

«فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

«فصل دوم: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

«فصل سوم: چندضلعی‌ها

«فصل چهارم: تجسم فضایی

## پایه دهم

# فصل اول

## ترسیم‌های هندسی و استدلال

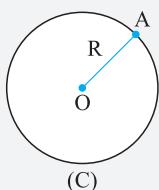
### مکان هندسی - ۱

یک مجموعه از نقاط را «مکان هندسی» گوییم هرگاه اولاً همه آن‌ها دارای ویژگی مشترکی باشند، دوماً هر نقطه که آن ویژگی را دارد، عضو آن مجموعه باشد.

**دایره:** مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت، به فاصله ثابت قرار دارند. دایره C به مرکز O و شعاع R

را با نماد  $C(O, R)$  نشان می‌دهیم.

نقطه A روی دایره است  $\Leftrightarrow OA = R$



(مشابه تمرین کتاب درسی)

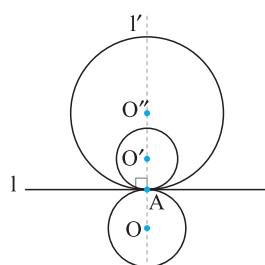
نقطه ثابت A روی خط I در صفحه، مفروض است. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در نقطه A برخط I مماس‌اند، کدام است؟

۱) یک خط

۲) یک خط به جزیک نقطه از آن

۳) دو خط به موازات ۱

۴) کل صفحه



**پاسخ:** می‌دانیم خط مماس بر دایره، بر شعاع گذرنده از نقطه تماس، عمود است، پس مرکز همه این دایره‌ها روی خطی گذرنده از A و عمود بر اقرار دارند (خط I'). اما خود نقطه A نمی‌تواند مرکز هیچ‌کدام از این دایره‌ها باشد، پس گزینه (۲) صحیح است.

نقطه A و خط I در صفحه، مفروض‌اند. اگر m نقطه روی خط I وجود داشته باشد که از نقطه A به فاصله d باشد، m چند مقدار صحیح دارد؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۴) ۴

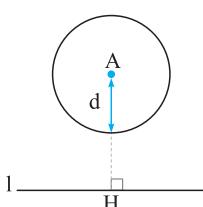
۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

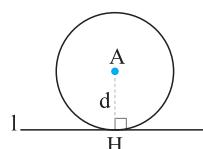
**پاسخ:** مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله d قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع d است، پس جواب مسئله، محل برخورد دایره و خط

است که وضعیت‌های زیر را داریم:



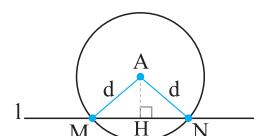
$$AH > d$$

فاقد جواب



$$AH = d$$

یک جواب (نقطه H)



$$AH < d$$

دو جواب (نقاط M و N)

پس مقدار m می‌تواند صفر، یک یا دو باشد. یعنی سه مقدار صحیح برای m وجود دارد.

# خط و پیته

(مشابه تمرین کتاب درسی)

در صفحه، مکان هندسی مرکز دایره هایی به شعاع ۲ واحد که بر دایره  $O(6, C)$  مماس باشند، کدام است؟

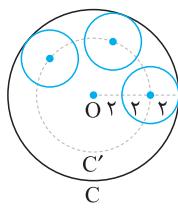
۱) دایره ای به شعاع ۸

۲) دایره ای به شعاع ۴

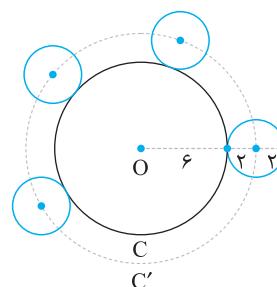
۳) دو دایره به شعاع های ۴ و ۸

۴) دو دایره به شعاع های ۲ و ۶

پاسخ: چون دو دایره می توانند مماس داخل یا مماس خارج باشند، دو وضعیت داریم:



دایره  $C'(O, 4)$



دایره  $C'(O, 8)$

بنابراین دو دایره به شعاع های ۴ و ۸، جواب مسئله اند.

دو نقطه A و B به فاصله ۷ واحد از یک دیگر در صفحه، مفروض اند. اگر فقط یک نقطه در صفحه وجود داشته باشد که از A به فاصله ۲ و از B به

(مشابه تمرین کتاب درسی)

فاصله  $3 - 4x$  واحد باشد، مقدار x کدام می تواند باشد؟

۱) ۲ یا  $4$

۲)  $3$

۳)  $2/25$

۴) ۱

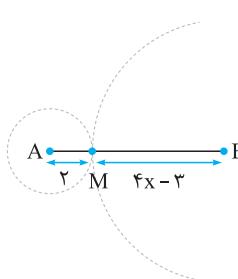
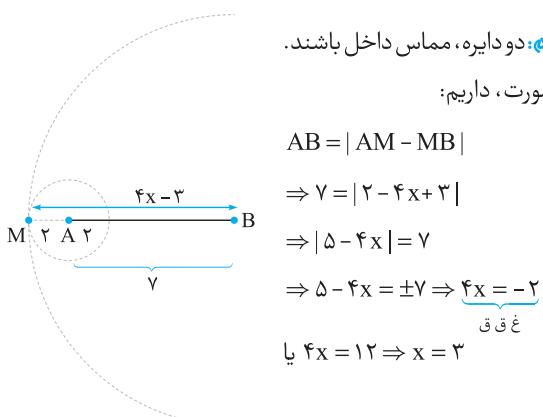
پاسخ:

اگر نقطه ای با چند ویژگی خواسته شده باشد، ابتدا مکان هندسی مربوط به هر ویژگی را یافته، سپس اشتراک این مکان هندسی ها را مشخص می کیم تا نقطه مورد نظر، بدست آید.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله ۲ واحد باشند، دایره  $C(A, 2)$  و مکان هندسی نقاطی که از B به فاصله  $3 - 4x$  واحد باشند، دایره  $C'(B, 4x - 3)$  است. پس جواب مسئله، محل برخورد این دو دایره است و چون فرض شده که مسئله فقط یک جواب دارد، دو دایره مماس اند. در نتیجه دو حالت داریم:

حالات دو: دو دایره، مماس داخل باشند.

در این صورت، داریم:



حالات اول: دو دایره، مماس خارج باشند.

در این صورت، داریم:

$$\begin{aligned} AB &= AM + MB \\ \Rightarrow 7 &= 2 + 4x - 3 \\ \Rightarrow 4x &= 8 \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

از دو حالت فوق نتیجه می گیریم  $x = 2$  یا  $x = 3$ .

