توجه به صورت سؤال که نقیض گزاره $q \Leftrightarrow p$ را خواسته پس گزاره قسمت «ب» نادرست است.

ج) فرض می‌کنیم p گزاره « $\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{4}$ » و q گزاره « $2\sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{3}$ » باشد. با توجه به گزاره‌های داده شده ملاحظه می‌شود که p نادرست و q درست است؛ لذا با توجه به صورت سؤال و آنچه در گزاره‌های فصلی داشتیم، گزاره $p \vee q$ گزاره‌ای درست است. ولی چون کل گزاره داده شده نقض شده، پس گزاره قسمت «ج» نادرست است.

د) فرض می‌کنیم p گزاره «مشهد در عراق است.» و q گزاره «کربلا در ایران است.» باشد. با توجه به اینکه هر دو گزاره p و q نادرست هستند پس گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ درست است؛ ولی با توجه به صورت مسأله که نقیض کل این گزاره شرطی است، لذا قسمت «د» نادرست است.

$\frac{1}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow \square = \frac{1}{8}$

البته برای اینکه حاصل عبارت $\frac{8 \times \square}{3}$ برابر ۹ یا ۲ نیز بشود می‌توان معادلاتی را تشکیل داد تا عدد مورد نظر به دست آید. مثلاً برای ۹ عدد مورد نظر $\frac{27}{8}$ و برای ۲ عدد مورد نظر برابر $\frac{6}{8}$ خواهد بود.

ه) با توجه به علامت عضو نبودن (\notin) و با توجه به اینکه تمام اعضای Z اعداد صحیح و رند می‌باشند؛ پس کافی است به جای \square یک عدد کسری یا رادیکالی قرار دهیم مثلاً:

$$4 + \frac{2}{3} \notin Z \quad \text{یا} \quad 4 + \sqrt{2} \notin Z$$

و) می‌توانیم از نماد عضویت استفاده کنیم: یعنی: $\square \in \{0\}$

ز) با توجه به تساوی ملاحظه می‌شود که حاصل داخل پرانتز باید با عدد ۵ برابر شود تا پرانتز در عدد ۴ ضرب شود و حاصل ۲۰ گردد؛ لذا کافی است معادله $\square - 7 = 5$ را حل کنیم که خواهیم داشت: $\square = 5 + 7 \Rightarrow \square = 12$

۷. این سؤال را می‌توان به چندین حالت مختلف پاسخ داد که در ذیل چند نمونه آن آورده شده است.

اول: «اگر $x < y$ آنگاه $2x < 2y$ و اگر $2x < 2y$ آنگاه $x < y$ »

دوم: «شرط لازم و کافی برای آنکه $x < y$ باشد آن است که $2x < 2y$ »

سوم: « $x < y$ اگر و فقط اگر $2x < 2y$ »

۸. فرض کنیم p گزاره «نقطه M بر روی عمود منصف AB است»، و q گزاره « $MA = MB$ » باشند. در این صورت خواهیم داشت:

$$p \Leftrightarrow q$$

۱۲. الف) $\sim(p \wedge \sim q)$

برای حل اینگونه مسائل از دو روش زیر می‌توان استفاده نمود.
روش اول: رسم جدول ارزشی برای کل گزاره یعنی:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
د	د	ن	ن	د
د	ن	د	د	ن
ن	د	ن	ن	د
ن	ن	د	ن	د

روش دوم: ابتدا جدول زیر را رسم می‌کنیم:

p	q	\sim	(p	\wedge	\sim	q)
د	د					
د	ن					
ن	د					
ن	ن					
مرحله						

توجه داشته باشید که در سمت راست بالای جدول، متغیرهای موجود در گزاره مرکب اصلی صورت سؤال نوشته شده است. همچنین توجه کنید که زیر هر متغیر یا رابط موجود در گزاره مرکب اصلی، یک ستون قرار دارد. آنگاه ارزش‌های درستی در مراحل مختلف به صورت زیر وارد جدول می‌شوند که شماره مراحل را در مقابل «مرحله» می‌نویسیم:

مرحله اول: نوشتن حالات مختلف برای دو گزاره اصلی p و q :

p	q	\sim	$(p \wedge \sim q)$
د	د		د
د	ن		د
ن	د		ن
ن	ن		ن
مرحله			(۱)

ورود به مرحله دوم (نقیض گزاره q):

p	q	\sim	$(p \wedge \sim q)$
د	د		ن
د	ن		د
ن	د		ن
ن	ن		د
مرحله			(۲)

ورود به مرحله سوم (عطف گزاره p و مرحله (۲)):

p	q	\sim	$(p \wedge \sim q)$
د	د		ن
د	ن		د
ن	د		ن
ن	ن		د
مرحله			(۳)

ورود به مرحله چهارم (مرحله آخر) یعنی جواب (نقیض مرحله (۳)):

p	q	\sim	$(p \wedge \sim q)$
د	د	د	ن
د	ن	ن	د
ن	د	د	ن
ن	ن	د	د
مرحله			(۴)

پس از این برای جدول ارزشی مرحله‌ای، فقط جدول آخر را رسم می‌کنیم.
روش دوم:

p	q	$\sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$
د	د	ن	د
د	ن	د	ن
ن	د	ن	د
ن	ن	د	د

ب) $\sim p \wedge q$

روش اول (جدول مرحله‌ای):

p	q	\sim	p	\wedge	q
د	د	ن	د	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	ن	ن	ن
مرحله		(۲)	(۱)	(۳)	(۱)

روش دوم (جدول خلاصه):

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
د	د	ن	ن
د	ن	ن	ن
ن	د	د	د
ن	ن	د	ن

ج) $\sim (p \vee q)$

روش اول (جدول مرحله‌ای):

p	q	\sim	(p	\vee	q)
د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	ن	ن
مرحله		۳	۱	۲	۱

روش دوم (جدول خلاصه):

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$
د	د	د	ن
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	د

د) $\sim (p \vee \sim q)$

روش اول (جدول مرحله‌ای):

p	q	\sim	(p	\vee	\sim	q)
د	د	ن	د	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	د	ن
ن	د	د	ن	ن	ن	د
ن	ن	ن	ن	د	د	ن
مرحله		۴	۱	۳	۲	۱

روش دوم (جدول خلاصه):

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim (p \vee \sim q)$
د	د	ن	د	ن
د	ن	د	د	ن
ن	د	ن	ن	د
ن	ن	د	د	ن

هـ) $p \vee \sim (p \wedge q)$
جدول خلاصه:

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$p \vee \sim (p \wedge q)$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	د	د

نکته به جدول ترکیبات منطقی که پاسخ‌های آنها تماماً درست یا راست هستند راستگو می‌گویند و آن را با T نمایش می‌دهند.

و) $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$
جدول خلاصه:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$
د	د	د	د	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	د	ن

نکته چون ارزش راستی و ترکیب منطقی $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$ به ازای جمیع ارزش‌های p و q مساوی نادرست (دروغ) است لذا به آن یک گزاره تناقض می‌گویند و آن را با F نمایش می‌دهند.

ز) $\sim (p \Rightarrow \sim q)$
روش اول (جدول خلاصه):

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$	$\sim (p \Rightarrow \sim q)$
د	د	ن	ن	د
د	ن	د	د	ن
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	د	ن

روش دوم (جدول مرحله‌ای):

p	q	\sim	(p	\Rightarrow	\sim	q)
د	د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	د	د	ن
ن	د	ن	ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د	د	ن
مرحله		۴	۱	۳	۲	۱

ح) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
روش اول (جدول خلاصه):

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	ن	د

روش دوم (جدول مرحله‌ای):

p	q	(p	∧	q)	⇒	(p	∨	q)
د	د	د	د	د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	ن	د	د	د	ن
ن	د	ن	ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	د	ن	ن	ن
مرحله		۱	۲	۱	۳	۱	۲	۱

$$\sim (p \wedge q) \vee \sim (p \Leftrightarrow q) \quad \text{ط}$$

روش اول (جدول خلاصه):

p	q	$p \wedge q$	$q \Leftrightarrow p$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim (q \Leftrightarrow p)$	$\sim (p \wedge q) \vee \sim (p \Leftrightarrow q)$
د	د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د

روش دوم (جدول مرحله‌ای):

p	q	~	(p	∧	q)	∨	~	(q	⇔	p)
د	د	ن	د	د	د	ن	ن	د	د	د
د	ن	د	د	ن	ن	د	د	ن	ن	د
ن	د	د	ن	ن	د	د	د	د	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	د	ن	ن	د	ن
مرحله		۳	۱	۲	۱	۴	۳	۱	۲	۱

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q) \quad \text{ی}$$

روش جدول خلاصه:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن

$$(p \Rightarrow q) \vee \sim (p \Leftrightarrow \sim q) \quad \text{ک}$$

روش جدول مرحله‌ای:

p	q	(p	⇒	q)	∨	~	(p	⇔	~	q)
د	د	د	د	د	د	د	د	ن	ن	د
د	ن	د	ن	ن	ن	ن	د	د	د	ن
ن	د	ن	د	د	د	ن	ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د	ن	د	د	ن	ن	د	ن
مرحله		۱	۲*	۱	۵	۴	۱	۳	۲	۱

نکته در جدول فوق ملاحظه می‌شود که مرحله ۳ در قسمت راست جدول نتیجه مراحل ۲ و ۱ از گزاره p است و مرحله ۴ نقیض مرحله ۳ و مرحله ۵ ترکیب عطفی مرحله ۴ و مرحله ۲* می‌باشد.

$$ل) [p \Rightarrow (\sim q \vee r)] \wedge \sim [q \vee (p \Leftrightarrow \sim r)]$$

روش جدول مرحله‌ای:

p	q	r	[p \Rightarrow (\sim q \vee r)]	\wedge	\sim	[q \vee (p \Leftrightarrow \sim r)]
د	د	د	د	ن	ن	د
د	د	ن	ن	ن	ن	د
د	ن	د	د	د	د	ن
د	ن	ن	د	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د	د	ن
ن	د	ن	ن	ن	ن	د
ن	ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د	د	ن
مرحله	۱	۴*	۲	۱	۳	۱

نکته مرحله ۶ ترکیب فصلی مرحله ۵ و مرحله ۴* می‌باشد که جواب نهایی است.

$$م) (p \wedge \sim q) \vee r$$

روش جدول مرحله‌ای:

p	q	r	(p \wedge \sim q)	\vee	r
د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن
ن	ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	ن	د	ن
مرحله		۱	۳	۲	۱

$$ن) \sim p \vee (q \wedge \sim r)$$

روش جدول مرحله‌ای:

p	q	r	\sim p	\vee	(q \wedge \sim r)
د	د	د	ن	ن	د
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	د
ن	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	ن
ن	ن	د	د	د	ن
ن	ن	ن	د	د	ن
مرحله		۲	۱	۴	۱

$$(p \vee r) \wedge (q \vee \sim r)$$

روش جدول مرحله‌ای:

p	q	r	(p	∨	~	r)	∧	(q	∨	~	r)
د	د	د	د	د	ن	د	د	د	د	ن	د
د	د	ن	د	د	د	ن	د	د	د	د	ن
د	ن	د	د	د	ن	د	ن	ن	ن	ن	د
د	ن	ن	د	د	د	ن	د	ن	د	د	ن
ن	د	د	ن	ن	ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د	ن	د	د	د	د	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	د	ن	ن	ن	ن	د
ن	ن	ن	ن	د	د	ن	د	ن	د	د	ن
مرحله			۱	۳	۲	۱	۴	۱	۳	۲	۱

گزینه ۲: از طرفی گزاره‌ها از بین جملات خبری می‌باشند، پس هر گزاره‌ای «جمله‌ای خبری است که قابلیت بررسی دارد.» (نادرست)

گزینه ۳: از طرفی می‌دانیم که اگر جمله‌ای خبری باشد ولی نتوانیم ارزش درستی یا نادرستی آن را به طور قطع مشخص کنیم (مثلاً: علی پسر بهتری نسبت به حسین است.) آن جمله خبری یک گزاره نیست. (درست).

اما بعضی از گزاره‌ها جمله خبری نادرست می‌باشند. مثلاً جمله $\sqrt{3}$ عددی گویا است، یک جمله خبری است که گزاره‌ای نادرست است.

نکته می‌توان به کمک نمودار ون، رابطه زیر را برای جملات خبری و گزاره در نظر گرفت. به عبارت دیگر این دو مجموعه، از نظر روابط منطقی، رابطه عموم و خصوص مطلق دارند.



