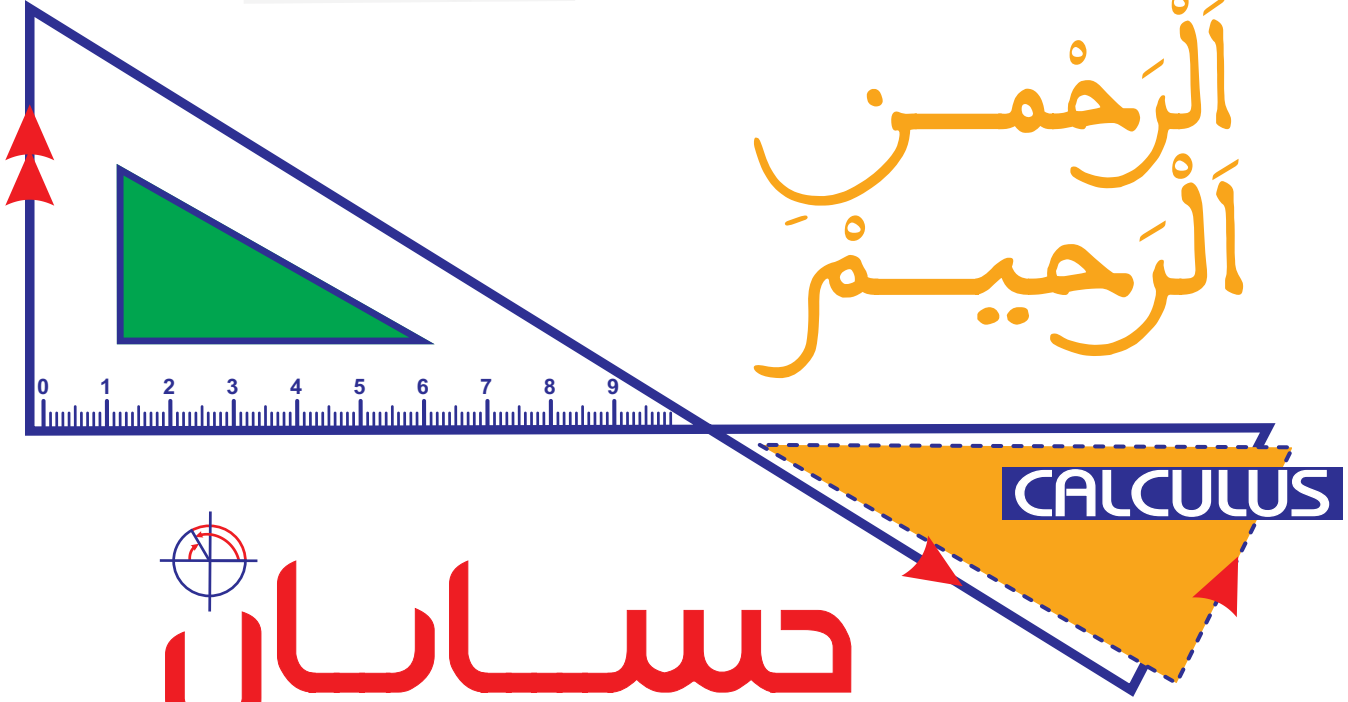




بِسْمِ
اللَّهِ
الرَّحْمَنِ
الرَّحِيمِ



حسابان



جامعہ



کنکور

مقدمه مؤلف

کنکور ۹۹ بی شک سخت‌ترین کنکور قرن بود!

در این کنکور تقریباً بیش از ۸ یا ۹ سؤال دشوار یا نسبتاً دشوار وجود داشت که در قیاس با سال‌های گذشته عدد بسیار بالایی است.

این کنکور نزدیک‌ترین کنکور به کنکور ۱۴۰۰ محسوب می‌شود و اگر بخواهیم چیزی را معیار قرار دهیم شاید منطقی‌ترین باشد که به کنکور ۹۹ توجه ویژه‌ای داشته باشیم.

در این کنکور تفاوت‌های به خصوصی در قیاس با کنکورهای گذشته دیده می‌شد.

● تقریباً هیچ‌کدام از تست‌ها با روش‌های تستی گل‌درشت و نخ‌نما شده قابل حل نبود و حل تک‌تک تست‌ها نیاز به درک عمیقی از آن مفهوم داشت.

● تقریباً از اکثر قریب به اتفاق مباحث دشوارترین موضوع برای طرح تست انتخاب شده بود.

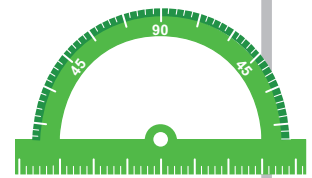
● تعداد تست‌های محاسباتی که نیاز به وقت بیشتری برای حل داشتند، نسبت به سال‌های گذشته بسیار بیشتر بود و این موجب شد تا با کنکوری نفس‌گیر مواجه باشیم.

● برای اولین بار شاهد تست‌هایی بودیم که چندین موضوع در یک تست با هم ترکیب شده بودند.

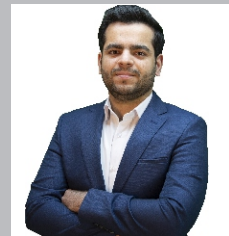
● بعضی تست‌ها با استناد به مطالب پنهان کتاب درسی طرح شده بودند که کمتر کسی تصور آن را می‌کرد!

در نهایت در کنکور ۹۹ شاهد سؤالاتی با ایده‌های خارج از مفاهیم کتاب درسی نبودیم، یعنی با تسلط کامل به مفاهیم کتاب درسی می‌توانستیم به تمامی تست‌ها پاسخ دهیم، اما رسیدن به این اشراف و تسلط، نیازمند به نگاهی بسیار عمیق بر مفاهیم کتاب است که یک دانش‌آموز به تنهایی قادر به کشف و شهود آن نیست، ما در این کتاب بر اساس استانداردهای حاکم بر کنکور ۹۹ تمامی مفاهیم کتاب درسی که احتمال مطرح شدن در کنکور داشت را جزء به جزء تبدیل به تست کردیم تا شما آمادگی لازم برای مواجه با کنکور ۱۴۰۰ را داشته باشید.

به امید موفقیت و سربلندی شما عزیزان.



مهدی علی‌نصف‌چاگی



مهدی سعید عظیمی



همکاران تالیف

With
Collaboration

M. Lotfi مهندس محمد جواد لطفی
A. Dezhbadaran امینه دژبادران
A. Nikookalam اکرم نیکوکلام
A. KHavanin zadeh مهندس امین خوانین زاده
SH. Saiahnia مهندس شروین سیاح نیا

ویراستاران علمی

Board
Editorial

M. Mokhtari سرپرست تیم ویراستاری : محمد حسین مختاری
A. Selseleh مهندس امین سلسله
M. Samadi مهندس میثم صمدی
P. Tauoob دکتر پیام طیوب
A. Ashtab دکتر آرمان آشتاب
M. Arbab bahrami مهندس محمد ارباب بهرامی
M. Amin مهندس میثم امین
A. Shokri مهندس امیرحسام شکری
M. Sasani مهندس مریم ساسانی
O. shirinezhad مهندس امید شیری نژاد

کارشناسان علمی

Expert
Scientific

M. Askari مهندس محمد عسکری
A. Vaziri مهندس آرش وزیر
M. Razavi دکتر مهدی رضوی
B. Jalali مهندس بهرام جلالی
M. Jandaghi مهندس مهدی جندقی
S. Salamiyan مهندس سامان سلامیان
M. Sehatkar مهندس محمد صحت کار
A. Safavi مهندس اصلاص صفوی
P. Noori مهندس پیام نوری

CONTENTS

Set, Pattern & Sequence	01	۱۰ مجموعه
		۱۱ الگو و دنباله
		۱۴ مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی
۱۶ توان های گویا و عبارت های جبری	02	Rational Exponents & Algebraic Expressions
		۱۸ قدر مطلق و جزء صحیح
Elementary Operations	03	۱۹ معادلات گویا و معادلات رادیکالی، نامعادله
۲۳ معادله درجه دوم		۲۱ معادلات و نامعادلات قدر مطلق
۲۴ نمودار تابع درجه دوم (سه می)	04	Quadratic
		۲۶ آشنایی با هندسه تحلیلی
Analytic Geometry	05	
۲۸ مفهوم تابع، دامنه و برد، تساوی دو تابع		
۳۰ انتقال، توابع صعودی و نزولی		
۳۱ اعمال جبری روی توابع، ترکیب توابع	06	Functions & Their Graphs
۳۴ تابع یک به یک و تابع وارون		۳۹ توابع نمایی
۳۷ تقسیم و بخش پذیری		۴۰ لگاریتم
Exponential Functions & Logarithms	07	
۴۳ نسبت های مثلثاتی، روابط بین نسبت های مثلثاتی		
۴۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا	08	Trigonometric Functions
۴۷ تناوب و تانژانت، توابع مثلثاتی		۵۱ همسایگی، فرایندهای حدی و محاسبه حد
۴۸ معادلات مثلثاتی		۵۲ رفع ابهام $\frac{0}{0}$
		۵۵ پیوستگی
Limits & Continuity	09	۵۶ حد بی نهایت و حد در بی نهایت
۶۱ قواعد محاسبه مشتق، خط مماس		۵۸ مجانب
۶۳ مشتق تابع مرکب، معادله خط مماس	10	Differentiation
۶۵ مشتق پذیری، مشتق چپ و راست و آهنگ تغییر		۶۹ اکستریم های تابع و توابع صعودی و نزولی
Applications Of Derivatives	11	۷۳ جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن
		۷۴ نمودار شناسی
۷۷ آزمون های جامع (شبه ساز)	12	Final Assessment Test



Maryam Mirzakhani
1977-2017 Fields Medal(2014)

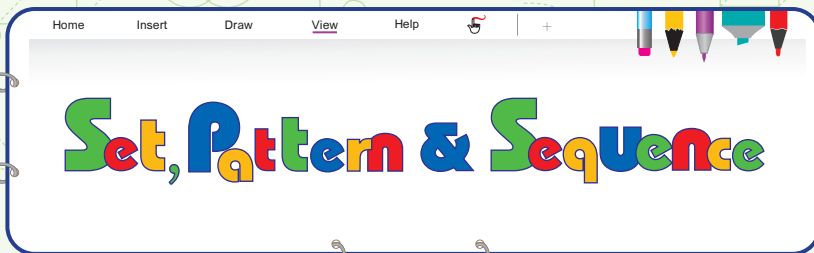
QUESTIONS

MATHEMATICS

Name	Fields Medal Year	Born Year
Grigori Perelman	2006	1966
Rikshay Venkatesh	2018	1964
Artur Avila	2014	1979
Alain Connes	1982	1947
Pierre Deligne	1978	1944
Cédric Villani	2010	1973
Stanislov Smirnov	2010	1970
Peter Scholze	2018	1987
Timothy Gowers	1998	1963
Alessio Figalli	2018	1984
Martin Hairer	2014	1975
Vladimir Voevodsky	2002	1966



PETER SCHOLZE
FIELDS:2018 1987



مجموعه، الگو و دنباله

صفحه ۲ تا ۱۳ کتاب درسی

مجموعه

فصل ۱

ریاضی دهم

سکانس 1



1. کدام گزینه صحیح است؟

(۲) $Z \cup Q = \mathbb{R}$

(۱) $N \cap Q' = N$

(۴) $(\mathbb{R} - Q') \subseteq W$

(۳) $(Z - Q) \subseteq N$

2. اگر $A = (-3, 6]$, $B = (0, 8]$, $C = (-\infty, 3]$, $D = (2, +\infty)$ باشد، حاصل $(A \cup C) - (B \cap D)$ برابر با کدام بازه است؟

(۲) $(-\infty, 2]$

(۱) $(-3, 2]$

(۴) $(0, \infty)$

(۳) $(-\infty, 2)$

3. کدام مجموعه منتهای است؟

(۲) مثلث‌هایی با مساحت ۶

(۱) اعداد صحیح کمتر از ۲۵

(۴) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{N}\}$

(۳) اعداد گویای موجود در بازه $(1, 3)$

4. اگر A مجموعه اعداد طبیعی فرد و B مجموعه اعداد اول باشند، کدام مجموعه منتهای و غیر تهی است؟

(۲) $B - A$

(۱) $A - B$

(۴) $A - (A \cup B)$

(۳) $A \cap B$

5. کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر مجموعه $A \cup B$ نامتناهی و مجموعه B نیز نامتناهی باشد، مجموعه A منتهای است.

(۲) اگر مجموعه‌های A و B نامتناهی باشند، مجموعه $A \cap B$ هم نامتناهی است.

(۳) اگر \mathbb{N} مجموعه مرجع و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، مجموعه A' منتهای است.

(۴) اگر مجموعه A منتهای و مجموعه B نامتناهی باشد، مجموعه $B - A$ نامتناهی است.

6. اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی باشد و $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{4, 5, 6, 7\}$ باشند، متمم مجموعه $B' - A$ چند عضو دارد؟

(۲) ۵

(۱) ۲

(۴) ۸

(۳) ۷

7. اگر $A = (-2, 3]$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ باشد، مجموعه $A' \cup B'$ کدام است؟

(۲) $(-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$

(۱) $(1, 3]$

(۴) $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

(۳) $\mathbb{R} - (1, 2)$

8. اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، ساده شده مجموعه $(A - B) - (B \cap A')$ برابر کدام است؟

(۲) \emptyset

(۱) B'

(۴) $A - B$

(۳) $A \cap B$

9. اگر $n(A) = 4$, $n(B) = 7$, $n(A - B) = 3$ مجموعه $A \cup B$ چند عضو دارد؟

(۲) ۱۱

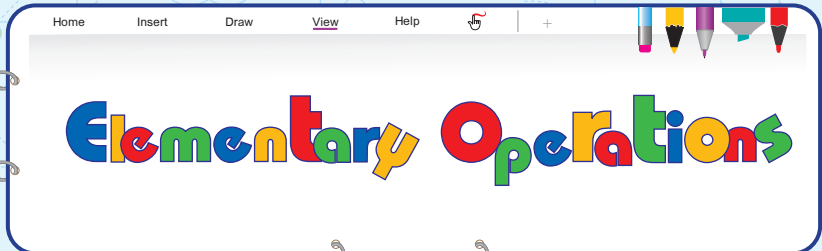
(۱) ۱۰

(۴) ۱۳

(۳) ۱۲



STANISLAV SMIRNOV
FIELDS:2010 1970



اعمال مقدماتی

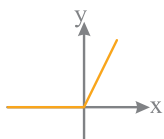
صفحات پراکنده کتاب درسی

قدر مطلق و جز، صحیح

فصل ۳

ریاضی ۱۰+ حسابان ۱

سکانس 5



(داخل - ۹۰)

(داخل - ۹۵)

80. اگر $x < y < 0$ و $\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} - |x - y| + \frac{y}{\sqrt{y^2}} - \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 8$ باشد، مقدار y کدام است؟

(۱) -۱

(۲) -۲

(۳) -۳

(۴) -۴

81. شکل روبه‌رو نمودار کدام تابع است؟

(۱) $y = x - |x|$

(۲) $y = x + |x|$

(۳) $y = |x - 1| - 1$

(۴) $y = 1 - |x - 1|$

82. مساحت ناحیه محدود به نمودار $f(x) = |2x - 1|$ و محور x ها و دو خط $x = 1$ و $x = -1$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$

(۲) ۲

(۳) $\frac{5}{2}$

(۴) ۳

83. مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) $\frac{7}{3}$

(۳) $\frac{8}{3}$

(۴) ۳

84. حاصل عبارت $[\sqrt{10}] + [\sqrt{11}] + [\sqrt{12}] + \dots + [\sqrt{24}]$ کدام است؟

(۱) ۴۵

(۲) ۴۸

(۳) ۵۰

(۴) ۵۴

85. به‌زای چه مقادیری از x رابطه $[x - 2] + [x + 1] = 3$ برقرار است؟

(۱) $[2, 3]$

(۲) $[1, 2]$

(۳) $(0, 3)$

(۴) $[2, 4]$

86. مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y = [\frac{x}{3}] + 1$ و محور x ها در بازه $[0, 6]$ کدام است؟

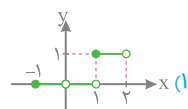
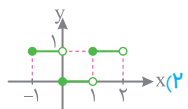
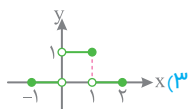
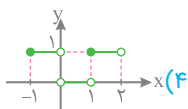
(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۹

(۴) ۱۱

87. نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x|}{x} [x]$ کدام است؟



88. برد تابع $f(x) = \frac{1}{x-[x]}$ کدام بازه است؟

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(-1, +\infty)$

- (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

89. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{[x] + [-x]}$ کدام است؟

- (۱) \mathbb{Z} (۲) \mathbb{R}

- (۳) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۴) \emptyset

90. اگر $[x-2] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x-3| - |x-4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟ (خارج - ۹۷)

- (۱) ۱ (۲) ۲

- (۳) ۳ (۴) فاقد نقطه مشترک

	سکانسی 6	ریاضی ۱۰ حسابان ۱	فصل ۳	معادلات گویا و معادلات رادیکالی، نامعادله	دهم : ص ۸۳ تا ۹۱ حسابان ۱ : ۳۶۱ - ۲۵ تا ۳۷ تا ۲۸
---	-----------------	--------------------------	--------------	--	---

91. معادله $\frac{x}{2-x} + \frac{2}{x} = -\frac{3}{2}$ چند جواب دارد؟

- (۱) فقط یک جواب مثبت (۲) فقط یک جواب منفی

- (۳) دو جواب هم علامت (۴) دو جواب غیر هم علامت

92. در معادله $x + \frac{2x-1}{x-4} = -2$ ریشه‌ها چگونه‌اند؟

- (۱) فقط یک جواب مثبت (۲) فقط یک جواب منفی

- (۳) دو جواب وارون هم (۴) دو جواب قرینه

93. معادله $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x}$ چند جواب دارد؟

- (۱) دو جواب مثبت (۲) دو جواب منفی

- (۳) یک جواب منفی (۴) جواب ندارد

94. به ازای کدام مقدار a ، معادله $\frac{x-2}{ax-5} = \frac{a+2}{x-1} - 1$ دارای جواب $x = 3$ است؟

- (۱) $2, -\frac{1}{3}$ (۲) $2, -\frac{1}{3}$

- (۳) $1, -\frac{2}{3}$ (۴) $1, \frac{2}{3}$

95. ریشه بزرگ‌تر معادله کسری $\frac{6x}{x-1} + \frac{x-1}{3x} = 3$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{5}$

- (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{2}$

96. بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۳

- (۳) ۳۵ (۴) ۳۶



AKSHAY VENKATESH
FIELDS:2018 1964



تابع

دهم : ص ۹۵ تا ۱۱۳
حسابان : ص ۳۸ تا ۵۳

مفهوم تابع، دامنه و برد، تساوی دو تابع

فصل ۶

ریاضی ۱۰+ حسابان

سکانس 11



168. اگر رابطه $f = \{(3, a+2b), (5, 4), (7, 2), (3, 7), (5, 2a-b)\}$ یک تابع باشد، $a^2 - b^2$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

169. کدام نمودار، نمایش یک تابع $y = f(x)$ است؟



170. اگر رابطه $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & ; x \leq 2 \\ ax - 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۱۲
(۳) ۱۴
(۴) ۱۶

171. کدام رابطه نشان دهنده یک تابع است؟

- (۱) $|x| + |y| = 4$
(۲) $y = \sqrt{x^2 - 1}$
(۳) $y^2 = 5x - 1$
(۴) $y(x-2) = 0$

172. اگر $f = \{(1, m+n), (2^0, n^1+n), (n^2-3n, 4)\}$ یک تابع همانی باشد، m کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) -۳
(۳) -۲
(۴) ۶

173. شکل مقابل، نمودار تابع $f: [-2, 2) \rightarrow B$ است. مجموعه B کدام یک از مجموعه‌های زیر می‌تواند باشد؟

- (۱) $[-1, 1]$
(۲) $[-1, 0) \cup (1, 3]$
(۳) $[-1, 5]$
(۴) $[-1, 3) - (0, 1]$

174. دامنه تابع $f(x) = \frac{x+5}{x^2+ax+b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{3\}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

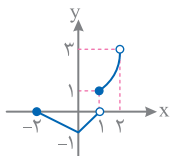
- (۱) -۳
(۲) ۳
(۳) ۶
(۴) -۶

175. اگر $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ دامنه تابع $f(3-x)$ ، کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$
(۲) $[0, 3]$
(۳) $[1, 2]$
(۴) $[1, 3]$

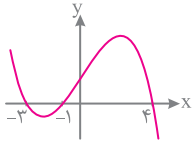
176. اگر $f(x) = \sqrt{x+|x+2|}$ دامنه تابع $f(-x)$ کدام است؟

- (۱) $x \leq -1$
(۲) $x \geq -1$
(۳) $x \leq 1$
(۴) $x \geq 1$



(داخل - ۹۲)

(خارج - ۹۴)



177. دامنه تابع $y = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$ به کدام صورت است؟

(۱) $[-2, 5]$ (۲) $(-2, 5) - (0, 3)$

(۳) $[-2, 0) \cup (3, 5]$ (۴) $\mathbb{R} - [0, 3]$

178. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ ، است؟

(۱) $[-1, 1] \cup [0, 6]$

(۲) $[-3, 1] \cup [0, 2]$

(۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$

(۴) $[-5, -3] \cup [0, 2]$

179. بُرد تابع $f(x) = x - |x-2|$ کدام است؟

(۱) $(-\infty, 2]$ (۲) $[-1, +\infty)$

(۳) $(-1, 2)$ (۴) $(2, +\infty)$

180. بُرد تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & ; x \geq 0 \\ |x+1| - 2 & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

(۱) $[0, +\infty)$ (۲) \mathbb{R}

(۳) $[-2, +\infty)$ (۴) $[-1, +\infty)$

181. بُرد تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ کدام است؟

(۱) $(0, 1)$ (۲) $[0, 1]$

(۳) $(0, 1)$ (۴) $(0, 1]$

182. در بازه (a, b) نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$ بالاتراز نمودار تابع $y = 2x + |x|$ است. طول نقطه وسط این بازه کدام است؟ (داخل - ۹۷)

(۱) -2 (۲) $-1/5$

(۳) -1 (۴) $-0/5$

183. دو تابع f و g بر روی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. در کدام حالت دو تابع مساوی‌اند؟

(۱) $f(x) = 2 \log x$ و $g(x) = \log x^2$ و $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$ و $g(x) = 1$

(۲) $f(x) = (\sqrt{x})^2$ و $g(x) = x$ و $f(x) = \frac{x}{|x|}$ و $g(x) = \frac{|x|}{x}$

184. در کدام گزینه دو تابع f و g باهم مساوی هستند؟

(۱) $g(x) = x+1$ و $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ و $g(x) = x$ و $f(x) = \sqrt{x^2}$

(۲) $g(x) = \frac{[x]}{x}$ و $f(x) = \frac{x}{[x]}$ و $g(x) = \sqrt{1-x} \times \sqrt{1+x}$ و $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

185. کدام یک از توابع زیر با تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟

(۱) $\log(x-2) - \log x$ (۲) $\log \frac{x^2-4}{x^2+2x}$

(۳) $\frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x} \right)^2$ (۴) $2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}}$

186. اگر توابع $f(x) = 2x+4$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+a}{x-2} & ; x \neq 2 \\ b & ; x = 2 \end{cases}$ مساوی باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱۶

(۳) -4 (۴) ۸



187. قرینه نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می دهیم. نمودار حاصل نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می کند؟

(خارج - ۹۷)

(۱) ۲- (۲) ۵/۰

(۳) ۱ (۴) ۵/۱

188. به ترتیب با کدام انتقال ها نمودار $y = x^2 + 6x + 4$ به روی نمودار $y = x^2 - 4x + 3$ منطبق می شود؟

(۱) ۵ واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت بالا (۲) ۵ واحد به سمت چپ و ۴ واحد به سمت بالا

(۳) ۵ واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت پایین (۴) ۵ واحد به سمت چپ و ۴ واحد به سمت پایین

189. نمودار تابع $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیر منفی باشد؟

(خارج - ۹۳)

(۱) ۱ (۲) ۵/۱

(۳) ۲ (۴) ۳

190. نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف x های منفی، آنگاه ۹ واحد به طرف y های منفی انتقال می دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه زیر محور x ها است؟

(خارج - ۹۸)

(۱) $(-5, 2)$ (۲) $(-5, 3)$

(۳) $(-2, 3)$ (۴) $(-2, 5)$

191. نمودار تابع $y = |\frac{1}{4}x| - 2$ را ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع اند؟

(داخل - ۹۳)

(۱) $-3/5$ (۲) -3

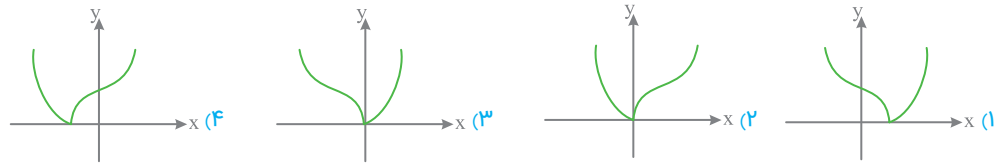
(۳) $-2/5$ (۴) -2

192. نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ از کدام ناحیه مختصات نمی گذرد؟

