فهرست

راهنمای آیکون‌های کتاب:

نکته — توجه — هشدار

مثال — پاسخ — حواستان باشد

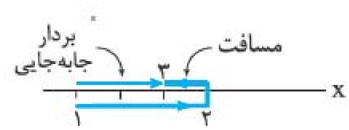
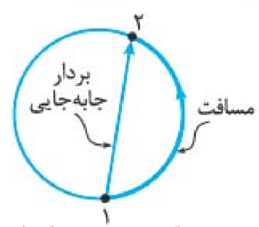
یادآوری

فصل دهم
حرکت بر خط راست

الفبای حرکت در راستای خط راست

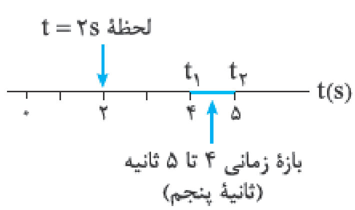
برای شناخت حرکت، لازم است با مفاهیم زیر آشنا شویم:

مسافت و جابه‌جایی: مسافت کمیتی نرده‌ای و جابه‌جایی کمیتی برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

مسافت (ℓ)	بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$
طول مسیر حرکت	برداری که نقطهٔ اول حرکت را به نقطهٔ انتهای حرکت وصل می‌کند. $\vec{d} = \Delta x \vec{i}$
 متحرک از نقطهٔ (۱) به (۲) و سپس به (۳) رفته است.	 متحرک روی محیط دایره از نقطهٔ (۱) به (۲) رفته است.

◄ در حالت کلی، $\ell > |\vec{d}|$ است؛ اما اگر متحرکی در حرکت روی یک خط راست تغییر جهت ندهد، داریم: $\ell = |\vec{d}|$.

لحظه و بازهٔ زمانی: تفاوت لحظه و بازهٔ زمانی را در نمودار روبه‌رو نشان داده‌ایم:



تفاضل دو لحظه، نشان‌دهندهٔ بازهٔ زمانی بین آن دو لحظه است: $\Delta t = t_2 - t_1$

تندی متوسط و سرعت متوسط: تندی کمیتی نرده‌ای و سرعت کمیتی برداری است و مقدار متوسط آن از فرمول‌های زیر به دست می‌آید:

تندی متوسط	سرعت متوسط
$s_{av} = \dfrac{\ell}{\Delta t}$ ، $\ell \to$ مسافت (m) ، $\Delta t \to$ زمان حرکت (s)	$\vec{v}_{av} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} \Rightarrow v_{av} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ علامت جبری Δx و v_{av} جهت حرکت را نشان می‌دهند.

تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای

تندی لحظه‌ای (v): تندی متحرک در هر لحظه از زمان یا در هر نقطه از مسیر (مثال: تندی لحظه‌ای یک متحرک $۵\,m/s$ است.)

سرعت لحظه‌ای ($\vec{v}$): تندی لحظه‌ای با در نظر گرفتن جهت حرکت (مثال: سرعت لحظه‌ای همان متحرک $۵\,m/s$ به طرف شمال است.)

وقتی می‌گوییم «تندی» و «سرعت»، منظورمان تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای است.

متحرکی در لحظهٔ $t=۰$ از مکان $x_۱=-۱۰\,m$ در جهت مثبت محور xها شروع به حرکت می‌کند. در لحظهٔ $t=۲\,s$، متحرک به نقطهٔ $x_۲=۶\,m$ می‌رسد و در آن‌جا $۵/۵\,s$ توقف می‌کند. سپس به مدت $۱/۵\,s$ در خلاف جهت محور xها حرکت کرده و به نقطهٔ $x_۳=۳/۵\,m$ می‌رسد. سرعت متوسط متحرک چند متر بر ثانیه است؟

۱) $۱/۵$ ۲) $۲/۰۵$ ۳) ۳ ۴) ۸

گزینهٔ «۱» برای محاسبهٔ سرعت متوسط، جابه‌جایی مهم است، نه مسافت طی‌شده. در جابه‌جایی هم فقط مکان اول و مکان آخر مهم است:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۳/۵-(-۱۰)}{۲+۵/۵+۱/۵}=\frac{۱۳/۵}{۹}=۱/۵\,m/s$$

شتاب

هرگاه سرعت جسمی تغییر کند، حرکت آن شتاب‌دار است. شتاب متوسط از فرمول زیر حساب می‌شود:

$$\boxed{a_{av}=\frac{\overset{\text{سرعت نهایی}}{v_۲}-\overset{\text{سرعت اولیه}}{v_۱}}{t_۲-t_۱}=\frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

شتاب متوسط برای حرکت در یک راستا $(m/s^۲)$ ← a_{av} ؛ Δv → تغییر سرعت (m/s) ؛ Δt → بازهٔ زمانی تغییر سرعت (s)

شتاب لحظه‌ای $\vec{a}$: شتاب متحرک در هر لحظه از زمان

وقتی می‌گوییم «شتاب» منظورمان شتاب لحظه‌ای است.

جهت‌ها: جابه‌جایی، سرعت و شتاب کمیت‌هایی برداری هستند و تعیین جهت آن‌ها برای ما مهم است.

برای حرکت در راستای محور x، این جهت‌ها را به شکل زیر تعیین می‌کنیم:

جهت جابه‌جایی: اگر متحرک به سمت xهای مثبت برود، جابه‌جایی مثبت و اگر به سمت xهای منفی برود، جابه‌جایی منفی است.

جهت سرعت: بردار سرعت همواره با بردار جابه‌جایی هم‌جهت (هم‌علامت) است.

جهت شتاب: بردار شتاب با بردار تغییر سرعت (و نه خود سرعت) هم‌جهت (هم‌علامت) است؛ یعنی:

الف) سرعت ثابت $\Leftarrow \Delta v=۰ \Leftarrow$ شتاب صفر $(a=۰)$

ب) سرعت در جهت مثبت و در حال زیادشدن / سرعت در جهت منفی و در حال کم‌شدن $\Leftarrow \Delta v>۰ \Leftarrow$ شتاب مثبت $(a>۰)$

پ) سرعت در جهت منفی و در حال زیادشدن / سرعت در جهت مثبت و در حال کم‌شدن $\Leftarrow \Delta v<۰ \Leftarrow$ شتاب منفی $(a<۰)$

اگر بردار سرعت متحرکی در لحظه‌های $t_1 = 0$ و $t_2 = 4\,s$ به ترتیب $\vec{v}_1 = -6\vec{i}$ و $\vec{v}_2 = 10\vec{i}$ باشد، بردار شتاب متوسط در این فاصلهٔ زمانی کدام است؟ (کمیت‌ها در SI است.)

(تجربی ۹۵ با تغییر)

۱) $\vec{i}$ ۲) $2\vec{i}$

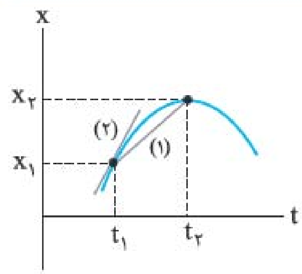
۳) $4\vec{i}$ ۴) $8\vec{i}$

گزینهٔ «۳»

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{10-(-6)}{4-0} = 4\,m/s^2 \Rightarrow \vec{a}_{av} = 4\vec{i}$$

معرفی کلی نمودارهای حرکت

نمودار مکان ـ زمان



از این نمودار می‌توان اطلاعات زیر را به دست آورد:

- **مکان جسم در هر لحظه:** x_1 مکان جسم در لحظهٔ t_1 و x_2 مکان جسم در لحظهٔ t_2 است.
- **سرعت متوسط:** سرعت متوسط متحرک بین دو لحظه از زمان، برابر شیب خطی است که نقاط متناظر با آن دو لحظه را به هم وصل می‌کند.

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \text{(1) شیب خط} = t_2 \text{ تا } t_1 \text{ سرعت متوسط متحرک بین زمان‌های}$$

- **سرعت لحظه‌ای:** شیب مماس بر نمودار در یک نقطه، برابر سرعت لحظه‌ای متحرک در آن لحظه است.

سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ t_1 = شیب خط (۲)

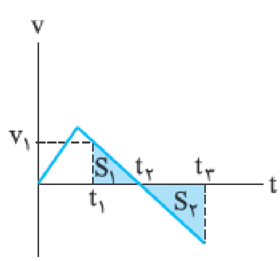
- **دور و نزدیک شدن به مبدأ:**

[دورشدن / نزدیک‌شدن] نمودار [از / به] محور افقی (t) به معنای [دورشدن / نزدیک‌شدن] متحرک [از / به] مبدأ است.

- **ساکن‌بودن:** اگر نمودار $x-t$ در بازه‌ای از زمان، خطی افقی موازی محور t باشد، نشان‌دهندهٔ ساکن‌بودن متحرک در آن بازهٔ زمانی است. همین‌طور اگر خط مماس بر نمودار در یک لحظه افقی باشد، یعنی متحرک در آن لحظه ساکن بوده است.
- **تغییر جهت متحرک:** در لحظه‌هایی که نمودار بیشینه یا کمینه است، متحرک در حال تغییر جهت است. (مثلاً در نمودار بالا در لحظهٔ t_2 متحرک تغییر جهت می‌دهد.)

نمودار سرعت ـ زمان

از این نمودار می‌توان اطلاعات زیر را به دست آورد:



- **سرعت متحرک در هر لحظه:** در نمودار مقابل، سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 برابر v_1 است.
- **تغییر جهت متحرک:** در لحظه‌ای که نمودار، محور t را قطع می‌کند و علامت سرعت در دو طرف آن متفاوت می‌شود، متحرک تغییر جهت داده است. در نمودار $v-t$ مقابل، t_2 لحظهٔ تغییر جهت متحرک است.

● **جابه‌جایی:** مساحت سطح محصور بین نمودار و محور t برابر با جابه‌جایی متحرک است. اگر این سطح بالای محور t باشد، جابه‌جایی در جهت مثبت و اگر پایین محور t باشد، جابه‌جایی در جهت منفی است. جابه‌جایی کل، مجموع تمام جابه‌جایی‌های مثبت و منفی است. در نمودار بالا:

$$\left.\begin{array}{l} S_۱ > ۰ = \text{جابه‌جایی بین دو لحظهٔ } t_۱ \text{ تا } t_۲ \\ S_۲ < ۰ = \text{جابه‌جایی بین دو لحظهٔ } t_۲ \text{ تا } t_۳ \end{array}\right\} \Rightarrow S_۱ + S_۲ = \text{جابه‌جایی در بازهٔ زمانی } t_۱ \text{ تا } t_۳$$

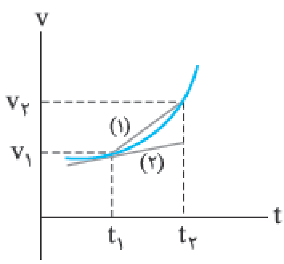
● **مسافت:** مجموع مساحت سطح‌های محصور بین نمودار و محور t (بدون در نظر گرفتن علامت منفی برای سطح‌های زیر محور t) برابر با مسافت طی‌شده توسط متحرک است. در نمودار بالا:

$$|S_۱| + |S_۲| = \text{مسافت طی‌شده در بازهٔ } t_۱ \text{ تا } t_۳$$

● **شتاب متوسط:** شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار $v - t$، برابر شتاب متوسط در آن بازهٔ زمانی است.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \text{شیب خط } (۱)$$

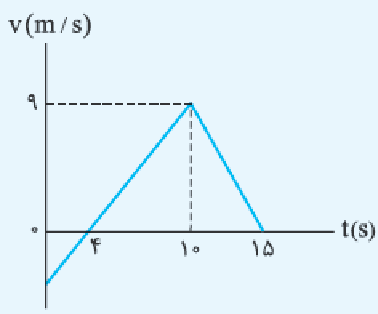
$$= \text{شتاب متوسط بین زمان‌های } t_۱ \text{ تا } t_۲$$



● **شتاب لحظه‌ای:** شیب خط مماس بر نمودار $v - t$ در یک لحظه، برابر شتاب لحظه‌ای متحرک در آن لحظه است.

$$\text{شتاب لحظه‌ای در لحظهٔ } t_۱ = \text{شیب خط } (۲)$$

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور xها حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t = ۰$ تا $t = ۱۵\,s$ چند متر بر مربع ثانیه است؟ *(تجربی خارج ۹۳ ـ مشابه تجربی ۹۲ ـ مشابه تجربی ۸۹)*



۱) ۰/۴
۲) ۰/۶
۳) ۰/۸
۴) ۱

گزینهٔ «۱» **گام اول** سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۰$ را تعیین می‌کنیم. برای این کار باید شیب نمودار را در بازهٔ $t = ۰$ تا $t = ۱۰\,s$ به دست آوریم و برای آن از مختصات دو لحظهٔ $t_۱ = ۴\,s$ و $t_۲ = ۱۰\,s$ استفاده می‌کنیم:

$$\text{شیب نمودار } = m = \text{شتاب } a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۹ - ۰}{۱۰ - ۴} = \frac{۹}{۶} = \frac{۳}{۲}$$

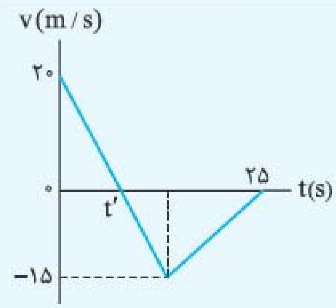
$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = \frac{۳}{۲}t + v_۰$$

برای تعیین $v_۰$، مقدار $v = ۹\,m/s$ را به ازای $t = ۱۰\,s$ در رابطهٔ به دست آمده قرار می‌دهیم:

$$۹ = \frac{۳}{۲} \times ۱۰ + v_۰ \Rightarrow v_۰ = -۶\,m/s$$

گام دوم سرعت نهایی متحرک در لحظهٔ $t = ۱۵\,s$ برابر صفر است؛ بنابراین:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_۰}{t - t_۰} = \frac{۰ - (-۶)}{۱۵ - ۰} = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴\,m/s^۲$$

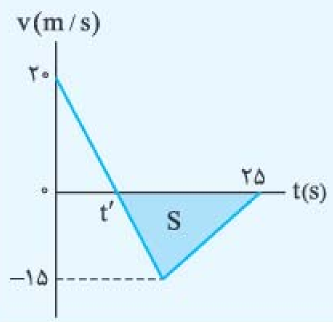


نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور xها حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. بزرگی سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی که حرکت متحرک خلاف جهت محور xها است، چند متر بر ثانیه است؟ *(ریاضی ۹۳ ـ مشابه تجربی خارج ۹۰)*

۱) صفر ۲) ۲/۵

۳) ۷/۵ ۴) ۱۰

گزینهٔ «۳» هنگامی که متحرک خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، نمودار $v-t$ آن، زیر محور t قرار دارد. در لحظهٔ t' سرعت متحرک صفر شده و از آن لحظه تا $t = ۲۵\,s$ در خلاف جهت محور x ها حرکت کرده است.