پاسخ گزینه ۳ است

۱۵. جمله «الف» یک جمله خبری است و گزاره نیز هست، که ممکن است درستی یا نادرستی آن را ندانیم، اما می‌دانیم که یا قطعاً درست است و یا قطعاً نادرست است (با محاسبه می‌توان نشان داد). جملات «ب» و «ت» جملات خبری هستند اما با توجه به نظرات افراد مختلف در مورد آنها، نمی‌توانیم دقیقاً یکی از ارزش‌های درست یا نادرست را به آنها نسبت دهیم؛ پس گزاره نیستند. جمله «پ» اصلاً خبری نیست، پس گزاره نیست. جمله «ث» نیز یک جمله خبری و یک گزاره است اما نادرست می‌باشد. جمله «ج» یک جمله خبری است (کتاب منطق سال دهم مشاوران آموزش صفحه ۸۷ چاپ دوم ۱۳۹۵) و ملاک باهوش بودن افراد سلیقه‌ای نیست و تعریف مشخصی دارد (امروزه می‌توان ضریب هوشی افراد را تعیین کرد) پس قابل صدق و کذب است پس یک گزاره است. (حتماً به کتاب منطق مراجعه کنید.) پس از بین جملات خبری (الف، ب، ت، ث و ج) جملات «ب» و «ت» گزاره نیستند.

پاسخ گزینه ۲ است

پاسخ سوالات چهارگزینه‌ای درس اول از فصل اول

۱۳. بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: طبق تعریف یک گزاره در منطق ریاضی، گزاره‌ها جملات خبری هستند که بتوانیم (در حال یا در آینده) دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست را به آنها نسبت دهیم، (هر چند خودمان نتوانیم درستی یا نادرستی ارزش آن عبارت را تشخیص دهیم.) پس یک گزاره باید دو ویژگی به این قرار داشته باشد: (۱) جمله‌ای خبری باشد. (۲) ارزش آن یا حتماً درست و یا حتماً نادرست باشد (هر چند ما ندانیم که درست است یا نادرست است). (نادرست)

گزینه ۲: برخی از جملات خبری که نظرات افراد مختلف در مورد درستی یا نادرستی آنها متفاوت است؛ مثلاً «درس عربی از درس فلسفه آسان‌تر است» گزاره به حساب نمی‌آیند، حتی اگر از نظر خودمان حتماً درست و یا حتماً نادرست باشد؛ زیرا ممکن است نظرات افراد مختلف در مورد آن یکسان نباشد، مثلاً اگر ما با این جمله حتماً مخالف باشیم، باز هم از نظر منطقی یک گزاره به حساب نمی‌آید. (نادرست)

گزینه ۳: ما در منطق گزاره‌ها، برای گزاره بودن به درستی یا نادرستی یک عبارت کاری نداریم مثلاً عبارت « $1 - 2^{1003}$ عددی اول است» یک گزاره منطقی است؛ در صورتی که شاید ما ندانیم که آیا $1 - 2^{1003}$ اول است و یا اول نیست، اما می‌دانیم که یا حتماً اول است و یا حتماً اول نیست (با محاسبات می‌توان اول بودن یا نبودن آن را اثبات کرد) (نادرست)

گزینه ۴: در منطق ما «اعتبار استدلال» را می‌خواهیم، و نه «درستی یا نادرستی جمله را» پس کار منطق تشخیص اعتبار استدلال است و به درستی یا نادرستی عبارت کاری ندارد. (درست)

پاسخ گزینه ۲ است

۱۴. بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: طبق تعریف گزاره، هر جمله خبری که بتوانیم دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست را به آن نسبت دهیم یک گزاره است. پس به عبارتی می‌توان گفت: «یک جمله خبری باید شرایطی را داشته باشد تا یک گزاره باشد». پس هر جمله خبری یک گزاره نیست. (نادرست)

۱۶. بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: عبارت این گزینه یک جمله خبری کاملاً درست است، پس یک گزاره است.

گزینه «۲»: عبارت این گزینه یک جمله خبری است که دقیقاً نمی‌توان ارزش درستی یا نادرستی آن را مشخص کرد. پس یک گزاره نیست.

گزینه «۳»: عبارت این گزینه یک جمله خبری نادرست است، پس یک گزاره نادرست است.

گزینه «۴»: عبارت این گزینه یک جمله خبری است، اما اگر عبارت «به نظر احمد» را نداشت ارزش درستی یا نادرستی آن مشخص نبود (زیرا ملاک مهم‌تر بودن مشخص نیست). اما چون نظر احمد را بیان کرده است، پس در اینجا نسبت دادن یک قول (عبارت) را به احمد بررسی می‌کنیم. یعنی بررسی می‌کنیم که آیا احمد این جمله را گفته است یا نگفته است؟ که قابلیت بررسی کردن را دارد. پس یک گزاره است اما درست یا نادرست بودن آن ممکن است بر ما معلوم نباشد.

پاسخ گزینه ۱۳ است

۱۷. در حالت کلی، تعداد حالت‌های ارزشی n گزاره برابر 2^n می‌باشد. پس تعداد حالت‌های ارزشی پنج گزاره برابر $2^5 = 32$ است و نیز تعداد حالت‌های ارزشی برای سه گزاره برابر $2^3 = 8$ می‌باشد. پس $2^2 = 4 = \frac{2^2}{8}$ پاسخ سوال است.

نکته: با اضافه کردن هر گزاره به گزاره‌های قبلی، تعداد حالت‌های ارزشی جدید دو برابر تعداد حالت‌های ارزشی قبل می‌شود. مثلاً تعداد حالت‌های ارزشی برای ۳ گزاره دو برابر تعداد حالت‌های ارزشی ۲ گزاره است. پس با اضافه کردن m گزاره به گزاره‌های قبل تعداد حالت‌های ارزشی 2^m برابر خواهد شد.

پاسخ گزینه ۱۳ است

۱۸. از آن جا که هر گزاره یک جمله خبری است پس حتماً دارای فعل است و برای نقیض یک گزاره کافی است «فعل جمله را منفی کنیم» پس کاری به درستی یا نادرستی آن گزاره نداریم، اما چون فعل آن را نفی کردیم، اگر ارزش یک گزاره درست باشد، ارزش نقیض آن نادرست است و بالعکس. بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: نقیض گزاره «علی برادر زهرا نیست.» گزاره «علی برادر زهرا است.» می‌باشد. در این گزینه درست است که در گزاره نقیض فعل جمله نفی شده ولی برای نوشتن نقیض یک گزاره نباید جای موضوع و محمول جمله را تغییر دهیم (نادرست)

گزینه «۲»: با استدلال گزینه ۱، نقیض گزاره گزینه دو نیز درست نوشته نشده است؛ زیرا درست است که فعل جمله را نفی کردیم ولی محمول جمله (غیر اول) را تغییر داده‌ایم. (نادرست)

گزینه «۳»: چون فعل جمله نفی نشده پس نقیض آن درست نوشته نشده است. توجه داشته باشید که گزاره «عدد ۷ زوج

است.» و گزاره «عدد ۷ فرد است.» از لحاظ ارزشی مخالف یکدیگر هستند اما از نظر گزاره‌های منطقی نقیض یکدیگر نیستند، از نظر علم ریاضی نیز عددی می‌تواند زوج نباشد و فرد هم نباشد. مانند عدد $3/75$. (نادرست)

گزینه «۴»: نقیض گزاره درست نوشته شده است، زیرا یکی از راه‌های نوشتن نقیض گزاره این است که عبارت «چنین نیست که» به ابتدای گزاره اضافه شود. (درست)

پاسخ گزینه ۱۴ است

۱۹. از آن جا که هر گزاره یک جمله خبری است پس حتماً دارای فعل است و برای نقیض یک گزاره کافی است «فعل جمله را منفی کنیم» پس کاری به درستی یا نادرستی آن گزاره نداریم، اما چون فعل آن را نفی کردیم، اگر ارزش یک گزاره درست باشد، ارزش نقیض آن نادرست است و بالعکس. بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: یک گزاره نادرست است، نقیض آن عبارت است از «چنین نیست که عدد ۱۲ کوچکتر از عدد ۱۱ است» یا «عدد ۱۲ کوچکتر از عدد ۱۱ نیست» که این جمله‌ها از لحاظ معنا و مفهوم دقیقاً معادل است با عبارت «عدد ۱۲ نا کوچکتر از عدد ۱۱ است» (کوچکتر نیست معادل است با نا کوچکتر است). پس از نظر معنایی نقیض آن درست نوشته شده است، اما در علم منطق کاری به معنا و مفهوم عبارت نداریم و جملات را معنایی بررسی نمی‌کنیم پس نقیض آن درست نوشته نشده است. پس پاسخ گزینه یک است. اگر بخواهیم به زبان ریاضی بنویسیم داریم:

$$p: (12 < 11) \sim p: (12 < 11) \text{ یا } p: 12 < 11 \sim p: 12 < 11$$

گزینه‌های «۲» و «۳»: با استدلال گزینه «۱»، نقیض گزاره گزینه‌های دو و سه بدون توجه به ارزش گزاره نقیض آنها، درست نوشته شده است، زیرا فعل جمله را نفی کردیم.

گزینه «۴»: این گزینه نقیض گزاره درست نوشته شده است، زیرا یکی از راه‌های نوشتن نقیض گزاره این است که عبارت «چنین نیست که» به ابتدای گزاره اضافه شود.

پاسخ گزینه ۱۴ است

۲۰. ترکیب عطفی دو گزاره دلخواه p و q را با عبارت $p \wedge q$ نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم « p و q » و این گزاره فقط و فقط وقتی دارای ارزش صحیح است که هر دو گزاره p و q دارای ارزش صحیح باشند. بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: یک عبارت «ترکیب فصلی» اشتباه است که باعث نادرست بودن این گزینه برای این سوال می‌باشد. (نادرست)

گزینه «۲»: می‌دانیم که درستی هر دو گزینه با هم، درستی گزاره $p \wedge q$ را نتیجه می‌دهد. پس لفظ «یا» در این گزینه اشتباه است. طبق تعریف ترکیب عطفی دو گزاره p و q ، می‌دانیم اگر یکی و یا هر دو گزاره p و q نادرست باشند (حداقل یکی از گزاره‌های p یا q نادرست باشد)، آنگاه ترکیب عطف آنها نیز نادرست خواهد بود. (نادرست)

گزینه «۴»: طبق تعریف می‌دانیم که درستی گزاره $p \wedge q$ لزوماً درستی هر دو گزاره p و q را نتیجه خواهد داد. (نادرست)

پاسخ گزینه ۱۴ است

۲۱. با نگاهی به هر چهار گزینه مشاهده می‌کنیم که تمام آنها ترکیب عطفی دو گزاره می‌باشند، پس زمانی یک گزاره درست هستند که از دو گزاره درست تشکیل شده باشند تا ترکیب عطفی آنها گزاره‌ای درست باشد. به عبارت دیگر گزاره $\square \wedge \square$ زمانی درست است که به جای هر دو گزاره‌ای درست قرار داشته باشد و چون در صورت سوال هر دو گزاره p و q گزاره‌های نادرست می‌باشند پس $\sim p, \sim q$ هر دو گزاره‌هایی درست هستند پس گزینه چهار صحیح است زیرا ترکیب عطفی دو گزاره صحیح می‌باشد.

پاسخ گزینه ۴ است

۲۲. وقتی بین دو عبارت حرف عطف «و» باشد، آنگاه یک ترکیب عطفی از دو گزاره را داریم و ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره آن ارزش درست داشته باشند و چون گزاره‌های «۱۲۱ مضرب ۱۲ نیست» و « $\sqrt{3}$ مثبت است» هر دو گزاره‌های درستی هستند. (عددی بر ۱۲ بخش پذیر است که بر اعداد ۳ و ۴ بخش پذیر باشد و یا می‌توان با عمل تقسیم درستی عبارت را نشان داد، همچنین می‌دانیم که $\sqrt{3}$ عددی مثبت است (با گویا و گنگ اشتباه نگیرد) زیرا از صفر بزرگ‌تر است.) پس در بین گزینه‌ها، گزینه‌ای پاسخ صحیح است که دارای ارزشی درست باشد، حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: صحیح است، چون مربع هر عدد زوج عددی زوج است (هر عدد زوج را اگر در خودش ضرب کنیم دوباره یک عدد زوج به دست می‌آید) و همچنین اگر مربع عددی زوج باشد آنگاه خود آن عدد هم زوج خواهد بود. (اگر عدد زوجی، جذر کامل داشته باشد آنگاه حاصل جذر آن هم عددی زوج خواهد بود.) پس گزینه یک ترکیب عطفی دو گزاره صحیح است و مانند صورت سوال گزاره‌ای درست است.

گزینه «۲»: صحیح نیست؛ زیرا گزاره «۵ عددی فرد است» درست است و گزاره «۴ عددی اول است» نادرست (۴ عددی زوج و مرکب است $4 = 2 \times 2$) پس ترکیب عطفی آنها گزاره‌ای نادرست است اما ارزش گزاره صورت سوال درست است.

گزینه «۳»: صحیح نیست؛ زیرا ترکیب عطفی دو گزاره است که اولی نادرست (۲ عددی اول است (تنها عدد زوج و اول عدد ۲ است)) و دومی گزاره‌ای درست است (همه سوره‌های قرآن با بسم‌الله شروع نمی‌شوند). پس ترکیب عطفی آنها نیز گزاره‌ای نادرست است.