(۱) اول (۲) دوم

(۳) سوم (۴) چهارم

193. نمودار تابع $f(x) = |(x+1)^2 - 1|$ به کدام صورت است؟

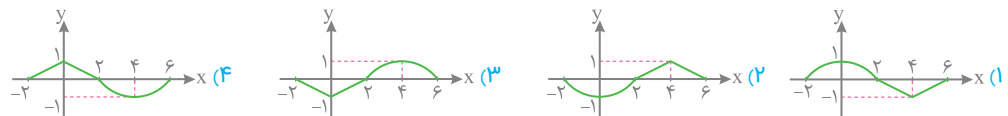
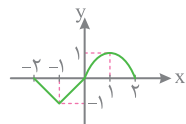


194. نمودار تابع $y = \frac{x-2}{x-3}$ از کدام ناحیه نمی گذرد؟

(۱) اول (۲) دوم

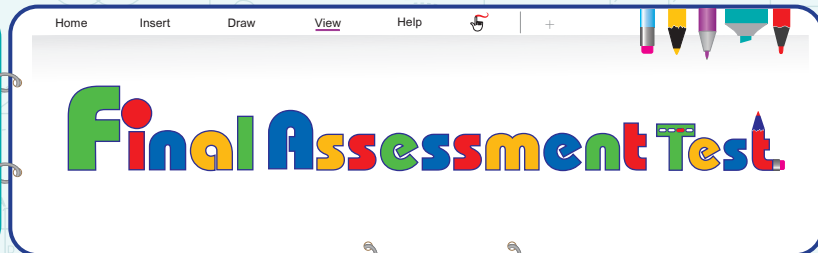
(۳) سوم (۴) چهارم

195. نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = -f(\frac{1}{4}x - 1)$ کدام است؟





ALESSIO FIGALLI
FIELDS:2018 1984



آزمون جامع شبیه ساز

زمان : ۳۷ دقیقه

آزمون جامع شبیه ساز (۱)

تمام فصول

۱۰ + ۱۱ + ۱۳

سکانس 33



621. فرض کنید باقی مانده تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر $x-4$ و $x+2$ ، به ترتیب ۳ و ۱ باشند، باقی مانده تقسیم $P(x^2) + 4P(-x)$ بر $x-2$

کدام است؟

۱) ۷

۲) $1/2$

۳) ۱-۴

622. اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته بندی می کنیم که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$. در دسته نهم، واسطه حسابی بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟

۱) $71/1$

۲) $72/2$

۳) $73/3$

623. اگر قطر مربعی منطبق بر خط $y-x=2$ و نقطه $A(5, 3)$ یک رأس آن باشد، محیط مربع کدام است؟

۱) ۸

۲) $12/2$

۳) $16/3$

624. اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، بُرد تابع $g \circ f$ کدام است؟

۱) $[0, 2)$

۲) $[0, 2)$

۳) $[0, 4)$

625. تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x - (\frac{1}{2})^x}{2}$ را در نظر بگیرید. $f^{-1}(2)$ کدام است؟

۱) $\log_2(-1 + \sqrt{5})$

۲) $\log_2(1 + \sqrt{5})$

۳) $\log_2(2 + \sqrt{5})$

626. با کدام انتقال ها، می توان نمودار $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به روی نمودار $y = x^3$ منطبق کرد؟

۱) ۱ واحد به سمت راست و ۱ واحد به سمت پایین

۲) ۱ واحد به سمت راست و ۱ واحد به سمت بالا

۳) ۱ واحد به سمت چپ و ۱ واحد به سمت بالا

627. اگر $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \sin(\frac{5\pi}{2} + \alpha) - \tan(\pi - \alpha)$

۱) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

۲) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

۳) $-\frac{4}{3}\sqrt{2}$

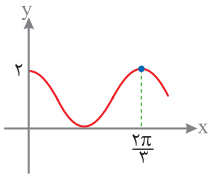
628. مجموع جواب های معادله $\tan(3x - \frac{\pi}{3}) = \cot(\frac{\pi}{4} - x)$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{17\pi}{24}$

۲) $\frac{19\pi}{24}$

۳) $\frac{13\pi}{12}$

629. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + \cos^2 bx - \sin^2 bx$ است. مقدار $f(\frac{\pi}{9})$ کدام است؟



۱/۵ (۱)

۲ (۲)

۲/۵ (۳)

۳ (۴)

630. اگر $\log_4 3 = 0/8$ باشد، مقدار $\log_{12} 6$ کدام است؟

$\frac{1}{11}$ (۲)

$\frac{13}{18}$ (۱)

$\frac{7}{9}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

631. حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x] + 3}{x + 2}$ کدام است؟

-۱ (۲)

$-\infty$ (۱)

۱ (۴)

صفر (۳)

632. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + \sqrt{x^2 + 12}}{|x^2 + x - 6|}$ کدام است؟

$\frac{3}{10}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{3}{5}$ (۳)

633. به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} & ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & ; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ پیوسته است؟

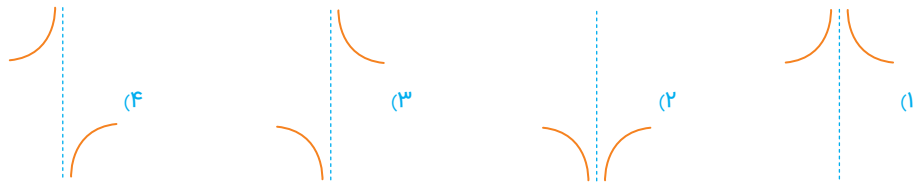
۱ (۲)

۱/۵ (۱)

-۱/۵ (۴)

-۱ (۳)

634. نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{x+1}{x^2+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به کدام صورت است؟



635. مشتق تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{3x + 2}}$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

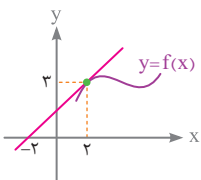
$\frac{29}{16}$ (۲)

$\frac{5}{8}$ (۱)

$\frac{5}{16}$ (۴)

$\frac{29}{8}$ (۳)

636. نمودار تابع f به صورت مقابل است. مشتق تابع $y = x^2 f(x)$ در $x = 2$ کدام است؟



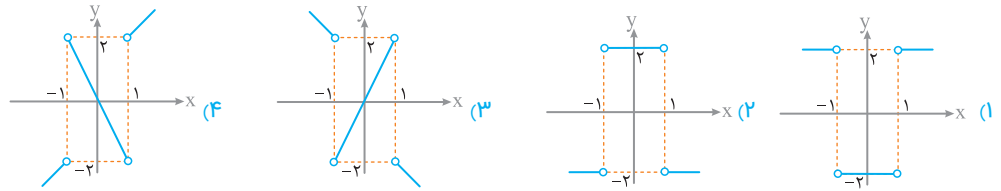
۱۱ (۱)

۷ (۲)

۱۵ (۳)

۱۹ (۴)

637. اگر $f(x) = |x^2 - 1|$ باشد، نمودار f' کدام است؟



638. اگر $f(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ باشد، مقدار $(g \circ f)'(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟

- (1) $-\frac{1}{3}$ (2) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

639. از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیش‌ترین باشد؟

- (1) $\frac{2}{1}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{1}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{1}$

640. چه تعداد از عبارتهای زیر در مورد تابع $f(x) = \frac{x}{|x|-1}$ درست است؟

- (الف) دارای یک نقطه عطف است. (ب) دارای یک نقطه ماکسیم نسبی است. (پ) فاقد نقطه مینیمم مطلق است.
- (1) ۱ (2) ۲ (3) ۳ (4) ۴

زمان: ۳۷ دقیقه

آزمون جامع شبیه ساز (۲)

تمام فصول

۱۳ + ۱۱ + ۱۰

سکانسی 34

641. فرض کنید چند جمله‌ای $P(x) = x^2 - 1$ بر $Q(x) = P(x-1) + P(1-x)$ بخش پذیر باشد. اگر $Q(x) = P(x-1) + P(1-x)$ باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

- (1) صفر (2) -1 (3) 1 (4) 2

642. برای تهیه یک محلول ضد عفونی‌کننده، مقداری محلول آب و الکل با غلظت ۸۰ درصد را به ۵ لیتر محلول آب و الکل با غلظت ۲۰ درصد اضافه می‌کنیم. محلول به دست آمده ۵۰ درصد الکل دارد. حجم محلول اولیه چقدر بوده است؟

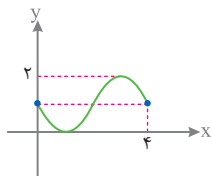
- (1) ۵ (2) ۶ (3) ۸ (4) ۱۰

643. در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن ۳ است. مجموع هشت جمله اول کدام است؟

- (1) ۳۲ (2) ۴۶ (3) ۵۱ (4) ۶۳

644. تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (1) $\frac{2}{4}$ (2) 1 (3) $\frac{3}{2}$ (4) 2



710. حاصل عبارت $A = \frac{\cot 15^\circ - \tan 15^\circ}{\cot 15^\circ + \tan 15^\circ}$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۱)

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۴) $\sqrt{5}$ (۳)

711. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin b\pi x$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

$-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳)

712. تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$ در بازهٔ $[0, \pi]$ کدام است؟

۲ (۲) ۱ (۱)

۴ (۴) ۳ (۳)

713. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{\sqrt{1 + \cos 2x}}{\sin 2x}$ کدام است؟

$-\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۱)

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

714. حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - x - 2}$ کدام است؟

$-\infty$ (۲) صفر (۱)

وجود ندارد. (۴) $+\infty$ (۳)

715. تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+a-b}}{x} & ; x \neq 0 \\ \frac{1}{12} & ; x = 0 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} پیوسته است. b کدام است؟

± 2 (۲) ± 1 (۱)

± 4 (۴) ± 3 (۳)

716. اگر $f(x) = \frac{x^2}{|1-x|}$ باشد $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

$\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳)

717. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 4$ و $g(x) = x^2 + x$ باشد، $(g \circ f)'(2)$ کدام است؟

۶ (۲) ۱۲ (۱)

۲۰ (۴) ۱۸ (۳)

718. اگر تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & ; x \leq 0 \\ ax+a+b & ; x > 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق پذیر باشد، $f(2)$ کدام است؟

۷ (۲) ۵ (۱)

۱۰ (۴) ۹ (۳)

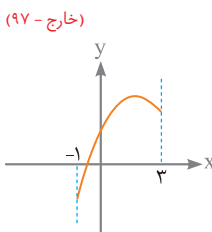
719. شکل مقابل نمودار تابع $y = x + \sqrt{-x^2 + ax + b}$ است. مقدار ماکسیمم مطلق تابع کدام است؟

$1 + \sqrt{3}$ (۱)

$2\sqrt{3}$ (۲)

$1 + 2\sqrt{2}$ (۳)

۴ (۴)



(خارج - ۹۷)

720. در تابع $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ نقاط عطف به وسیله یک پاره خط به هم متصل شده‌اند. طول این پاره خط کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$
 (۲) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
 (۳) $\sqrt{2}$
 (۴) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$



زمان : ۳۷ دقیقه

آزمون جامع شبیه ساز (۶)

تمام فصول

۱۰ + ۱۱ + ۱۲

سکانس 38



721. در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر عضو تیم بسکتبال و ۱۱ نفر عضو تیم والیبال هستند. اگر ۵ نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، چند نفر فقط عضو تیم بسکتبال هستند؟

- (۱) ۶
 (۲) ۸
 (۳) ۹
 (۴) ۱۰

722. مجموع سه جمله متوالی یک دنباله حسابی صعودی برابر با ۲۱ و حاصل ضرب آن‌ها ۳۱۵ است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) -۲
 (۳) ۳
 (۴) -۳

723. اگر خط $x = -1$ محور تقارن سهمی به معادله $y = 2x^2 + (m-1)x - m$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

- (۱) -۵
 (۲) -۴
 (۳) -۲
 (۴) -۷

724. در بازه (a, b) نمودار تابع با ضابطه $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ واقع است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

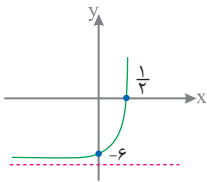
- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

725. در بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |2x - 6| - |x + 4| + x$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = x^2 - 4x - 6$ در چند نقطه مشترک هستند؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) فاقد نقطه مشترک

726. شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -9 + (\frac{1}{3})^{ax+b}$ است. $f(2)$ کدام است؟