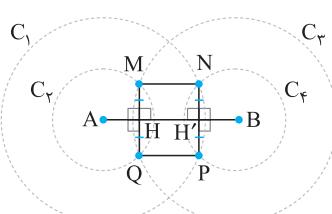
پاره خط AB به اندازه ۸ واحد در صفحه مختصات، مفروض است. چهار دایره با مرکز A و B و شعاع های ۳ و ۷ واحد رسم می کنیم. نقاط تلاقی دایره های کوچک با دایره های بزرگ، دقیقاً رأس های کدام چهارضلعی هستند؟

۱) لوزی

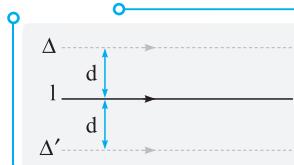
۲) متوازی الاضلاع

۳) مستطیل

۴) ذوزنقه متساوی الساقین

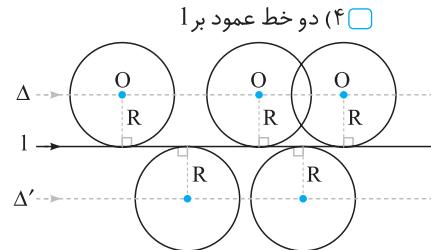


پاسخ: اولاً چون دایره ها دوبه دو هم نهشتند،  $MQ = NP$ . می دانیم خط المرکزین دو دایره متقاطع، عمود منصف وتر مشترک آن ها است، پس  $MH = NH'$  و  $MH \parallel NH'$  و  $\hat{M} = \hat{N}' = 90^\circ$ . چهارضلعی  $MNH'P$  مستطیل است. در نتیجه  $\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$ . به همین ترتیب نتیجه می گیریم  $\hat{P} = \hat{Q} = 90^\circ$ . بنابراین چهارضلعی MNPQ هم مستطیل است.



مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط  $l$  به فاصله ثابت  $d$  باشند، دو خط  $\Delta$  و  $\Delta'$  به موازات  $l$  به فاصله  $d$  در طرفین آن می‌باشند.

خط ۱ در صفحه، مفروض است. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع  $R$  که بر خط  $l$  مماس باشند، کدام است؟ ( $R > d$ ) (مشابه تمرین کتاب درسی)



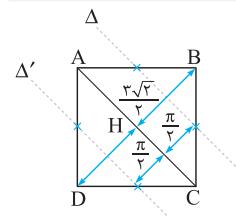
۱) یک خط به موازات  $l$  ۲) یک خط عمود بر  $l$

**پاسخ:** می‌دانیم خط  $l$  مماس بر دایرہ، بر شعاع گذرنده از نقطه تماس، عمود است. پس مرکز تمام دایرہ‌های مورد نظر، از خط  $l$  به فاصله ثابت  $R$  قرار دارد و برعکس. بنابراین مکان هندسی مرکز این دایرہ‌ها، دو خط  $\Delta$  و  $\Delta'$  به موازات  $l$  در طرفین آن است.

مربع  $ABCD$  به ضلع ۳ واحد، مفروض است. چند نقطه روی محیط این مربع وجود دارد که از قطر  $AC$  به فاصله  $\frac{\pi}{2}$  باشد؟ (آنکلوهای قدریم)

۴) چهار ۳) دو ۲) یک ۱) صفر

**نکته:** طول قطر مربعی به ضلع  $a$ ، برابر است با  $a\sqrt{2}$ .



مکان هندسی نقاطی از صفحه که از  $AC$  به فاصله  $\frac{\pi}{2}$  باشند، دو خط  $\Delta$  و  $\Delta'$  به موازات آن است.

حال چون  $\frac{\pi}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  و  $\frac{\pi}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} < \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ، نتیجه می‌گیریم

$\Delta$  و  $\Delta'$  محیط مربع را در چهار نقطه، قطع می‌کنند.

دو خط متقاطع  $\Delta$  و  $\Delta'$  در صفحه مفروض اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از  $l$  به فاصله  $d$  و از  $\Delta$  به فاصله  $d'$  باشد؟ ( $d, d' > 0$ ) (مشابه تمرین کتاب درسی)

۴) دقیقاً چهار ۳) دقیقاً دو ۲) صفر یادو ۱) صفر یادو

**پاسخ:** مکان هندسی نقاطی که از  $l$  به فاصله  $d$  باشند، دو خط  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  به موازات  $l$  مکان هندسی نقاطی که از  $\Delta$  به فاصله  $d'$  باشند، دو خط  $\Delta_3$  و  $\Delta_4$  به موازات  $\Delta$  می‌باشد. حال چون  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  متقاطع اند،  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  با  $\Delta_3$  و  $\Delta_4$  متقاطع اند و مسئله در این مقطع اند، چهار جواب دارد.

در صفحه، مکان هندسی رئوس مثلث‌های هم‌مساحتی (هم‌مساحتی)، که قاعده آن‌ها مشترک باشد، کدام است؟

۴) دو خط عمود بر  $l$  ۳) دو خط متقاطع ۲) یک خط ۱) یک خط موازی

**پاسخ:** می‌دانیم مساحت مثلث، برابر است با نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع ( $S = \frac{1}{2}ah$ ). حال چون مساحت و طول قاعده این مثلث‌ها یکسان است، ارتفاع آن‌ها ( $h$ ) هم یکسان است. پس رأس سوم این مثلث‌ها ( نقطه  $A$  )، به فاصله‌ای ثابت ( $h$ ) از ضلع  $BC$  قرار دارد و برعکس. در نتیجه، مکان هندسی نقطه  $A$  روی دو خط  $\Delta$  و  $\Delta'$  به موازات  $BC$  در طرفین آن می‌باشد.

چند نقطه متمایز برای رأس  $C$  در مثلث  $ABC$  واقع در صفحه مختصات، می‌توان یافت که فاصله رأس  $C$  از نقطه  $A$  و پاره خط  $AB$ ، به ترتیب ۷ و ۵ واحد باشد؟ (ریاضی ۹۹ خارج)

۴) ۴ ۳) ۳ ۲) ۲ ۱) ۱

**پاسخ:** مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه  $A$  به فاصله ۷ واحد باشند، دایره‌ای به مرکز  $A$  و شعاع ۷ و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از پاره خط  $AB$  به فاصله ۵ واحد باشند، دو خط  $\Delta$  و  $\Delta'$  به موازات آن و در طرفین آن است. پس نقطه  $C$ ، محل برخورد دایره  $\Delta$  با  $\Delta'$  است که چون  $7 > 5$ ، دایره با هر دو خط، متقاطع است و مسئله چهار جواب دارد.

چون پاره خط  $AB$  معلوم نیست، نقطه  $B$  می‌تواند درون، بیرون یا روی دایره باشد که در هر صورت، تأثیری در پاسخ این سوال ندارد.

**تذکر:** چون پاره خط  $AB$  معلوم نیست، نقطه  $B$  می‌تواند درون، بیرون یا روی دایره باشد که در هر صورت، تأثیری در پاسخ این سوال ندارد.

۱۰

## فصل دوم

### قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

#### نسبت و تناسب

**نسبت دو عدد:** دو عدد حقیقی  $a$  و  $b$  مفروض اند ( $a \neq b$ ). عبارت  $\frac{a}{b}$  را نسبت این دو عدد گوییم.

**تناسب:** اگر دو نسبت با هم برابر باشند، یک تناسب تشکیل می‌دهند، مانند  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ .

**خواص تناسب:** اعداد حقیقی  $a, c, b, d$  مفروض اند. در این صورت:

$$\textcircled{1} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (\text{ترکیب در صورت})$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \quad (\text{ترکیب در مخرج})$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (\text{تفضیل در صورت})$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} \quad (\text{تفضیل در مخرج})$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\textcircled{9} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = k$$

(در عبارت‌های بالا، همهٔ کسرها با معنا فرض شده‌اند.)

اگر  $\frac{a-b}{a+b}$  کدام است؟ ۱

$$-\frac{3}{7} \quad \textcircled{4}$$

$$\frac{7}{3} \quad \textcircled{3}$$

$$\frac{3}{7} \quad \textcircled{2}$$

$$-\frac{7}{3} \quad \textcircled{1}$$

زیرا:

**پاسخ: (وش اول):** به کمک ویژگی‌های تناسب، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{2}{5} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{a-b}{b} = \frac{2-5}{5} = -\frac{3}{5} \\ \frac{a}{b} = \frac{2}{5} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{a}{a+b} = \frac{2}{2+5} = \frac{2}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \frac{a-b}{b} \right) \left( \frac{a}{a+b} \right) = \left( -\frac{3}{5} \right) \left( \frac{2}{7} \right) \Rightarrow \left( \frac{a-b}{a+b} \right) \left( \frac{a}{b} \right) = -\frac{6}{35} \xrightarrow{\frac{a}{b} = \frac{2}{5}} \left( \frac{a-b}{a+b} \right) \left( \frac{2}{5} \right) = -\frac{6}{35}$$

$$\xrightarrow{\times \frac{5}{2}} \frac{a-b}{a+b} = \left( -\frac{6}{35} \right) \left( \frac{5}{2} \right) = -\frac{3}{7}$$

**وش دو:** چون  $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ ، فرض می‌کنیم  $a = 2k$  و  $b = 5k$ . بنابراین:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2k-5k}{2k+5k} = \frac{-3k}{7k} = -\frac{3}{7}$$

**وش سه:** با فرض  $a = 2$  و  $b = 5$ ، داریم:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2-5}{2+5} = -\frac{3}{7}$$

در چهارضلعی محدب ABCD، رابطه  $\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{D}}{12}$  بین زاویه‌ها برقرار است. زاویه حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه متقابل A و C چند درجه است؟ ۲

$$35 \quad \textcircled{4}$$

$$30 \quad \textcircled{3}$$

$$25 \quad \textcircled{2}$$

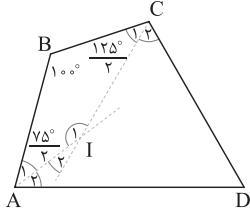
$$20 \quad \textcircled{1}$$

زیرا:

**پاسخ:** می‌دانیم مجموع زوایه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب  $360^\circ$  است. حال طبق ویژگی‌های تناسب، داریم:

$$\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{D}}{5} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}}{3+4+5+5} = \frac{\frac{360^\circ}{4}}{\frac{12}{5}} = \frac{90^\circ}{\frac{12}{5}} = 25^\circ \Rightarrow \hat{A} = 75^\circ, \hat{B} = 100^\circ, \hat{C} = 125^\circ, \hat{D} = 60^\circ$$

از طرف دیگر، در چهارضلعی ABCI، داریم:



$$\begin{aligned}\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C}_1 + \hat{I}_1 &= 360^\circ \Rightarrow \frac{75^\circ}{2} + 100^\circ + \frac{125^\circ}{2} + \hat{I}_1 = 360^\circ \\ \Rightarrow \hat{I}_1 &= 160^\circ \Rightarrow \hat{I}_2 = 180^\circ - \hat{I}_1 = 20^\circ\end{aligned}$$

## میانگین حسابی و هندسی

دو عدد  $a$  و  $b$  مفروض‌اند. در این صورت:

**الف:** میانگین حسابی (واسطه حسابی)  $a$  و  $b$ ، عدد  $c = \frac{a+b}{2}$  است. (یعنی  $a$ ،  $c$  و  $b$  سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند).

**ب:** میانگین هندسی (واسطه هندسی)  $a$  و  $b$ ، عددی مانند  $c$  است به‌طوری‌که  $c^2 = ab$  یا به عبارت دیگر،  $c = \sqrt{ab}$ . (یعنی  $a$ ،  $c$  و  $b$ ، سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی‌اند).

میانگین حسابی دو عدد  $a$  و  $b$  برابر  $18$  و میانگین هندسی آن‌ها  $\sqrt{5}6$  است. تفاضل این دو عدد کدام است؟

۲۰ (۴)

۲۴ (۳)

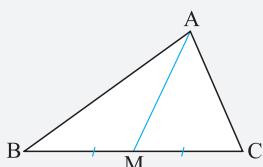
۲۸ (۲)

۳۰ (۱)  پاسخ

اگر مجموع و حاصل‌ضرب دو عدد، به ترتیب برابر با  $S$  و  $P$  باشند، آن دو عدد ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم  $-Sx + P = 0$  خواهد بود.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a+b}{2} = 18 \\ ab = (\sqrt{5})^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+b = 36 \\ ab = 18 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{نکتهٔ فوق}} x^2 - 36x + 18 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-6) = 0 \Rightarrow a=3, b=6 \Rightarrow |a-b|=24$$

## نکاتی دربارهٔ مساحت مثلث



اگر قاعده و ارتفاع دو مثلث با هم برابر باشند، مساحت آن‌ها یکسان است.

**نتیجه:** هر میانهٔ مثلث، آن را به دو مثلث هم‌ارز (هم‌مساحت) تقسیم می‌کند و برعکس.

$$S_{\triangle AMB} = S_{\triangle AMC}$$

در هر مثلث داریم:

**الف:** حاصل‌ضرب طول هر ضلع در ارتفاع وارد بر آن، مقداری ثابت است (دو برابر مساحت مثلث است).

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S_{\triangle ABC}$$

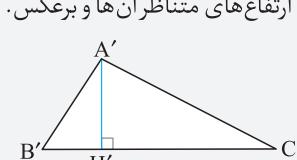
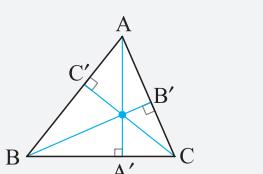
**ب:** نسبت هر دو ارتفاع، عکس نسبت اضلاع نظیر آن‌ها است.

$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}, \quad \frac{h_a}{h_c} = \frac{c}{a}, \quad \frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b}$$

$$a \geq b \geq c \Leftrightarrow h_a \leq h_b \leq h_c$$

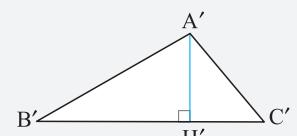
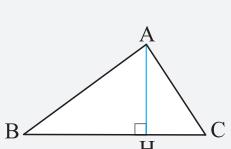
**ج:** ترتیب طول ارتفاع‌ها، عکس ترتیب طول اضلاع نظیر آن‌ها است.

**۳:** اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت ارتفاع‌های متناظر آن‌ها و برعکس.



$$BC = B'C' \Leftrightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{AH}{A'H'}$$

اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های متناظر آن‌ها و برعکس.