گزینه «۴»: گزاره‌ای نادرست است؛ زیرا ترکیب عطفی یک گزاره درست (گزاره اول: «اگر عددی مثبت نباشد، یا منفی است یا صفر است») و یک گزاره نادرست است. یادتان باشد که ارزش گزاره « $\sim p$ » به گزاره « p » بستگی دارد، اگر p گزاره‌ای درست باشد $\sim p$ نادرست است و اگر گزاره p نادرست باشد آنگاه گزاره $\sim p$ درست است، پس ارزش گزاره « $\sim p$ » همواره نادرست نیست.

پاسخ گزینه ۱ است

۲۳. ترکیب عطفی دو گزاره هنگامی درست است که هر دو گزاره صحیح باشند، با محاسبه می‌توان نشان داد که گزاره « 2^4 برابر ۱۶ است.» گزاره‌ای درست است. پس به دنبال گزاره‌ای هستیم که گزاره‌ای درست باشد، تا ترکیب عطفی آن با گزاره صورت سوال، گزاره‌ای درست به ما بدهد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: حاصل 2^0 برابر ۱ است (هر عدد غیر صفر اگر به توان صفر برسد حاصل برابر با یک خواهد شد) و می‌دانیم عدد ۱، عددی اول نیست (عدد ۱ نه اول است و نه مرکب). پس گزینه یک گزاره‌ای نادرست است.

گزینه «۲»: خود یک ترکیب عطفی دو گزاره «۵۷ عددی اول است.» و گزاره «۲ عددی زوج است.» می‌باشد که اولی گزاره‌ای نادرست است (۵۷ بر ۳ بخش پذیر است، پس اول نیست.) و دومی گزاره‌ای درست است پس ترکیب عطفی این دو گزاره، گزاره‌ای نادرست است پس گزینه دو گزاره‌ای نادرست است. پس ترکیب آن با گزاره صورت سوال گزاره‌ای نادرست خواهد بود.

گزینه «۳»: گزاره‌ای درست است پس ترکیب آن با گزاره صورت سوال گزاره‌ای درست خواهد بود پس پاسخ صحیح گزینه سه است.

گزینه «۴»: نادرست خواهد بود.

نکته اگر تعریف ترکیب عطفی و فصلی دو گزاره را اشتباه کنیم آن‌گاه حتماً پاسخ نادرست گزینه چهار را انتخاب خواهیم کرد، پس لازم است که تعریف ترکیب عطفی و فصلی دو گزاره را با هم اشتباه نگیریم.

پاسخ گزینه ۳ است

۲۴. می‌دانیم که یک گزاره مرکب که از ترکیب دو گزاره که با لفظ، یا حرف ربط «و» تشکیل شده است، فقط وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشند. پس اگر یکی و یا هر دو گزاره‌های یک ترکیب عطفی نادرست باشد آنگاه ارزش ترکیب عطفی آنها نیز نادرست خواهد بود. اما گزاره «تمام سوره‌های قرآن با بسم‌الله شروع می‌شود» یک گزاره نادرست است زیرا از ۱۱۴ سوره قرآن فقط سوره «توبه» با بسم‌الله شروع نمی‌شود. پس هر گزاره‌ای (چه درست باشد و چه نادرست باشد) اگر در جای خالی قرار بگیرد، ترکیب عطفی آن با گزاره «تمام سوره‌های قرآن با بسم‌الله شروع می‌شود» حتماً گزاره‌ای نادرست خواهد بود. پس گزینه چهار جواب سوال است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: می‌دانیم که کتاب قرآن دقیقاً ۱۱۴ سوره دارد پس این گزینه گزاره‌ای درست است.

گزینه «۲»: عدد ۵۱ بر ۳ و ۱۷ بخش پذیر است پس عددی اول نیست و عدد ۱۵ نیز بر عددهای ۳ و ۵ بخش پذیر است پس ۱۵ هم عددی اول نیست، پس گزینه دو که خود ترکیب عطفی یک گزاره

یا نادرست باشد. پس گزینه «۱» همواره دارای ارزش درست نیست و درستی آن به ارزش گزاره p بستگی دارد.

گزینه‌های «۲» و «۴»: این گزینه‌ها نیز مثل گزینه «۱» است و درستی آن گزینه‌ها به درستی گزاره p بستگی دارد و چون ارزش گزاره p مشخص نیست پس ارزش گزاره‌های گزینه‌های «۲» و «۴» نیز مشخص نیستند.

گزینه «۳»: در این گزینه اوضاع فرق می‌کند. چون p یک گزاره است پس دارای ارزش درست یا نادرست است. اگر p دارای ارزش درست باشد، آنگاه ارزش گزاره $p \sim$ نادرست است پس ارزش گزاره $p \vee p \sim$ درست است و اگر p دارای ارزش نادرست باشد، آنگاه ارزش گزاره $p \sim$ درست است پس باز هم ارزش گزاره $p \vee p \sim$ درست است، پس اگر p یک گزاره دلخواه باشد (که ارزش آن را نمی‌دانیم) در این صورت حتماً ارزش گزاره $p \vee p \sim$ درست است. **توجه:** توجه داشته باشید که اگر p گزاره‌ای دلخواه باشد، آنگاه ارزش گزاره $p \wedge p \sim$ حتماً نادرست است. چرا؟

پس گزینه «۳» است

۲۷. در این گونه سوالات باید تمام گزینه‌ها را بررسی کنید. اگر هم‌ارزی‌ها را نمی‌دانید از جدول ارزشی گزاره‌ها استفاده کنید. گزاره $p \vee T$ یک گزاره همواره درست است و هم‌ارز گزاره p نیست.

پس گزینه «۴» است

۲۸. «الف» نامشخص است زیرا ارزش گزاره‌های p و q بر ما معلوم نیست؛ پس ارزش گزاره $p \sim$ نیز بر ما معلوم نیست. پس ارزش گزاره $q \vee \sim p$ بر ما معلوم نیست (توجه داشته باشید که ارزش $F \equiv \sim p \sim q \vee$ نیز نامشخص است).

«ب» درست است زیرا اگر p درست باشد، آنگاه $p \sim$ نادرست است و بالعکس؛ پس حداقل یکی از آنها دارای ارزش درست است. پس ترکیب فصلی آنها دارای ارزش درست است.

«پ» نادرست است زیرا مانند استدلال قسمت «الف» از دو گزاره p و $p \sim$ حتماً یکی درست و یکی نادرست است، پس ترکیب عطفی آنها نادرست است.

«ت» نامشخص است زیرا ارزش گزاره p را نمی‌دانیم، اگر ارزش آن درست باشد آنگاه $p \vee F \sim$ نادرست است و اگر ارزش p نادرست باشد $p \vee F \sim$ دارای ارزش درست است (توجه داشته باشید که ارزش گزاره $p \wedge F \sim$ همواره نادرست است و ارزش آن به ارزش گزاره p بستگی ندارد. چرا؟)

«ث» نامشخص است زیرا مانند استدلال قسمت «ت» ارزش گزاره p را نمی‌دانیم (توجه داشته باشید که ارزش گزاره $p \vee T$ همواره درست است. چرا؟)

«ج» نامشخص است زیرا ارزش گزاره p را نمی‌دانیم؛ اگر p دارای ارزش درست باشد، آنگاه ارزش گزاره $p \wedge T \sim$ نادرست است ولی اگر ارزش گزاره p نادرست باشد، آنگاه گزاره $p \wedge T \sim$ دارای ارزش درست خواهد بود.

پس گزینه «۲» است

نادرست (۵۱ عددی اول است) و یک گزاره درست (۱۵ عددی اول نیست) است یک گزاره نادرست است.

گزینه «۳»: در کتاب منطق سال گذشته خواندید که افلاطون شاگرد سقراط و ارسطو نیز شاگرد افلاطون بوده است. پس گزینه سه نیز یک گزاره درست است.

نکته توجه داشته باشید که بدون بررسی سه گزینه نیز

می‌توانستیم به پاسخ سوال برسیم، زیرا فقط کافی بود مفهوم ترکیب عطفی دو گزاره و گزاره صورت سوال را بدانیم.

پس گزینه «۲» است

۲۵. می‌دانیم که در یک گزاره مرکب که از ترکیب دو گزاره تشکیل شده است، اگر آن دو گزاره با لفظ «یا» از یکدیگر جدا شده باشند، زمانی که حداقل یکی از آن دو گزاره (یکی و یا هر دو گزاره) صحیح باشند، آنگاه ارزش گزاره مرکب (گزاره‌ای که ترکیب فصلی دو گزاره باشد) درست است و زمانی دارای ارزش نادرست است که هر دو گزاره، دارای ارزشی نادرست باشند. اما گزاره «تمام سوره‌های قرآن با بسم‌الله شروع می‌شود.» یک گزاره نادرست است، پس برای نادرست بودن ترکیب فصلی باید گزاره دوم نیز نادرست باشد. پس باید از بین گزینه‌ها به دنبال یک گزاره نادرست باشیم:

گزینه «۱»: یک گزاره کاملاً درست است.

گزینه «۲»: ترکیب عطفی دو گزاره است، کافی است یکی از دو گزاره‌های آن نادرست باشد، گزاره «۵۱ عددی اول است» یک گزاره نادرست است زیرا ۵۱ بر عدد ۳ و ۱۷ بخش پذیر است، پس گزینه دو یک گزاره نادرست است و نیازی به بررسی کردن درستی یا نادرستی گزاره «۱۵ عددی اول نیست.» نداریم (هر چند که می‌دانیم گزاره‌ای درست است.) پس جواب گزینه دو است.

گزینه‌های «۳» و «۴»: درستی گزاره «افلاطون شاگرد سقراط است» را از کتاب فلسفه سال دهم می‌دانیم و در مورد گزینه «۴» نیز به وضوح پاسخ صحیح نیست. اما اگر در این گزینه به جای عبارت «هر گزاره‌ای» عبارت «هر گزاره نادرستی» را نوشته بود می‌توانست پاسخ سوال باشد. (این سوال را با سوال ۲۴ مقایسه کنید.)

پس گزینه «۲» است

۲۶. بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: ترکیب فصلی دو گزاره است و زمانی درست است که حداقل یکی از گزاره‌ها دارای ارزش درست باشند. چون ارزش q نادرست است، پس درستی این گزینه به درستی گزاره $p \sim$ بستگی دارد، چون p گزاره‌ای دلخواه است پس می‌تواند دارای ارزش درست یا نادرست باشد پس $p \sim$ نیز می‌تواند دارای ارزش درست

۲۹. طبق قانون دمورگان گزاره $(p \vee \sim q) \sim p$ معادل است با $p \wedge q$. و برای درستی گزاره $p \wedge q \sim$ باید گزاره q درست و گزاره p نادرست باشد.

پاسخ گزینه ۲ است

۳۰. در مورد گزاره‌های مرکب که ترکیبی از ۲ یا چند رابط مانند «و» (\wedge)، «یا» (\vee)، شرطی (\Rightarrow) و «...» می‌باشند، باید آن گزاره‌ها را به صورت ترکیب چند گزاره ۲ تایی ببینیم مثلاً در این سوال گزاره $p \wedge (q \vee r)$ را به صورت ترکیب عطفی دو گزاره p و گزاره $q \vee r$ ببینیم که خود $q \vee r$ ، ترکیب فصلی دو گزاره q و گزاره r است. گزاره $p \wedge (q \vee r)$ چون ترکیب عطفی دو گزاره است پس هنگامی درست است که گزاره p درست باشد و گزاره $q \vee r$ نیز درست باشد.

اما گزاره $q \vee r$ هنگامی دارای ارزش درست است که حداقل یکی از گزاره‌های q یا r دارای ارزش درست باشند.

گزاره $(\sim p \vee q) \wedge r$ ترکیب عطفی دو گزاره r و گزاره $\sim p \vee q$ است، پس هنگامی درست است که r درست باشد و $\sim p \vee q$ نیز درست باشد و هنگامی نادرست است که حداقل یکی از آنها (گزاره r یا گزاره $\sim p \vee q$) نادرست باشد. پس ظاهراً اگر ارزش r را بدانیم، ارزش گزاره $(\sim p \vee q) \wedge r$ بر

ما معلوم می‌شود. یعنی گزینه «۳» صحیح است. اما اشتباه کرده‌ایم! چرا؟ درست است که اگر ارزش گزاره r نادرست باشد، آنگاه ارزش گزاره $(\sim p \vee q) \wedge r$ نادرست خواهد شد (به خاطر رابط « \wedge » و همچنین این که r یا q حداقل یکی درست است) اما درستی گزاره r تضمین درستی گزاره $(\sim p \vee q) \wedge r$ نیست؛ چون برای درستی آن باید علاوه بر r گزاره $(\sim p \vee q)$ نیز درست باشد و چون p حتماً درست است پس $\sim p$ نادرست است و برای درستی $(\sim p \vee q)$ ، طبق فرض سوال باید حتماً q درست باشد، که درستی q را در فرض سوال نداریم پس گزینه «۳» پاسخ صحیح نیست.