- (۱) ۲۳۴
 (۲) ۱۰۸
 (۳) ۷۲
 (۴) ۱۸

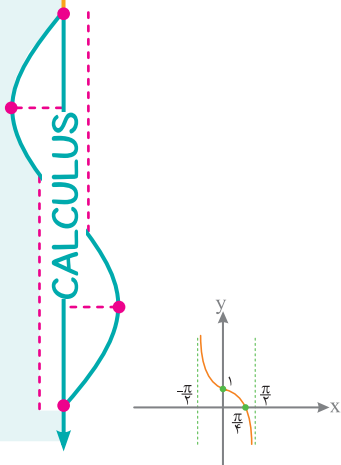


727. اگر $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 & ; x < 2 \\ \sqrt{x+3} & ; x \geq 2 \end{cases}$ باشد حاصل $f^{-1}(3) + f^{-1}(5)$ کدام است؟

- (۱) صفر
 (۲) ۵
 (۳) ۳
 (۴) ۹

728. تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1$ کدام است؟

- (۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) ۳



(خارج - ۹۸)

729. حاصل $\frac{\cos 5^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\sin 5^\circ}{\sin 15^\circ}$ کدام است؟

۱) $5 \sin 15^\circ$ (۱)

۲) $4 \sin 2^\circ$ (۲)

۳) $\sqrt{2} \cos 5^\circ$ (۳)

۴) $\sqrt{3} \cos 15^\circ$ (۴)

730. قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \tan x$ به صورت مقابل است. مقدار $a \times b$ کدام است؟

۱) صفر

۲) -۱

۳) ۲

۴) -۳

731. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{2}$

۲) 3π

۳) $\frac{7\pi}{2}$

۴) 4π

732. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^3 x \sqrt{1 - \cos 4x}}{x^2 + x^2}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}$

۲) $-6\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{2}$

۴) $6\sqrt{2}$

733. حاصل حد تابع $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{3 + \tan x}}$ وقتی $x \rightarrow \frac{2\pi^+}{3}$ کدام است؟

۱) $+\infty$

۲) $-\infty$

۳) صفر

۴) وجود ندارد

734. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x + |x|} ; x \neq 0 \\ 1 ; x = 0 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در $x = 0$ چگونه است؟

۱) از چپ پیوسته

۲) پیوسته

۳) از چپ ناپیوسته و از راست ناپیوسته

۴) از راست پیوسته

735. اگر $f(x) = x^2 + x$ باشد، مشتق تابع $y = f(x - f(x))$ در $x = 1$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

736. مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{2} \cos \pi x^2}$ به ازای $x = \frac{1}{2}$ چه مقدار است؟

۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$

۲) $-\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$

۳) $\frac{\pi}{3}$

۴) $-\frac{\pi}{3}$

737. خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = ax^2 + bx$ در نقطه $x = 2$ مشترک‌اند. مقدار b کدام است؟

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

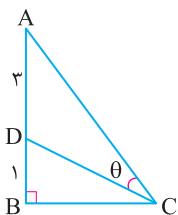
738. در مثلث مقابل اگر $\tan \theta = \frac{3}{4}$ ، $AD = 3$ ، $DB = 1$ باشد، اندازه ضلع BC کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$

۲) ۲

۳) $\sqrt{3}$

۴) ۳





Caucher Birkar
1978 Fields Medal(2018)

Answers

MATHEMATICS

Fields:2018 Born:1964 Rishay Venkatesh	Fields:2010 Born:1973 Cédric Villani	Fields:2010 Born:1970 Stanislav Smirnov	Fields:1998 Born:1963 Timothy Gowers	Fields:2002 Born:1966 Vladimir Voevodsky
Fields:2006 Born:1966 Grigori Perelman	Fields:1982 Born:1947 Alain Connes	Fields:1978 Born:1944 Pierre Deligne	Fields:2018 Born:1987 Peter Scholze	Fields:2014 Born:1975 Martin Hairer
Fields:2014 Born:1979 Artur Avila	Fields:2018 Born:1984 Alessio Figalli	Fields:2014 Born:1984 Martin Hairer		

Set, Pattern & Sequence

۳ 1

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

1 هیچ عددی وجود ندارد که هم طبیعی باشد و هم گنگ، پس: $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

2 از آن جایی که $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ، در نتیجه: $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

3 چون $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ، پس $\mathbb{Z} - \mathbb{Q} = \emptyset$ در نتیجه: $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$

4 می‌دانیم $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ولی \mathbb{Q} زیرمجموعه \mathbb{W} نیست، بلکه $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}$

۲ 2

با استفاده از نمایش هندسی، مجموعه‌های $A \cup C$ و $B \cap D$ را

روی محور مشخص می‌کنیم:



حال مجموعه $(A \cup C) - (B \cap D)$ را مشخص می‌کنیم:



۴ 3

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

1 این مجموعه به صورت $\{25, 24, 23, \dots\}$ است که نامتناهی است.

2 با تغییر مقدار ارتفاع و قاعده، بی‌شمار مثلث با مساحت 6 می‌توان ساخت.

3 در بازه $(1, 3)$ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

4 مجموعه اعداد طبیعی که عدد 1 بر آن‌ها بخش پذیر باشد، به صورت زیر

است. پس این مجموعه، متناهی است.
 $A = \{1, 2, 5, 10\}$

۲ 4

ابتدا مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ ، $B = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

1 نامتناهی و غیر تهی $A - B = \{1, 9, 15, 21, \dots\}$

2 متناهی و غیر تهی $B - A = \{2\}$

3 نامتناهی و غیر تهی $A \cap B = \{3, 5, 7, 11, \dots\}$

4 تهی $A - (A \cup B) = \emptyset$

۴ 5

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

1 در این حالت مجموعه A می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$A \cup B = \{0, 1, 2, \dots\}$ ، $B = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\Rightarrow \begin{cases} A_1 = \{0, 2, 4, \dots\} \\ A_2 = \{0\} \end{cases}$

2 در این حالت مجموعه $A \cap B$ می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$A_1 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ، $B_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\Rightarrow A_1 \cap B_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$

$A_2 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ، $B_2 = \{\dots, -2, -1, 0\}$ $\Rightarrow A_2 \cap B_2 = \{0\}$

3 اگر A نامتناهی باشد، A' می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$A_1 = \{1, 3, 5, \dots\} \Rightarrow A'_1 = \{2, 4, 6, \dots\}$

$A_2 = \{2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow A'_2 = \{1\}$

4 اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، مجموعه $B - A$ نامتناهی است.

۳ 6 مجموعه مرجع به صورت $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ است، پس:

$$B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 8, 9\}$$

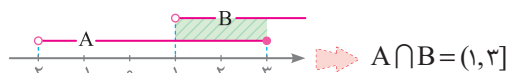
بنابراین مجموعه $B' - A$ برابر است با:

$$B' - A = \{1, 2, 3, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{8, 9\}$$

پس متمم مجموعه $B' - A$ به صورت $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ است که 7 عضو دارد.

۲ 7 نمایش بازه‌های مجموعه B به صورت $B = (1, +\infty)$ است. چون می‌دانیم

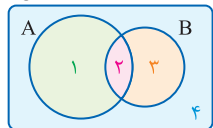
$$A' \cup B' = (A \cap B)'$$



متمم مجموعه $A \cap B$ به صورت $(-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$ است، پس:

$$A' \cup B' = (A \cap B)' = (-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$$

۴ 8 نمودار ون را برای دو مجموعه A و B رسم



می‌کنیم و ناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم:

$$(A - B) - (B \cap A') = (\{1, 2\} - \{2, 3\}) - (\{2, 3\} \cap \{3, 4\}) = \{1\}$$

با توجه به نمودار، ناحیه $\{1\}$ مجموعه $A - B$ را نشان می‌دهد.

۱ 9 برای به دست آوردن تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه A و B ، به

تعداد اعضای اشتراک آن‌ها نیاز داریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \Rightarrow 3 = 4 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 1$$

بنابراین $n(A \cup B)$ برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 7 - 1 = 10$$

۳ 10 می‌دانیم $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ است، بنابراین

هنگامی $n(A \cup B)$ ما کسیم می‌شود که $n(A \cap B) = 0$ باشد، یعنی دو مجموعه

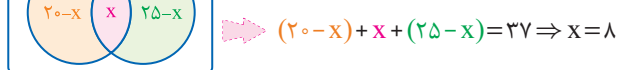
جدا از هم باشند.

۴ 11 ابتدا تعداد عضوهای مجموعه B را به دست می‌آوریم:

$$n(B) = n(U) - n(B') \Rightarrow n(B) = 80 - 55 = 25$$

از طرفی $n(A \cup B) = 37$ است، حال اگر فرض

کنیم $n(A \cap B) = x$ خواهیم داشت:



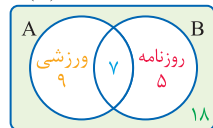
بنابراین تعداد اعضایی که فقط در مجموعه B هستند، برابر است با:

$$25 - x = 25 - 8 = 17$$

۴ 12 مطابق نمودار ون روبه‌رو تعداد افرادی که عضو هیچ‌یک از گروه‌های

روزنامه دیواری و ورزشی نیستند برابر است با:

$$n(U) = 39$$



۳۴۸ دنباله مورد نظریه صورت ۳, ۹, ۱۵, ..., ۹۹ است که یک دنباله حسابی

با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۶ می باشد. برای مشخص کردن تعداد جملات دنباله داریم:

$$a_n = 3 + (n-1)(6) = 99 \Rightarrow n-1 = 16 \Rightarrow n = 17$$

بنابراین مجموع جملات این دنباله برابر است با:

$$S_{17} = \frac{17}{2}(a_1 + a_{17}) = \frac{17}{2}(3 + 99) = 17 \times 51 = 867$$

۱۴۹ با توجه به این که اختلاف اعداد در مخرج هر کسر برابر ۳ واحد است،

ابتدا هریک از کسرها را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right), \frac{1}{5 \times 8} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right), \dots, \frac{1}{17 \times 20} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{20}\right)$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{20}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17} - \frac{1}{20}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{10-12}{20 \times 17}\right) = \frac{2}{102} = \frac{1}{51}$$

۴۵۰ با استفاده از رابطه $S_n = \frac{n(n-1)}{6}$ خواهیم داشت:

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{18} = S_{18} - S_6 = \frac{18(18-1)}{6} - \frac{6(6-1)}{6} = 9 - (-9) = 18$$

۲۵۱ جمله هفتم را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$a_7 = S_7 - S_6 = (7^2 - 5 \times 7) - (6^2 - 5 \times 6) = (49 - 35) - (36 - 30) = 8$$

۲۵۲ ابتدا مقدار قدرنسبت را به دست می آوریم:

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 q^6}{a_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow q^6 = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$

چون دنباله غیر نزولی است پس $q = -\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$ قابل قبول است، بنابراین:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_6 = \frac{2(1-(-\frac{1}{\sqrt[6]{2}})^6)}{1-(-\frac{1}{\sqrt[6]{2}})} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow S_6 = \frac{2}{3}$$

۲۵۳ می دانیم $\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$ است. پس:

$$\frac{S_4}{S_2} = 10 \Rightarrow 1 + q^2 = 10 \Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow \frac{a_4}{a_1} = \frac{a_1 q^3}{a_1} = (q^2)^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}} = 27$$

۴۵۴ اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه حاصل ضرب

$$b^2 = ac$$

جمله های اول و سوم برابر مربع جمله وسط است، یعنی:

چون $x^2 - 2, 2x, x^2 + 4$ جملات متوالی دنباله هندسی اند، پس:

$$(2x)^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 2) \Rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

چون دنباله نزولی است، پس $x = 2$ قابل قبول است و دنباله به صورت $8, 4, 2, \dots$

است. بنابراین مجموع ۷ جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_7 = \frac{8(1-(\frac{1}{2})^7)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8(1-\frac{1}{128})}{\frac{1}{2}} = 16 \left(\frac{127}{128}\right) = \frac{127}{8}$$

۳۴۳ باتوجه به صورت سؤال داریم:

$$S_{17} = 3S_{17} \Rightarrow \frac{17}{2}(2a_1 + 17d) = 3 \times \frac{17}{2}(2a_1 + 17d)$$

$$20a_1 + 190d = 36a_1 + 198d \Rightarrow -16d = 16a_1 \Rightarrow d = -a_1$$

از طرفی جمله سوم برابر ۶ است، پس:

$$a_3 = 6 \Rightarrow a_1 + 2d = 6 \Rightarrow -3a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = -2 \Rightarrow d = 2$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 9(2) = 16$$

۲۴۴ باتوجه به جمله عمومی، جمله دهم برابر $10 \times \frac{3}{2} - 5 = 10$

و جمله بیستم برابر $\frac{3}{2} \times 20 - 5 = 25$ است. از آن جایی که تعداد جملات دهم تا بیستم برابر ۱۱ است، خواهیم داشت:

$$S = \frac{11}{2}(a_{10} + a_{20}) = \frac{11}{2}(10 + 25) = \frac{11}{2} \times 35 = 192.5$$

مجموع n جمله متوالی دریک دنباله حسابی از رابطه زیر به دست می آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(\text{جمله آخر} + \text{جمله اول})$$

۳۴۵ باتوجه به صورت سؤال داریم:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = \frac{1}{3}(a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10})$$

$$3 \times a_3 = a_8 \Rightarrow 3(a_1 + 2d) = a_1 + 7d \Rightarrow 2a_1 = 4d \Rightarrow a_1 = 2d$$

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{a_1 + 2a_1}{a_1} = 3$$

اگر n فرد باشد مجموع n جمله متوالی دریک دنباله حسابی برابر است با:

$$S_n = n \times \text{جمله وسط}$$

۲۴۶ جمله اول دنباله برابر ۸۲- و قدرنسبت آن برابر ۵ است. برای این که

ببینیم حداقل چند جمله را جمع کنیم تا حاصل مثبت شود، باید S_n را بزرگ تر از صفر قرار دهیم، پس خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{n}{2}[2(-82) + (n-1)5] > 0 \Rightarrow \frac{n}{2}(-164 + 5n - 5) > 0$$

$$\frac{n}{2}(-169 + 5n) > 0 \Rightarrow -169 + 5n > 0 \Rightarrow 5n > 169 \Rightarrow n > 33.8$$

پس کوچکترین مقدار n برابر با ۳۴ است.