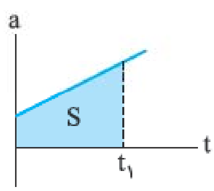


مساحت سطح رنگ‌شده برابر است با جابه‌جایی متحرک در خلاف جهت محور xها؛ بنابراین داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{|S|}{۲۵ - t'}$$

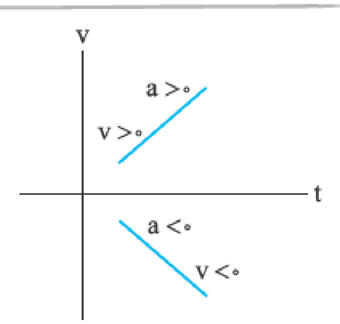
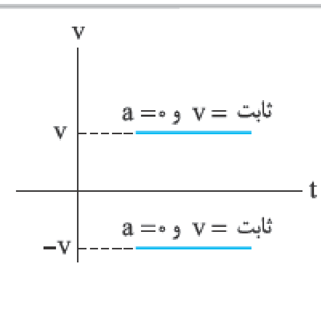
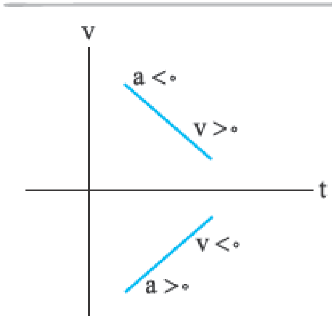
$$= \frac{\left|\frac{-۱۵ \times \cancel{(۲۵ - t')}}{۲}\right|}{\cancel{۲۵ - t'}} = \frac{۱۵}{۲} = ۷/۵\, m/s$$

نمودار شتاب ـ زمان

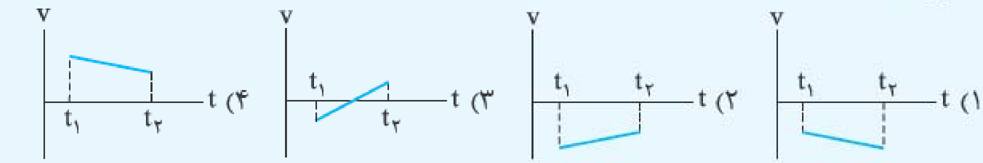


این نمودار، شتاب متحرک در هر لحظه را نشان می‌دهد و سطح محصور بین نمودار و محور t در یک بازهٔ زمانی، نشان‌دهندهٔ تغییر سرعت متحرک در آن بازه است. $S = \Delta V$

تندشونده، کندشونده، یکنواخت

حرکت تندشونده	حرکت یکنواخت	حرکت کندشونده
حرکتی است که در آن، اندازهٔ سرعت متحرک در حال زیادشدن است. $a.v > ۰ \Leftrightarrow$ حرکت تندشونده	حرکتی است که در آن، سرعت متحرک ثابت باشد. $a = ۰ \Leftrightarrow$ حرکت با سرعت ثابت	حرکتی است که در آن، اندازهٔ سرعت متحرک در حال کم‌شدن است. $a.v < ۰ \Leftrightarrow$ حرکت کندشونده
		
حرکت تندشونده $\Leftrightarrow$ دورشدن نمودار سرعت از محور t	حرکت یکنواخت $\Leftrightarrow$ افقی‌بودن نمودار سرعت	حرکت کندشونده $\Leftrightarrow$ نزدیک‌شدن نمودار سرعت به محور t

کدام نمودار، مربوط به متحرکی است که در بازهٔ زمانی نشان داده شده، حرکت آن پیوسته تندشونده است؟



گزینهٔ «۱» حرکت تندشونده حرکتی است که طی آن، اندازهٔ سرعت جسم همواره در حال افزایش است. در ۲ و ۴ اندازهٔ سرعت در حال کاهش است. در ۳ اندازهٔ سرعت ابتدا کاهش و پس از صفرشدن افزایش یافته است. فقط در ۱ است که اندازهٔ سرعت از زمان t_1 تا t_2 در حال زیادشدن است.

حرکت با سرعت ثابت

اگر در یک حرکت، تندی (اندازهٔ سرعت) و جهت سرعت متحرک (جهت حرکت متحرک) در طول مسیر ثابت باشد، آن حرکت را حرکت با سرعت ثابت می‌نامیم.

در حرکت با سرعت ثابت، شتاب صفر $(a = 0)$ و در هر بازهٔ زمانی، سرعت متوسط مساوی سرعت لحظه‌ای $(v = v_{av})$ است.

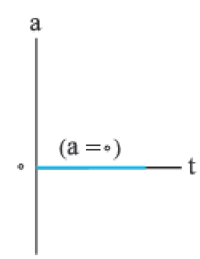
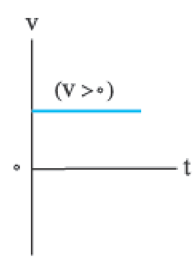
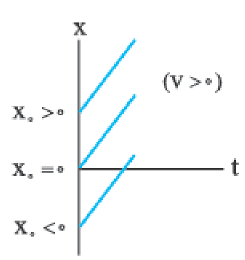
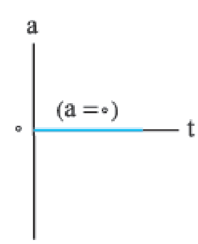
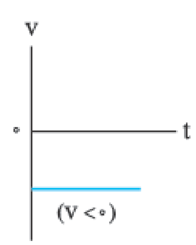
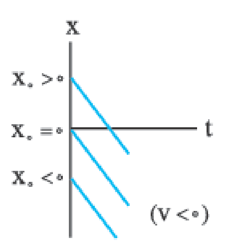
معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت:

سرعت (m/s) — مکان اولیهٔ متحرک

$$\boxed{x = vt + x_0}$$

مکان متحرک در لحظهٔ t — زمان (s)

نمودارهای حرکت با سرعت ثابت: اگر معادلهٔ بالا را در صفحهٔ $x - t$ رسم کنیم، نمودار خطی است که شیب آن برابر v و عرض از مبدأ آن x_0 است. تمام نمودارهای این حرکت را در جدول زیر می‌بینید:

وضعیت متحرک	نمودار شتاب ـ زمان	نمودار سرعت ـ زمان	نمودار مکان ـ زمان
با سرعت ثابت در جهت xهای مثبت حرکت می‌کند.			
با سرعت ثابت در جهت xهای منفی حرکت می‌کند.			

تبدیل یکاهای سرعت: برای تبدیل یکاهای (km / h) و (m / s) به یکدیگر، در حالت کلی داریم:

$$km / h \underset{\times ۳/۶}{\overset{\div ۳/۶}{\rightleftarrows}} m / s$$

اما در بیشتر مسائل با یکی از عددهای جدول زیر روبه‌رو می‌شویم که بهتر است آن‌ها را به خاطر بسپاریم:

$v\ (km / h)$	۱۸	۳۶	۵۴	۷۲	۹۰	۱۰۸
		+۱۸	+۱۸	+۱۸	+۱۸	+۱۸
$v\ (m / s)$	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰
		+۵	+۵	+۵	+۵	+۵

در یک حرکت با سرعت ثابت، متحرک در لحظه‌های $t_۱ = ۱s$ و $t_۲ = ۱۲\ s$ به ترتیب در مکان‌های $x_۱ = -۲/۵\ m$ و $x_۲ = ۲۵\ m$ قرار دارد. مکان اولیهٔ این متحرک در چند متری مبدأ بوده است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) $-۲/۵$ ۴) -۵

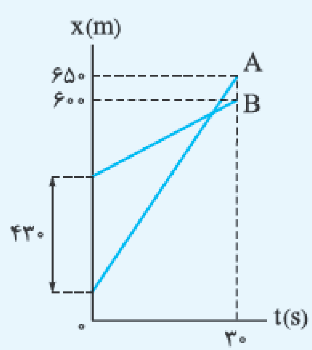
گزینهٔ «۴» صورت کلی معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت را نوشته و مختصات داده‌شده را در آن جای‌گذاری می‌کنیم و از حل دستگاه دو معادله ـ دو مجهول، مکان اولیه $(x_۰)$ را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix} x_۱ = vt_۱ + x_۰ \\ x_۲ = vt_۲ + x_۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} -۲/۵ = v(۱) + x_۰ \\ \underline{۲۵ = v(۱۲) + x_۰} \end{matrix}$$

معادلهٔ بالایی را از معادلهٔ پایینی کم می‌کنیم: $۲۷/۵ = ۱۱v \Rightarrow v = ۲/۵\ m/s$

$$\xrightarrow[\text{در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم}]{\text{v به دست آمده را}} -۲/۵ = ۲/۵ + x_۰ \Rightarrow x_۰ = -۵\ m$$

نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B به صورت شکل مقابل است. سرعت متحرک A چند متر بر ثانیه بیشتر از سرعت متحرک B است؟ (تجربی خارج ۹۴)



۱) ۱۲
۲) ۱۲/۶
۳) ۱۶
۴) ۱۶/۳

گزینهٔ «۳» **روش اول:** نمودار داده‌شده، دو متحرک در حرکت با سرعت ثابت را نشان می‌دهد. معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت را برای هر کدام می‌نویسیم:

$$\left.\begin{matrix} x_A = v_A t + x_{۰A} \\ x_B = v_B t + x_{۰B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} ۶۵۰ = v_A(۳۰) + x_{۰A} \\ \underline{۶۰۰ = v_B(۳۰) + x_{۰B}} \end{matrix}$$

$$۵۰ = ۳۰(v_A - v_B) + (x_{۰A} - x_{۰B})$$

با توجه به نمودار، $x_{\circ A} - x_{\circ B} = -۴۳۰\ m$؛ در نتیجه داریم:

$$۵۰ = ۳۰(v_A - v_B) - ۴۳۰ \Rightarrow v_A - v_B = \frac{۵۰ + ۴۳۰}{۳۰} = ۱۶\ m/s$$

روش دوم: در حرکت با سرعت ثابت، سرعت لحظه‌ای و متوسط برابر است. از روی نمودار مشخص است که متحرک A در ابتدای حرکت $۴۳۰\ m$ از متحرک B عقب‌تر و در پایان حرکت $۵۰\ m$ از آن جلوتر است. پس در مدت زمان $۳۰\ s$، متحرک A به اندازهٔ $۴۳۰ + ۵۰ = ۴۸۰\ m$ بیشتر از متحرک B حرکت کرده است:

$$v_A - v_B = \frac{\Delta x_A - \Delta x_B}{۳۰} = \frac{۴۸۰}{۳۰} = ۱۶\ m/s$$

معادلات حرکت با شتاب ثابت

در این حرکت، شتاب متوسط مساوی شتاب لحظه‌ای $(a = a_{av})$ است. در بررسی حرکت با شتاب ثابت، چند معادلهٔ اصلی داریم که کمیت‌های Δx، v، $v_\circ$، a و t را به هم مربوط می‌کنند. در حل هر تست باید ببینیم که داده‌ها و خواستهٔ سؤال چیست و رابطهٔ مناسبی را که بین آن‌ها ارتباط برقرار می‌کند، از بین معادله‌های زیر انتخاب کنیم.

معادلهٔ سرعت ـ زمان (مستقل از جابه‌جایی):

شتاب $(m/s^۲)$

سرعت جسم در لحظهٔ t (m/s) ← $\boxed{v = at + v_\circ}$ → سرعت اولیه (m/s)

زمان (s)

معادلهٔ مکان ـ زمان (مستقل از سرعت نهایی):

مکان جسم در لحظهٔ t ← $\boxed{x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t + x_\circ}$ → مکان اولیه

معادلهٔ مستقل از زمان:

سرعت اولیه (m/s) — مکان اولیه

سرعت نهایی (m/s) ← $\boxed{v^۲ - v_\circ^۲ = ۲a(x - x_\circ)}$

مکان نهایی

معادلهٔ سرعت متوسط: $\boxed{v_{av} = \frac{v_\circ + v}{۲}}$

معادلهٔ مستقل از شتاب: $\boxed{\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}}$

◄ در معادله‌های سرعت ـ زمان و مکان ـ زمان، t حتماً یک لحظه است. حواستان باشد آن را با یک بازهٔ زمانی (Δt) اشتباه نگیرید.