گزینه «۱» را بررسی می‌کنیم، اگر q نادرست باشد، طبق فرض چون ارزش گزاره $p \wedge (q \vee r)$ درست است، گزاره‌های p و r هر دو دارای ارزش درست خواهند بود، پس با جای گذاری و به کمک جدول ارزش گزاره‌ها، ارزش گزاره $(\sim p \vee q) \wedge r$ نادرست خواهد بود. پس تا این جا گزینه «۱» درست است.

گزینه «۴» به این دلیل رد می‌شود که اگر گزاره‌های q و r هر دو درست باشند، آنگاه ارزش گزاره $(\sim p \vee q) \wedge r$ حتی بدون دانستن ارزش گزاره p یا $\sim p$ درست است. اما اگر q درست باشد، آنگاه ارزش گزاره $(\sim p \vee q)$ حتماً درست است. اما چون ارزش گزاره r را نمی‌دانیم؛ زیرا طبق فرض می‌دانیم از بین q و r حداقل یکی درست است، پس با درستی q ، درستی یا نادرستی r نتیجه نمی‌دهد. اما با نادرستی q حتماً درستی گزاره r نتیجه می‌شود. پس ارزش گزاره $(\sim p \vee q) \wedge r$ بر ما معلوم نیست (در صورتی که با نادرستی q ارزش این گزاره بر ما معلوم بود). پس گزینه «۲» نیز نادرست است. (یک بار دیگر سوال را با دقت حل کنید.)

پاسخ گزینه ۱ است

۳۱. چون گزاره $\sim p \vee (q \wedge p)$ ترکیب فصلی دو گزاره است پس هنگامی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند. پس $\sim p$ نادرست است، در نتیجه گزاره p درست است. همچنین گزاره

$q \wedge p$ نادرست است و چون این گزاره ترکیب عطفی دو گزاره است پس حداقل یکی از دو گزاره p یا q نادرست هستند و چون p دارای ارزش درست است. پس باید گزاره q نادرست باشد. پس ارزش گزاره‌های p و q بر ما معلوم شد. ارزش گزاره r نیز در صورت سوال داده شده است. حال با این معلومات ارزش گزاره $(p \vee r) \wedge q \sim$ را مشخص می‌کنیم:

$$d \equiv d \wedge d \equiv (d \vee d) \wedge d \equiv \sim n$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌های «۱» و «۳»: چون ارزش گزاره $(p \vee r) \wedge q \sim$ درست است و همچنین ارزش گزاره p نیز درست بود، پس هر دو گزینه یک و سه صحیح می‌باشند.

گزینه «۲»: چون ارزش گزاره q نادرست است، پس گزاره $q \wedge r$ دارای ارزش نادرست است. پس گزینه دو صحیح نیست.

گزینه «۴»: اگر ارزش گزاره r را نمی‌دانستیم آیا باز هم می‌توانستیم با داشتن ارزش گزاره‌های p و q ارزش گزاره $(p \vee r) \wedge q \sim$ را به دست آوریم؟ بله؛ می‌توانستیم و دلیل آن درستی گزاره p و ترکیب فصلی آن با گزاره r است که ارزش گزاره $(p \vee r)$ را درست خواهد کرد. پس فرض درستی گزاره r یک فرض اضافی است.

پاسخ گزینه ۲ است

۳۲. چون ارزش گزاره $(\sim p \vee r) \wedge p$ درست است، پس p درست و $\sim p \vee r$ نیز درست است. لذا از میان r یا p یکی حتماً درست است. p نادرست است، پس r درست است.

پاسخ گزینه ۱ است

۳۳. ابتدا از قانون توزیع پذیری استفاده می‌کنیم:

$$(p \wedge q) \vee \sim [(p \vee \sim q) \wedge q] \equiv (p \wedge q) \vee \sim [(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge q)]$$

همواره نادرست

$$\equiv (p \wedge q) \vee \sim (p \wedge q)$$

می‌دانیم «ترکیب فصلی یک گزاره با نقیض همان گزاره»، یک گزاره همواره درست است.

پاسخ گزینه ۲ است

۳۴. هر چهار گزینه را باید بررسی کنیم:

گزینه «۱»: $q \vee (\sim p \wedge p) \equiv q \vee F \equiv q$

گزینه «۲»:

$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)$$

توزیع پذیری

$$\equiv F \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$$

گزینه «۳»:

$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv (p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)$$

توزیع پذیری

$$\equiv T \wedge (p \vee q) \equiv p \vee q$$

گزینه «۴»:

$$p \wedge (\sim q \wedge p) \equiv p \wedge (p \wedge \sim q)$$

جابه‌جایی

$$\equiv (p \wedge p) \wedge \sim q \equiv p \wedge \sim q \neq p$$

شرکت پذیری

پاسخ گزینه ۲ است

باشد که با این شرط گزاره $p \Rightarrow q$ نیز همواره درست خواهد بود. که این موضوع را با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نیز می‌توان نشان داد.

p	q	\sim	p	\wedge	$(p \Rightarrow q)$	\Rightarrow	q
د	د	ن	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	ن	ن
د	د	د	ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	ن	د	ن
مرحله		۳	۱	۴	۱	۲	۱

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: چون گزاره p نادرست است، آنگاه گزاره $p \sim q$ زمانی درست است که گزاره q درست باشد و یا گزاره q نادرست باشد پس گزاره $p \sim q$ همواره درست نیست و بستگی به گزاره q دارد.

گزینه «۲»: مانند گزینه قبل درستی گزاره $p \wedge p \Rightarrow q$ درستی گزاره q را نتیجه نمی‌دهد، پس گزاره q همواره درست نیست.

گزینه «۳»: درستی گزاره $p \wedge p \Rightarrow q$ تنها نادرستی گزاره p را نتیجه می‌دهد، که با نادرستی گزاره p گزاره $q \wedge p$ حتماً نادرست است.

گزینه «۴»: درستی گزاره $p \wedge p \Rightarrow q$ تنها نادرستی گزاره p را نتیجه می‌دهد، که با نادرستی گزاره p گزاره $q \sim p$ حتماً درست است.

پاسخ گزینه ۴ است

۴۲. از درستی p و $p \vee q$ نتیجه می‌شود که هر دو گزاره p و $p \vee q$ درست هستند و چون گزاره p لزوماً درست است پس برای درستی گزاره $p \vee q$ گزاره q می‌تواند درست و یا نادرست باشد. پس به دنبال گزینه‌ای می‌گردیم که درستی آن فقط به درستی گزاره p بستگی داشته باشد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌های «۱» و «۲»: پاسخ صحیح نیستند؛ زیرا درستی آنها به درستی گزاره q بستگی دارد (البته گزینه دو با فرض نادرستی گزاره p درست است که طبق فرض، گزاره p درست است، پس درستی آن به درستی گزاره q بستگی دارد.) و با نادرستی گزاره q هر دو گزینه‌های یک و دو نادرست هستند.

گزینه «۳»: فقط زمانی نادرست است که گزاره p نادرست باشد، که طبق فرض سؤال گزاره p همواره درست است، پس گزینه سه طبق فرض سؤال همواره درست است.

گزینه «۴»: چون گزاره p درست است پس گزاره $p \sim p$ نادرست است پس درستی گزاره $p \vee q$ بستگی به درستی گزاره q دارد، پس این گزینه نیز نادرست است.

پاسخ گزینه ۳ است

۴۳. طبق فرض سؤال به دلیل درستی گزاره p و نادرستی گزاره r گزینه سه به خاطر وجود ترکیب عطفی « $\wedge \sim p$ » و گزینه چهار به خاطر وجود ترکیب عطفی « $\wedge r$ » نادرست هستند. بررسی گزینه‌های «۱» و «۲»:

طبق فرض سؤال به دلیل درستی گزاره q و نادرستی گزاره $q \sim p$ ، درستی گزینه «۱» به خاطر وجود ترکیب فصلی « $\vee \sim p$ » به درستی $p \Rightarrow q$ و درستی گزینه دو به درستی $p \Rightarrow \sim r$ بستگی دارد. با فرض درستی گزاره‌های p و q

۳۵. در گزاره شرطی « $q \Rightarrow p$ »، q را مقدم و p را تالی می‌نامیم. گزاره « $q \Rightarrow p$ » را با گزاره « $p \Rightarrow q$ » اشتباه نگیرید. پس گزینه یک نادرست است. گزینه‌های دو، سه و چهار از ویژگی‌های گزاره شرطی هستند که باید آنها را کاملاً یاد گرفته باشید تا بتوانید سوالات مربوط به گزاره‌های شرطی را پاسخ دهید. یادتان باشد گزاره شرطی فقط و فقط هنگامی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد، یعنی از فرض درست، نتیجه نادرست گرفته باشیم.

پاسخ گزینه ۱ است

۳۶. می‌دانیم اگر گزاره p دارای ارزش درست باشد آنگاه $q \Rightarrow p$ دارای ارزش درست است و به همین ترتیب داریم:

$$[v \Rightarrow (s \Rightarrow (r \Rightarrow (q \Rightarrow p)))] = [v \Rightarrow (s \Rightarrow (r \Rightarrow (q \Rightarrow p)))] \equiv T$$

پس به دنبال گزینه‌ای هستیم که دارای ارزش درست باشد. با توجه به فرض چون گزاره p دارای ارزش درست، پس به انتفای مقدم $p \Rightarrow p \sim$ همواره ارزش درست دارد.

پاسخ گزینه ۳ است

۳۷. اگر خوب دقت کنیم می‌بینیم که گزاره $r \Rightarrow s$ تالی در گزاره « $(r \Rightarrow s) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$ » است و می‌دانیم در یک گزاره شرطی اگر تالی درست باشد، ارزش آن گزاره شرطی همواره درست خواهد بود.

پاسخ گزینه ۳ است

۳۸. می‌توان با رسم جدول ارزشی گزاره‌ها هم‌ارز منطقی « $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ » را پیدا کرد. پس « $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ » هم‌ارز منطقی $q \Rightarrow p$ است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

پاسخ گزینه ۱ است

۳۹. هم‌ارز منطقی ترکیب شرطی، یک ترکیب فصلی است به طوری که مقدم را نقیض کرده و با تالی به صورت یک ترکیب فصلی بنویسیم. $p \sim q \vee \sim (p \Rightarrow q)$

پاسخ گزینه ۱ است

۴۰. چون $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ پس شرط لازم و کافی برای $p \Rightarrow q \sim$ است.

۴۱. این گزاره دارای دو مقدمه است. مقدمه اول $\sim p$ و مقدمه دوم $p \Rightarrow q$ که این دو مقدمه را « \wedge » به هم اتصال می‌دهد. پس گزاره $p \Rightarrow q$ و $\sim p$ زمانی درست است که هر دو گزاره $p \Rightarrow q$ و $\sim p$ درست باشند، پس شرط لازم برای درستی گزاره « $p \Rightarrow q$ » آن است که گزاره p نادرست باشد یا $p \sim$ درست

گزینه «۴»:

p	q	p	\Rightarrow	(q	\Rightarrow	(q	\Rightarrow	(p))
د	د	د	د	د	د	د	د	د
د	ن	د	د	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	ن	د	ن	د	ن
مرحله		۱	۴	۱	۳	۱	۲	۱

پس همواره درست است.

پاسخ گزینه «۱» است

۴۵. در این سوال باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که ارزش گزاره، به

ارزش p بستگی نداشته باشد. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»: گزاره $p \wedge \sim p$ همواره نادرست است. پس

$p \vee (p \wedge \sim p)$ هم‌ارز p خواهد بود.

گزینه «۲»: گزاره $(p \vee \sim p)$ همواره درست است. پس

$p \wedge (p \vee \sim p)$ هم‌ارز p خواهد بود.

گزینه «۳»: گزاره $p \Rightarrow p$ همواره درست است و ارزش آن به

ارزش گزاره p بستگی ندارد.

گزینه «۴»:

تبدیل شرطی به فصلی

$$\sim p \Rightarrow p \equiv (\sim(\sim p)) \vee p \equiv p \vee p \equiv p$$

پاسخ گزینه «۳» است

۴۶. چون p همیشه نادرست است، پس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$

به‌انتفای مقدم همیشه درست است. لذا ترکیب فصلی

$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ همواره درست می‌باشد.

پاسخ گزینه «۲» است

۴۷. $\sim q$ درست است، پس q نادرست است. چون طبق سوال

$p \Rightarrow q$ درست است و q نادرست، پس p باید نادرست باشد. و

چون $p \vee r$ درست است و p نادرست، پس r باید درست باشد.