۱۴۷ جملات شماره فرد را از شماره زوج کم کنیم تا قدرنسبت به دست آید:

$$1) a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = 150 \quad 2) a_2 + a_4 + \dots + a_{18} = 135$$

$$1), 2) \Rightarrow \frac{(a_1 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{19} - a_{18})}{d} = 150 - 135 \Rightarrow d = \frac{15}{2}$$

حال جملات را باهم جمع کنیم تا مجموع جملات a_1 تا a_{19} به دست آید:

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{17} + a_{18}) = 135 + 150 = 285$$

$$S_{19} = \frac{19}{2}(a_1 + 19 \times \frac{15}{2}) = 285 \Rightarrow 19a_1 + 285 = 285 \Rightarrow a_1 = 0$$

۴ 67 طرفین تساوی داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2x + \frac{5}{x} = 9 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (2x + \frac{5}{x})^2 = 81 \Rightarrow 4x^2 + \frac{25}{x^2} + 2(2x)(\frac{5}{x}) = 81$$

$$\Rightarrow 4x^2 + \frac{25}{x^2} + 20 = 81 \Rightarrow 4x^2 + \frac{25}{x^2} = 61$$

۳ 68 با استفاده از اتحادهای مربع و مکعب دو جمله‌ای داریم:

$$A = (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \left(\frac{x}{x^2 - 4x + 4} - \frac{1}{x-2} \right)$$

$$= (x-2)^3 \left(\frac{x}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} \right) = x(x-2) - (x-2)^2$$

$$= (x-2)(x - (x-2)) = (x-2) \times 2 \Rightarrow \frac{x-2}{A} = \frac{x-2}{2(x-2)} = \frac{1}{2}$$

اتحاد مکعب مجموع و تفاضل دو جمله‌ای به صورت زیر است:

$$\text{1} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{2} \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

۳ 69 در جمله‌های x^4 و $8x$ از x و در جمله‌های $-3x^3$ و -24 از -3 فاکتور می‌گیریم:

$$x^4 - 3x^3 + 8x - 24 = x(x^3 + 8) - 3(x^3 + 8)$$

$$= (x-3)(x^3 + 8) = (x-3)(x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

اتحادهای زیر به اتحاد چاق و لاغر معروف هستند:

$$\text{1} \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\text{2} \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

۱ 70 در هریک از پرانتزها مخرج مشترک می‌گیریم:

$$(x + \frac{2}{x-3})(1 - \frac{1}{x-2}) = \frac{(x^2 - 2x + 2)(x-2)}{x-3} \cdot \frac{(x-2)}{(x-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = x-1$$

۱ 71 کفایت مخرج مشترک بگیریم و صورت کسر را ساده کنیم:

$$\frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1} + \frac{x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{2x^2 - x + (x-1)(2x-1) - (2x+1)(2x+1)}{4x^2 - 1}$$

$$= \frac{2x^2 - x + 2x^2 - 3x + 1 - 4x^2 - 4x - 1}{4x^2 - 1} = \frac{-8x}{4x^2 - 1} \Rightarrow P(x) = -8x$$

۴ 72 می‌دانیم $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt{2}$ است، پس اگر عبارت داده شده را فرض کنیم با مربع کردن آن خواهیم داشت:

$$A = (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \times \sqrt{2} \Rightarrow A^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \times 2$$

$$\Rightarrow A^2 = (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}) \times 2$$

$$\Rightarrow A^2 = (4 + 2\sqrt{4-3}) \times 2 = (4+2) \times 2 = 12 \Rightarrow A = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

۴ 73 با استفاده از اتحاد مزدوج، عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta) = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2$$

$$= \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2$$

$$= \frac{(3\sqrt{2} - 4) + (3\sqrt{2} + 4)}{6\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{(3\sqrt{2} - 4)(3\sqrt{2} + 4)}}{(3\sqrt{2})^2 - 4^2} = \frac{3}{4} = 0.75$$

۴ 74 می‌دانیم $10\sqrt{3} = 2\sqrt{3 \times 5^2} = 2\sqrt{75}$ ، پس داریم:

$$\sqrt{28 + 10\sqrt{3}} + \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = \sqrt{28 + 2\sqrt{75}} + \sqrt{28 - 2\sqrt{75}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{25} + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{25} - \sqrt{3})^2} = \underbrace{|\sqrt{25} + \sqrt{3}|}_{+} + \underbrace{|\sqrt{25} - \sqrt{3}|}_{+}$$

$$= 5 + \sqrt{3} + 5 - \sqrt{3} = 10$$

۱ 75 مخرج کسر را گویا می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\frac{2}{2 + \sqrt{6}} \times \frac{2 - \sqrt{6}}{2 - \sqrt{6}} + \frac{(2\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{6})(2 - \sqrt{6})}$$

$$= \frac{2(2 - \sqrt{6})}{4 - 6} + \frac{2(2 - \sqrt{6})}{-2} - \sqrt{6} = \sqrt{6} - 2 - \sqrt{6} = -2$$

۲ 76 مخرج کسرها را گویا می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\frac{2}{3 - \sqrt{7}} \times \frac{3 + \sqrt{7}}{3 + \sqrt{7}} + \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{4 \times 7} + \sqrt{4 \times 2}}{3 - \sqrt{7}}$$

$$= \frac{2(3 + \sqrt{7})}{9 - 7} + \frac{|2 - \sqrt{7}| - 2\sqrt{7} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{3 - \sqrt{7}}$$

$$= 3 + \sqrt{7} + \sqrt{7} - 2 - 2\sqrt{7} + 2 = 3$$

۲ 77 اعداد زیر رادیکال‌ها را تجزیه و مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\sqrt{3 \times 8} \times \sqrt{9} + \frac{2 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} \times \frac{2 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} - \sqrt{16 \times 5}$$

$$= \sqrt{24 \times 8} + \frac{(2 - \sqrt{5})^2}{4 - 5} - 4\sqrt{5}$$

$$= 3 \times 2 + \frac{4 + 5 - 4\sqrt{5}}{-1} - 4\sqrt{5} = 6 - 9 + 4\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = -3$$

۱ 78 چون مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$ به صورت $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ است، پس باید

از اتحاد چاق و لاغر، یعنی $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = (a-b)$ برای گویا کردن مخرج استفاده کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3 \times 2} + \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3 \times 2} + \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{3 - 2} = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$$

۲ 79 با قرار دادن $5 + \sqrt{17}$ به جای x خواهیم داشت:

$$\sqrt{\frac{x-1}{16} + \frac{1}{2x}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{17} - 1}{16} + \frac{1}{2(5 + \sqrt{17})}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 + \sqrt{17}}{16} + \frac{1}{2(5 + \sqrt{17})} \times \frac{5 - \sqrt{17}}{5 - \sqrt{17}}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 + \sqrt{17}}{16} + \frac{5 - \sqrt{17}}{2(25 - 17)}} = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{17}}{16} + \frac{5 - \sqrt{17}}{16}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

107 طرفین نامعادله 1 را در 3 و طرفین نامعادله 2 را در 6 ضرب می‌کنیم:

$$1) \frac{4x-1}{3} > 3x-2 \Rightarrow 4x-1 > 9x-6 \Rightarrow 5 > 5x \Rightarrow 1 > x$$

$$-4 < x < 1$$

$$2) \frac{3x+5}{2} - \frac{2x-4}{3} > \frac{1}{2} \Rightarrow 9x+15-4x+8 > 3 \Rightarrow 5x > -20 \Rightarrow x > -4$$

چون $x=1$ در نامعادله 1 صدق نمی‌کند، پس گزینه‌های 1 و 4 حذف می‌شوند. از طرفی $x=-3$ در هر دو نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه 2

پاسخ تست است.

108 روش اول: از نامعادله $2 < \frac{2x-3}{x+1} < 3$ داریم:

$$1) 1 < \frac{2x-3}{x+1} \Rightarrow 0 < \frac{2x-3}{x+1} - 1 \Rightarrow 0 < \frac{2x-3-(x+1)}{x+1} \Rightarrow 0 < \frac{x-4}{x+1}$$

$$x < -1 \text{ یا } x > 4$$

$$2) \frac{2x-3}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{2x-3-3(x+1)}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-x-6}{x+1} < 0$$

$$x < -6 \text{ یا } x > -1$$

از اشتراک جواب‌های 1 و 2، مجموعه جواب نامعادله $x > 4$ یا $x < -6$ می‌شود که می‌توانیم آن را به صورت $\mathbb{R} - [-6, 4]$ نمایش دهیم.

روش دوم: از طرفین نامعادله 2 واحد کم می‌کنیم:

$$1-2 < \frac{2x-3}{x+1} - 2 < 3-2 \Rightarrow -1 < \frac{2x-3-2(x+1)}{x+1} < 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 > 5 \Rightarrow x > 4 \\ x+1 < -5 \Rightarrow x < -6 \end{cases}$$

پس مجموعه جواب نامعادله به صورت $\mathbb{R} - [-6, 4]$ است.

چون $x=5$ در نامعادله صدق می‌کند پس گزینه‌های 5 و 7 که فاقد عدد 5 هستند حذف می‌شود. از طرفی $x=-7$ نیز در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه 1 پاسخ تست است.

109 ابتدا معادله را به صورت $x^3 = 1-x$

مرتب می‌کنیم. سپس نمودار دو تابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = 1-x$ را در یک دستگاه مختصات رسم و تعداد نقاط تلاقی آن‌ها را مشخص می‌کنیم.

چون دو نمودار در یک نقطه متقاطع‌اند، پس معادله یک جواب دارد.

110 معادله را به صورت $\sin x = \frac{1}{x}$

مرتب می‌کنیم. و نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم

می‌کنیم. چون دو نمودار در چهار نقطه متقاطع‌اند، پس معادله چهار جواب دارد.

111 نمودار توابع $f(x) = |x^2 - 1|$ و $g(x) = x$ را

در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. با توجه به شکل، معادله داده شده دو جواب مثبت دارد.

102 معادله را به صورت $\sqrt{4x-3} = 2-3x$ می‌نویسیم و دامنهٔ رادیکال را

$$4x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{4}$$

به دست می‌آوریم:

به ازای $x \geq \frac{3}{4}$ طرف دوم تساوی، یعنی $2-3x$ عددی منفی است:

$$x \geq \frac{3}{4} \xrightarrow{x(-2)} -2x \leq \frac{-9}{4} \Rightarrow 2-3x \leq 2-\frac{9}{4} \Rightarrow 2-3x \leq \frac{-1}{4}$$

بنابراین معادله داده شده جواب ندارد.

103 ابتدا $\sqrt{2x+5}$ را به طرف دوم منتقل می‌کنیم و سپس طرفین را به توان

2 می‌رسانیم:

$$\sqrt{x+6} = 1 + \sqrt{2x+5} \xrightarrow{\text{توان 2}} x+6 = 1 + (2x+5) + 2\sqrt{2x+5}$$

$$\xrightarrow{\text{توان 2}} -x = 2\sqrt{2x+5} \Rightarrow x^2 = 4(2x+5) \Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (x-10)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 10, x = -2$$

ابتدا طرفین را به توان 2 می‌رسانیم و خواهیم داشت:

$$\sqrt{x-\sqrt{x+1}} = 1 \xrightarrow{\text{توان 2}} x - \sqrt{x+1} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} = x-1$$

$$\xrightarrow{\text{توان 2}} x^2 - 2x + 1 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

چون $x=0$ در معادله صورت سؤال صدق نمی‌کند، پس قابل قبول نیست.