◄ برای محاسبهٔ مکان نسبی بین دو متحرک A و B در هر لحظه می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$x_B - x_A = \frac{۱}{۲}(a_B - a_A)t^۲ + (v_{\circ B} - v_{\circ A})t + (x_{\circ B} - x_{\circ A})$$

متحرکی از حال سکون از مبدأ مختصات با شتاب ثابت $\vec{a} = 1\vec{i}$ به حرکت در می‌آید. بردار مکان آن در لحظهٔ $t = 4$ کدام است؟ (کمیت‌ها در SI است.) *(ریاضی ۹۵ با تغییر)*

۱) $\vec{d} = 8\vec{i}$ ۲) $\vec{d} = 4\vec{i}$ ۳) $\vec{d} = 2\vec{i}$ ۴) $\vec{d} = 1\vec{i}$

گزینهٔ «۱»

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow[a=1]{x_0=0, v_0=0} x = \frac{1}{2}\times 1\times 16 = 8$$

$$\vec{d} = x\vec{i} \Rightarrow \vec{d} = 8\vec{i}$$

دو متحرک روی خط راست با شتاب‌های ثابت a و $(a+1/5)\,m/s^2$ از یک نقطه شروع به حرکت می‌کنند و بعد از مدت t، سرعت آن‌ها به ترتیب $10\,m/s$ و $22\,m/s$ می‌شود. t چند ثانیه است؟ *(ریاضی خارج ۹۶)*

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

گزینهٔ «۲» وقتی می‌گوییم متحرک شروع به حرکت کرده است، یعنی $v_0 = 0$، با توجه به این، معادلهٔ $v = at + v_0$ را برای هر دو متحرک می‌نویسیم:

$$\begin{cases} v_1 = at \\ v_2 = (a+1/5)t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = at \\ 22 = at + 1/5\,t \end{cases} \xrightarrow[\text{پایین کم می‌کنیم}]{\text{معادلهٔ بالا را از معادلهٔ}} 12 = 1/5\,t \Rightarrow t = 8\,s$$

متحرکی در مسیر مستقیم و با شتاب ثابت فاصلهٔ ۸۰ متری از A تا B را در مدت ۸ ثانیه طی می‌کند و در لحظهٔ رسیدن به نقطهٔ B سرعتش به $15\,m/s$ می‌رسد. شتاب متحرک چند متر بر مربع ثانیه است؟ *(ریاضی ۸۹)*

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

گزینهٔ «۴» نقطهٔ A را مبدأ مکان و زمان فرض می‌کنیم. معادله‌های $x-t$ و $v-t$ در حرکت با شتاب ثابت را برای نقطهٔ B می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \\ v = at + v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 80 = \frac{1}{2}a(8)^2 + v_0(8) \\ 15 = a(8) + v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 80 = 32a + 8v_0 \\ (15 = 8a + v_0)\times 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 80 = 32a + 8v_0 \\ \underline{120 = 64a + 8v_0} \end{cases}$$

$$40 = 32a \Rightarrow a = \frac{40}{32} = \frac{5}{4}\,m/s^2$$

دو متحرک A و B از یک نقطه بدون سرعت اولیه در یک مسیر مستقیم شروع به حرکت می‌کنند. اگر شتاب متحرک A، ۴ برابر شتاب متحرک B باشد. در یک جابه‌جایی مساوی سرعت متوسط متحرک A چند برابر سرعت متوسط متحرک B است؟ *(ریاضی خارج ۹۲)*

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۴

گزینهٔ «۲» **روش اول:** با استفاده از رابطهٔ مستقل از زمان، سرعت نهایی دو متحرک را در جابه‌جایی دلخواه Δx به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} v_A^{۲} - ۰ = ۲a_A \Delta x \\ v_B^{۲} - ۰ = ۲a_B \Delta x \end{cases} \Rightarrow \frac{v_A^{۲}}{v_B^{۲}} = (\frac{v_A}{v_B})^{۲} = \frac{a_A}{a_B} = ۴ \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = ۲$$

حالا با توجه به این‌که سرعت اولیهٔ دو متحرک، صفر و شتاب حرکت آن‌ها ثابت بوده، سرعت متوسط آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\frac{v_{av_A}}{v_{av_B}} = \frac{\frac{v_A + ۰}{۲}}{\frac{v_B + ۰}{۲}} = \frac{v_A}{v_B} = ۲$$

روش دوم: از رابطهٔ $\Delta x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_۰ t$ $(v_۰ = ۰)$ استفاده می‌کنیم و نسبت زمان حرکت دو متحرک را به دست می‌آوریم:

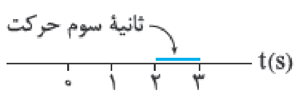
$$\begin{cases} \Delta x = \frac{۱}{۲}a_A (\Delta t)_A^{۲} \\ \Delta x = \frac{۱}{۲}a_B (\Delta t)_B^{۲} \end{cases} \Rightarrow ۱ = \frac{a_A (\Delta t)_A^{۲}}{a_B (\Delta t)_B^{۲}} \Rightarrow ۱ = ۴ \times (\frac{\Delta t_A}{\Delta t_B})^{۲} \Rightarrow \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = \frac{۱}{۲}$$

حالا می‌توانیم نسبت سرعت‌های متوسط A و B را به دست آوریم:

$$\frac{v_{av_A}}{v_{av_B}} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t_A}}{\frac{\Delta x}{\Delta t_B}} = \frac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = ۲$$

جابه‌جایی در ثانیهٔ nاُم ـ جابه‌جایی در t ثانیهٔ nاُم

ثانیهٔ nاُم حرکت: یک بازهٔ زمانی به طول یک ثانیه است. $(\Delta t_n = t_n - t_{n-۱})$



نمونه در نمودار مقابل، ثانیهٔ سوم حرکت را نشان داده‌ایم:

t ثانیهٔ nاُم حرکت: اگر با چنین چیزی روبه‌رو شدید، t را در n ضرب کنید و سپس t ثانیه از آن کم کنید. بازهٔ زمانی موردنظر از لحظهٔ $nt - t$ ثانیه تا لحظهٔ nt ثانیه است.

مثلاً اگر گفته شد ۲ ثانیهٔ پنجم، ۲ را در ۵ ضرب کرده و ۲ ثانیه از آن کم می‌کنیم تا لحظهٔ اول بازه به دست آید ($۸ = ۲ - ۵ \times ۲$)، بازهٔ موردنظر می‌شود: از $۸\,s$ تا $۱۰\,s$.

جابه‌جایی متحرک در ثانیه nاُم حرکت: $\Delta x_n = \frac{۱}{۲}a(۲n - ۱) + v_۰ = (n - ۰/۵)a + v_۰$

جابه‌جایی متحرک در t ثانیه nاُم حرکت: $\Delta x_{t,n} = \frac{۱}{۲}at^{۲}(۲n - ۱) + v_۰ t = (n - ۰/۵)at^{۲} + v_۰ t$

اگر در یک حرکت با شتاب ثابت a، متحرکی در یک ثانیه Δx متر جابه‌جا شود، در ثانیهٔ بعدی $\Delta x + a$ متر جابه‌جا می‌شود.

اگر مسئله‌ای دربارهٔ جابه‌جایی در t ثانیه‌های غیرمتوالی بود، از این رابطه کمک بگیرید:

جابه‌جایی در t ثانیهٔ nاُم   جابه‌جایی در t ثانیهٔ mاُم

$$at^{۲} = \frac{\Delta x_{t,n} - \Delta x_{t,m}}{n-m}$$

متحرکی در یک مسیر مستقیم و از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. اگر مسافت طی‌شده در ثانیهٔ اول ۴ متر باشد، مسافت طی‌شده در ثانیهٔ سوم چند متر است؟

۱) ۸　　۲) ۱۲　　۳) ۱۶　　۴) ۲۰

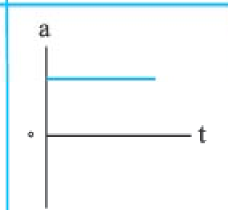
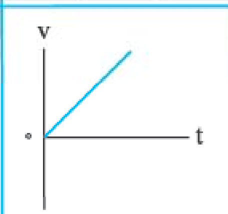
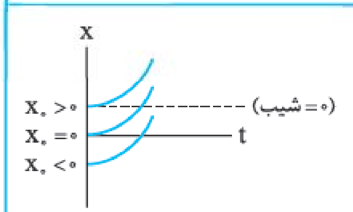
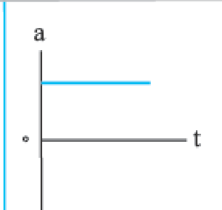
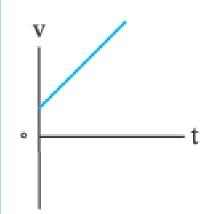
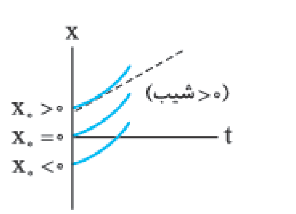
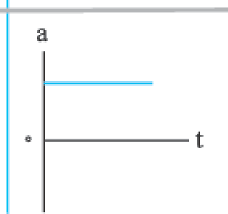
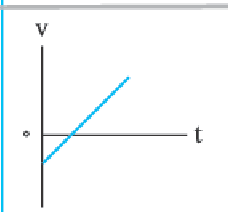
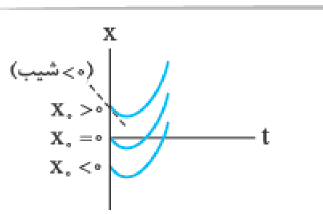
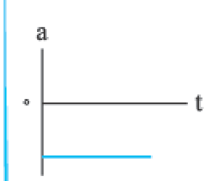
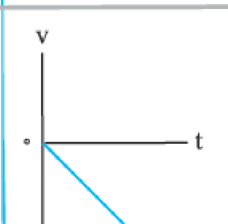
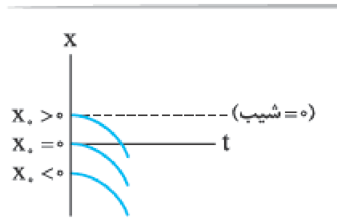
گزینهٔ «۴»

$$\Delta x_{۱} = (۱ - ۰/۵)a + ۰ \Rightarrow ۴ = ۰/۵a \Rightarrow a = \frac{۴}{۰/۵} = ۸\ m/s^{۲}$$

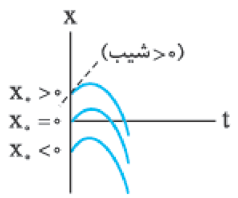
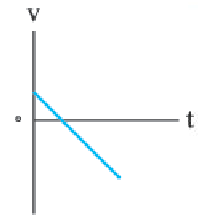
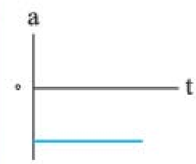
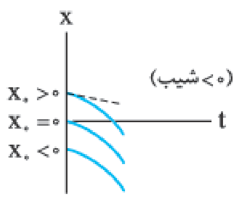
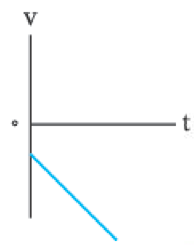
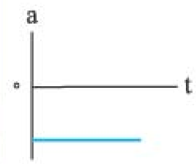
$$\Delta x_{۳} = (۳ - ۰/۵)a + ۰ \Rightarrow \Delta x_{۳} = ۲/۵ \times ۸ = ۲۰\ m$$

نمودارهای حرکت با شتاب ثابت

نمودارهای $a-t$، $v-t$ و $x-t$ مربوط به حرکت با شتاب ثابت را در جدول زیر ببینید:

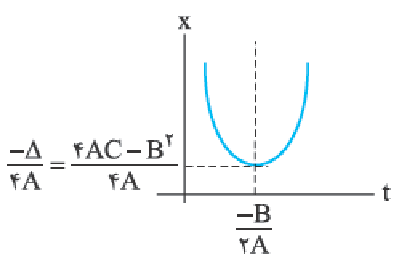
ویژگی	شتاب ـ زمان	سرعت ـ زمان	مکان ـ زمان
$a > ۰$ و $v_۰ = ۰$			
$a > ۰$ و $v_۰ > ۰$			
$a > ۰$ و $v_۰ < ۰$			
$a < ۰$ و $v_۰ = ۰$			

ادامهٔ جدول در صفحهٔ بعد

مکان ـ زمان	سرعت ـ زمان	شتاب ـ زمان	ویژگی
			$v_0 > 0$ و $a < 0$
			$v_0 < 0$ و $a < 0$

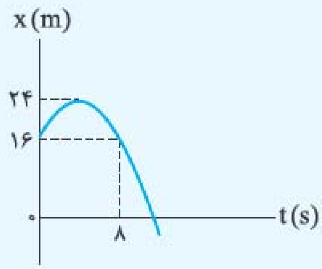
معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با شتاب ثابت، معادلهٔ درجه‌دوم است و نمودار آن یک سهمی است. معادلهٔ این سهمی در حالت کلی به شکل $x = At^2 + Bt + C$ است.

از این معادله و نمودار مربوط به آن می‌توانیم اطلاعات زیر را به دست آوریم:



- A برابر نصف شتاب حرکت است: $A = \frac{1}{2}a$.
- در نقطهٔ رأس سهمی، یعنی در زمان $t = \frac{-B}{2A}$ و مکان $x = \frac{4AC - B^2}{4A}$، سرعت متحرک صفر شده و جهت حرکت عوض می‌شود.
- سهمی نسبت به زمان $t = \frac{-B}{2A}$ متقارن است. بعضی از تست‌ها را می‌توان با توجه به همین تقارن حل نمود.
- اگر جهت تقعر سهمی رو به بالا باشد ( )، شتاب مثبت $(a > 0)$ و اگر جهت تقعر سهمی رو به پایین باشد ( )، شتاب منفی $(a < 0)$ است.
- شیب مماس بر نمودار مکان ـ زمان در هر لحظه، سرعت در آن لحظه را به دست می‌دهد. اگر اندازهٔ شیب مماس بر این نمودار در حال کاهش باشد، حرکت کندشونده و اگر اندازهٔ شیب در حال افزایش باشد حرکت تندشونده است.
- اگر در لحظهٔ $t = 0$ شیب مماس بر نمودار مکان ـ زمان مثبت باشد ( ) سرعت اولیه مثبت، اگر شیب مماس منفی باشد ( ) سرعت اولیه منفی و اگر شیب مماس صفر باشد ( ) سرعت اولیه صفر است.
- نمودار $v - t$ حرکت شتاب ثابت یک خط است. شیب خط برابر با شتاب حرکت و عرض از مبدأ آن برابر سرعت اولیه است.