پاسخ گزینه «۳» است

۴۸. در هر دو گزاره شرطی، تالی یکسان است. شرایطی که گزاره

شرطی می‌تواند درست باشد را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: در یک گزاره شرطی اگر تالی گزاره‌ای درست باشد، ارزش

گزاره شرطی همواره درست است، پس q گزاره‌ای درست است.

حالت دوم: حال اگر تالی گزاره‌ای درست نباشد، برای درستی

گزاره شرطی، باید حتماً مقدم نادرست باشد، پس هر دو مقدم در

گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow q$ باید نادرست باشند، و این غیر

ممکن است، زیرا دو گزاره‌ای که نقیض یکدیگرند نمی‌توانند

هم‌زمان نادرست باشند. پس فقط حالت اول امکان دارد، پس q

گزاره‌ای درست است.

پاسخ گزینه «۳» است

۴۹. با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها می‌توان ثابت کرد:

تبدیل شرطی به فصلی

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

با توجه به نکته فوق داریم:

تبدیل شرطی به فصلی

$$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$$

قانون دمورگان

$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q)$$

قانون جابه‌جایی

$$\equiv (\sim p \vee p) \vee (\sim q \vee q) \equiv T \vee T \equiv T$$

گزاره $p \Rightarrow q$ درست است پس گزینه یک پاسخ صحیح است. دلیل نادرست بودن گزینه دو این است که چون $\sim p$ نادرست و r درست است پس گزاره $\sim r \Rightarrow \sim p$ نادرست است پس کل گزاره $(\sim r \Rightarrow \sim p) \vee \sim q$ نیز نادرست است.

پاسخ گزینه «۱» است

۴۴. با رسم جدول ارزشی گزاره‌ها، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینه‌ای پاسخ صحیح است که ستون نتیجه و مرحله آخر با ستون مربوط به گزاره «همواره درست» معادل نباشد.

توجه: در سوالات بعدی ما دیگر جدول ارزشی گزاره‌ها را رسم

نمی‌کنیم، بلکه برای راحتی و صرفه‌جویی در زمان از قوانین

هم‌ارزی گزاره‌های منطقی استفاده می‌کنیم.

گزینه «۱»:

p	q	\sim	p	\Rightarrow	(p	\Rightarrow	q)
د	د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	ن	د	ن
مرحله		۳	۱	۴	۱	۲	۱

پس همواره درست است.

تحلیل بدون جدول: دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد، گزاره p

یا درست است و یا نادرست:

نادرست

حالت اول: اگر p درست باشد:

$$\underbrace{\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)}_{\text{درست}}$$

درست

نادرست

حالت دوم: اگر p درست نباشد:

$$\underbrace{\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)}_{\text{درست}}$$

درست

پس در هر دو حالت گزاره $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ همواره درست است.

گزینه «۲»:

p	q	p	\Rightarrow	\sim	q
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	د	د	د	ن
ن	د	ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	ن
مرحله		۱	۳	۲	۱

پس همواره درست نیست.

گزینه «۳»:

p	q	(p	\wedge	(p	\Rightarrow	q))	\Rightarrow	q
د	د	د	د	د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	د	ن	د	ن
مرحله		۱	۳	۱	۲	۱	۴	۱

پس همواره درست است.

باشد تا آن گزاره شرطی نیز درست باشد. اگر گزینه سه را نگاه کنیم می‌توانیم بگوییم چون $p \sim$ نادرست است، گزاره $(\sim p \wedge q)$ نادرست است. در نتیجه گزاره $(\sim p \vee r) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ به انتفای مقدم درست است.

۵۶. در این گونه سوالات باید گزینه‌ها را تک تک بررسی کنیم: گزینه «۱»: چون p درست است، پس $\sim p$ نادرست است و ارزش $(\sim p \vee q)$ معلوم نیست.

گزینه «۲»: در گزاره $(\sim p \wedge q) \Rightarrow r$ چون p درست است، پس $\sim p$ نادرست است. در نتیجه $(\sim p \wedge q)$ نیز نادرست خواهد بود. بنابراین ارزش گزاره شرطی به انتفای مقدم درست است.

گزینه «۳»: چون p درست است و ارزش گزاره q مشخص نیست، پس ارزش ترکیب عطفی $p \wedge q$ مشخص نیست. گزینه «۴»: چون p درست است ارزش ترکیب فصلی $p \vee q$ درست است ولی ارزش ترکیب شرطی $(p \vee q) \Rightarrow r$ مشخص نیست، زیرا ارزش تالی آن نامعلوم است.

پسخ گزینه ۲ است

۵۷. چون p نادرست است، می‌دانیم گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است. پس به دنبال گزینه‌ای هستیم که در آن p مقدم یک گزاره شرطی باشد تا آن گزاره شرطی نیز درست باشد. اگر گزینه دو را نگاه کنیم، تالی گزاره شرطی $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ درست بوده، پس این گزاره شرطی درست است.

پسخ گزینه ۲ است

۵۸. با نگاهی دقیق‌تر می‌بینیم که ترکیب عطفی سه گزاره p ، $p \Rightarrow q$ و $\sim q$ را داریم. ابتدا جابه‌جایی انجام می‌دهیم.

$$\begin{aligned} p \wedge ((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) &\equiv p \wedge (\sim q \wedge (p \Rightarrow q)) \\ \text{شرکت پذیری} & \\ &\equiv (p \wedge \sim q) \wedge (p \Rightarrow q) \\ \text{تبدیل فصلی به شرطی} & \\ &\equiv \sim (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow q) \equiv F \end{aligned}$$

پسخ گزینه ۲ است

۵۹. در گزینه‌ها گزاره شرطی نداریم، پس گزاره شرطی را به گزاره فصلی تبدیل می‌کنیم.

$$\sim p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv \sim p \wedge (\sim p \vee q) \equiv \sim p$$

در عبارت دوم گزاره $p \sim$ دو بار استفاده شده است، پس می‌توانیم از قانون جذب استفاده کنیم.

پسخ گزینه ۲ است

۶۰. در گزینه‌ها گزاره شرطی نداریم، پس گزاره شرطی را به گزاره فصلی تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \sim q \wedge (\sim q \Rightarrow r) &\equiv \sim q \wedge (q \vee r) \\ \text{توزیع پذیری} & \\ &\equiv (\sim q \wedge q) \vee (\sim q \wedge r) \equiv \sim q \wedge r \end{aligned}$$

پسخ گزینه ۲ است

یادتان باشد که گزاره‌های $(p \vee q) \Rightarrow p$ و $p \Rightarrow (p \wedge q)$ نیز همواره درست هستند.

اثبات درستی گزاره $p \Rightarrow p \vee q$: می‌دانیم گزاره $p \Rightarrow p \vee q$ وقتی نادرست می‌شود که p درست و $p \vee q$ نادرست باشد که در اینجا اگر p درست باشد، قطعاً $p \vee q$ نیز درست می‌باشد، لذا گزاره $p \Rightarrow p \vee q$ نمی‌تواند نادرست باشد، پس همواره درست است.

پسخ گزینه ۱ است

۵۰. ترکیب شرطی $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$ وقتی نادرست است که مقدم $(p \wedge q)$ درست و تالی نادرست باشد، از درست بودن مقدم، یعنی $p \wedge q$ نتیجه می‌شود که p و q هر دو درست هستند.

پسخ گزینه ۱ است

۵۱. می‌دانیم ترکیب شرطی $A \Rightarrow B$ وقتی نادرست است که A درست و B نادرست باشد، پس q نادرست است، و چون ترکیب فصلی $p \vee q$ درست است، در نتیجه باید p درست باشد.

پسخ گزینه ۳ است

۵۲. یک ترکیب شرطی وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد، پس $p \vee q$ درست است. چون q نادرست است، پس p درست است، از طرفی چون $p \wedge r$ نادرست است، چون p درست است، پس r نادرست است. با توجه به این توضیحات ارزش گزاره‌های p و r مشخص شد.

پسخ گزینه ۱ است

۵۳. چون گزاره $p \Rightarrow (p \wedge q)$ نادرست است، پس p درست و $p \wedge q$ نادرست است و چون $p \wedge q$ نادرست است، پس q نادرست است. در نتیجه ترکیب عطفی آنها با هر گزاره‌ای نادرست است. در نتیجه $r \wedge q$ نادرست است. پس گزاره $(r \wedge q) \Rightarrow s$ به انتفای مقدم همواره درست است.

پسخ گزینه ۱ است

۵۴. بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: چون q نادرست است ارزش گزاره $q \Rightarrow p$ «به انتفای مقدم درست است. اما چون ارزش گزاره r معلوم نیست، ارزش گزاره $(q \Rightarrow p) \wedge r$ به ارزش گزاره r بستگی دارد، پس نمی‌توانیم درستی و یا نادرستی آن را مشخص کنیم.

گزینه «۲»: چون p درست است ارزش گزاره $(r \Rightarrow p)$ حتماً درست است (به ارزش گزاره r نیازی نداریم) پس با گزاره «ن \Rightarrow د» سر و کار داریم که یک گزاره نادرست است.

گزینه «۳»: چون q نادرست و p درست است، پس ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ نادرست است، پس با گزاره «ن \Rightarrow ن» سر و کار داریم که به انتفای مقدم گزاره‌ای درست است (کاری به ارزش گزاره r نداریم).

گزینه «۴»: مانند گزینه «۳» چون ارزش q نادرست و ارزش p درست است پس گزاره $p \wedge q$ دارای ارزش نادرست است، پس گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ به انتفای مقدم دارای ارزش درست می‌باشد.

پسخ گزینه ۲ است

۵۵. با توجه به اینکه گزاره p درست است، پس $\sim p$ نادرست است. پس به دنبال گزینه‌ای هستیم که در آن $\sim p$ ، مقدم یک گزاره شرطی

۶۵. می‌دانیم عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ عبارت است از $\sim q \Rightarrow \sim p$ که هم‌ارز منطقی آن است. بنابراین:

$$(p \wedge q) \Rightarrow \sim p \equiv \sim (\sim p) \Rightarrow \sim (p \wedge q)$$

قانون دمورگان
 $\equiv p \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

پاسخ گزینه ۲ است

۶۶. با توجه به گزینه‌ها از قانون عکس نقیض استفاده می‌کنیم:

$$[(\sim p \vee q) \Rightarrow r] \equiv [\sim r \Rightarrow \sim (\sim p \vee q)]$$

عکس نقیض
 قانون دمورگان
 $\equiv [\sim r \Rightarrow (p \wedge \sim q)]$

پاسخ گزینه ۲ است

۶۷. نشان می‌دهیم: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ (قانون عطف مقدمات)

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (\sim q \vee r)$$

تبدیل شرطی
به فصلی

$$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r)$$

تبدیل شرطی
به فصلی

$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r \equiv \sim (p \wedge q) \vee r$$

شرکت پذیری
دمورگان

$$\equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

تبدیل شرطی
به فصلی

با توجه به مطلب گفته شده سوال را حل می‌کنیم:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

جابجایی

$$\equiv (q \wedge p) \Rightarrow r \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

پس یادتان باشد که: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ یعنی

جای p و q را می‌توان عوض کرد.

پاسخ گزینه ۲ است

۶۸. با توجه به $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ سوال را حل می‌کنیم:

$$p \Rightarrow [q \Rightarrow \sim (p \Rightarrow \sim q)] \equiv (p \wedge q) \Rightarrow \sim (p \Rightarrow \sim q)$$

همان r

$$\equiv (p \wedge q) \Rightarrow \sim (\sim p \vee \sim q)$$

تبدیل شرطی به فصلی

$$\equiv (p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv T$$

دمورگان

پاسخ گزینه ۱ است

۶۹. روش اول: در یک ترکیب شرطی اگر مقدم درست و تالی نادرست باشد، ارزش گزاره شرطی نادرست است. بنابراین برای نادرستی ترکیب شرطی $(q \Rightarrow r)$ باید p درست و $(q \Rightarrow r)$ نادرست باشد. به همین ترتیب برای نادرستی $(q \Rightarrow r)$ باید q درست و r نادرست باشد. در نتیجه p و q درست و r نادرست است.

روش دوم: به کمک عطف مقدمات $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ نیز به راحتی می‌توان به جواب رسید.

پاسخ گزینه ۱ است

۶۱. چون p درست است پس $(p \vee q)$ درست است. چون q نادرست است، پس $r \wedge q$ نادرست خواهد بود، پس گزاره $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge q)$ نادرست خواهد بود زیرا مقدم درست و تالی نادرست دارد. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم تا ببینیم کدام نادرست است.

گزینه «۱»: q نادرست پس $\sim q$ درست است، و چون p درست است، در نتیجه $p \wedge \sim q$ همواره درست است، در نتیجه گزینه یک جواب نیست.

گزینه «۲»: چون q نادرست است پس $q \wedge r$ نادرست است و $(q \wedge r) \sim$ درست می‌باشد، در نتیجه گزینه دو جواب نیست.