105 چون مجموع دو رادیکال با فرجهٔ زوج برابر صفر شده، پس هر دو

رادیکال باید صفر باشند:

$$\sqrt{x^2-4} = 0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2, x=-2$$

$$\sqrt{x^2+2x} = 0 \Rightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow x(x+2)=0 \Rightarrow x=0, x=-2$$

جواب مشترک $x=-2$ است. پس معادله یک جواب دارد.

106 همهٔ عبارت‌ها را به یک طرف نامساوی منتقل می‌کنیم و مخرج

مشترک می‌گیریم:

$$\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2} \Rightarrow \frac{7x-8}{x^2-x-2} - \frac{x}{x-2} > 0 \Rightarrow \frac{7x-8-x(x+1)}{(x-2)(x+1)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{7x-8-x^2-x}{(x-2)(x+1)} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2+6x-8}{(x-2)(x+1)} > 0 \Rightarrow \frac{-(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+1)} > 0$$

با شرط $x \neq 2$ عبارت را ساده می‌کنیم: $-1 < x < 4$ **تعیین علامت**

چون $x \neq 2$ مجموعه جواب نامعادله برابر است با: $(-1, 2) \cup (2, 4)$

چون $x=0$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه 2 حذف می‌شود. از طرفی

$x=3$ نیز در معادله صدق می‌کند. پس گزینه 3 که شامل عدد 3 هست، پاسخ

تست است.

گزینه 1 به شکل غم‌انگیزی نادرست است!!! زیر در بازهٔ $(2, 4)$ ابتدای بازه از انتهای آن بزرگ‌تر است. که به صورت عمودی یا سهوی در این گزینه مطرح شده است.

۱۷۴ دامنه تابع $\mathbb{R} - \{3\}$ است، پس $x = 3$ ریشه مضاعف مخرج است:

$$x^2 + ax + b = (x - 3)^2 \Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \end{cases}$$

بنابراین $a + b = 3$ است.

۱۷۵ ابتدا ضابطه تابع $g(x) = f(3-x)$ را به دست می آوریم:

$$g(x) = \sqrt{2(3-x) - (3-x)^2} = \sqrt{6 - 2x - x^2 + 6x - 9} = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$$

حال دامنه تابع $g(x)$ را مشخص می کنیم:

$$-x^2 + 4x - 3 \geq 0 \Rightarrow -(x-1)(x-3) \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

در $x = 0$ در تابع $f(3-x)$ صدق نمی کند، پس $[1, 3]$ حذف می شوند. از طرفی

در $x = 3$ در تابع $f(3-x)$ صدق می کند، پس $[3]$ جواب است.

۱۷۶ ضابطه تابع $f(-x)$ را به دست می آوریم و دامنه آن را مشخص می کنیم:

$$f(-x) = \sqrt{-x + |-x + 2|} \Rightarrow -x + |-x + 2| \geq 0 \Rightarrow |x - 2| \geq x$$

$$\begin{cases} x - 2 \geq x \Rightarrow -2 \geq 0 \quad \times \\ x - 2 \leq -x \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \quad \checkmark \end{cases}$$

در $x = 0$ در تابع $f(-x)$ صدق می کند، پس $[1]$ حذف می شوند. از

طرفی $x = -2$ در تابع $f(-x)$ صدق می کند، پس $[-2]$ جواب است.

۱۷۷ عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد:

$$x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x - 3) > 0 \Rightarrow x < 0 \cup x > 3$$

۲ عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد:

$$0 \leq 1 - \log(x^2 - 3x) \Rightarrow \log(x^2 - 3x) \leq 1 \Rightarrow x^2 - 3x \leq 10$$

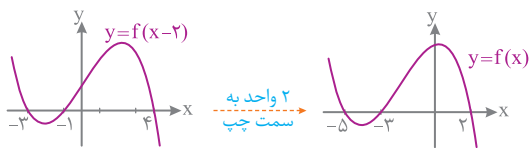
$$x^2 - 3x - 10 \leq 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 5$$

از اشتراک **۱** و **۲** دامنه تابع به صورت $[-2, 0) \cup (3, 5]$ به دست می آید.

در $x = 0$ جلوی لگاریتم را صفر می کند، پس $[1, 5]$ حذف می شوند. با قرار

دادن $x = 6$ عبارت زیر رادیکال منفی می شود، پس $[6]$ نیز حذف می شود.

۱۷۸ ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را مشخص می کنیم:



حال برای تعیین دامنه $y = \sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x) \geq 0$ باشد:

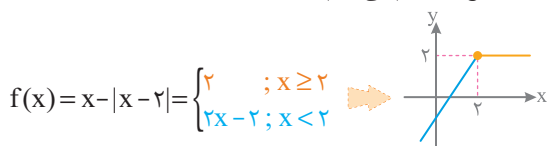


بنابراین دامنه تابع به صورت بازه $[-5, -3] \cup [0, 2]$ است.

با جای گذاری $x = -1$ در تابع به عبارت $\sqrt{-f(-1)}$ می رسیم. از آن جایی که

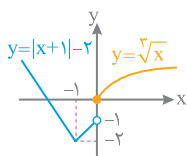
$f(-1)$ مثبت است، پس عبارت زیر رادیکال منفی می شود و گزینه های **۱**، **۲**، **۳** حذف می شوند.

۱۷۹ نمودار تابع f را رسم می کنیم:



بنابراین برد تابع برابر بازه $(-\infty, 2]$ است.

۱۸۰ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ |x+1| - 2 & ; x < 0 \end{cases}$ را رسم می کنیم:



بنابراین برد تابع f برابر بازه $R_f = [-2, +\infty)$ است.

۱۸۱ چون x^2 عبارتی نامنفی است، پس $\frac{x^2}{x^2+1}$ مثبت بوده و چون مخرج از

صورت یک واحد بیشتر است، پس حاصل $\frac{x^2}{x^2+1}$ عددی کوچکتر از یک خواهد بود، بنابراین برد تابع بازه $[0, 1)$ است.

۱۸۲ برای این که مشخص کنیم در کدام بازه، نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$

بالتر از نمودار تابع $y = 2x + |x|$ قرار گرفته است، باید مجموعه جواب نامعادله $|2x + |x|| > -x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$ را به دست آوریم. بنابراین:

$$\text{① } x \geq 0: -x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{4} > 2x + x \Rightarrow -x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{9}{4} > 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{9}{4} < 0 \Rightarrow -\frac{9}{4} < x < 1 \quad (x \geq 0) \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

$$\text{② } x < 0: -x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{4} > 2x - x \Rightarrow -x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{4} > 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{9}{4} < 0 \Rightarrow -3 < x < \frac{3}{4} \quad (x < 0) \Rightarrow -3 \leq x < 0$$

از اجتماع بازه های به دست آمده از **۱**، **۲** مجموعه جواب نامعادله برابر بازه $(-3, 1)$ می شود که طول وسط آن برابر $1 - (-3) = 4$ است.

۱۸۳ بررسی گزینه ها:

① $D_f = (0, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ $\Rightarrow f \neq g$

② $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, $D_g = \mathbb{R}$ $\Rightarrow f \neq g$

③ $D_f = [0, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$ $\Rightarrow f \neq g$

④ $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ $\Rightarrow f = g$

۱۸۴ بررسی گزینه ها:

① $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, $D_g = \mathbb{R}$ $\Rightarrow f \neq g$

② دامنه هر دو تابع \mathbb{R} است ولی ضابطه تابع f بعد از ساده شدن به صورت $f(x) = |x|$ می باشد، پس $f \neq g$ است.

③ $D_f = \mathbb{R} - [0, 1)$, $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ $\Rightarrow f \neq g$

④ دامنه هر دو تابع $[-1, 1]$ و ضابطه هایشان هم یکسان است، پس $f = g$ می باشد.

321 به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

1 زاویه 14° در ناحیه رنگی دایره مثلثاتی است، پس: $\sin 14^\circ > \cos 14^\circ$

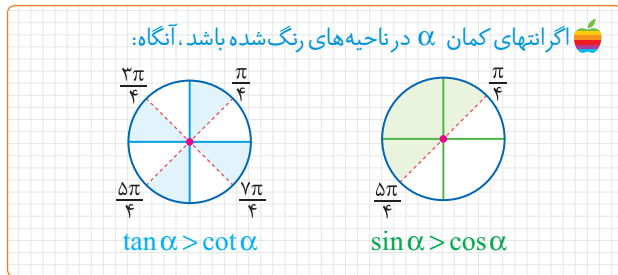
2 به جای $\tan 55^\circ$ معادل آن را قرار می‌دهیم:

$$\sin 55^\circ < \tan 55^\circ \Rightarrow \sin 55^\circ < \frac{\sin 55^\circ}{\cos 55^\circ} \Rightarrow \cos 55^\circ < 1$$

3 زاویه 30° در ناحیه سفید قرار دارد، پس: $\cot 30^\circ > \tan 30^\circ$

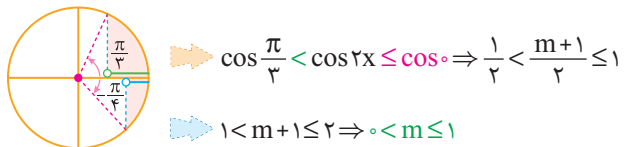
4 به جای $\cot 15^\circ$ معادل آن را قرار می‌دهیم:

$$\cot 15^\circ < \cos 15^\circ \Rightarrow \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} < \cos 15^\circ \Rightarrow 1 < \sin 15^\circ$$



322 از آن جایی که $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{8}$ است، پس $-\frac{\pi}{4} < 2x < \frac{\pi}{4}$ می‌باشد.

بنابراین محدوده $2x$ بر روی دایره مثلثاتی به صورت مقابل است:



323 ابتدا شیب خط d را به دست می‌آوریم:

$$3x + 2y = 4 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 2 \Rightarrow m_d = -\frac{3}{2} \Rightarrow \tan \theta = -\frac{3}{2}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta = -\frac{1}{\tan \theta} = -\frac{1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

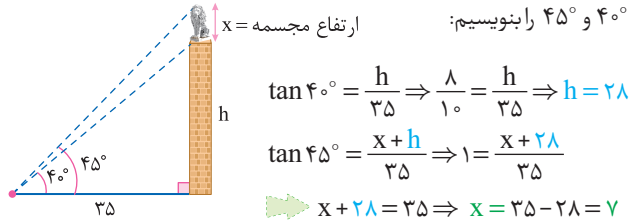
324 با کمک روابط مثلثاتی، عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \times \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right) = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \times \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} \times (-\cos x) \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\cos^2 x$$

در $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ یعنی ربع دوم، کسینوس منفی است، پس $|\cos x| = -\cos x$

316 با توجه به شکل زیر، برای پیدا کردن ارتفاع مجسمه باید تنازانت زاویه‌های 40° و 45° را بنویسیم:

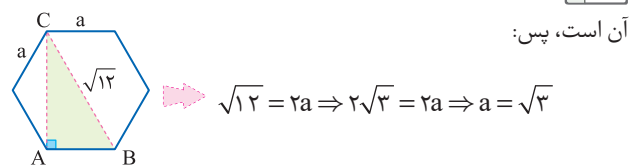


317 می‌دانیم اگر طول دو قطر متوازی الاضلاعی a و b و زاویه بین آن‌ها θ باشد، مساحت متوازی الاضلاع از رابطه $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$ به دست می‌آید.