توصیه: رسم نمودارهای مختلف یک حرکت از روی یکدیگر را تمرین کنید. برخی از تست‌ها با این شگرد به راحتی حل می‌شوند.



نمودار مکان ـ زمان متحرکی مطابق شکل مقابل به صورت سهمی است. در بازهٔ زمانی صفر تا ۸ s بزرگی شتاب متوسط و سرعت متوسط در SI، کدام است؟ *(ریاضی ۹۷)*

۱) ۱ و صفر
۲) ۲ و صفر
۳) ۱ و ۱
۴) ۲ و ۲

گزینهٔ «۱» **گام اول** سرعت متوسط: مکان متحرک در صفر و ۸ s یکسان است.

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱۶-۱۶}{۸-۰}=۰ \Rightarrow$$ حذف ۳ و ۴

گام دوم شتاب: معادلهٔ کلی سهمی را نوشته و ضرایب آن را با کمک نمودار به دست می‌آوریم:

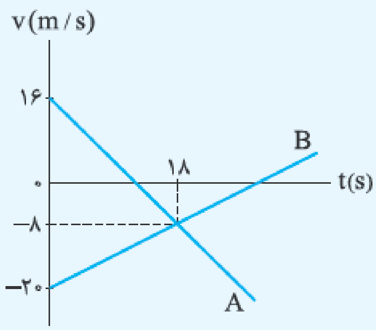
$$x=At^{۲}+Bt+C \xrightarrow{t=۰} ۱۶=A(۰)+B(۰)+C \Rightarrow C=۱۶$$

به دلیل تقارن، نقطهٔ رأس سهمی در ۴ s است. $\xrightarrow{t=۴\,s} ۲۴=A(۱۶)+B(۴)+۱۶$

$$\xrightarrow{\div ۴} ۲=۴A+B \quad (۱)$$

$$\xrightarrow{t=۸\,s} ۱۶=A(۶۴)+B(۸)+۱۶ \xrightarrow{\div ۸} ۰=۸A+B \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow A=-\frac{۱}{۲}=\frac{a}{۲} \Rightarrow a=-۱\,m/s$$



نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل مقابل است. در مدتی که متحرک A در جهت محور x حرکت کرده است، بزرگی جابه‌جایی متحرک B، چند متر است؟ *(ریاضی ۹۵)*

۱) ۱۸۶
۲) ۱۹۲
۳) ۲۰۰
۴) ۲۲۸

گزینهٔ «۲» **گام اول** تا وقتی سرعت متحرک A مثبت (بالای محور t) است، یعنی در جهت محور x حرکت می‌کند. لحظهٔ صفرشدن سرعت، پایان حرکت در جهت محور x است.

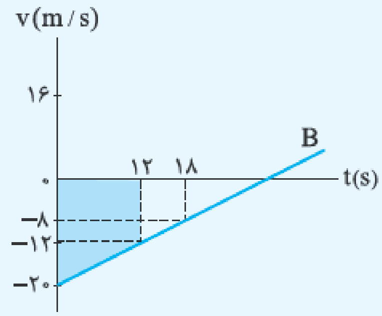
معادلهٔ $v-t$ را برای متحرک A نوشته و زمان صفرشدن سرعت را به دست می‌آوریم:

$$a_A=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۸-۱۶}{۱۸}=\frac{-۲۴}{۱۸}=\frac{-۴}{۳}\,m/s$$ = شیب نمودار $v-t$ متحرک A

$$v_A=a_At+v_{۰A} \Rightarrow ۰=\frac{-۴}{۳}t+۱۶ \Rightarrow t=۱۲\,s$$

گام دوم $$a_B=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۸-(-۲۰)}{۱۸}=\frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۲}{۳}\,m/s^{۲}$$ = شیب نمودار $v-t$ متحرک B

محاسبهٔ سرعت B در $t=۱۲\,s$: $v_B=a_Bt+v_{۰B} \Rightarrow v_B=\frac{۲}{۳}\times۱۲-۲۰=-۱۲\,m/s$



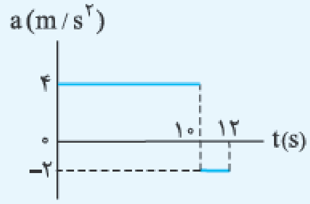
روش اول: سطح محصور بین نمودار سرعت B و محور t تا لحظهٔ $t=۱۲\,s$ برابر جابه‌جایی خواسته‌شده است:

مساحت ذوزنقهٔ رنگ‌شده: $S=|\Delta x_B|$

$$=\frac{(۲۰+۱۲)\times ۱۲}{۲}=۱۹۲\,m$$

روش دوم: از رابطهٔ مستقل از شتاب داریم:

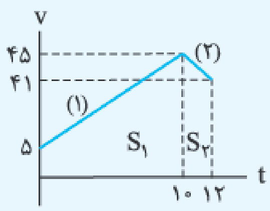
$$\Delta x_B=\frac{v_۱+v_۲}{۲}\Delta t=\frac{-۲۰+(-۱۲)}{۲}\times ۱۲=-۱۹۲\,m \Rightarrow |\Delta x_B|=۱۹۲\,m$$



نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که سرعتش در مبدأ زمان $+۵\,m/s$ است، به شکل مقابل می‌باشد. سرعت متوسط متحرک در این ۱۲ ثانیه، چند متر بر ثانیه است؟ *(ریاضی ۹۴)*

۱) ۱۳/۵   ۲) ۱۴

۳) ۲۷   ۴) ۲۸



گزینهٔ «۴» **روش اول:** از روی نمودار $a-t$ داده‌شده، نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم:

$$v=at+v_۰ \Rightarrow \begin{cases} (۱)\ \text{معادلهٔ خط}: v=۴t+۵ \\ \Rightarrow (t=۱۰\,s)\ \text{سرعت در}: v=۴(۱۰)+۵=۴۵\,m/s \\ (۲)\ \text{معادلهٔ خط}: v=-۲(t-۱۰)+۴۵ \\ \Rightarrow (t=۱۲\,s)\ \text{سرعت در}: v=-۲(۱۲-۱۰)+۴۵=۴۱\,m/s \end{cases}$$

سطح زیر نمودار که از دو ذوزنقه تشکیل شده، برابر با جابه‌جایی متحرک در مدت ۱۲ s است.

$$\Delta x=S_۱+S_۲=\frac{(۵+۴۵)\times ۱۰}{۲}+\frac{(۴۵+۴۱)\times ۲}{۲}=۲۵۰+۸۶=۳۳۶\,m$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۳۳۶}{۱۲}=۲۸\,m/s$$

روش دوم: با استفاده از معادلات $x-t$ و $v-t$ در حرکت با شتاب ثابت، مجموع جابه‌جایی‌های متحرک را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow \Delta x_۱=\frac{۱}{۲}(۴)(۱۰)^۲+۵\times ۱۰=۲۵۰\,m$$

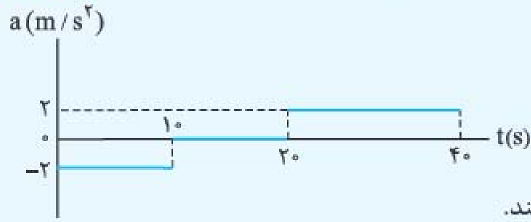
$$v=at+v_۰ \Rightarrow ۱۰\,s\ \text{سرعت در لحظهٔ}: v=۴(۱۰)+۵=۴۵\,m/s$$

$$\Delta x_۲=\frac{۱}{۲}(-۲)(۱۲-۱۰)^۲+۴۵(۱۲-۱۰)=۸۶\,m$$

$$\Rightarrow \Delta x_{\text{کل}}=\Delta x_۱+\Delta x_۲=۲۵۰+۸۶=۳۳۶\,m$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t}=\frac{۳۳۶}{۱۲}=۲۸\,m/s$$

نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که از حال سکون روی محور xها حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در بازهٔ زمانی $t_1 = ۲۰\,s$ تا $t_2 = ۳۵\,s$، کدام مورد درست است؟ (تجربی ۹۴)



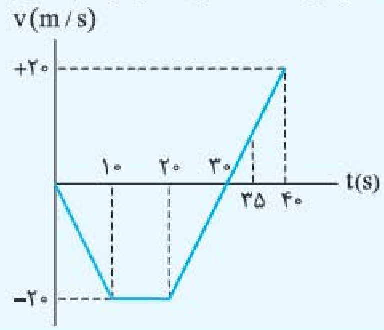
۱) حرکت تندشونده است.

۲) حرکت کندشونده است.

۳) جهت حرکت یک بار تغییر می‌کند.

۴) متحرک در جهت محور x ها حرکت می‌کند.

گزینهٔ «۳» چون تمام گزینه‌های داده‌شده به نحوی به سرعت و جهت آن مربوط می‌شوند، بهترین کار آن است که با توجه به نمودار $a - t$ داده‌شده، نمودار $v - t$ حرکت را رسم کنیم:



همان‌طور که از روی شکل پیدا است، در بازهٔ $t_1 = ۲۰\,s$ تا $t_2 = ۳۵\,s$، حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است. (حذف ۱ و ۲).

متحرک یک بار در لحظهٔ $t = ۳۰\,s$ تغییر جهت می‌دهد (درست‌بودن ۳) و تا قبل از تغییر جهت، در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. (حذف ۴).

سقوط آزاد

سقوط آزاد حرکتی است با شتاب ثابت g $(g = ۹/۸\,m/s^۲ \simeq ۱۰\,m/s^۲)$ که طی آن فقط نیروی وزن بر جسم اثر می‌کند.

معادله‌های سقوط آزاد بدون سرعت اولیه

همان معادلات حرکت با شتاب ثابت را با فرض $v_0 = ۰$ و انجام دو تغییر $x \to y$ و $a \to -g$ برای سقوط آزاد به کار می‌بریم:

معادلهٔ سرعت ـ زمان: $\boxed{v = -gt}$ ← سرعت جسم در لحظهٔ t (m / s)

معادلهٔ مکان ـ زمان: مکان اولیه ← $\boxed{y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + y_0}$ ← مکان جسم در لحظهٔ t

معادلهٔ مستقل از زمان: $\boxed{v^۲ = -۲g(y - y_0)}$ ← سرعت نهایی (m / s)

مکان نهایی ، مکان اولیه

در حل مسائل سقوط آزاد قرارداد می‌کنیم که جهت محور y رو به بالا باشد؛ بنابراین هنگام سقوط، $v < ۰$ و $\Delta y < ۰$ است.

معمولاً محل رهاشدن جسم را مبدأ مکان فرض می‌کنیم. در این صورت $y_0 = ۰$ خواهد بود.

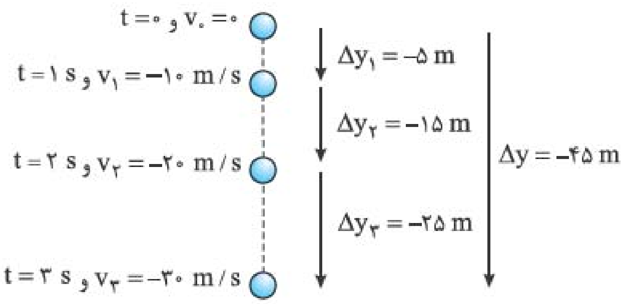
جابه‌جایی ثانیهٔ nاُم: مشابه حرکت با شتاب ثابت داریم: $\Delta y_n = -(n - ۰/۵)g$ ← جابه‌جایی ثانیهٔ nاُم

اگر سرعت جسم را در ابتدا و انتهای ثانیهٔ nاُم حرکت داشته باشیم،

جابه‌جایی در ثانیهٔ nاُم: $\Delta y_n = \frac{v_n + v_{n-۱}}{۲}$

تصاعد حسابی: در سقوط آزاد، هم سرعت‌ها و هم جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های متوالی تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند. این تصاعد، حل خیلی از تست‌ها را سریع‌تر می‌کند.