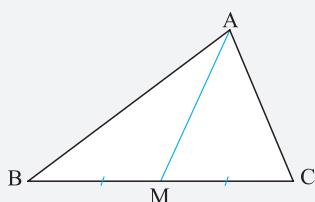


$$AH = A'H' \Leftrightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{BC}{B'C'}$$

## فصل سوم

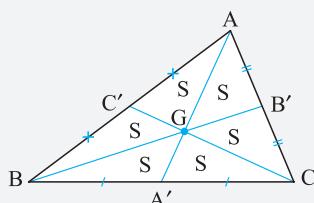
### چندضلعی‌ها

نکاتی دربارهٔ میانه در مثلث



۱ هر میانهٔ مثلث، آن را به دو مثلث هم‌مساحت (هم‌ارز) تقسیم می‌کند و برعکس.

$$S_{\triangle AMB} = S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$$



۲ سه میانهٔ هر مثلث، همساند و یک‌دیگر را به نسبت دو به یک تقسیم می‌کنند.

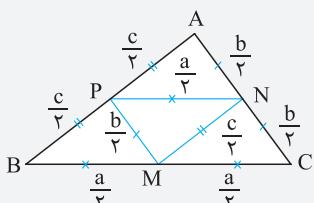
$$AG = 2GA', \quad BG = 2GB', \quad CG = 2GC'$$

۳ محل همرسی میانه‌های یک مثلث، مرکز ثقل آن مثلث است.

۴ سه میانهٔ هر مثلث، آن را به شش مثلث هم‌ارز تقسیم می‌کنند.

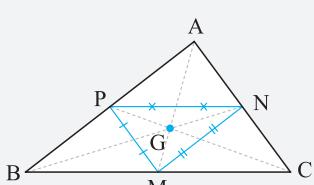
(شش مثلث ایجاد شده لزوماً همنهشت نیستند، مگر این‌که مثلث اولیه، متساوی‌الاضلاع باشد).

۵ اگر وسطهای اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث هم‌نهشت ایجاد می‌شوند. (دقت کنید که اضلاع مثلث MNP با اضلاع مثلث ABC موازی‌اند).



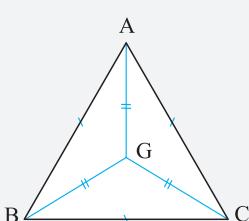
۶ اگر M، N و P وسطهای اضلاع مثلث ABC باشند، آن‌گاه میانه‌های مثلث ABC، شامل میانه‌های

مثلث MNP بوده و مرکز ثقل دو مثلث، یکسان است.



۷ اگر مرکز ثقل یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به رأس آن وصل کنیم، سه مثلث حاصل، همنهشت‌اند.

$$AB = BC = CA \Rightarrow \triangle GAB \cong \triangle GBC \cong \triangle GCA$$



۱- این فصل از کتاب درسی با مبحث «قطراهای چندضلعی» شروع می‌شود که آن را در فصل ۱ مطرح کردیم. ضمناً بدلیل کاربرد ویژگی‌های میانهٔ مثلث در حل مسائل مربوط به متساوی‌الاضلاع و ...،

آن‌ها را زودتر مطرح کردیم.

# خط و بیتہ

از مرکز نقل مثلث ABC خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AB و AC را به ترتیب در M و N قطع کند. نسبت مساحت مثلث AMN به مساحت چهارضلعی MNCB، کدام است؟

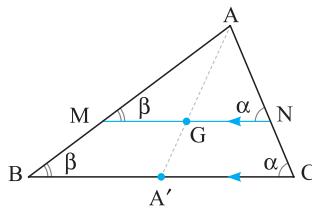
۰/۹ (۴)

۰/۶ (۳)

۰/۷ (۲)

۰/۸ (۱)

**پاسخ:** فرض کنیم نقطه G مرکز نقل مثلث ABC است. چون  $MN \parallel BC$  دو مثلث  $AMN$  و  $ABC$  متشابه‌اند و داریم:



$$\frac{AG}{AA'} = \frac{\text{مرکز نقل}}{\text{مساحت مثلث}} = \frac{G}{\Delta} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta}}{S_{AMN}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{\Delta} = 4S_{AMN}, S_{\Delta} = 9S \Rightarrow S_{MNCB} = 9S - 4S = 5S$$

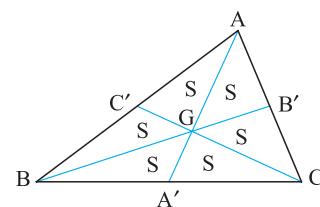
$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta}}{S_{MNCB}} = \frac{4S}{5S} = \frac{4}{5} = 0.8$$

میانه‌های  $BB'$  و  $CC'$  از مثلث  $ABC$  در نقطه G متقاطع‌اند. مساحت چهارضلعی  $AC'GB'$ ، چند برابر مساحت مثلث  $BCG$  است؟

۰/۹ (۴)

۰/۸ (۳)

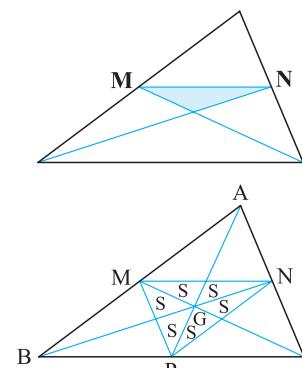
۱/۱ (۱)



$$\frac{S_{AC'GB'}}{S_{\Delta BCG}} = \frac{2S}{2S} = 1$$

در شکل مقابل، نقاط M و N وسط‌های دو ضلع‌اند. مساحت بزرگ‌ترین مثلث، چند برابر مساحت مثلث  
(ریاضی ۱۹ فارج)

رنگی است؟



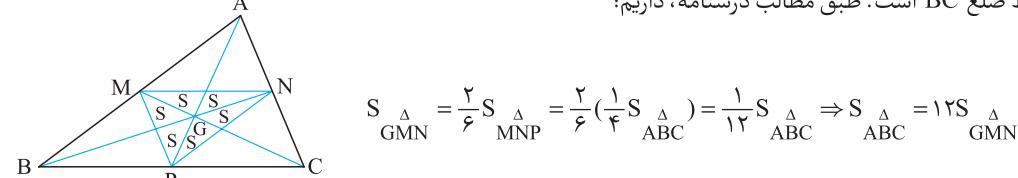
۸ (۲)

۱۲ (۴)

۶ (۱)

۹ (۳)

**پاسخ:** فرض کنیم نقطه P وسط ضلع BC است. طبق مطالب درسنامه، داریم:



$$S_{\Delta GMN} = \frac{1}{6} S_{\Delta MNP} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} \right) = \frac{1}{12} S_{\Delta ABC} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 12 S_{\Delta GMN}$$