پس: $S = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \sin 135^\circ = 48 \sin(180^\circ - 45^\circ) = 48 \sin 45^\circ$

$$= 48 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2}$$

318 می‌دانیم طول قطر بزرگ یک شش ضلعی منتظم، دو برابر طول ضلع آن است، پس:



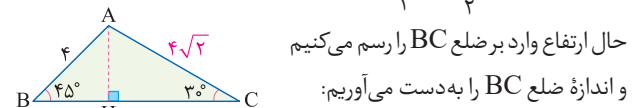
پس: $S_{\text{هاشور}} = \frac{1}{2}(AB)(AC) = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

در هر شش ضلعی منتظم به ضلع a اگر قطر کوچک d و قطر بزرگ d' باشد:

- 1 $d = 2a$
- 2 $d' = a\sqrt{3}$
- 3 $S_{\text{شش ضلعی}} = 6\left(a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

319 ابتدا با استفاده از قضیه سینوس‌ها اندازه ضلع AC را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AC = 4\sqrt{2}$$



$$BC = BH + CH = c \cos 45^\circ + b \cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow BC = \left(4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

320 نقطه P روی دایره مثلثاتی است، پس:

$$y^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

نقطه P در ناحیه دوم است پس y و $\sin \theta$ مثبت است. بنابراین:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{1} = -1$$

خط $x=1$ مجانب قائم تابع است، پس ریشهٔ مخرج $x=1$ است. **4620**

$$x+c \xrightarrow{x=1} 1+c=0 \Rightarrow c=-1$$

مجانب افقی تابع خط $y=2$ است، پس حد تابع وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر با ۲ است:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{x+c} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x} = a \Rightarrow a=2$$

تابع از نقطهٔ $(0, -1)$ می‌گذرد پس:

$$f(0) = \frac{a(0)+b}{0+(-1)} = -1 \Rightarrow b=1$$

Final Assessment Test

چون باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-4$ و $x+2$ به ترتیب ۳ و ۱ است، **1621**

$$P(4) = 3, P(-2) = 1$$

پس:

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x^2) + 4P(-x)$ بر $x-2$ برابر است با:

$$P(2^2) + 4P(-2) = P(4) + 4P(-2) = 3 + 4(1) = 7$$

چون آخرین عدد هر دسته مربع کامل است، پس عدد آخر دستهٔ نهم **3622**

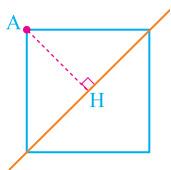
برابر $81 = 9^2$ و عدد آخر دستهٔ هشتم $64 = 8^2$ است. بنابراین عدد اول دستهٔ

نهم برابر $65 = 64 + 1$ است پس واسطهٔ حسابی بین دو عدد اول و آخر دستهٔ

$$\frac{65+81}{2} = \frac{146}{2} = 73$$

نهم برابر است با:

فاصلهٔ نقطهٔ $A(5, 2)$ از خط $x-y+2=0$ **3623**



برابر نصف طول قطر مربع است، پس اگر طول قطر

مربع را d در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{d}{2} = AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5 - 2 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

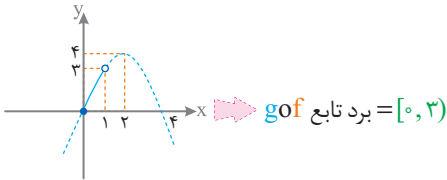
بنابراین قطر مربع برابر $4\sqrt{2}$ بوده و در نتیجه طول ضلع آن برابر ۴ است. پس

$$4 \times 4 = 16$$

محیط مربع برابر است با:

می‌دانیم $0 < 2x - [2x] < 1$ است. **2624**

بنابراین باید برد تابع $g(x) = -x^2 + 4x$ را به ازای ورودی $(0, 4)$ به دست آوریم:



با فرض $f^{-1}(2) = a$ نتیجه می‌گیریم $f(a) = 2$ است، پس: **3625**

$$2^a - \left(\frac{1}{2}\right)^a = 2 \Rightarrow 2^a - \frac{1}{2^a} = 2 \xrightarrow{2^a = t} t - \frac{1}{t} = 2$$

$$\xrightarrow{xt} t^2 - 4t - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = (-4)^2 - 4(-1) = 20} t = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

چون $t = 2^a$ مثبت است. پس $t = 2 + \sqrt{5}$ قابل قبول است:

$$2^a = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow a = \log_2(2 + \sqrt{5}) \Rightarrow f^{-1}(2) = \log_2(2 + \sqrt{5})$$

طبق شکل، منحنی تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد. پس: **4616**

$$f(0) = 0 \Rightarrow \frac{a(0)+b}{0+1} = 0 \Rightarrow b=0$$

از طرفی عرض نقطهٔ ماکسیمم نسبی (در x های مثبت) برابر ۲ است. پس باید f' را پیدا کنیم و مساوی صفر قرار دهیم تا طول نقطهٔ ماکسیمم پیدا شود:

$$f(x) = \frac{ax}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax)}{(x^2+1)^2} = \frac{a(x^2+1-2x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{a(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow a(1-x^2) = 0 \xrightarrow{x>0} x=1$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow \frac{a}{1^2+1} = \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a=4$$

مجانب قائم $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ خط $x=-1$ و مجانب افقی آن $y=2$ **3617**

می‌باشد، از آن جایی که $ad-bc = (2)(1) - (-1)(1) > 0$ است، پس **3618** یا

نشان‌دهندهٔ نمودار تابع f خواهد بود.

بنابراین برای مشخص کردن نمودار، نقطهٔ دلخواه $x=0$ را در تابع جای‌گذاری

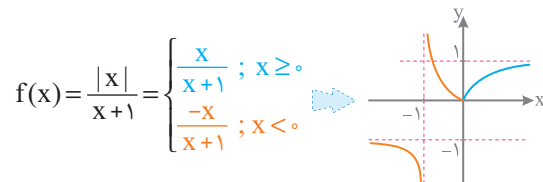
$$f(0) = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

می‌کنیم:

بنابراین منحنی، محور y ها را در نقطه‌ای با عرض -1 قطع می‌کند. در نتیجه

3619 نشان‌دهندهٔ نمودار تابع f است.

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم: **4618**



با توجه به نمودار، بُرد تابع به صورت بازهٔ $\mathbb{R} - [-1, 0)$ است.

ابتدا مخرج مشترک گرفته و ضابطهٔ تابع را به صورت یک کسر **4619**

$$f(x) = ax + b + \frac{x^2}{x+1} = \frac{ax^2 + x^2 + bx + ax + b}{x+1} = \frac{(a+1)x^2 + (a+b)x + b}{x+1}$$

برای اینکه f تابع هموگرافیک باشد، باید x^2 در صورت کسر از بین برود، پس

$a = -1$ می‌باشد. حال به ازای $a = -1$ تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(b-1)x + b}{x+1}$$

از آن جایی‌که تابع f محور y ها را به عرض یک قطع می‌کند، پس $f(0) = 1$ است

و خواهیم داشت:

$$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{b}{1} = 1 \Rightarrow b=1$$

در نتیجه $f(x) = \frac{1}{x+1}$ بوده و معادلهٔ مجانب افقی این تابع $y=0$ است.

از طرفی دوره تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{3}$ است، پس:

$$T = \frac{2\pi}{|2b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2}$$

بنابراین $f(x) = 1 + \cos 3x$ است و داریم:

$$f\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1 + \cos \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

630 چون یک لگاریتم در مبنای ۴ داده شده و یک لگاریتم در مبنای ۱۲ را

می‌خواهیم، از قاعده تغییر مبنای استفاده می‌کنیم:

$$\log_{12} 6 = \frac{\log_4 6}{\log_4 12} = \frac{\log_4 2 \times 3}{\log_4 4 \times 3} = \frac{\log_4 2 + \log_4 3}{\log_4 4 + \log_4 3} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{0}{1}}{1 + \frac{0}{1}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

631 وقتی $x \rightarrow -2^-$ مقدار $[x]$ برابر -3 می‌شود، پس:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x] + 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-3 + 3}{x + 2} = \frac{0}{\text{حدی}^{\circ}} = 0$$

632

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + \sqrt{x^2 + 12}}{|x^2 + x - 6|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + \sqrt{x^2 + 12}}{\underbrace{-(x-2)}_{-} \underbrace{(x+3)}_{+}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + \sqrt{x^2 + 12}}{-(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + \sqrt{x^2 + 12}}{-x^2 - x + 6}$$

با جایگذاری $x=2$ به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، پس به کمک قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 12}}}{-2x - 1} = \frac{-2 + \frac{1}{2}}{-5} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

633 ابتدا حد تابع f را در $x = \frac{\pi}{4}$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\frac{\cos^2 x}{1 - \sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - 1)(2\sin x + 1)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

$$= \frac{2\sin \frac{\pi}{4} + 1}{1 + \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{2 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

برای این‌که تابع f در $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد، باید حد تابع در این نقطه برابر

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ باشد، پس } a = -\frac{3}{2} \text{ است}$$

626 ابتدا ضابطه تابع اولیه را با کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای ساده

$$y = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 1 = (x-1)^3 + 1$$

پس باید این نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم تا به نمودار $y = x^3 + 1$ برسیم و سپس آن را یک واحد به پایین منتقل کنیم.

627 ابتدا هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = -\sin \alpha \quad , \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = +\cos \alpha$$

حال با توجه به این‌که $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم است، داریم:

$$x^2 + 1^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow x^2 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \tan \alpha = -\sqrt{2}$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$(-\sin \alpha)(\cos \alpha) - (-\tan \alpha) = \left(-1 \times -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (-\sqrt{2})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2} = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

629 ابتدا با کمک رابطه $\cot \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ سمت راست معادله را به

تانژانت تبدیل می‌کنیم:

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

حال معادله را به صورت $\tan(2x - \frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{4} + x)$ می‌نویسیم و داریم:

$$2x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{4} + x \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x \in [0, \pi]}{k=0,1} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها در بازه $[0, \pi]$ برابر است با:

$$\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

629 ابتدا با استفاده از رابطه $\cos^2 \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \sin^2 \theta$ ضابطه تابع را

ساده می‌کنیم:

$$y = a + \cos^2 bx - \sin^2 bx = a + \cos 2bx$$

با توجه به نمودار بیشترین مقدار تابع برابر ۲ است، پس:

$$a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$$

۴669 $2\cos x(\cos x - \sin x) = 1 \Rightarrow 2\cos^2 x - 2\sin x \cos x = 1$

۲ $2\cos^2 x - 1 = 2\sin x \cos x \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x$

جواب کلی
 $\sin \alpha = \cos \alpha \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

۳670 با توجه به شکل، نمودار محور X ها را در نقطه ای با طول $\frac{\pi}{4}$ قطع می کند، پس:

۱ $0 = a + b \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow a + b \sin \frac{\Delta\pi}{\epsilon} = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0$

از طرفی بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{3}{4}$ است که با قرار دادن -1 به جای $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ به دست می آید:

۲ $\frac{3}{4} = a + b(-1) \Rightarrow a - b = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

۴671 در گزینه ۱ تابع در $x=1$ حد دارد. در گزینه ۲ نیز هر دو تابع f و g در $x=1$ دارای حد هستند. اما در بقیه گزینه ها توابع f و g در $x=1$ حد ندارند، پس آن ها را بررسی می کنیم:

۳ $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 1+2=3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] + \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2) = 0-2=-2 \end{cases}$

۴ $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + \lim_{x \rightarrow 1^+} [-x] = 1-2=-1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] + \lim_{x \rightarrow 1^-} [-x] = 0-1=-1 \end{cases}$

۱672 با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

Hop $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6x - 10}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{14}{-\frac{1}{4}} = -112$

۱673 حاصل حد تابع در ∞ برابر $\frac{1}{6}$ است، پس درجه پرتوان صورت و مخرج کسر با هم برابر است، بنابراین $n=1$ است و داریم:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - \sqrt{x^2 - 1}}{4x - 12} = \frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{4x} = \frac{a}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

حال برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ با جای گذاری $x=3$ به ابهام $\frac{0}{0}$ می رسیم، بنابراین با کمک قاعده هوییتال داریم:

Hop $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt{x^2 - 1}}{4x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3} - \frac{2x}{3\sqrt{x^2 - 1}}}{4} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{6}{3\sqrt{8}}}{4}$

$= \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{2}}}{4} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{4} = \frac{1}{24}$

۳665 ابتدا ضابطه g را ساده می کنیم و سپس تابع $g \circ f$ را به دست می آوریم:

$g(x) = \frac{1 - 2x}{x+1} = \frac{-2(x+1) + 3}{x+1} = -2 + \frac{3}{x+1}$

۲ $g(f(x)) = -2 + \frac{3}{[x] - x + 1}$

از طرفی می دانیم $1 < [x] - x < 0$ پس $0 \leq x - [x] < 1$ بنابراین:

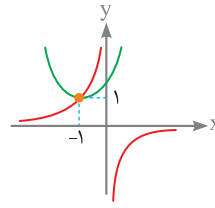
$0 < [x] - x + 1 \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{[x] - x + 1} \geq 3 \Rightarrow -2 + \frac{3}{[x] - x + 1} \geq 1$

پس برد تابع $g \circ f$ به صورت $[1, +\infty)$ است.

چون $0 \leq x - [x] < 1$ است، می توانستیم نمودار تابع $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ را رسم کنیم و برد آن را در بازه $(-1, 0]$ به دست آوریم.

۲666 ابتدا -1 را به سمت راست معادله می بریم و طرفین را بر X تقسیم می کنیم:

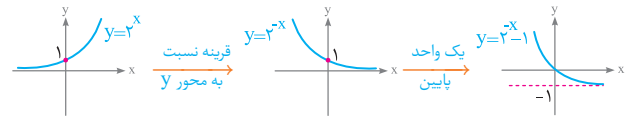
$x^3 + 2x^2 + 2x = -1 \xrightarrow{+x} x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = -\frac{1}{x}$



حال نمودار دو تابع $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x$ و $g(x) = -\frac{1}{x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم:

چون دو نمودار در یک نقطه با طول منفی متقاطع اند، پس معادله یک جواب منفی دارد.

۱667 ابتدا نمودار f را رسم می کنیم:



با توجه به نمودار، موارد (الف) و (ب) نادرست اند. حال ضابطه وارون f به دست می آوریم:

$y = -1 + 2^{-x} \Rightarrow y + 1 = 2^{-x} \Rightarrow -x = \log_2(y + 1)$

۲ $x = -\log_2(y + 1) \Rightarrow f^{-1}(x) = -\log_2(x + 1)$

بنابراین عبارت (پ) درست است.