در جدول و شکل زیر می‌توانید این مطلب را با فرض $g = ۱۰\ m/s^۲$ ببینید:

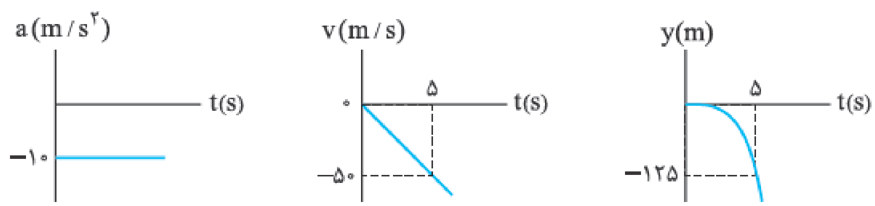


t(s)	v (m/s)	v (m/s) متوسط	Δy (m) در یک ثانیه	Δy (m) کل
۱	−۱۰	−۵	−۵	−۵
۲	−۲۰	−۱۰	−۱۵	−۲۰
۳	−۳۰	−۱۵	−۲۵	−۴۵
۴	−۴۰	−۲۰	−۳۵	−۸۰
۵	−۵۰	−۲۵	−۴۵	−۱۲۵
۶	−۶۰	−۳۰	−۵۵	−۱۸۰

تکنیک از جدول بالا پیداست که صرفاً از جهت تساوی عددی می‌توانیم از تساوی زیر در تست‌ها استفاده کنیم: $\Delta y_n - ۵ = v_n$

نمودارهای سقوط آزاد

با فرض‌هایی که دربارهٔ سقوط آزاد کردیم ($v_۰ = ۰$ و $a = -۱۰\ m/s^۲$ و جهت مثبت رو به بالا)، نمودارهای سقوط آزاد به شکل زیر است:



نمودار شتاب ـ زمان　　نمودار سرعت ـ زمان　　نمودار مکان ـ زمان

۱ گلوله‌ای در شرایط خلأ بدون سرعت اولیه از ارتفاع h رها می‌شود. اگر این گلوله مسافتی را که در ثانیهٔ آخر حرکت طی کرده، ۳ برابر مسافتی باشد که تا قبل از آن طی کرده است، h چند متر است؟ ($g = ۱۰\ m/s^۲$)

۱) ۲۰　　۲) ۲۵　　۳) ۷۵　　۴) ۸۰　　(ریاضی ۹۶)

گزینهٔ «۱» **روش اول:** اگر نقطهٔ رهاشدن را به عنوان مبدأ در نظر بگیریم، مکان گلوله در هر لحظه از رابطهٔ $y = \frac{-1}{2}gt^2$ به دست می‌آید. حالا از فرض سؤال استفاده می‌کنیم:

$$y_{(t+1)} - y_t = 3y_{(t)} \Rightarrow \frac{-1}{2}g(t+1)^2 - (-\frac{1}{2}gt^2) = 3 \times \frac{-1}{2}gt^2$$

$$\xrightarrow{\div(\frac{-1}{2}g)} (t+1)^2 = 4t^2 \Rightarrow t+1 = 2t \Rightarrow t = 1\,s$$

$$y = y_{(t+1)} \Rightarrow \Delta y = \frac{-1}{2}g(t+1)^2 \xrightarrow[g=10\,m/s^2]{t=1\,s} \Delta y = \frac{-1}{2} \times 10 \times (1+1)^2$$

$$\Rightarrow \Delta y = -20 \Rightarrow h = |\Delta y| = 20\,m$$

روش دوم: با توجه به جدول تصاعد حسابی در سقوط آزاد می‌بینیم که جابه‌جایی در ثانیهٔ اول سقوط، $\Delta y_1 = -5\,m$ و در ثانیهٔ دوم، $\Delta y_2 = -15\,m$ است. بنابراین، جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم، سه برابر جابه‌جایی ثانیهٔ اول است و جابه‌جایی کل برابر است با:

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = -20\,m$$

فرمول‌های فصل

الفبای حرکت در راستای خط راست

تندی متوسط: $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$

سرعت متوسط: $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

شتاب

شتاب متوسط: $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

تندشونده، کندشونده

$a.v > 0 \Leftrightarrow$ حرکت تندشونده

$a.v < 0 \Leftrightarrow$ حرکت کندشونده

حرکت با سرعت ثابت

معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت: $x = vt + x_0$

تبدیل یکاهای سرعت: $km/h \underset{\times 3/6}{\overset{\div 3/6}{\rightleftarrows}} m/s$

معادلات حرکت با شتاب ثابت

معادلهٔ سرعت ـ زمان: $v = at + v_0$

معادلهٔ مکان ـ زمان: $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

معادلهٔ مستقل از زمان: $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$

معادلهٔ سرعت متوسط: $v_{av} = \frac{v_0 + v}{2}$

معادلهٔ مستقل از شتاب: $\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t$

- جابه‌جایی در ثانیهٔ nاُم ـ t ثانیهٔ nاُم

$$\Delta x_n = (n - 0/5)\, a + v_0$$

$$\Delta x_{t,n} = (n - 0/5) a t^2 + v_0 t$$

- سقوط آزاد (بدون سرعت اولیه)

معادلهٔ سرعت ـ زمان: $v = -gt$

معادلهٔ مکان ـ زمان: $y = -\frac{1}{2} g t^2 + y_0$

معادلهٔ مستقل از زمان: $v^2 = -2g(y - y_0)$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

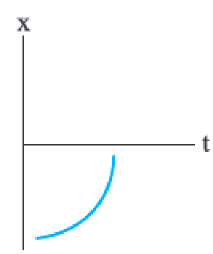
۲۳۵- پرنده‌ای که روی لبهٔ ساختمان بلندی به ارتفاع ۵۰ متر نشسته بود، ابتدا پرواز کرده و به پای ساختمان می‌رسد، سپس ۴۰ متر به سمت مشرق حرکت می‌کند و در نهایت ۳۰ متر به سمت شمال می‌رود. جابه‌جایی کل این پرنده چند متر است؟ *(ریاضی خارج ۹۷)*

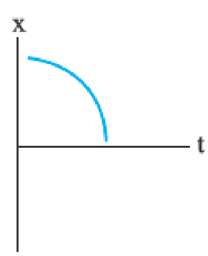
۱) ۱۲۰ ۲) $50\sqrt{2}$ ۳) ۵۰ ۴) $40\sqrt{2}$

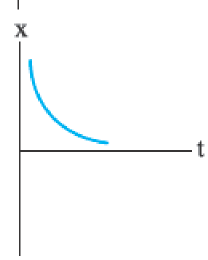
۲۳۶- بردار سرعت متحرکی که در صفحه حرکت می‌کند، در مدت ۵ ثانیه، از $\vec{v}_1 = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ به $\vec{v}_2 = 17\vec{i} + 10\vec{j}$ می‌رسد (در SI). بزرگی شتاب متوسط در این مدت چند متر بر مربع‌ثانیه است؟ *(ریاضی ۹۴)*

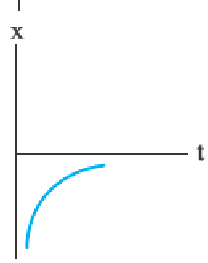
۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) ۳ ۴) ۵

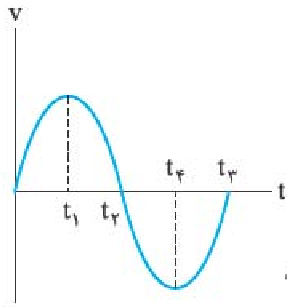
۲۳۷- اتومبیلی که از قسمت منفی محور x در حال حرکت به سمت مبدأ بوده، ترمز می‌گیرد. کدام نمودار می‌تواند مربوط به حرکت این اتومبیل باشد؟

۱) 

۲) 

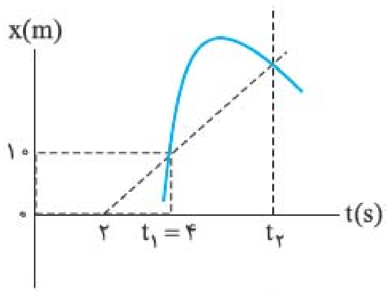
۳) 

۴) 



۲۳۸- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. در بازهٔ زمانی بین t_1 و t_2، حرکت متحرک .... شونده و در .... محور x است. *(تجربی ۸۶)*

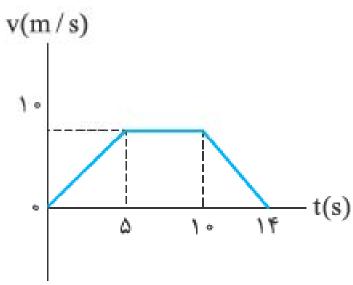
۱) کند ـ جهت
۲) تند ـ جهت
۳) کند ـ خلاف جهت
۴) تند ـ خلاف جهت



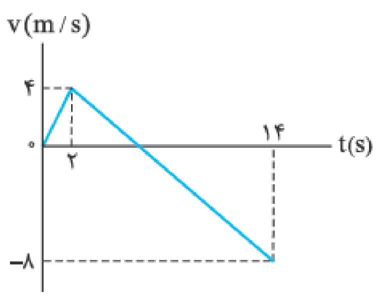
۲۳۹- نمودار مکان ـ زمان متحرکی در SI مطابق شکل روبه‌رو است. سرعت متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 کدام است؟

۱) $+۲/۵$
۲) $+۵$
۳) $-۲/۵$
۴) -۵

۲۴۰- متحرکی در مسیر مستقیم حرکت می‌کند و نمودار سرعت ـ زمان آن مطابق شکل زیر است. شتاب متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی $t = ۲s$ تا $t = ۱۲s$، چند متر بر مربع ثانیه است؟ *(تجربی ۹۲)*

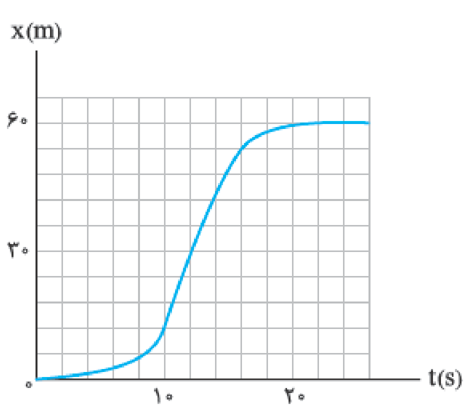


۱) $\frac{۱}{۱۰}$
۲) $\frac{۵}{۱۰}$
۳) $\frac{۷}{۱۰}$
۴) صفر



۲۴۱- متحرکی روی محور xها حرکت می‌کند و نمودار سرعت ـ زمان آن مطابق شکل روبه‌رو است. متحرک در ۱۴ ثانیهٔ اول، چند ثانیه در سوی مخالف محور xها حرکت کرده است؟ *(ریاضی ۸۹)*

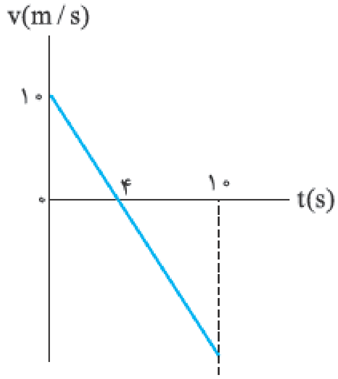
۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۲



۲۴۲- شکل مقابل، نمودار مکان ـ زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم حرکت کرده است. بیشینهٔ سرعت آن چند متر بر ثانیه است؟ *(تجربی خارج ۹۵)*

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۹

۲۴۳- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. متحرک در لحظهٔ $t = 10\,s$ در چند متری مبدأ قرار دارد؟ (متحرک در لحظهٔ $t = 0$ در $x = +2\,m$ قرار دارد و xهای مثبت در سمت راست مبدأ مختصات واقع‌اند.)



(کنکور قدیمی)

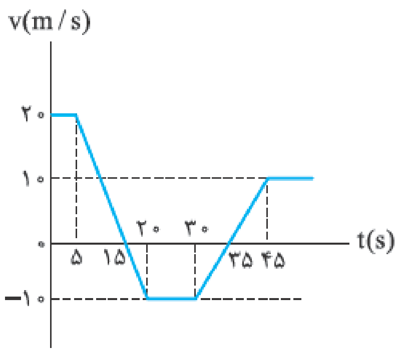
۱) ۲۷ متری سمت راست مبدأ

۲) ۲۳ متری سمت چپ مبدأ

۳) ۲۵ متری سمت چپ مبدأ

۴) ۲۲۷ متری سمت راست مبدأ

۲۴۴- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل داده شده است. سرعت متوسط این متحرک در بازهٔ $t_1 = 5\,s$ تا $t_2 = 15\,s$ چند برابر سرعت متوسط آن در بازهٔ $t_3 = 20\,s$ تا $t_4 = 45\,s$ است؟



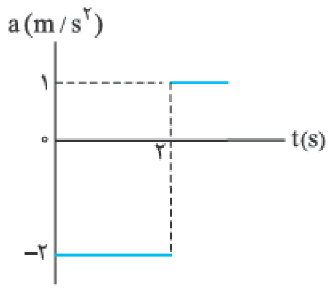
۱) $\frac{10}{3}$

۲) $\frac{-10}{3}$

۳) $\frac{10}{7}$

۴) $\frac{-10}{7}$

۲۴۵- متحرکی از حال سکون در مسیر مستقیم به حرکت درمی‌آید و نمودار شتاب ـ زمان آن مطابق شکل است. در کدام لحظه (برحسب ثانیه)، جهت سرعت عوض می‌شود؟ *(تجربی خارج ۸۹)*



۱) ۲   ۲) ۴

۳) ۶   ۴) ۸

۲۴۶- معادله‌های سرعت و شتاب متحرکی در SI به صورت $v = 6t^2 - 4t + 2$ و $a = 12t - 4$ است. در کدام‌یک از لحظات زیر (برحسب ثانیه) اندازهٔ سرعت متحرک در حال کاهش است؟ *(ریاضی خارج ۹۲ با تغییر)*

۱) ۰/۲   ۲) ۰/۴   ۳) ۰/۵   ۴) ۱/۵

۲۴۷- معادلهٔ حرکت جسمی که روی محور xها حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$ است. در بازهٔ زمانی $t = 0$ تا $t = 4\,s$، کدام مورد درست است؟ *(ریاضی خارج ۹۷)*

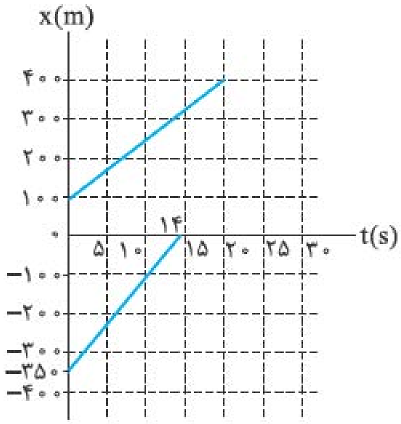
۱) سرعت متوسط برابر صفر است.   ۲) کم‌ترین مقدار سرعت $1\,m/s$ است.

۳) حرکت پیوسته تندشونده است.   ۴) جهت حرکت دو بار تغییر کرده است.

۲۴۸- دوچرخه‌سواری فاصلهٔ ۹۰ کیلومتری مستقیم بین دو شهر را در مدت ۴/۵ ساعت می‌پیماید. وی با سرعت ثابت ۲۴ کیلومتر بر ساعت رکاب می‌زند؛ اما برای رفع خستگی، توقف‌هایی هم دارد. مدت کل توقف او چند دقیقه است؟ (کنکور قدیمی)

۱) ۸۰ ۲) ۴۵ ۳) ۳۰ ۴) ۱۵

۲۴۹- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که با سرعت ثابت حرکت می‌کنند مطابق شکل روبه‌رو است. چند ثانیه پس از شروع حرکت، این دو متحرک به هم می‌رسند؟



۱) ۴۵

۲) ۵۰

۳) ۵۵

۴) دو متحرک هیچ‌گاه به هم نمی‌رسند.