گزینه «۳»: طبق فرض p درست، پس $\sim p$ نادرست است و چون q نیز نادرست است، در نتیجه $\sim p \vee q$ نیز نادرست است، پس گزینه سه جواب است.

گزینه «۴»: p درست است، پس $p \vee r$ درست می‌باشد. پس گزینه چهار هم جواب نمی‌شود.

پاسخ گزینه ۳ است

۶۲. ابتدا گزاره شرطی دوم را به گزاره فصلی تبدیل می‌کنیم.

$$q \Rightarrow \sim [(p \Rightarrow q) \wedge \sim p] \equiv q \Rightarrow \sim [(\sim p \vee q) \wedge \sim p]$$

تبدیل شرطی به فصلی
عکس نقیض
قانون جذب
 $\equiv q \Rightarrow \sim [(\sim p)] \equiv q \Rightarrow p \equiv \sim p \Rightarrow \sim q$

پاسخ گزینه ۲ است

۶۳. در این گزاره دو ترکیب شرطی داریم، گزاره شرطی دوم را به گزاره فصلی می‌کنیم.

$$p \Rightarrow [q \wedge (r \Rightarrow q)] \equiv p \Rightarrow [q \wedge (\sim r \vee q)]$$

تبدیل شرطی به فصلی

در عبارت تالی، گزاره q دو بار استفاده شده است، پس از قانون جذب استفاده می‌کنیم.

$$p \Rightarrow [q \wedge (\sim r \vee q)] \equiv p \Rightarrow q$$

قانون جذب

در گزینه‌ها عبارت $p \Rightarrow q$ را نداریم، ولی معادل فصلی آن یعنی $\sim p \vee q$ را داریم.

۶۴. چون در گزینه‌ها گزاره شرطی نداریم، پس ابتدا معادل فصلی گزاره شرطی را می‌نویسیم.

«اگر a زوج باشد، آن‌گاه $a+1$ فرد است.»

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

تبدیل شرطی به فصلی

حال طبق قانون دمورگان معادل منطقی نقیض $\sim p \vee q$ را می‌نویسیم.

$$\sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

بنابراین جواب گزاره « a زوج است و $a+1$ فرد نیست.»

نتیجه: نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ معادل منطقی گزاره $p \wedge \sim q$ است.

پاسخ گزینه ۳ است

گزینه ۱: به کمک جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی دو گزاره $p \Leftrightarrow q$ و $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را می‌توان نتیجه گرفت. $(\sim p \Leftrightarrow q) \vee r$ ترکیب فصلی دو گزاره است، چون ارزش گزاره r را نمی‌دانیم پس نادرست بودن گزاره را نمی‌توانیم مشخص کنیم (چون لازم است هر دو گزاره در ترکیب فصلی نادرست باشند). پس این گزینه جواب نیست. اما درستی آن را بررسی می‌کنیم. چون p درست است. پس $\sim p$ نادرست است پس گزاره $(\sim p \Leftrightarrow q)$ دارای ارزش درست می‌باشد پس ترکیب فصلی آن با گزاره r حتماً گزاره‌ای درست است.

گزینه ۲: به کمک جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی دو گزاره $p \Leftrightarrow q$ و $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را می‌توان نتیجه گرفت. $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$ ترکیب عطفی دو گزاره است، پس برای نادرست بودن آن باید حداقل یکی از گزاره‌های r و یا « $p \Leftrightarrow q$ » نادرست باشند، چون ارزش گزاره r را نمی‌دانیم باید گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » را بررسی کنیم که طبق فرض ارزش این گزاره نادرست است. پس جواب گزینه ۲ است.

گزینه ۳: به کمک جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی دو گزاره $p \Leftrightarrow q$ و $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را می‌توان نتیجه گرفت. **گزینه ۳:** با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها می‌توان نشان داد که گزاره‌های « $p \Rightarrow q$ » و « $\sim p \vee q$ » دو گزاره هم‌ارزش هستند. پس گزاره ترکیب دو شرطی آنها گزاره‌ای درست است.

نکته: هم‌ارزی دو گزاره p و q درستی گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » را نتیجه می‌دهد و بالعکس اگر ارزش گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » درست باشد آنگاه دو گزاره p و q هم‌ارزش هستند.

گزینه ۴: ترکیب شرطی دو گزاره است که گزاره « $r \Leftrightarrow p$ » مقدم آن گزاره شرطی و گزاره « $p \wedge q$ » نتیجه یا تالی آن گزاره است. چون مقدم این گزاره شرطی دارای ارزش نادرست است (زیرا طبق نکته قبل گزاره‌های p و r هم‌ارزش نیستند) پس این گزاره شرطی یعنی گزاره « $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$ » به انتفای مقدم دارای ارزش درست است.

۷۲. می‌دانیم $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. حال گزاره‌های شرطی را به گزاره‌های فصلی تبدیل می‌کنیم.

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

توزیع پذیری

$$\equiv ((\sim p \vee q) \wedge (\sim q)) \vee ((\sim p \vee q) \wedge p)$$

توزیع پذیری

$$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)$$

$$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)$$

حال طبق قانون دموورگان داریم: $\sim p \wedge \sim q \equiv \sim (p \vee q)$

پس می‌توان گفت: $p \Leftrightarrow q \equiv (q \wedge p) \vee \sim (p \vee q)$

پاسخ گزینه ۲ است

۷۰. روش اول: طبق قانون عطف مقدمات می‌دانیم $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \Rightarrow C$ بنابراین در گزاره‌ای مربوط به صورت سؤال از این قانون استفاده می‌کنیم.

$$\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow r$$

عطف مقدمات

تبدیل شرطی به فصلی

$$(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow r \equiv \sim (\sim p \wedge \sim q) \vee r$$

قانون دموورگان

$$\equiv (p \vee q) \vee r$$

روش دوم: هم‌ارز منطقی گزاره شرطی را به صورت گزاره فصلی می‌نویسیم.

$$[\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)] \equiv [p \vee (\sim q \Rightarrow r)]$$

تبدیل شرطی به فصلی

شرکت پذیری

$$\equiv p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

پاسخ گزینه ۲ است

۷۱. طبق قانون عطف مقدمات می‌دانیم:

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \Rightarrow C$$

$$\underbrace{(p \Rightarrow q)}_A \Rightarrow \underbrace{[q \Rightarrow (q \wedge r)]}_B \equiv \underbrace{[(p \Rightarrow q) \wedge q]}_A \Rightarrow \underbrace{(q \wedge r)}_C$$

در این گزاره دو ترکیب شرطی داریم، ترکیب شرطی اول را تبدیل به ترکیب فصلی می‌کنیم.

تبدیل شرطی به فصلی

$$\equiv [(\sim p \vee q) \wedge q] \Rightarrow (q \wedge r)$$

قانون جذب

تبدیل شرطی به فصلی

$$\equiv q \Rightarrow (q \wedge r) \equiv \sim q \vee (q \wedge r)$$

توزیع پذیری

$$\equiv (\sim q \vee q) \wedge (\sim q \vee r) \equiv (\sim q \vee r)$$

سوال از ما نقیض آن را می‌خواهد. $\sim (\sim q \vee r) \equiv q \wedge \sim r$

پاسخ گزینه ۲ است

۷۲. بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌های ۱ و ۴: هرگاه دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند می‌توانیم آنها را به صورت یک گزاره دو شرطی به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » نمایش دهیم. یعنی اگر p و q هر دو گزاره‌ای درست و یا هر دو نادرست باشند، آنگاه ارزش گزاره دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » درست است پس گزینه‌های «۱» و «۴» صحیح می‌باشند.

گزینه ۲: نیز می‌توان به کمک جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی دو گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » و « $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ » را نتیجه گرفت.

گزینه ۳: نادرست است، زیرا اگر گزاره دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » درست باشد آنگاه حتماً p و q هم‌ارزش هستند و دلیلی ندارد که حتماً دارای ارزش درست باشند و می‌توانند هر دو دارای ارزش نادرست باشند.

پاسخ گزینه ۲ است

۷۳. بررسی گزینه‌ها:

$$(د) \quad x^2 + y^2 \geq 2(x+y-1)$$

$$(هـ) \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

۷۸. الف) اگر آن عدد را x در نظر بگیریم پس $\frac{1}{9}$ مربع آن به صورت

$\frac{1}{9}x^2$ و چون تفاضل آن را از ۶ برابر خود عدد را می‌خواهد، لذا علامت منها قبل از $\frac{1}{9}x^2$ قرار می‌گیرد، پس صورت کلی معادله به شکل $6x - \frac{1}{9}x^2$ خواهد بود. در سال گذشته با حل این گونه مسائل آشنا شدیم که از فرمول $x = -\frac{b}{2a}$ استفاده می‌کردیم لذا ابتدا صورت استاندارد معادله را می‌نویسیم یعنی:

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{9} \\ b = 6 \end{cases}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-\frac{1}{9})} = \frac{54}{2} = 27$$

حال با جای‌گذاری در صورت معادله بیشترین مقدار آن به دست خواهد آمد، یعنی:

(ب) در این مثال نیز با توجه به مثال (الف) فوق ابتدا عدد را x در نظر می‌گیریم سپس نصف عدد را $\frac{1}{4}x$ و بعد مربع آن

یعنی $(\frac{1}{4}x)^2$ را به دست آورده و چون اختلاف آن را از ۶ برابر همان x خواسته لذا صورت کلی معادله به شکل $6x - (\frac{1}{4}x)^2$

خواهد بود که اگر به صورت استاندارد شده بنویسیم به صورت $6x - \frac{1}{16}x^2$ خواهد بود و جواب آن را از فرمول $x = -\frac{b}{2a}$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{16} \\ b = 6 \end{cases} \text{ که در آن } \begin{cases} a = -\frac{1}{16} \\ b = 6 \end{cases} \text{ می‌باشد به دست می‌آوریم؛ یعنی:}$$

$$x = -\frac{6}{2(-\frac{1}{16})} = \frac{24}{\frac{1}{8}} = 192$$

با جای‌گذاری مقدار x در صورت معادله خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{16}(192)^2 + 6(192) = 36$$

(ج) با توجه به صورت سوال آن عدد را x در نظر می‌گیریم. پس سه

برابر آن عدد برابر $3x$ و مربع خودش برابر x^2 خواهد بود و چون اختلاف $3x$ را از x^2 خواسته ابتدا $3x$ را نوشته و علامت منها را

با توجه به کلمه «با» جلوی $3x$ قرار می‌دهیم یعنی $3x - x^2$ و پس از استاندارد کردن آن خواهیم داشت:

$$-x^2 + 3x \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \text{ که در آن } \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \text{ و با استفاده از فرمول } x = -\frac{b}{2a} \text{ داریم:}$$

$$x = -\frac{3}{2(-1)} = \frac{3}{2}$$

۷۵. می‌دانیم یک گزاره دو شرطی هنگامی درست است که دو طرف، ارزش یکسان داشته باشند. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینه «۱»: اگر q درست باشد، چون ارزش $p \wedge q$ مشخص نیست، پس ارزش $q \Leftrightarrow (p \wedge q)$ مشخص نیست.

گزینه «۲»: اگر p نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ همواره نادرست است، اما چون ارزش q مشخص نیست، پس ارزش $q \Leftrightarrow (p \wedge q)$ مشخص نیست.

گزینه «۳»: اگر q نادرست باشد، ترکیب عطفی $p \wedge q$ نیز نادرست است پس $q \Leftrightarrow (p \wedge q)$ همیشه درست است.

گزینه «۴»: اگر $p \wedge q$ نادرست باشد، پس یکی از گزاره‌های p یا q نادرست هستند، پس در مورد ارزش گزاره q نمی‌توان صحبت کرد. پس ارزش $q \Leftrightarrow (p \wedge q)$ مشخص نیست.

پاسخ گزینه ۳ است

۷۶. چون $(p \wedge q) \Rightarrow r$ نادرست است، پس $p \wedge q$ درست و r نادرست است، در نتیجه p و q هر دو درست هستند. پس ارزش

هر سه گزاره p و q و r را می‌دانیم. پس می‌توانیم ارزش گزینه‌ها را بررسی کنیم. تمام گزینه‌ها ترکیب دو شرطی هستند و می‌دانیم ترکیب دو شرطی هنگامی نادرست است که عبارت‌های هر دو سمت ترکیب دو شرطی، هم‌ارزش نباشند.

گزینه «۱»: $(q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee r)$ درست است.

گزینه «۲»: $(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \vee r)$ نادرست است.

گزینه «۳»: $(q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge r)$ درست است.

گزینه «۴»: $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (r \Rightarrow p)$ درست است.