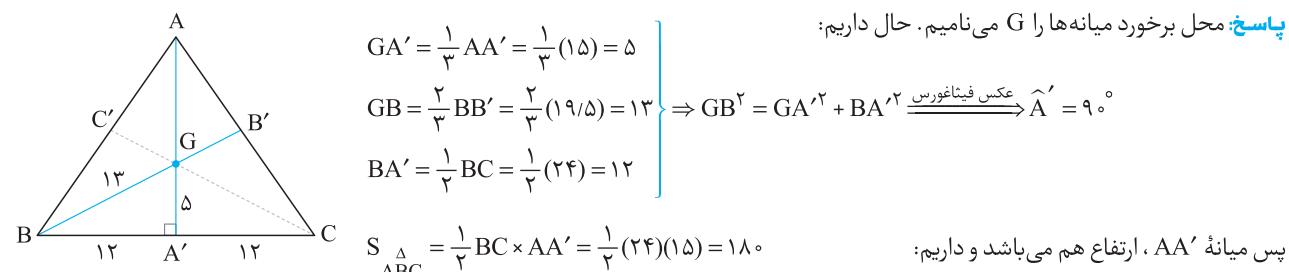
طول میانه‌های AA' و BB' از مثلث ABC، به ترتیب ۱۵ و ۱۹/۵ واحد و طول ضلع BC، ۲۴ واحد است. مساحت مثلث ABC، کدام است؟

۱۷۰ (۴)

۱۸۰ (۳)

۱۶۰ (۲)

۱۹۰ (۱)



**پاسخ:** محل برخورد میانه‌ها را G می‌نامیم. حال داریم:

$$\begin{aligned} GA' &= \frac{1}{3} AA' = \frac{1}{3}(15) = 5 \\ GB &= \frac{2}{3} BB' = \frac{2}{3}(19/5) = 13 \quad \Rightarrow GB^2 = GA'^2 + BA'^2 \xrightarrow{\text{عكس فیثاغورس}} \hat{A}' = 90^\circ \\ BA' &= \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2}(24) = 12 \end{aligned}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \times AA' = \frac{1}{2}(24)(15) = 180$$

پس میانه AA'، ارتفاع هم می‌باشد و داریم:

در یک مربع به ضلع  $\sqrt{2} \cdot 4$ ، خط و اصل از یک رأس به وسط ضلع مقابل آن، قطرمربع را در M قطع می‌کند. فاصله نقطه M از مرکز مربع، کدام است؟

(کلکورهای قدریم و مشابه تمرين کتاب درسی)

۱/۴ (۴)

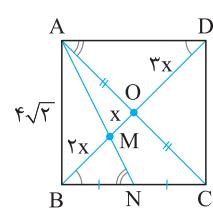
۳/۴ (۳)

۴/۳ (۲)

۵/۳ (۱)

**پاسخ (وش اول):** رأس A را به نقطه N وسط BC وصل کرده و قطر AC را نیز رسم می‌کنیم. می‌دانیم قطرهای مربع، یکدیگر را نصف می‌کنند. پس BO و AN میانه‌های مثلث ABC می‌باشند و داریم:

$$MO = \frac{1}{3} BO = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} BD \right) = \frac{1}{6} BD = \frac{1}{6} (AB\sqrt{2}) = \frac{1}{6} (4\sqrt{2})(\sqrt{2}) = \frac{4}{3}$$



«فصل اول: دایره»

«فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها»

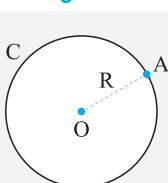
«فصل سوم: روابط طولی در مثلث»

# پایه یازدهم

# فصل اول

## دایره

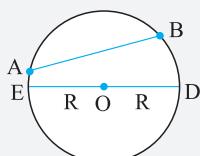
### مفاهیم اولیه در دایره



**دایره:** مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت (مرکز)، به فاصله‌ای ثابت قرار دارند.

**شعاع دایره:** پاره خطی است که مرکز دایره را به یک نقطه از محیط آن وصل می‌کند.

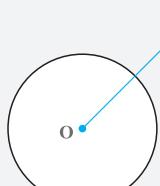
**قرازداد:** دایره C به مرکز O و شعاع R را بنامد  $C(O, R)$  نشان می‌دهیم.



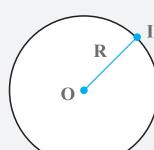
**وتو:** پاره خطی است که دو نقطه از محیط دایره را به هم وصل می‌کند.

**قطر:** وتری است که از مرکز دایره می‌گذرد.

یک نقطه مانند I نسبت به یک دایره مانند  $C(O, R)$ ، سه وضعیت دارد:



I بیرون دایره است  
 $OI > R$



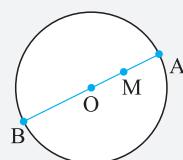
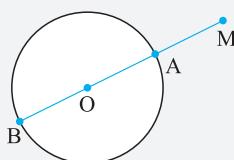
I روی دایره است  
 $OI = R$



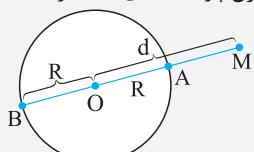
I درون دایره است  
 $OI < R$

**نزدیک‌ترین و دورترین نقاط یک دایره از یک نقطه:** نقطه M و دایره  $C(O, R)$  مفروض‌اند. نقاط برخورد خط گذرنده از M و O با دایره، نزدیک‌ترین و دورترین

نقاط دایره نسبت به نقطه M می‌باشند.



**نتیجه:** نقطه M به فاصله d از مرکز دایره  $C(O, R)$  مفروض است. اگر خط شامل OM، دایره را در A و B قطع کند، طول پاره خط‌های MA و MB



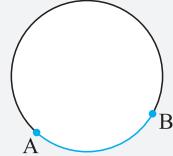
کم‌ترین و بیشترین فاصله نقطه M از دایره می‌باشند.

$$= MA = |R - d|$$

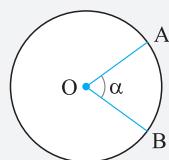
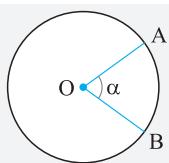
$$= MB = R + d$$

**کمان:** اگر دو نقطه A و B روی یک دایره باشند، دایره را به دو بخش تقسیم می‌کنند. هر یک از این بخش‌ها را کمان

گوییم و با نماد  $\widehat{AB}$  نشان می‌دهیم.

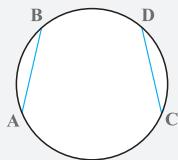


**زاویه مرکزی:** زاویه‌ای است که رأس آن، مرکز دایره باشد.



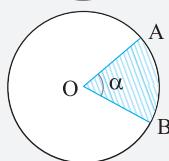
**اندازه کمان:** اندازه یک کمان را همان اندازه زاویه مرکزی رو بپرورد به آن کمان، تعریف می‌کنیم.

$$\hat{O} = \alpha \Rightarrow \widehat{AB} = \alpha$$



**نکته** در یک دایره، دو کمان با هم برابرند اگر و تنها اگر وترهای نظیر آنها برابر باشند.

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \Leftrightarrow AB = CD$$



**قطاع:** ناحیه‌ای از درون و روی دایره است که به دایره و دو شعاع آن، محدود است.

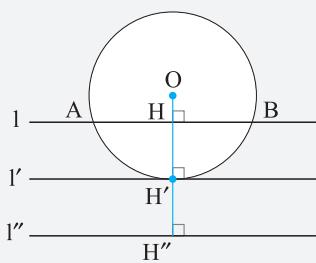
**قرازداد:** اگر زاویه مرکزی ایجاد شده توسط شعاع‌های یک قطاع،  $\alpha$  درجه باشد، آن قطاع را «قطع  $\alpha$  درجه» گوییم.