۲۵۰- اتومبیلی روی یک خط راست با سرعت ۱۰۸ km / h در حال حرکت است. راننده با دیدن مانعی در فاصلهٔ ۱۶۵ m، با شتاب ثابت ۳ m/s^2 ترمز می‌کند و درست جلوی مانع می‌ایستد. اگر زمان واکنش راننده t_1 و زمانی که حرکت اتومبیل کندشونده بوده، t_2 باشد، $\frac{t_2}{t_1}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۲۵۱- متحرکی در یک مسیر مستقیم با شتاب ثابت ۵ m/s^2 به حرکت درمی‌آید و پس از مدتی حرکتش یکنواخت می‌شود و در نهایت با شتاب ۵ m/s^2 حرکتش کند شده و می‌ایستد. اگر کل زمان حرکت ۲۵ ثانیه و سرعت متوسط در این مدت ۲۰ m / s باشد، زمانی که حرکت متحرک یکنواخت بوده است، چند ثانیه است؟ (تجربی ۹۷)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۲۵۲- قطار A به طول ۲۰۰ متر با سرعت ثابت ۴۰ m / s در حال حرکت است. قطار B به طول ۲۲۵ متر که روی ریل مجاور توقف کرده است، به محض این‌که قطار A کاملاً از آن عبور کرد، با شتاب ثابت ۲ m/s^2 در همان جهت حرکت قطار A شروع به حرکت می‌کند و سرعت خود را به ۵۰ m / s می‌رساند و با همان سرعت، حرکت خود را ادامه می‌دهد. قطار B چند ثانیه پس از شروع حرکت، از قطار A سبقت گرفته و از کنار آن کاملاً عبور می‌کند؟ (ریاضی ۹۲)

۱) ۵۷/۵ ۲) ۸۲/۵ ۳) ۸۰ ۴) ۱۰۵

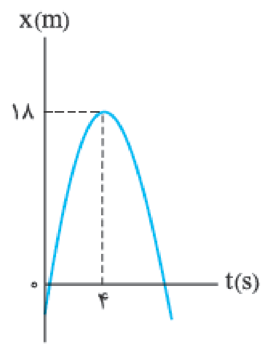
۲۵۳- متحرکی با شتاب ثابت و بدون سرعت اولیه از نقطهٔ A به حرکت درمی‌آید و در ادامهٔ مسیر به نقطهٔ B و سپس C می‌رسد و فاصلهٔ ۱۲۰ متری BC را در مدت ۱۰ ثانیه طی می‌کند. اگر سرعت متحرک در نقطهٔ C، ۲۰ m / s باشد، فاصلهٔ بین A و B چند متر است؟ (ریاضی خارج ۸۹)

۱) ۲/۵ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۲/۵

۲۵۴- متحرکی با شتاب ثابت و سرعت اولیهٔ $v_{\circ}$ در ۲ ثانیهٔ اول حرکت خود، ۱۳ متر، و در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت خود، ۲۵ متر را طی می‌کند. شتاب حرکت در SI کدام است؟ (تجربی ۹۱)

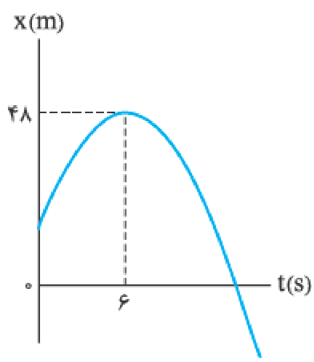
۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۵

۲۵۵- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی محور xها حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل به صورت سهمی است. چند ثانیه پس از لحظهٔ $t = \circ$ بزرگی سرعت متحرک برابر بزرگی سرعت اولیه می‌شود؟ (ریاضی خارج ۹۳)



۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

۲۵۶- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل، به صورت سهمی است. اگر مسافت طی‌شده توسط متحرک در بازهٔ زمانی $t = ۳\,s$ تا $t = ۹\,s$ برابر ۱۲ متر باشد، جابه‌جایی متحرک در این بازه چند متر است؟ (ریاضی ۹۳)



۱) صفر
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۱۲

۲۵۷- معادلهٔ مکان ـ زمان جسمی در SI به صورت $x = -t^{۲} + ۴t - ۴$ است. در فاصلهٔ زمانی بین $t_{۱} = \circ$ و $t_{۲} = ۴\,s$، مسافت طی‌شده توسط جسم چند متر است؟ (تجربی خارج ۸۸)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۵۸- متحرکی روی محور x حرکت می‌کند و معادلهٔ مکان ـ زمان آن در SI به صورت $v = -۲t^{۲} + ۱۲t - ۴۰$ است. مسافتی که این متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $t = ۵\,s$ طی می‌کند، چند متر است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

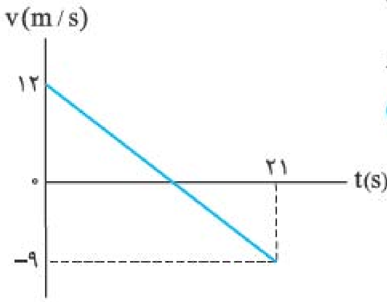
۲۵۹- معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که بر یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = -۴t$ است. این متحرک در لحظهٔ $t = \circ$ از مکان $x_{\circ} = -۳\,m$ عبور می‌کند. معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک کدام است؟

۱) $-۲t^{۲} + ۳$ ۲) $-۴t^{۲} + ۳$ ۳) $-۴t^{۲} - ۳$ ۴) $-۲t^{۲} - ۳$

۲۶۰- متحرکی روی محور x با شتاب ثابت در حرکت است و در مبدأ زمان با سرعت $v = +۳\,m/s$ از مکان $x = +۴\,m$ می‌گذرد. اگر متحرک در لحظهٔ $t = ۴\,s$ در جهت مثبت محور xها در بیشترین فاصلهٔ خود از مبدأ باشد، در لحظهٔ $t = ۸\,s$ در چند متری مبدأ خواهد بود؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۲۶۱- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x ها حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. بزرگی جابه‌جایی متحرک در فاصلهٔ زمانی $t = 6\,s$ تا $t = 12\,s$ چند متر است؟ (تجربی ۹۳)



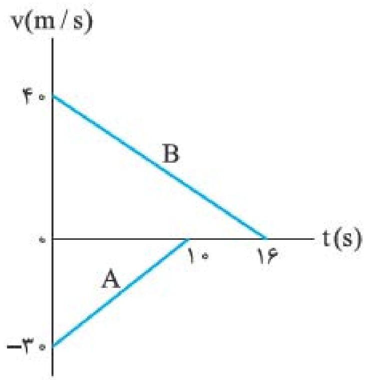
۱) ۱۲

۲) ۱۸

۳) ۲۲/۵

۴) ۳۲/۵

۲۶۲- نمودار سرعت ـ زمان دو قطار A و B که روی یک ریل مستقیم به طرف هم حرکت می‌کنند، مطابق شکل مقابل است. در لحظهٔ $t = 0$ فاصلهٔ قطارها از هم $500\,m$ است. لحظه‌ای که قطار A می‌ایستد، قطار B در چه فاصله‌ای از آن قرار دارد؟ (تجربی خارج ۹۷)



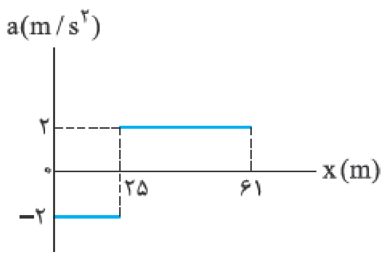
۱) ۲۵

۲) ۷۵

۳) ۱۰۰

۴) ۱۲۵

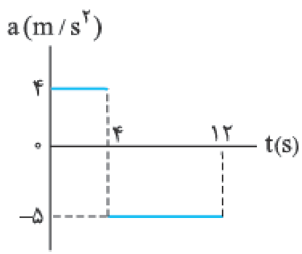
۲۶۳- نمودار شتاب ـ مکان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر متحرک در لحظهٔ $t = 0$ از مبدأ با سرعت $10\,m/s$ عبور کند، سرعت آن در مکان $x = 61\,m$ چند متر بر ثانیه است؟ (تجربی ۹۷)



۱) ۲۲ ۲) ۱۲

۳) ۸ ۴) ۶

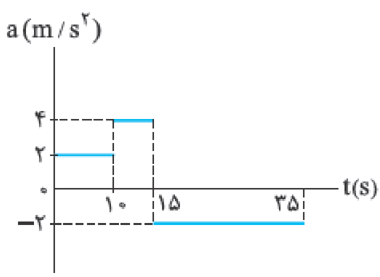
۲۶۴- نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در مبدأ زمان با سرعت ۴ متر بر ثانیه از مبدأ مکان می‌گذرد، مطابق شکل است. مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۲ ثانیه، چند متر است؟ (تجربی خارج ۹۲)



۱) ۴۸ ۲) ۹۶

۳) ۱۲۸ ۴) ۱۶۰

۲۶۵- نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که روی محور x در لحظهٔ $t = 0$ از مبدأ می‌گذرد، مطابق شکل مقابل است. اگر $v_0 = -10\,m/s$ باشد، بیشترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ در بازهٔ زمانی $t = 0$ تا $t = 35\,s$، چند متر است؟ (تجربی ۹۵)



۱) ۲۱۰ ۲) ۲۲۵

۳) ۳۲۵ ۴) ۳۵۰

۲۶۶- اگر گلولهٔ کوچکی در شرایط خلأ بدون سرعت اولیه سقوط کند و $g = 10\ m/s^2$ باشد، اندازهٔ سرعت متوسط گلوله در ۳ ثانیه اول سقوط چند متر بر ثانیه است؟ *(کنکور قدیمی)*

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

۲۶۷- دو گلوله در شرایط خلأ به فاصلهٔ زمانی $2/5\ s$ از یک نقطه بالای زمین رها می‌شوند. چند ثانیه پس از رهاشدن گلولهٔ اول، فاصلهٔ دو گلوله به $68/75\ m$ می‌رسد؟ ($g = 10\ m/s^2$) *(ریاضی ۹۱)*

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

۲۶۸- گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع h رها می‌شود و در لحظه‌ای که به ۵۰ متری سطح زمین می‌رسد، سرعتش $15\ m/s$ می‌شود. این گلوله چند ثانیه پس از رهاشدن به زمین می‌رسد؟ ($g = 10\ m/s^2$)

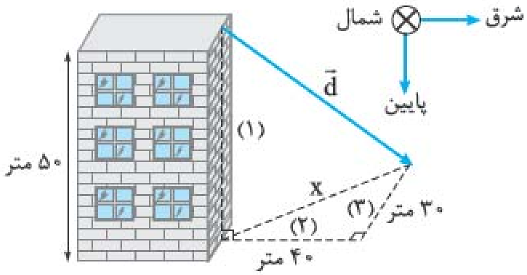
۱) ۲ ۲) ۳/۵ ۳) ۵ ۴) ۶/۵ *(ریاضی ۸۹)*

۲۶۹- فاصله از لبهٔ یک چاه تا سطح آب درون آن ۴۵ متر است. شخصی سنگی را از لبهٔ چاه رها می‌کند و صدای برخورد سنگ با آب را می‌شنود. فاصلهٔ بین پرتاب سنگ و شنیدن صدا تقریباً چند ثانیه است؟ ($g = 10\ m/s^2$، مقاومت هوا ناچیز و سرعت صوت در هوا $340\ m/s$ است.) *(تجربی ۹۰ با تغییر)*

۱) ۱/۸ ۲) ۲/۱ ۳) ۲/۶ ۴) ۳/۱

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۲۳۵- گزینهٔ «۲» مسیر حرکت پرنده مطابق شکل مقابل است. ابتدا مسیرهای (۲) و (۳) را در نظر گرفته و با قضیهٔ فیثاغورس، x را حساب می‌کنیم. بعد همین کار را برای x و مسیر (۱) انجام می‌دهیم تا طول $\vec{d}$ به دست آید.



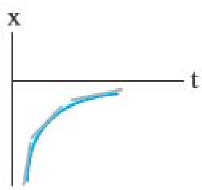
$$x=\sqrt{۴۰^۲+۳۰^۲}=۵۰\,m \Rightarrow d=\sqrt{۵۰^۲+۵۰^۲}=۵۰\sqrt{۲}\,m$$

۲۳۶- گزینهٔ «۱»

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}_۲-\vec{v}_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{(۱۷\vec{i}+۱۰\vec{j})-(۲\vec{i}-۵\vec{j})}{۵}=\frac{(۱۵\vec{i}+۱۵\vec{j})}{۵}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{av}=۳\vec{i}+۳\vec{j} \Rightarrow |a_{av}|=\sqrt{۳^۲+۳^۲}=\sqrt{۳^۲\times ۲}=۳\sqrt{۲}\ m/s^۲$$

۲۳۷- گزینهٔ «۴» اتومبیل در قسمت منفی محور x حرکت می‌کند (حذف ۲ و ۳). هنگامی که اتومبیل ترمز می‌گیرد، تندی آن (شیب مماس بر نمودار $x-t$) کاهش می‌یابد. در ۴ شیب مماس در حال کاهش است.



۲۳۸- گزینهٔ «۱» در نمودار $v-t$ هر وقت نمودار به محور t نزدیک شود، یعنی اندازهٔ سرعت در حال کم‌شدن است. در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ نمودار به محور t نزدیک شده و حرکت کندشونده است. چون این قسمت از نمودار، بالای محور t قرار دارد، پس در این بازه سرعت مثبت است و متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.