۲668 ابتدا $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ را ساده می کنیم:

$(\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3}) + (\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6})$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \sqrt{3} \sin x$

از طرفی $\tan x = \sqrt{2}$ است، پس $\cot x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ است و داریم:

$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{\sin^2 x}$

۲ $\sin^2 x = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{در ربع سوم}} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$\sqrt{3} \sin x = \sqrt{3} \times -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{2}$

1679 نقطه $B(x, \sqrt{2x+7})$ روی نمودار قرار دارد و فاصله آن از نقطه $A(5, 0)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{2x+7}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$$

حال از تابع مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر می‌گذاریم:

$$(AB)' = \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}} = 0 \Rightarrow x=4$$

پس کوتاه‌ترین فاصله A و B به ازای $x=4$ به دست می‌آید:

$$AB = \sqrt{4^2 - 8 \times 4 + 32} = \sqrt{16} = 4$$

1680 چون $A(\frac{\pi}{3}, 2\sqrt{3})$ نقطه ماکسیمم نسبی تابع است، پس در تابع

$$f(\frac{\pi}{3}) = 2\sqrt{3} \Rightarrow a \sin \frac{\pi}{3} + b \sin \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$

صدق می‌کند:

$$a \frac{\sqrt{3}}{2} + b \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow (a+b) \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a+b=4$$

از طرفی مشتق تابع در $x=\frac{\pi}{3}$ برابر صفر است:

$$f'(\frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow f'(x) = a \cos x + 2b \cos 2x$$

$$f'(\frac{\pi}{3}) = a \cos \frac{\pi}{3} + 2b \cos \frac{2\pi}{3} = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} + 2b(-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow a=2b$$

از معادلات **1** و **2** مقادیر $a = \frac{4}{3}$ و $b = \frac{4}{3}$ به دست می‌آیند.

1681 مقسوم‌علیه را به صورت $(x-1)(x+1)$ می‌نویسیم و در اتحاد تقسیم

$x = -1, x = 1$ قرار می‌دهیم:

$$ax^2 + bx^2 + 2x + 1 = (x-1)(x+1)q(x) + x + 2$$

$$x=1: a+b+2=0+2 \Rightarrow a+b=0$$

$$\Rightarrow a=-1, b=1$$

$$x=-1: -a+b-1=0+1 \Rightarrow -a+b=2$$

حال باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+2$ را به دست می‌آوریم:

$$f(-2) = -8a + 4b - 4 + 1 = -8(-1) + 4(1) - 3 = 9$$

1682 با فرض $P(x) = \frac{x-1}{x+3}$ داریم:

x	-3	-2	1
$P(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$
A	$+$	$-$	$+$

$A = \frac{x-1}{x+3} f(x) < 0$

پس این عبارت در بازه $(-3, -2)$ منفی است.

1674 چون هر دو تابع f و g در $x=0$ ناپیوسته‌اند، برای بررسی پیوستگی توابع داده شده در نقطه $x=0$ در هر گزینه، باید ضابطه تابع داده شده را

تشکیل دهیم:

1 $f(x)+g(x) = \begin{cases} -2x - \frac{1}{2} & ; x < 0 \\ 2x+1 & ; x \geq 0 \end{cases}$ ناپیوسته

2 $f(f(x)) = \begin{cases} f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} & ; x < 0 \\ f(2x) = 4x & ; x \geq 0 \end{cases}$ ناپیوسته

3 $g(f(x)) = \begin{cases} g(-\frac{1}{2}) = -2(-\frac{1}{2}) & ; x < 0 \\ g(2x) = 1 & ; x \geq 0 \end{cases}$ پیوسته

4 $f(g(x)) = \begin{cases} f(-2x) = 2(-2x) = -4x & ; x < 0 \\ f(1) = 2(1) = 2 & ; x \geq 0 \end{cases}$ ناپیوسته

1675 چون $f(x) = x^2 - 2x$ به ازای $x=2$ صفر می‌شود، فقط از آن مشتق می‌گیریم

و $x=2$ را در بقیه عوامل قرار می‌دهیم:

$$f(x) = (x^2 - 2x)(x^3 - x^2 - 2) \xrightarrow{x=2} f'(x) = (2x-2)(x^3 - x^2 - 2)^4$$

$$f'(2) = (4-2)(8-4-2)^4 = 2 \times 2^4 = 2 \times 16 = 32$$

1676 حد داده شده برابر مشتق تابع f در $x=2$ است، پس $f'(2) = 6$ با

توجه به شکل، شیب خط مماس بر نمودار g در $x=3$ برابر $\frac{1}{4}$ است

است؛ پس $g'(3) = \frac{1}{4}$ از طرفی نقطه $(3, 2)$ روی نمودار g قرار دارد، پس $g(3) = 2$

است. بنابراین: $(f \circ g)'(3) = g'(3) \cdot f'(g(3)) = \frac{1}{4} \times f'(2) = \frac{1}{4} \times 6 = \frac{3}{2}$

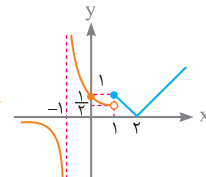
1677 می‌دانیم مشتق تابع $y = \sqrt[n]{u^m}$ به صورت $y' = \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$ است، پس:

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x+2}{2x-3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{\frac{3x+2}{2x-3}}} \times \frac{3(2x-3) - (3x+2)(2)}{(2x-3)^2}$$

$$f'(2) = \frac{2}{2\sqrt{1}} \times \frac{-13}{(2(2)-3)^2} = \frac{2}{2} \times -13 = -13$$

1678 نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} |x-2| & ; x \geq 1 \\ \frac{1}{x+1} & ; x < 1 \end{cases}$$



مطابق شکل تابع f در سه نقطه به طول‌های $x=1$ و $x=2$ و $x=-1$ مشتق ناپذیر

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}$$

است، پس:

796 چون دو نمودار در $x=4$ بر یک خط مماس‌اند، پس در $x=4$ باید

مقادیرها برابر و مشتق‌ها برابر باشند:

$$\begin{cases} y = x\sqrt{x} \\ y = x^2 + ax + b \end{cases} \xrightarrow{x=4} 16 + 4a + b = 4\sqrt{4} \Rightarrow 4a + b = -8$$

$$\begin{cases} y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} \\ y' = 2x + a \end{cases} \xrightarrow{x=4} 6 + a = 4 \Rightarrow a = -2$$

بنابراین از رابطه **1** داریم:

$$4(-2) + b = -8 \Rightarrow b = 0$$

797 برای محاسبه $f'(2)$ از ضابطه بالا و برای محاسبه $f'(\delta)$ از ضابطه

پایین مشتق می‌گیریم:

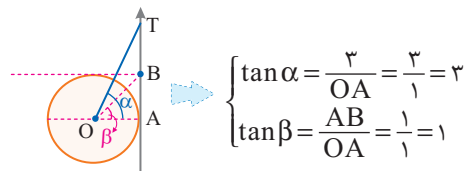
$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{10}{2\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$$

$$f(x) = \left[\frac{\delta}{4}\right](x^2 - 9x) = x^2 - 9x \Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \Rightarrow f'(\delta) = 10 - 9 = 1$$

$$\text{پس } \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

798 چون مثلث OAB در دایره مثلثاتی قرار گرفته، پس $OA = AB = 1$

است، پس:

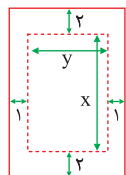


$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{3}{OA} = \frac{3}{1} = 3 \\ \tan \beta = \frac{AB}{OA} = \frac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

$$\tan(\text{TOB}) = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{3 - 1}{1 + 3 \times 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

799 مطابق شکل اگر فقط طول اضلاع

صفحه متن را x و y در نظر بگیریم:



$$xy = 32 \Rightarrow y = \frac{32}{x}$$

$$\text{مساحت کل صفحه} = (x+4)(y+2) = xy + 2x + 4y + 8 = 2x + 4y + 40$$

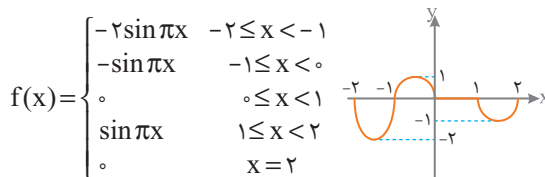
$$S(x) = 2x + 4 \times \frac{32}{x} + 40 \Rightarrow S'(x) = 2 - \frac{128}{x^2} = \frac{2x^2 - 128}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 128 = 0 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -8 \end{cases}$$

کم‌ترین مساحت ممکن برای هر صفحه به ازای $x = 8$ به دست می‌آید:

$$S(x) = 2x + \frac{128}{x} + 40 \Rightarrow S(8) = 16 + \frac{128}{8} + 40 = 72$$

793 نمودار تابع f را در بازه $-2 \leq x \leq 2$ رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع f در تمام نقاط بازه $-2 \leq x \leq 2$ پیوسته است.

کلید سازمان سنجش گزینه **4** است، اما بعضی‌ها معتقدند این تابع در دو نقطه $x = 2$ و $x = -2$ ناپیوسته است.

794 چون $x = 2$ تنها مجانب قائم تابع است، پس مخرج کسر شامل عبارت

$(x-2)^2$ است. حال با توجه به این‌که ضریب x^2 برابر 2 است، مخرج کسر به صورت $2(x-2)^2 = 2x^2 - 8x + 8$ است.

از طرفی $f(3) = 6$ است، پس:

$$f(3) = \frac{9a + 21}{2(3-2)^2} = \frac{9a + 21}{2} = 6 \Rightarrow 9a + 21 = 12 \Rightarrow a = -1$$

حال از تابع f در بی‌نهایت حد می‌گیریم تا مجانب افقی آن به دست آید:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 7x}{2x^2 - 8x + 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین $y = -\frac{1}{2}$ مجانب افقی تابع است.

برای این مسئله حالت دومی نیز وجود دارد که $c = 0$ باشد. در این

حالت $f(x) = \frac{ax + y}{2x + b}$ می‌شود که با توجه به شرایط مسئله به $b = -4$

و $a = \frac{5}{3}$ می‌رسیم. در نتیجه خط مجانب افقی $y = \frac{5}{6}$ خواهد بود که در گزینه‌ها وجود ندارد!

795 می‌دانیم حاصل مشتق توابع کسری به فرم $y = \frac{af(x) + b}{cf(x) + d}$ برابر

$$y' = \frac{(ad - bc) \times f'(x)}{(cf(x) + d)^2}$$

پس:

$$g(x) = f\left(\frac{-\sin x + 1}{\sin x + 1}\right) \Rightarrow g'(x) = \frac{(-1-1)\cos x}{(\sin x + 1)^2} f'\left(\frac{-\sin x + 1}{\sin x + 1}\right)$$

حال با جای‌گذاری $x = \frac{\pi}{6}$ داریم:

$$g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-2 \cos \frac{\pi}{6}}{(\sin \frac{\pi}{6} + 1)^2} f'\left(\frac{-\sin \frac{\pi}{6} + 1}{\sin \frac{\pi}{6} + 1}\right) = \frac{-2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2} f'\left(\frac{-\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} + 1}\right)$$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{\frac{9}{4}} f'\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-4\sqrt{3}}{9} f'\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{4}$$

می‌دانیم تابع درجه دوم و تابع هموگرافیک فاقد نقطه عطف هستند، بنابراین تابع f فقط در نقطه مرزی $x=1$ می‌تواند عطف داشته باشد. چون تابع در $x=1$ پیوسته است، پس وجود مماس را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} -x & ; x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & ; x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) = f'_-(1) = -1 \Rightarrow f'(1) = -1$$

بنابراین تابع f در $x=1$ دارای خط مماس است. حال جهت تقعر را در اطراف $x=1$ بررسی می‌کنیم:

$$f''(x) = \begin{cases} -1 & ; x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & ; x > 1 \end{cases} \Rightarrow f''_-(1) = -1 < 0, f''_+(1) = 2 > 0$$

چون f'' در اطراف $x=1$ تغییر علامت می‌دهد، پس $x=1$ طول نقطه عطف است.

NOTE



بعد از هیتلر همه آلمان درک کردند که او چه بلایی بر سر کشور و زیر بناهای آن آورده است. اما یک چیز نبود شده که اساس وجود داشته که هر کسی متوجه اش نمی شد و آن **خیانت هیتلر به کلمات بود**. خلیج از کلمات شریف دیگر معنی خود را از دست داده بودند.

پوچ و مغرور شده بودند.

عوض شده بودند.

آشغال شده بودند.

کلماتی مانند **آزادی**، **آگاهی**، **بیشترت** و **عدالت** و...

« هاینریش بلن - آرم کجا بودی »