**وضعیت یک خط و یک دایره نسبت به هم**

۱) خط و دایره، دو نقطه برخورد دارند (متقاطع‌اند)، هرگاه فاصله مرکز دایره تا خط، کمتر از شعاع دایره باشد.

۲) خط و دایره، فقط یک نقطه برخورد دارند (مماس‌اند)، هرگاه فاصله مرکز دایره تا خط، برابر با شعاع دایره باشد.

۳) خط و دایره، هیچ نقطه برخوردی ندارند، هرگاه فاصله مرکز دایره تا خط، بیشتر از شعاع دایره باشد.



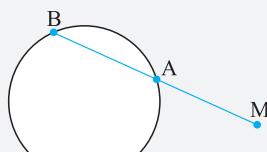
(خط I با دایره متقاطع است.)

(خط I' بر دایره مماس است.)

(خط I'', دایره را قطع نمی‌کند.)

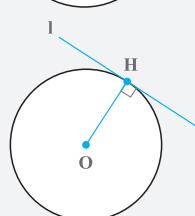
**خط قاطع دایره:** خطی است که دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

**قرازداد:** اگر از نقطه M (غیرواقع بر دایره) قاطعی رسم کنیم تا دایره را در دو نقطه A و B قطع کند، پاره خط‌های MA و MB را دو قطعه قاطع گوییم.



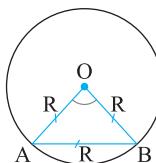
**نکته** یک خط بر یک دایره مماس است اگر و تنها اگر در نقطه‌ای از دایره، بر شعاع گذرنده از آن نقطه، عمود باشد.

(خط I بر دایره مماس است.)  $\Leftrightarrow (I \perp OH)$



**نتیجه** از هر نقطه واقع بر دایره، یک و فقط یک خط مماس بر دایره می‌گذرد.

(لنگرهای قدیم)



در دایره  $(O, R)$ ، وتر  $AB$  به طول  $R$  رسم شده است. اندازه کمان  $AB$  کدام است؟

۷۵° (۴)

۹۰° (۳)

۴۵° (۲)

۶۰° (۱)

۵۴° (۵)

**پاسخ** مرکز دایره را به نقاط A و B وصل می‌کنیم. پس  $OA = OB = AB = R$  و مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه:

$$A\hat{O}B = 60^\circ \xrightarrow{\text{مرکزی است}} A\hat{O}B = 60^\circ$$

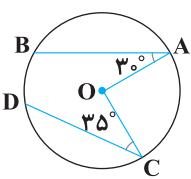
در شکل مقابل، حاصل  $\widehat{AC} + \widehat{BD}$  کدام است؟

۱۴۵° (۱)

۱۴۰° (۲)

۱۳۵° (۳)

۱۳۰° (۴)



فصل دوم

## تبديل‌های هندسی و کاربردها

آشنایی با تبدیل‌های هندسی

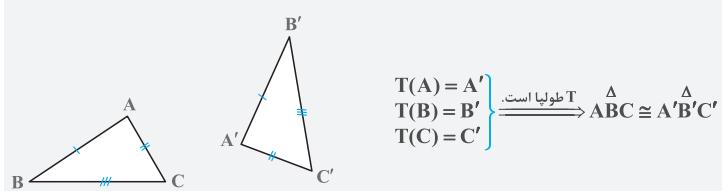
**تبديل:** تبديل  $T$  در صفحه  $P$ ، تابعی است که به هر نقطه از صفحه  $P$  مانند  $A$ ، دقیقاً یک نقطه مانند  $A'$  از صفحه  $P$  را نظیر می‌کند و برعکس؛ هر نقطه  $A'$  از صفحه  $P$ ، دقیقاً تصویر یک نقطه مانند  $A$  از صفحه  $P$  است.

**قرارداد:** تبدیل  $T$  در صفحه  $P$  را بانماد  $P \rightarrow T$  نشان داده و اگر نقطه  $A'$  تصویر نقطه  $A$  باشد، می‌نویسیم  $T(A) = A'$ .

**تبديل طول پاره خط (ایزومتری):** تبدیلی است که طول پاره خط (فاصله بین نقاط) را حفظ می‌کند (معنی طول هر پاره خط، با طول تصویر آن، برابر است).



**نکته** هر شکل و تصویر آن تحت یک تبدیل طولپا، هم نهشت اند.



**نتیجه** هر تبدیل طولیاً، اندازه زاویه را حفظ می‌کند. به عنوان مثال، در شکل فوق داریم:  $\hat{A} = \hat{A}'$  و  $\hat{C} = \hat{C}'$ .

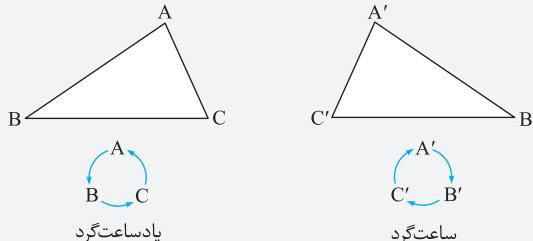
**قرارداد:** اگر تصویر یک خط تحت یک تبدیل، با آن خط موازی باشد، گوییم این تبدیل، شیب را حفظ کرده است.

**تذکرہ** تبدیل‌های ایزومتری، لزوماً شبیه را حفظ نمی‌کنند. (مانند شکل قبیل)

**نکته**  $A_1, A_2, \dots, A_n$  را در نظر می‌گیریم. اگر از یک رأس شروع به حرکت کرده و تمام رؤوس را طی کنیم تا دوباره به آن رأس برسیم، آن‌گاه جهت این حرکت، ساعت‌گرد (در جهت عقربه‌های ساعت) یا میانساعت‌گرد (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) است.



**قرارداد:** اگر جهت یک مسیر روی یک چندضلعی، با جهت همان مسیر روی تصویر آن چندضلعی تحت یک تبدیل، یکسان باشد، گوییم این تبدیل، جهت شکل را حفظ کرده است.

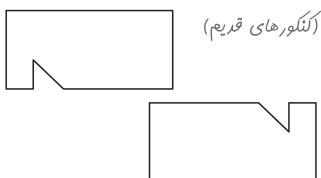


**نتیجه** اگر جهت یک شکل تحت یک تبدیل عوض شود، آن شکل، پشت و رو شده است و اگر جهت حفظ شود، آن شکل، پشت و رو نشده است. به عنوان مثال، در شکل مقابل اگر  $A'$ ,  $B'$  و  $C'$  به ترتیب تصویر  $A$ ,  $B$  و  $C$  باشند، این تبدیل جهت را حفظ نکرده است.