۲۳۹- گزینهٔ «۲» سرعت متوسط در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ برابر شیب خط واصل دو نقطهٔ متناظر این زمان‌ها در نمودار است. این خط (خط‌چین)، امتداد خطی است که از $t=۲s$ شروع می‌شود؛ پس اگر شیب خط‌چین را در بازهٔ ۲s تا ۴s پیدا کنیم، سرعت متوسط در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ را پیدا کرده‌ایم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱۰-۰}{۴-۲}=+۵\,m/s$$

۲۴۰- گزینهٔ «۱» با نوشتن دو معادلهٔ خط، اندازهٔ سرعت را در زمان‌های داده‌شده به دست می‌آوریم:

۰ تا $t=۵\,s$

$$\left.\begin{array}{l} v_۱=a_۱t+v_۰ \\ a_۱=\text{شیب خط}=\frac{۱۰-۰}{۵-۰}=۲\,m/s^۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{v_۰=۰} v_۱=۲t \xrightarrow{t=۲s} v_۱=۴\,m/s$$

۱۰s تا $t=۱۴\,s$

$$\left.\begin{array}{l} v_۲=a_۲t+v_۰ \\ a_۲=\frac{۰-۱۰}{۱۴-۱۰}=-۲/۵\,m/s^۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{v_۰=۱۰m/s} v_۲=-۲/۵t+۱۰ \xrightarrow{t=۲s} v_۲=-۵+۱۰=۵\,m/s$$

وقتی معادلهٔ خط را از ۱۰ s تا ۱۴ s می‌نویسیم، لحظهٔ ۱۰ s در کل حرکت، به عنوان اولین لحظه در این قسمت در نظر گرفته می‌شود. به خاطر همین، $v_0 = ۱۰\ m/s$ و زمان ۱۲ s در کل حرکت را $t = ۲\ s$ (در این قسمت حرکت) قرار دادیم. $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۵ - ۴}{۱۲ - ۲} = \frac{۱}{۱۰}\ m/s^۲$

۲۴۱- گزینهٔ «۳» جهت حرکت متحرک با جهت بردار سرعت یکسان است. حرکت در سوی مخالف محور x هنگامی اتفاق می‌افتد که علامت سرعت منفی باشد.

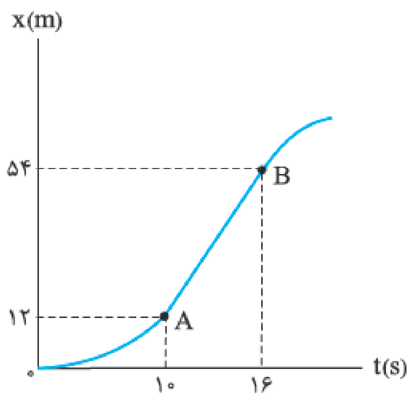
با استفاده از نمودار داده‌شده، معادلهٔ $v - t$ را در بازهٔ $t = ۲\ s$ تا $t = ۱۴\ s$ به دست آورده و از روی آن، لحظهٔ منفی‌شدن علامت سرعت را حساب می‌کنیم.

$$(a) \text{ شیب نمودار} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-۸ - ۴}{۱۴ - ۲} = \frac{-۱۲}{۱۲} = -۱ \Rightarrow v - t \text{ معادلهٔ} : v = -t + ۶$$

$$\Rightarrow \text{لحظهٔ صفرشدن سرعت} : ۰ = -t + ۶ \Rightarrow t = ۶\ s$$

از این لحظه تا $t = ۱۴\ s$، علامت سرعت منفی بوده و متحرک در سوی مخالف محور x حرکت کرده است: $\Delta t = ۱۴ - ۶ = ۸\ s$

۲۴۲- گزینهٔ «۳» شیب مماس بر نمودار، از ابتدای حرکت تا نقطهٔ A افزایش می‌یابد (حرکت تندشونده). از نقطهٔ A تا B شیب ثابت است (سرعت ثابت) و از نقطهٔ B به تدریج کاهش می‌یابد (حرکت کندشونده). بنابراین، بیشترین سرعت متحرک بین A تا B بوده و شیب پاره‌خط AB بیشینهٔ سرعت متحرک است:



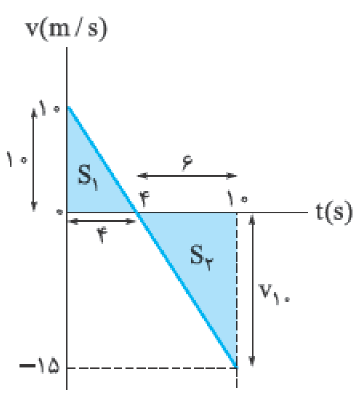
$$v_{AB} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{۵۴ - ۱۲}{۱۶ - ۱۰} = ۷\ m/s$$

هر یک از خانه‌های محور x معادل ۶ m و هر یک از خانه‌های محور t معادل ۲ s است.

۲۴۳- گزینهٔ «۲» **گام اول** با استفاده از تشابه دو مثلث، اندازهٔ سرعت را در لحظهٔ $t = ۱۰\ s$ تعیین می‌کنیم:

$$\frac{۶}{۴} = \frac{v_{۱۰}}{۱۰} \Rightarrow |v_{۱۰}| = ۱۵\ m/s$$

گام دوم با محاسبهٔ مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$ جابه‌جایی متحرک تا لحظهٔ $t = ۱۰\ s$ را به دست می‌آوریم:

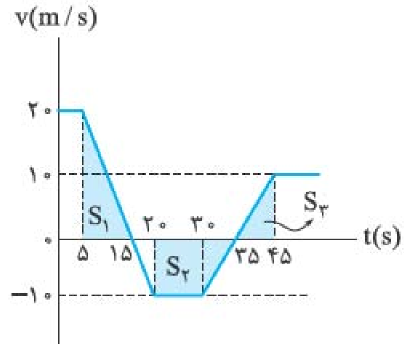


$$\left.\begin{aligned} S_۱ &= \frac{۱۰ \times ۴}{۲} = ۲۰ \\ S_۲ &= \frac{(-۱۵) \times ۶}{۲} = -۴۵ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{جابه‌جایی} = S_۱ + S_۲ = ۲۰ + (-۴۵) = -۲۵\ m$$

گام‌سوم متحرک در ابتدا در $x=+۲\ m$ قرار داشته و سپس $-۲۵\ m$ جابه‌جا شده است:

$$\Delta x=-۲۵\ m \Rightarrow x-x_۰=-۲۵ \Rightarrow x-۲=-۲۵ \Rightarrow x=-۲۳\ m$$

۲۴۴- گزینهٔ «۲» سطح زیر نمودار $v-t$ برابر جابه‌جایی است. سطح زیر نمودار را در بازه‌های داده‌شده به دست می‌آوریم:



$$(۱۵\ s \text{ تا } ۵\ s)\text{بازهٔ}: S_۱=\frac{(۱۵-۵)\times ۲۰}{۲}=۱۰۰$$

$$\Rightarrow v_{av_۱}=\frac{S_۱}{\Delta t}=\frac{۱۰۰}{۱۰}=۱۰\ m/s$$

$$(۴۵s \text{ تا } ۲۰s)\text{بازهٔ}: S_۲+S_۳=[(۳۰-۲۰)\times(-۱۰)]+[\frac{(۳۵-۳۰)\times(-۱۰)}{۲}]+[\frac{(۴۵-۳۵)\times ۱۰}{۲}]$$

$$=-۱۰۰-۲۵+۲۵=-۷۵$$

$$\Rightarrow v_{av_۲}=\frac{S_۲+S_۳}{\Delta t}=\frac{-۷۵}{\underbrace{\cancel{۴۵-۲۰}}_{۲۵}}=-۳\ m/s \Rightarrow \frac{v_{av_۱}}{v_{av_۲}}=\frac{-۱۰}{۳}$$

۲۴۵- گزینهٔ «۳» مطابق نمودار، شتاب ثابت منفی باعث می‌شود که متحرک به سمت xهای منفی سرعت گرفته و سرعتش افزایش یابد. با مثبت‌شدن شتاب، سرعت متحرک کاهش می‌یابد تا سرعت صفرشده و پس از آن، جهت سرعت به سمت مثبت تغییر کند.

لحظهٔ تغییر جهت سرعت، لحظه‌ای است که سرعت صفر می‌شود. برای پیداکردن این لحظه باید ببینیم در کدام لحظه، اندازهٔ $\Delta v_۱$ (تغییر سرعت در حرکت تندشونده) با اندازهٔ $\Delta v_۲$ (تغییر سرعت در حرکت کندشونده) برابر می‌شوند.

سطح زیر نمودار $a-t$ برابر است با Δv. بنابراین:

$$|\Delta v_۱|=|\Delta v_۲| \Rightarrow \left.\begin{array}{l}|\Delta v_۱|=|-۲\times ۲|=۴\ m/s\\ |\Delta v_۲|=|۱\times(t-۲)|=۴\ m/s\end{array}\right\} \Rightarrow t-۲=۴ \Rightarrow t=۶\ s$$

۲۴۶- گزینهٔ «۱» اندازهٔ سرعت متحرک در حرکت کندشونده در حال کاهش است. شرط کندشونده بودن حرکت این است که $av<۰$؛ پس باید معادله‌های v و a را تعیین علامت کنیم:

معادلهٔ v ریشه ندارد؛ چون $\Delta=B^۲-۴AC=۱۶-۴۸=-۳۲<۰$ و به خاطر مثبت‌بودن ضریب $t^۲$، این معادله همواره مثبت است. در نتیجه حرکت وقتی کندشونده است که a منفی باشد.

t	$t<\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$t>\frac{۱}{۳}$
a	−	۰	+

به ازای tهای کوچک‌تر از $\frac{۱}{۳}$، حرکت کندشونده است. در بین گزینه‌های داده‌شده فقط ۱ از $t=\frac{۱}{۳}\ s$ کوچک‌تر است.

۲۴۷- گزینهٔ «۴» گزینه‌ها بیشتر راجع به سرعت‌اند؛ به خاطر همین از معادلهٔ سرعت شروع کرده و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$v = t^{۲} - ۴t + ۳ = (t-۳)(t-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۱\,s \\ t = ۳\,s \end{cases}$$

این تعیین علامت نشان می‌دهد که متحرک ابتدا در جهت مثبت حرکت کرده و سپس در جهت منفی و دوباره در جهت مثبت؛ پس دو بار تغییر جهت داده است.

t		۱		۳	
v	+		−		+
		تغییرجهت		تغییرجهت	

توصیه: علت رد گزینه‌های دیگر را برای خودتان به دست آورید.

۲۴۸- گزینهٔ «۲» در گام اول، محاسبه می‌کنیم که اگر دوچرخه‌سوار بدون توقف رکاب می‌زد، چند ساعت طول می‌کشید تا به مقصد برسد:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{۹۰\,km}{۲۴\,\frac{km}{h}} = ۳/۷۵\,h$$

اختلاف این زمان با زمانی که دوچرخه‌سوار در راه بوده، زمان توقف او را مشخص می‌کند:

$$\Delta t' = ۴/۵ - ۳/۷۵ = ۰/۷۵\,h = ۰/۷۵ \times ۶۰\,min = ۴۵\,min$$

۲۴۹- گزینهٔ «۱» **گام اول** شیب نمودار $x-t$ (سرعت) را برای A و B به دست می‌آوریم:

$$v_A = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{۴۰۰-۱۰۰}{۲۰} = ۱۵\,m/s \qquad v_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} = \frac{۰-(-۳۵۰)}{۱۴} = ۲۵\,m/s$$

گام دوم معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را می‌نویسیم و آن‌ها را مساوی قرار می‌دهیم. با محاسبهٔ t در این حالت، زمان تلاقی دو متحرک به دست می‌آید:

$$x = vt + x_{۰} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_A = ۱۵t + ۱۰۰ \\ x_B = ۲۵t - ۳۵۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۱۵t + ۱۰۰ = ۲۵t - ۳۵۰ \Rightarrow ۱۰t = ۴۵۰ \Rightarrow t = ۴۵\,s$$

۲۵۰- گزینه «۴» راننده در مدت $t_۱$ (زمان واکنش راننده نسبت به مانع)، مسافت $x_۱$ را با سرعت ثابت $۱۰۸\,km/h = ۳۰\,m/s$ طی کرده است، سپس در مدت زمان $t_۲$ مسافت $x_۲$ را با شتاب ثابت $a = -۳\,m/s^{۲}$ طی کرده تا سرعت نهایی اتومبیل به صفر برسد. کل مسافتی که اتومبیل طی کرده برابر $x = x_۱ + x_۲ = ۱۶۵\,m$ است، حال با توجه به نوع حرکت اتومبیل در هر مرحله می‌توان نوشت:

حرکت در مرحلهٔ دوم:

$$v = at + v_{۰} \xrightarrow[a=-۳\,m/s^{۲} \text{ و } t=t_۲]{v_{۰}=۳۰\,m/s \text{ و } v=۰} ۰ = -۳ \times t_۲ + ۳۰ \Rightarrow t_۲ = ۱۰\,s$$

بنابراین ۱۰ ثانیه بعد از ترمزگرفتن اتومبیل متوقف می‌شود.