پاسخ گزینه ۲ است

پسرخ تمرین‌های درس دوم از فصل اول

۷۷. ملاحظه شد که برای تبدیل کردن زبان فارسی به زبان ریاضی باید

به ترتیب اعمالی که بیان شده توجه نمود و اگر علائم ریاضی معادل آنها را بنویسیم به سادگی گزاره‌های ریاضی به دست می‌آیند.

الف) هر عدد حقیقی را می‌توانیم مثلاً x در نظر بگیریم که معکوس آن $\frac{1}{x}$ خواهد بود، پس خواهیم داشت:

$$x + \frac{1}{x} < -2, \quad x < 0$$

(ب) اگر دو عدد حقیقی مثبت را x و y در نظر بگیریم آنگاه به ترتیب گفته شده مربع نصف مجموع را باید بصورت

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \text{ نشان دهیم، پس خواهیم داشت:}$$

$$x \cdot y \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \quad x, y > 0$$

$$(ج) \quad x \cdot y \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

ملاحظه می‌شود که $x=4$ با فرض مسأله در تناقض است لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

ج) فرض خلف: فرض می‌کنیم حکم درست نباشد، یعنی $x \neq 2$ درست نیست بنابراین باید $x=2$ باشد. اکنون اگر $x=2$ را در صورت مسأله جای‌گذاری کنیم خواهیم داشت:

$$x^3 + 2y = 10 \xrightarrow{x=2} 2^3 + 2y = 10 \Rightarrow 8 + 2y = 10 \Rightarrow 2y = 10 - 8 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$$

ملاحظه می‌شود که $y=1$ با فرض مسأله در تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

د) فرض خلف: فرض می‌کنیم n عددی فرد نباشد یعنی n زوج است، پس با استفاده از نماد عدد زوج یعنی $n=2k$ و جای‌گذاری در صورت مسأله خواهیم داشت:

$$n = 2k \Rightarrow 3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(\underbrace{3k+1}_{k'}) = 2k'$$

ملاحظه می‌شود که $3n+2$ که در صورت مسأله به‌عنوان یک عدد فرد از آن یاد شده بود در انتهای حل برابر با یک عدد زوج یعنی $2k'$ شد و این دو موضوع در تناقض می‌باشند، لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است یعنی n نیز عددی فرد می‌باشد.

ه) فرض خلف: فرض می‌کنیم n عدد فرد نباشد یعنی n عددی زوج باشد و طبق تعریف اعداد زوج داریم $n=2k$ و با جای‌گذاری در مسأله خواهیم داشت:

$$n = 2k \Rightarrow 5n + 3 = 5(2k) + 3 = 10k + 3 = 10k + 2 + 1 = 2(\underbrace{5k+1}_{k'}) + 1 = 2k' + 1$$

ملاحظه می‌شود که برای تشخیص اینکه عبارت $10k+3$ عددی فرد است ابتدا عدد 3 را به‌صورت جمع $(2+1)$ نوشتیم سپس با فاکتورگیری از عدد 2 در عبارت $10k+2$ به عبارت $1+2(5k+1)$ رسیدیم و با نام‌گذاری $(5k+1)$ به نام k' (چون مضرب عدد 5 یعنی $5k$ یک عدد صحیح می‌باشد و چون با عدد صحیح یک جمع شده پاسخ مجدداً عددی صحیح می‌باشد و یا این عدد صحیح را k' نامیدیم) به عبارت $1+2k'$ که نماد عدد فرد است رسیدیم و این در تناقض با صورت مسأله که گفته شده $(5n+3)$ زوج می‌باشد هست لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

و) فرض خلف: فرض می‌کنیم n فرد نباشد یعنی n زوج است و طبق تعریف عدد زوج $n=2k$ می‌باشد و با جای‌گذاری خواهیم داشت:

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow 2(\underbrace{2k^2}_{k'}) = 2k'$$

ملاحظه می‌شود که عبارت به دست آمده متناقض با صورت مسأله و فرض مسأله می‌باشد که گفته شده بود n^2 عددی فرد است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است؛ یعنی اگر n^2 فرد باشد n نیز فرد است.

د) برای تبدیل این عبارت توصیفی به زبان ریاضی کافی است دو پراتز برای طول و عرض این مستطیل‌ها تشکیل دهیم و در هم ضرب نماییم زیرا مساحت مستطیل‌ها از ضرب طول در عرض آنها به دست می‌آید پس خواهیم داشت:

$$\text{(طول)} \cdot \text{(عرض)} = 20$$

و اگر هر واحد را x در نظر بگیریم آنگاه در داخل پراتزها خواهیم داشت:

$$(20+1x)(60-2x)$$

که پس از حاصل‌ضرب و استاندارد کردن پاسخ خواهیم داشت:

$$1200 - 40x + 60x - 2x^2 = -2x^2 + 20x + 1200$$

و با استفاده از فرمول $x = -\frac{b}{2a}$ که در معادله فوق

$$x = \frac{-20}{2(-2)} = +5 \quad \text{خواهیم داشت:} \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = 20 \\ c = 1200 \end{cases}$$

و با جای‌گذاری در صورت معادله بیشترین مساحت مستطیل‌ها به دست خواهد آمد یعنی: $-2(5)^2 + 20(5) + 1200 = 1250$

۷۹. اگر فرض کنیم: $p: x \neq 3, x + 4y^2 = 7$

$$q: y \neq -1$$

آنگاه بخواهیم از درستی گزاره p به گزاره q برسیم کمی اثبات مستقیم دشوار است لذا برای این کار از عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p$ (برهان خلف) استفاده می‌کنیم. یعنی قرار است نشان دهیم که $y \neq -1$ نیست، پس $y = -1$ و از روی آن نشان می‌دهیم که با گزاره p در تناقض است. لذا خواهیم داشت:

فرض خلف: فرض می‌کنیم $y \neq -1$ درست نباشد (حکم درست نباشد) یعنی $y = -1$ باشد، پس با جای‌گذاری در فرض مسأله (مقدم یعنی p) خواهیم داشت:

$$y = -1 \Rightarrow x + 4(-1)^2 = 7 \Rightarrow x + 4(+1) = 7 \Rightarrow x = 7 - 4 \Rightarrow x = 3$$

و گزاره به دست آمده با فرض $x \neq 3$ در تناقض است لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است یعنی:

$$x \neq 3, x + 4y^2 = 7 \Rightarrow y \neq -1$$

۸۰. الف) فرض خلف: فرض می‌کنیم $y \neq 2$ نباشد، پس باید $y = 2$ است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{y^2}{2x} = 4 \xrightarrow{y=2} \frac{4}{2x} = 4 \Rightarrow 4 = 8x \Rightarrow x = 1$$

ملاحظه می‌شود که $x=1$ به دست آمده است که با فرض اولیه مسأله در تناقض است لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

ب) فرض خلف: فرض می‌کنیم $y \neq 1$ نباشد، یعنی $y = 1$ است و با جای‌گذاری $y = 1$ در فرض مسأله خواهیم داشت:

$$x^3 + y^3 = 65 \xrightarrow{y=1} x^3 + 1 = 65 \Rightarrow$$

$$x^3 = 65 - 1 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = +4$$

۸۱. دلیل نادرستی استدلال: می‌دانیم در ساده کردن کسرهای زمانی می‌توانیم عبارات صورت را با عبارات مخرج ساده نماییم که بین عبارات صورت و مخرج فقط عمل ضرب باشد؛ لذا چون در این سوال عمل جمع در صورت عبارت دیده می‌شود پس این گونه ساده کردن اشتباه است

پاسخ سوالات چهارگزینه‌ای درس دوم از فصل اول

۸۲. در این گونه سوالات هم می‌توان از گزاره ریاضی به معادل فارسی آن رسید و هم بالعکس می‌توان معادل ریاضی گزاره فارسی نوشته شده را با آنچه در گزینه‌ها نوشته شده است چک کرد.

گزینه «۱»: مجموع مکعبات یعنی جمع مکعب‌ها؛ یعنی $x^3 + y^3$ و مکعب مجموع یعنی $(x+y)^3$. (درست).

گزینه «۲»: چون x قیمت فروش کالا است پس $\frac{15}{100}x$ برابر ۱۵ درصد فروش کالا خواهد بود. می‌دانیم که سود برابر «قیمت فروش منهای خرید» است، پس: $x - y =$ سود کالا

پس نصف سود کالا برابر $\frac{x-y}{2}$ خواهد بود. (درست)

گزینه «۳»: جذر عدد همان \sqrt{x} است و مجذور عدد یعنی x^2 . پس

نصف مجذور برابر $\frac{x^2}{2}$ خواهد شد. «تفاضل عدد a از عدد b یعنی از عدد b ، عدد a را کم کنیم و این یعنی $b - a$ »، پس تفاضل جذر از نصف مجذور یعنی از «نصف مجذور $(\frac{x^2}{2})$ »، «جذر (\sqrt{x}) » را کم

کنیم، یعنی $\sqrt{x} - \frac{x^2}{2}$. (نادرست)

گزینه «۴»: نیز «ریشه سوم مربع عددی یعنی $\sqrt[3]{x^2}$ » و «جذر

مکعب عددی یعنی $\sqrt{x^3}$ » و «وقتی عددی از عدد دیگر بزرگتر نیست معادل این است که کوچکتر یا مساوی آن عدد است» که در این گزینه درست نوشته شده است، پس جواب گزینه «۳» خواهد بود.

۸۳. صورت سؤال برابری دو مقدار را با هم بیان می‌کند، یعنی

برابری «دو برابر تفاضل عددی از نصف آن عدد» با «مربع معکوس آن عدد». پس ما این دو گزاره را به نماد ریاضی می‌نویسیم. جمله اول دو برابر A را می‌خواهد که A مساوی تفاضل عددی از نصف آن عدد است. یعنی A برابر با $x - \frac{x}{2}$ است. ($x - \frac{x}{2}$ یعنی تفاضل نصف عدد از خود آن عدد)، پس

جمله اول برابر است با $2(\frac{x}{2} - x)$.

نکته اگر جای تفاضل و دو برابر را عوض کنیم، معادل

ریاضی آن برابر خواهد بود با: $\frac{x}{2} - 2x$

معادل ریاضی عبارت «مربع معکوس عددی» برابر است با «مربع $\frac{1}{x}$ »

یعنی $(\frac{1}{x})^2$ که از قوانین توان در ریاضیات معادل است با $(\frac{1}{x})^2 = \frac{1^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ پس «مربع معکوس هر عدد» معادل است با «معکوس مربع آن عدد».

پاسخ گزینه ۱ است

۸۴. گزاره «الف»: «حاصل ضرب عددی در ربع آن عدد یعنی $x \times \frac{x}{4}$ »

(ربع عدد یعنی $\frac{1}{4}$ آن عدد) و «چهار برابر آن عدد به علاوه ۲ یعنی $4x + 2$ ». پس معادل ریاضی آن درست نوشته شده است.

گزاره «ب»: سه برابر تفاضل M از A خواسته شده است که M نصف عدد A ، 20 برابر آن عدد است. یعنی $20(x - \frac{x}{2})$. جذر

مکعب عدد هم برابر است با $\sqrt{x^3}$. پس گزاره «ب» نادرست است.

گزاره «پ»: «مربع مجموع دو عدد یعنی $(x+y)^2$ » و «مجموع مجذور مربع‌ها یعنی حاصل جمع توان دوم مربع‌ها» و

این یعنی $(x^2)^2 + (y^2)^2$ (معادل ریاضی مربع و مجذور هر دو

به زبان ریاضی یعنی توان دوم عدد) و «کوچکتر نیست معادل این است که بزرگتر یا مساوی است» پس

$(x+y)^2 \geq (x^2)^2 + (y^2)^2$. پس نماد ریاضی در گزاره «پ» درست نوشته شده است.

گزاره «ت»: «مجموع معکوس‌های دو عدد حقیقی یعنی

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ » و «معکوس مجموع‌های آنها یعنی معکوس $x+y$ » و

این یعنی $\frac{1}{x+y}$ پس معادل آن درست نوشته شده است (به مفهوم بزرگتر نیست دقت کنید).

گزاره «ث»: «جذر معکوس عدد یعنی $\sqrt{\frac{1}{x}}$ » که این عبارت معادل

است با $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (جذر معکوس با معکوس جذر برابر است). «معکوس

جذر ثلث عدد برابر است با $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ »، زیرا «جذر ثلث عدد برابر است با

$\sqrt[3]{\frac{x}{3}}$ » و معکوس آن برابر $\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x}{3}}}$ خواهد شد. پس گزاره «ث» نیز درست معادل نویسی شده است.

پس فقط در گزاره «پ» معادل ریاضی آن نادرست نوشته شده است پس جواب گزینه «۴» خواهد بود.