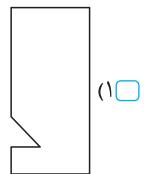
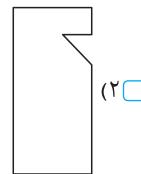
**تذکرہ** تبدیل‌های ایزومتری لزوماً جهت شکل را حفظ نمی‌کنند.

**نقطه ثابت تبدیل:** نقطه‌ای است که تصویر آن، خودش باشد.

## خط و ترھ



کدام گزینه از لغزش شکل مقابل در صفحه حاصل می‌شود؟



**پاسخ:** لغزاندن شکل در صفحه، جهت آن را عوض نمی‌کند (آن را پشت و رو نمی‌کند). پس باید گزینه‌ای را بیابیم که جهت آن با جهت شکل داده شده

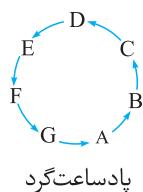
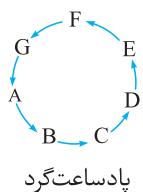
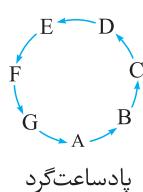
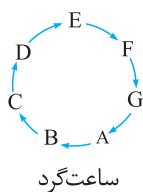
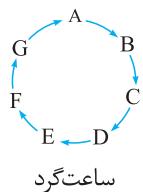
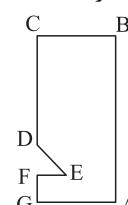
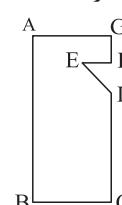
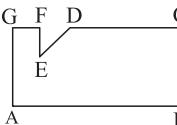
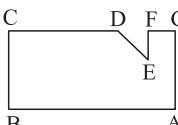
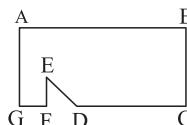
(صورت سؤال)

گزینه (۴)

گزینه (۳)

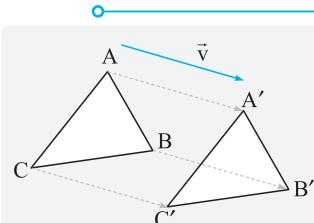
گزینه (۲)

یکسان باشد. حال داریم:



بنابراین فقط گزینه (۴) قابل قبول است.

### انتقال



انتقال با بردار  $\vec{v}$  تبدیلی است که در آن، تصویر هر نقطه مانند  $A$ ، نقطه‌ای مانند  $A'$  است به طوری که  $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$ .  
نتکه: انتقال، طولپا است و شبیب و جهت را حفظ می‌کند.



(مشابه تمرین کتاب درسی)

چند مورد از گزاره‌های زیر، درست است؟

الف) انتقال، نقطه ثابت ندارد.

ب) انتقال یافته هرزاویه، زاویه‌ای برابر با آن است.

د) انتقال یافته یک خط، برآن خط منطبق است اگر و تنها اگر بردار انتقال، صفر باشد.

(۱) یک  (۲) دو  (۳) سه  (۴) چهار

**پاسخ:** گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) اگر بردار انتقال، بردار صفر باشد، همه نقاط صفحه، ثابت می‌مانند و در غیر این صورت، هیچ نقطه‌ای ثابت نمی‌ماند. پس انتقال، صفر یا بی شمار نقطه ثابت دارد و این گزاره، غلط است.

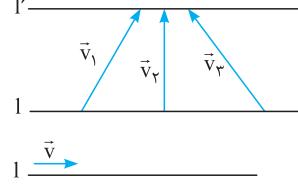
**نتیجه:** انتقال غیر همانی، نقطه ثابت ندارد.

ب) می‌دانیم انتقال، طولپا است و تبدیل‌های طولپا، اندازه زاویه را هم حفظ می‌کنند. پس انتقال اندازه زاویه را حفظ می‌کند و این گزاره، درست است.

ج) فرض کنیم دو خط  $l$  و  $l'$  موازی‌اند. در این صورت، هر برداری که ابتدای آن منطبق بر  $l$  و انتهای آن منطبق بر  $l'$  باشد،  $l$  را بر  $l'$  تصویر می‌کند و این گزاره، درست است.

د) اگر بردار انتقال، با یک خط موازی باشد هم انتقال یافته آن خط برخودش منطبق می‌شود، پس این گزاره، غلط است.

**نتیجه:** انتقال یافته یک خط، برآن خط منطبق است اگر و تنها اگر بردار انتقال، بردار صفر یا موازی با خط باشد.



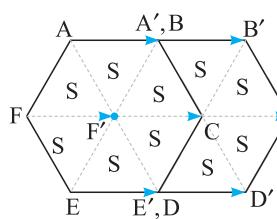
شش ضلعی منتظم ABCDEF را با بردار  $\vec{AB}$  انتقال داده‌ایم. مساحت شکل حاصل از اجتماع شش ضلعی و تصویرش، چند برابر مساحت شش ضلعی است؟

۳ (۴)

$\frac{5}{3}$  (۳)

۲ (۲)

$\frac{4}{3}$  (۱)



پاسخ: می‌دانیم شش ضلعی منتظم، از شش مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌شود. حال با توجه به شکل، داریم:

$$\frac{S_{AB'C'D'EF}}{S_{ABCDEF}} = \frac{10S}{6S} = \frac{5}{3}$$

دایره  $(O, R)$  را با برداری به طول  $\sqrt{2}R$  انتقال داده‌ایم. مساحت ناحیه بین دو دایره، چند برابر  $R^2$  است؟

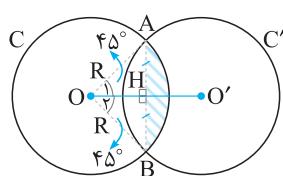
$\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}$  (۴)

$\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}$  (۳)

$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$  (۲)

$\frac{\pi}{2} - 1$  (۱)

پاسخ: چون انتقال طولپا است، انتقال یافته دایره  $C$ ، دایره‌ای به همان شعاع است و چون دو دایره همنهشت‌اند، وتر مشترک آنها عمود‌منصف خط‌المرکزین است. حال داریم:

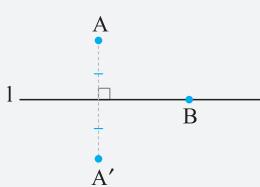


$$OH = HO' = \frac{1}{2}OO' = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

$$\Delta OHA : \hat{H} = 90^\circ, OH = \frac{\sqrt{2}}{2}OA \Rightarrow \hat{O}_1 = 45^\circ \Rightarrow \hat{O}_2 = 45^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = 90^\circ$$

$$\text{مساحت ناحیه بین دو دایره} = 2(S_{90^\circ} - S_{\Delta OAB}) = 2(\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2) = (\frac{\pi}{2} - 1)R^2$$

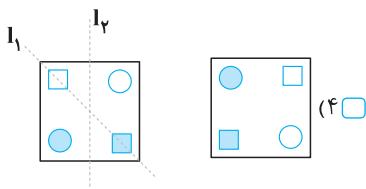
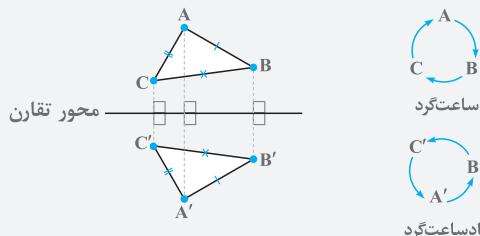
## بازتاب نسبت به خط (تقارن محوری)



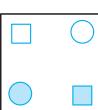
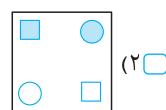
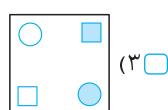
به ازای هر خط  $l$  در صفحه، بازتاب نسبت به  $l$  تبدیلی است که در آن، تصویر هر نقطه مانند  $A$ ، نقطه‌ای چون  $A'$  است به طوری که اگر  $A$  روی  $l$  باشد، تصویر آن، خودش است و در غیر این صورت، خط اعمود‌منصف  $AA'$  است.

$$A \rightarrow A', B \rightarrow B$$

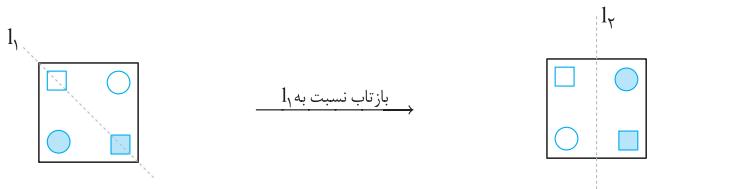
نکته: تقارن محوری، طولپا است اما شبیه و جهت را حفظ نمی‌کند.



اگر شکل زیر را نسبت به خط  $l_1$  و تصویر آن را نسبت به خط  $l_2$  بازتاب دهیم، کدام شکل ایجاد می‌شود؟



پاسخ: با توجه به شکل زیر، گزینه (۴) درست است.



«آزمون جامع ۱

«آزمون جامع ۲

«پاسخنامه تشریحی

# آزمون‌های جامع

۱. ذوزنقه به قاعده‌های ۳ و ۱۱ و ساق‌های ۵ و  $x$  واحد، قابل رسم است. حدود  $x$  کدام است؟

$$5 < x < 15 \quad (4)$$

$$2 < x < 12 \quad (3)$$

$$4 < x < 14 \quad (2)$$

$$3 < x < 13 \quad (1)$$

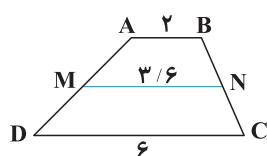
۲. نقطه E را روی میانه AM از مثلث ABC انتخاب کرده و BE را متداوم دهیم تا AC را در F قطع کند. اگر  $\frac{EF}{FC} = \frac{3}{2}$ ، حاصل کدام است؟

$$0/6 \quad (4)$$

$$0/5 \quad (3)$$

$$0/4 \quad (2)$$

$$0/3 \quad (1)$$



۳. در ذوزنقه مقابل، MN با قاعده‌ها موازی است. نسبت  $\frac{AM}{MD}$  کدام است؟

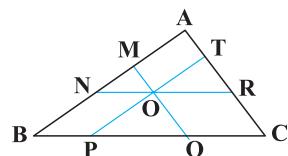
$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{4}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

۴. در شکل زیر، از نقطه O سه خط به موازات اضلاع مثلث ABC رسم شده است. اگر مساحت مثلث ABC ۱۶ و مساحت مثلث OMP ۹، مساحت مثلث ORQ و OMN به ترتیب ۴ و ۳ است. واحد باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



$$52 \quad (1)$$

$$49 \quad (2)$$

$$90 \quad (3)$$

$$81 \quad (4)$$

۵. مساحت یک لوپی ۶ واحد مربع و مجموع طول دو قطر آن،  $5\sqrt{2}$  واحد است. طول ضلع این لوپی کدام است؟

$$\frac{\sqrt{21}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{23}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{29}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{26}}{2} \quad (1)$$

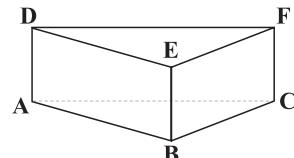
۶. طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه،  $x$ ،  $3x+4$  و  $3x+3$  واحد می‌باشد. مساحت این مثلث کدام است؟

$$90 \quad (4)$$

$$88 \quad (3)$$

$$84 \quad (2)$$

$$80 \quad (1)$$



۷. در منشور قائم مقابل، صفحه گذرنده از نقاط A، C و E، حجم منشور را به چه نسبت تقسیم می‌کند؟

$$\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

۸. در مخروط قائم به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۸ واحد، صفحه‌ای به فاصله ۶ واحد از قاعده رسم کرده‌ایم تا مخروط به یک مخروط کوچک و یک

مخروط ناقص تبدیل شود. حجم مخروط ناقص، چند برابر  $\pi$  است؟

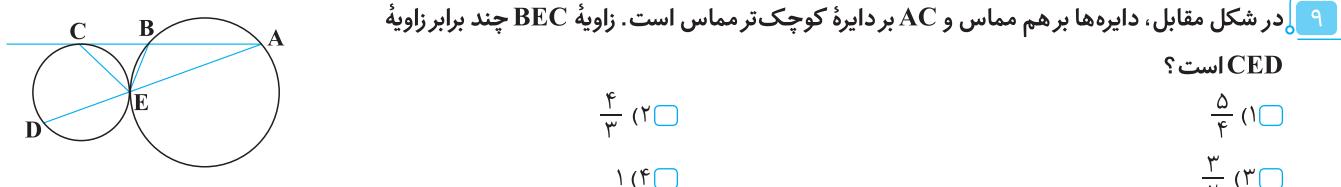
$$\frac{193}{11} \quad (4)$$

$$\frac{191}{10} \quad (3)$$

$$\frac{19}{9} \quad (2)$$

$$\frac{189}{8} \quad (1)$$

۹. در شکل مقابل، دایره‌ها برهم مماس و AC بر دایره کوچک تر مماس است. زاویه BEC چند برابر زاویه CED است؟



$$\frac{5}{4} \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

۱۰. دایره‌های محاطی داخلی و خارجی نظیر ضلع BC از مثلث ABC را رسم کرده‌ایم. اگر  $AB = BC = 9$  و  $AC = 14$ ، حاصل  $\frac{MN}{GF}$  کدام است؟



$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\frac{5}{9} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{4}{9} \quad (4)$$

۱۱. دایره‌ای به شعاع ۲ واحد، از دو رأس مربعی می‌گذرد. از یک رأس مربعی، مماسی بر دایره رسم می‌کنیم. اگر طول پاره خط مماس،  $1/5$  برابر ضلع

مربع باشد، طول ضلع مربع کدام است؟

$$\frac{16}{\sqrt{41}} \quad (4)$$

$$\frac{14}{\sqrt{43}} \quad (3)$$

$$\frac{12}{\sqrt{39}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{37}} \quad (1)$$