پاسخ گزینه ۲ است

۸۵. درآمد کارخانه از فروش کالایی برابر است با «حاصل ضرب تعداد کالای تولیدشده در قیمت هر واحد کالا». طبق صورت سؤال اگر x تعداد کالا باشد، داریم:

$$x = (15 \times P^2) + 500 \quad (1)$$

عبارت قبل است، می‌توان این دو مقدمه را به زبان ریاضی به صورت مقابل نوشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \sim p \end{array} \right.$$

نتیجه‌ای که از این استدلال به دست می‌آید هیچگاه نقیض q نیست. یادتان باشد که از این دو مقدمه، هیچ نتیجه منطقی به دست نمی‌آید.

پاسخ گزینه ۲ است

۹۰. این استدلال یک قیاس استثنایی است که نتیجه آن از «ترکیب عطفی دو گزاره مقدمه» به درست می‌آید و نماد ریاضی آن به صورت « $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ » می‌باشد: «نتیجه این استدلال قطعی و یقینی است» و همواره درست است.

پاسخ گزینه ۲ است

۹۱. در این استدلال مقدمه اول یک گزاره شرطی است ($p \Rightarrow q$) و مقدمه دوم «نقیض نتیجه (تالی) در مقدمه اول است» ($\sim q$). اما چون «نقیض نتیجه این استدلال ($\sim q$) در مقدمه اول آمده است. پس می‌توان این استدلال را به صورت نماد ریاضی به شکل مقابل نمایش داد:

$$\frac{p \Rightarrow q}{\sim q}$$

این استدلال نیز حالی از «قیاس استثنایی» است که نقیض نتیجه در یکی از دو مقدمات وجود دارد و «نتیجه این استدلال قطعاً درست است» پس موارد «ت» و «ث» درست می‌باشد

پاسخ گزینه ۲ است

۹۲. در این استدلال از قیاس استثنایی به شکل نادرست استفاده شده است و نتیجه به دست آمده قطعی نیست؛ زیرا اگر عدد a بر ۵ بخش پذیر باشد آنگاه رقم یکان آن صفر یا ۵ خواهد بود. پس روش این استدلال نادرست است و «این استدلال یک مغالطه است» و نتیجه به دست آمده ممکن است درست باشد.

پاسخ گزینه ۲ است

۹۳. مقدمه اول در این استدلال یک گزاره دو شرطی است یعنی از دو گزاره شرطی تشکیل شده است. یعنی ترکیب عطفی دو گزاره «عدد a بر ۲ بخش پذیر است آنگاه رقم یکان a زوج است» و گزاره «رقم یکان عدد a زوج است آنگاه عدد a بر ۲ بخش پذیر است» و مقدمه دوم، مقدم گزاره «رقم یکان عدد x زوج است آنگاه عدد x بر ۲ بخش پذیر است» می‌باشد و نتیجه نوشته شده نیز تالی گزاره «رقم یکان عدد x زوج است آنگاه عدد x بر ۲ بخش پذیر است» می‌باشد که یک قیاس استثنایی است که نتیجه آن قطعاً درست است پس گزاره های «ب» و «ت» صحیح هستند.

$$\frac{p \Rightarrow q}{q} \quad \text{یک مغالطه}$$

نتیجه: اگر p و q دو گزاره باشند آنگاه استدلال $\frac{p \Rightarrow q}{\therefore p}$ یک مغالطه است. اما استدلال $\frac{p \Leftrightarrow q}{\therefore p}$ یک مغالطه نیست و یک استدلال قیاسی

کاملاً درست است زیرا $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

پاسخ گزینه ۲ است

حاصل ضرب قیمت کالا در تعداد کالا (یعنی درآمد) برابر است با:

$$R(x) = x \times P \quad (۲)$$

پس از رابطه (۱) مقدار P را بر حسب x به دست می‌آوریم و در رابطه (۲) جای گذاری می‌کنیم.

$$x = (15 \times P^2) + 500 \Rightarrow x - 500 = 15P^2$$

$$\Rightarrow \frac{x - 500}{15} = P^2 \Rightarrow P = \sqrt{\frac{x - 500}{15}}$$

در نتیجه معادله درآمد برابر است با:

$$P(x) = x \times P = x \sqrt{\frac{x - 500}{15}}$$

پاسخ گزینه ۳ است

۸۶. ابتدا عبارت را به زبان ریاضی بازنویسی می‌کنیم. عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم.

$$7x = \text{هفت برابر عددی و } x^2 + 6 = \text{مربع عدد به علاوه ۶}$$

$$6 - 7x = x^2 + 6 - 7x = \text{کسر کردن ۷ برابر عددی از مربع آن عدد به علاوه ۶}$$

پس سوال از ما کمترین مقدار عبارت $x^2 - 7x + 6$ را می‌خواهد. پس باید کمترین مقدار این عبارت درجه ۲ را به دست آوریم. تنها چیزی که باید به یادمان بیاید ماکزیمم یا مینیمم یک عبارت درجه دوم است که در فعل تابع خواندیم. می‌دانیم که رأس سهمی

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{دارای طول مینیمم یا ماکزیمم } x_s = -\frac{b}{2a}$$

است. چون ضریب x^2 در این تابع (a) مثبت است پس تابع مینیمم دارد. طول نقطه مینیمم این تابع برابر است با:

$$x = \frac{-(-7)}{2} = \frac{7}{2} \quad \text{کافی است مقدار تابع را به ازای } x = \frac{7}{2}$$

به دست آوریم تا کمترین مقدار عبارت $x^2 - 7x + 6$ به دست آید:

$$x^2 - 7x + 6 \xrightarrow{x = \frac{7}{2}} \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{7}{2}\right) + 6 = \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 6 = -\frac{25}{4}$$

پاسخ گزینه ۲ است

۸۷. اینکه «زمین خیس می‌شود» یا «آسمان ابری است» در مقدمات استدلال وجود ندارد. اگر مقدمات یک استدلال را پذیرفته باشیم، نتیجه حاصل باید زاینده مقدمات باشد پس تنها عبارتی که از مقدمات نتیجه می‌شود این است که «مردم کت قرمز می‌پوشند» و ما نمی‌توانیم چیزی بیشتر از این از مقدمات نتیجه بگیریم، پس هر نتیجه‌ای که با هوای بارانی مرتبط باشد، نتیجه این مقدمات نیست.

پاسخ گزینه ۳ است

۸۸. سوال از ما نتیجه استدلال را می‌خواهد، نه اینکه کدام عبارت در گزینه‌ها صحیح است؟ با توجه به مقدمات استدلال که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، مقدمه دوم، نقیض نتیجه (تالی) در مقدمه اول است. پس تنها چیزی که می‌توان از این استدلال نتیجه گرفت، نقیض مقدم در قضیه اول است. یعنی شیراز پایتخت ایران نیست و بقیه گزاره‌ها با اینکه عبارتهای صحیحی هستند، اما ارتباطی با مقدمات ما ندارند.

۸۹. با نگاه دقیق به مقدمات می‌فهمیم که مقدمه اول یک گزاره شرطی است که آن را به عنوان یک گزاره درست پذیرفته‌ایم. حال مقدمه دوم را نگاه کنید. این مقدمه دوم، نقیض مقدم در

«اگر یک چهارضلعی مربع باشد، آن گاه اضلاعش مساویند.» که معادل است با:

$$\underbrace{p}_{\text{مربع}} \Rightarrow \underbrace{q}_{\text{اضلاع مساوی}}$$

«اگر اضلاع یک چهارضلعی مساوی نباشند، آن گاه چهارضلعی مربع نیست.»

$$\underbrace{\sim q}_{\text{مربع نیست}} \Rightarrow \underbrace{\sim p}_{\text{اضلاع مساوی}}$$

پاسخ گزینه ۳ است

۹۹. با انجام درست محاسبات و استفاده صحیح از قواعد و قوانین ریاضی گزینه سه صحیح است اما ایراد در سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینه «۱»: در مرحله سوم عبارت $3Y + 3XY$ باید نوشته می‌شد زیرا Y باید در کل پرانتز ضرب شود.

گزینه «۲»: در مرحله سوم ساده کردن $2X$ در صورت و مخرج صحیح نیست زیرا بین $2X$ و سایر عبارت صورت و مخرج علامت جمع و تفریق وجود دارد که ساده کردن آن اشتباه است.

گزینه «۴»: در مرحله چهارم باید $3Y + 3XY$ نوشته می‌شد زیرا باید $3Y$ در کل پرانتز ضرب شود.

پاسخ گزینه ۳ است

پاسخ تمرین‌های درس اول از فصل دوم

۱۰۰. الف) تابع

ب) مجموعه اعداد حقیقی (زیرا هر عدد عضوی از دامنه است).

ج) مجموعه اعداد حقیقی (زیرا هر عدد عضوی از برد است).

۱۰۱. الف) می‌دانیم این توضیحات برای تابع همانی است.

ب) می‌دانیم این توضیح می‌تواند برای یک تابع به صورت $Y = X + 3$ نیز باشد که همانی نیست.

ج)

د) می‌دانیم در حالت کلی چنین تابعی وجود ندارد ولی در شرایطی که دامنه تابع تک عضوی باشد می‌شود. یعنی به عنوان مثال $f(1) = 1$ پس یک نقطه هم می‌تواند تابع ثابت و هم تابع همانی باشد.

ه)

۱۰۲. الف) می‌دانیم برای تعیین دامنه و برد توابع در صورت نمایش

زوج مرتبی به مجموعه مؤلفه‌های اول تمام زوج‌های مرتب دامنه و به مجموعه مؤلفه‌های دوم تمام زوج‌های مرتب برد می‌گفتیم لذا داریم:

$$D_f = \{-2, 1, 3, -4\}$$

$$R_f = \{-2, 1, 3, -4\}$$

ب) با کمی دقت ملاحظه می‌شود که مؤلفه‌های اول با مؤلفه‌های دوم هر زوج مرتب با هم برابرند. پس به نوعی تابع همانی را معرفی می‌کند.

۹۴. گزینه «۱»: نتیجه استدلال درست است، اما روش استدلال نادرست

است زیرا به شکل $\frac{p \Rightarrow q}{q} \therefore p$ است و این استدلال یک مغالطه است

که ممکن است نتیجه به دست آمده (همانند این سوال) صحیح باشد. و ممکن است صحیح نباشد، به عنوان مثال عدد $24 = 6 \times 4$ عددی مرکب است اما اعداد ۶ و ۴ اعداد اول نیستند.

گزینه «۲»: به صورت $\frac{p \Rightarrow q}{\sim q} \therefore \sim p$ است که یک قیاس استثنایی است

و نتیجه آن کاملاً درست است.

گزینه‌های «۳» و «۴»: استدلال انجام شده در این گزینه‌ها نیز همانند استدلال انجام شده در گزینه «۱» است که یک مغالطه می‌باشند. پس فقط در گزینه «۲» از استدلال «قیاسی استثنایی» به شکل نادرست استفاده نشده است.

پاسخ گزینه ۲ است

۹۵. اگر گزاره صورت سوال را به شکل گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » بنویسیم.

گزاره هم‌ارز آن به صورت « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » خواهد بود. که معادل فارسی هم‌ارز گزاره صورت سوال در گزینه «۴» نوشته شده است. برای درک این موضوع کافی است p را گزاره «در گزاره شرطی، مقدم دارای ارزش نادرست است» و q را گزاره «در گزاره شرطی ارزش گزاره شرطی درست است» در نظر بگیریم که با نوشتن گزاره‌های $\sim p$ و $\sim q$ و استفاده از عکس نقیض گزاره اصلی یعنی « $p \Rightarrow \sim q$ » گزاره مطلوب یعنی گزینه «۴» به دست می‌آید.

پاسخ گزینه ۲ است

۹۶. به جای اثبات هر گزاره شرطی می‌توان «عکس نقیض» آن گزاره

شرطی را ثابت کرد، پس پاسخ عکس نقیض گزاره «برای دو عدد a و b اگر $a \leq 0$ و $b \leq 0$ آنگاه $a + b \leq 0$ » خواهد بود. برای این کار باید نقیض مقدم و نقیض تالی این گزاره را نوشته و از نقیض تالی، نقیض مقدم را نتیجه بگیریم:

تالی: $a + b \leq 0$ پس نقیض تالی: $a + b > 0$ و مقدم: $a \leq 0$ و $b \leq 0$ پس نقیض مقدم: $a > 0$ یا $b > 0$ (قانون دمورگان)؛ پس عکس نقیض گزاره صورت سوال به صورت «اگر $a + b > 0$ آنگاه $a > 0$ یا $b > 0$ » خواهد بود.

نکته: توجه داشته باشید که نقیض گزاره « $p \wedge q$ » طبق قانون دمورگان برابر است با « $\sim p \vee \sim q$ ».

پاسخ گزینه ۲ است

۹۷. اگر Y زوج باشد، آنگاه YY اول است.

می‌دانیم طبق قانون عکس نقیض: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ بنابراین معادل است با: «اگر YY اول نباشد، آن گاه Y زوج نیست.»

پاسخ گزینه ۲ است

۹۸. از عکس نقیض ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ استفاده می‌کنیم.