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_{۰}t \xrightarrow[a=-۳\,m/s^{۲} \text{ و } \Delta x = x_۲]{t=t_۲=۱۰\,s \text{ و } v_{۰}=۳۰\,m/s} x_۲ = \frac{۱}{۲} \times (-۳) \times ۱۰^{۲} + ۳۰ \times ۱۰$$

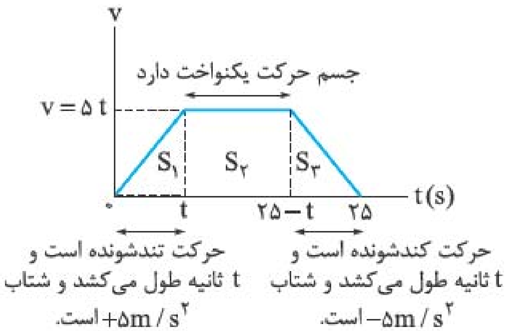
$$\Rightarrow x_۲ = ۱۵۰\,m$$

$$x = x_۱ + x_۲ \Rightarrow ۱۶۵ = x_۱ + ۱۵۰ \Rightarrow x_۱ = ۱۵\,m$$

حرکت در مرحلهٔ اول:

$$\Delta x = vt \xrightarrow[v=v_\circ=۳۰\,m/s]{\Delta x=x_۱ \text{ و } t=t_۱} ۱۵ = ۳۰\times t_۱ \Rightarrow t_۱ = ۰/۵\,s \xrightarrow{t_۲=۱۰\,s} \frac{t_۲}{t_۱} = ۲۰$$

۲۵۱- گزینهٔ «۳» اگر برای این تست، نمودار $v-t$ را رسم کنیم، به سادگی می‌توانیم تست را حل کنیم.



مساحت زیر نمودار برابر جابه‌جایی است.

$$\bar{v} = \frac{\Delta x(=S)}{\Delta t} \Rightarrow ۲۰ = \frac{\Delta x(=S)}{۲۵}$$

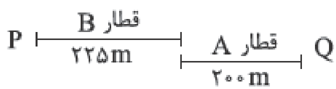
$$\Rightarrow \text{مساحت زیر نمودار } S = ۵۰۰\,m = S_۱ + S_۲ + S_۳ = \frac{۵t^۲}{۲} + (۲۵-۲t)۵t + \frac{۵t^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = ۵\,s & ✓ \\ t = ۲۰\,s & ✗ \end{cases}$$

با این حساب $S_۲$ منفی می‌شود که غیرقابل قبول است.

متحرک به مدت $۲۵-۲t$ ثانیه حرکت یکنواخت داشته است: $۲۵ - ۲t = ۱۵\,s$

۲۵۲- گزینهٔ «۴» **روش اول:** قطار B هنگامی از قطار A سبقت می‌گیرد که نقطهٔ P از نقطهٔ Q عبور کند. یعنی باید زمانی را پیدا کنیم که طی آن، قطار B به اندازهٔ مجموع طول دو قطار $(۲۲۵+۲۰۰=۴۲۵\,m)$، بیشتر از قطار A حرکت کند.



$$v = at + v_\circ \Rightarrow ۵۰ = ۲\times t_۱ + ۰ \Rightarrow \text{زمان رسیدن سرعت قطار B به } ۵۰\,m/s \;\; t_۱ = ۲۵\,s$$

$$v^۲ - v_\circ^۲ = ۲a\,\Delta x_B \Rightarrow \Delta x_B = \frac{v^۲ - v_\circ^۲}{۲a}$$

$$\Rightarrow \text{جابه‌جایی قطار B در زمان } t_۱ \;\; \Delta x_B = \frac{۵۰^۲ - ۰}{۲\times ۲} = ۶۲۵\,m$$

$$\Delta x = vt \Rightarrow \text{جابه‌جایی قطار A در زمان } t_۱: \Delta x_A = ۴۰\times ۲۵ = ۱۰۰۰\,m$$

فاصلهٔ نقطه‌های P و Q بعد از زمان $t_۱$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_۲ = \underbrace{(۱۰۰۰-۶۲۵)}_{\text{تغییر فاصله در زمان } t_۱} + \underbrace{(۲۰۰+۲۲۵)}_{\text{فاصلهٔ اولیه}} = ۸۰۰\,m$$

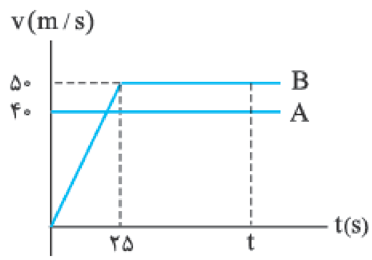
بعد از زمان $t_۱$، سرعت نسبی دو قطار برابر است با: $v_{\text{نسبی}} = v_B - v_A = ۵۰ - ۴۰ = ۱۰\,m/s$

حالا می‌توانیم زمان $t_۲$ یعنی زمان لازم برای این‌که فاصلهٔ $\Delta x_۲$ با سرعت نسبی دو قطار طی شود را به دست آوریم:

$$\Delta x_۲ = v_{\text{نسبی}} t_۲ \Rightarrow ۸۰۰ = ۱۰ t_۲ \Rightarrow t_۲ = ۸۰\,s$$

$$\text{زمان لازم برای سبقت‌گرفتن قطار B از A} \;\; t_{\text{کل}} = t_۱ + t_۲ = ۲۵ + ۸۰ = ۱۰۵\,s$$

روش دوم: نمودارهای سرعت ـ زمان دو متحرک را رسم می‌کنیم:
فرض می‌کنیم در لحظهٔ t، جابه‌جایی قطار B به اندازهٔ $۴۲۵\,m$ بیشتر از جابه‌جایی قطار A است (یعنی همان مقداری که لازم است تا P از Q عبور کند). سطح زیر هر نمودار، برابر جابه‌جایی آن قطار است.

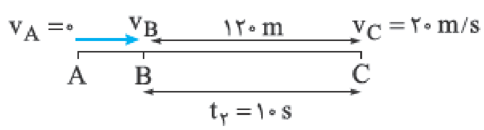


در لحظهٔ t: $\Delta x_B - \Delta x_A = S_B - S_A = ۴۲۵\,m \Rightarrow S_A = ۴۰t$

$$S_B = [\frac{t+(t-۲۵)}{۲}]\times ۵۰ = ۵۰t - ۶۲۵ \Rightarrow (۵۰t-۶۲۵)-(۴۰t) = ۴۲۵$$

$$\Rightarrow ۱۰t - ۶۲۵ = ۴۲۵ \Rightarrow ۱۰t = ۱۰۵۰ \Rightarrow t = ۱۰۵\,s$$

۲۵۳- گزینهٔ «۲» ابتدا معادله‌های حرکت با شتاب ثابت را برای حرکت در فاصلهٔ BC می‌نویسیم:



$$\Delta x_{BC} = \frac{۱}{۲}a t_۲^۲ + v_B t_۲ \Rightarrow ۱۲۰ = \frac{۱}{۲}a(۱۰)^۲ + v_B(۱۰)$$

$$v_C = at_۲ + v_B \Rightarrow ۲۰ = a(۱۰) + v_B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱۲۰ = ۵۰a + ۱۰v_B \\ ۲۰ = ۱۰a + v_B \end{cases} \Rightarrow a = ۱/۶\,m/s^۲ \;,\; v_B = ۴\,m/s$$

معادلهٔ مستقل از زمان را برای فاصلهٔ AB نوشته و اطلاعات به دست آمده در بالا را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$v_B^۲ - v_A^۲ = ۲a\Delta x_{AB} \Rightarrow (۴)^۲ - ۰ = ۲(۱/۶)\times \Delta x_{AB}$$

$$\Rightarrow \Delta x_{AB} = \frac{۱۶}{۲\times ۱/۶} = ۵\,m$$

۲۵۴- گزینهٔ «۱» **روش اول:** متحرک در دو ثانیهٔ اول به اندازهٔ $\Delta x_۱$ و در دو ثانیهٔ سوم (از $t = ۴\,s$ تا $t = ۶\,s$) به اندازهٔ $\Delta x_۲$ جابه‌جا شده است.

$$\Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t \Rightarrow ۱۳ = \frac{۱}{۲}a(۲)^۲ + v_۰(۲) \Rightarrow ۱۳ = ۲a + ۲v_۰ \quad (I)$$

$$\Delta x_۲ = x_۶ - x_۴ = [\frac{۱}{۲}a(۶)^۲ + v_۰(۶) + x_۰] - [\frac{۱}{۲}a(۴)^۲ + v_۰(۴) + x_۰]$$

$$\Rightarrow ۲۵ = ۱۰a + ۲v_۰ \quad (II)$$

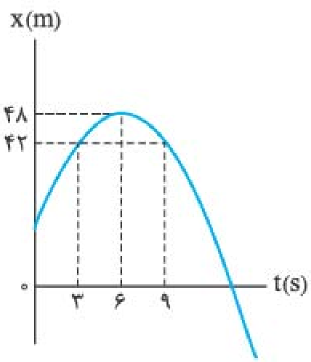
$$\xrightarrow{(II)-(I)} ۱۲ = ۸a \Rightarrow a = \frac{۱۲}{۸} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵\,m/s^۲$$

روش دوم: $at^۲ = \frac{\Delta x_{t,n} - \Delta x_{t,m}}{n-m} \Rightarrow a(۲)^۲ = \frac{\Delta x_{۲,۳} - \Delta x_{۲,۱}}{۳-۱} \Rightarrow ۴a = \frac{۲۵-۱۳}{۲} = ۶$

$$\Rightarrow a = \frac{۶}{۴} = ۱/۵\,m/s^۲$$

۲۵۵- گزینهٔ «۳» سهمی داده‌شده نسبت به $t = ۴\ s$ متقارن است. بنابراین، اندازهٔ شیب مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = ۰$ با اندازهٔ شیب نمودار در لحظهٔ $t = ۸\ s$ برابر است. این اندازه‌ها همان بزرگی سرعت متحرک است.

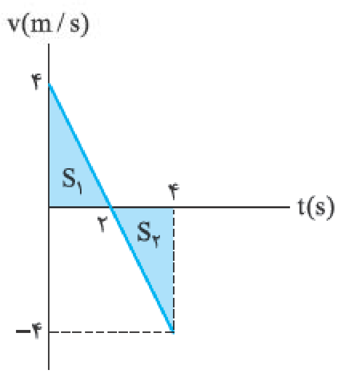
۲۵۶- گزینهٔ «۱» با توجه به تقارن سهمی و این‌که سهمی داده‌شده نسبت به $t = ۶\ s$ متقارن است، به راحتی می‌توان فهمید که مکان متحرک در لحظه‌های $۳\ s$ و $۹\ s$ یکسان است. زیرا این دو نقطه نسبت به $t = ۶\ s$ متقارن هستند. از روی شکل هم پیدا است که $x_{t=۳s} = x_{t=۹s}$ و جابه‌جایی متحرک در این بازه صفر است.
توضیح شکل مقابل: چون مسافت طی‌شده از $۳\ s$ تا $۹\ s$ برابر $۱۲\ m$ بوده و حرکت متقارن است، پس متحرک از $۳\ s$ تا $۶\ s$، به اندازهٔ $۶\ m$ را طی کرده است: $۴۸ - ۶ = ۴۲\ m$.



۲۵۷- گزینهٔ «۴» **گام اول** از روی معادلهٔ مکان ـ زمان داده شده، معادلهٔ سرعت ـ زمان را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x = -t^{۲} + ۴t - ۴ \\ x = \frac{۱}{۲}a t^{۲} + v_{۰} t + x_{۰} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲}a = -۱ \Rightarrow a = -۲\ m/s^{۲} \\ v_{۰} = ۴\ m/s \end{cases} \xrightarrow{v = at + v_{۰}} v = -۲t + ۴$$

گام دوم نمودار $v - t$ را رسم کرده و با استفاده از مساحت زیر نمودار از $t = ۰$ تا $t = ۴\ s$، مسافت طی‌شده را به دست می‌آوریم:

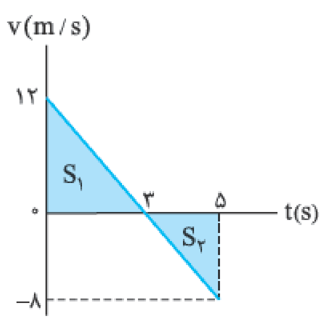


$$\text{مسافت طی‌شده} = S_{۱} + |S_{۲}| = \frac{۴ \times ۲}{۲} + \frac{۴ \times ۲}{۲} = ۸\ m$$

۲۵۸- گزینهٔ «۴» **گام اول** از روی معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده، معادلهٔ سرعت ـ زمان را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x = -۲t^{۲} + ۱۲t - ۴۰ \\ x = \frac{۱}{۲}a\ t^{۲} + v_{۰} t + x_{۰} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲}a = -۲ \Rightarrow a = -۴\ m/s^{۲} \\ v_{۰} = ۱۲\ m/s \end{cases} \xrightarrow{v = at + v_{۰}} v = -۴t + ۱۲$$

گام دوم نمودار $v - t$ را رسم می‌کنیم.



مسافت طی‌شده در ۳ ثانیهٔ اول $= S_{۱}$

مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی $t = ۳\ s$ تا $t = ۵\ s$ $= |S_{۲}|$

$$\text{مسافت طی‌شده} = S_{۱} + |S_{۲}| = \frac{۱۲ \times ۳}{۲} + \frac{(۵ - ۳) \times ۸}{۲}$$
$$= ۱۸ + ۸ = ۲۶\ m$$

۲۵۹- گزینهٔ «۴» **گام اول** با مقایسهٔ معادلهٔ سرعت ـ زمان داده‌شده با معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت، شتاب و سرعت اولیه را تعیین می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} v = at + v_۰ \\ v = -۴t \end{array}\right\} \Rightarrow a = -۴\,m/s^۲ \text{ و } v_۰ = ۰$$

گام دوم a، $v_۰$ و $x_۰$ را در معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با شتاب ثابت قرار می‌دهیم:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}(-۴)t^۲ + (۰)t - ۳ \Rightarrow x = -۲t^۲ - ۳$$

۲۶۰- گزینهٔ «۱» معادلهٔ $x - t$ در حرکت با شتاب ثابت را نوشته و با توجه به داده‌های مسئله، مقادیر $v_۰$ و $x_۰$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم: $x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}at^۲ + ۳t + ۴$

این تابع معادلهٔ سهمی است و در نقطهٔ رأس سهمی بیشترین مقدار را دارد. این بیشترین مقدار به ازای $t = ۴\,s$ اتفاق می‌افتد. در این لحظه، سرعت متحرک صفر می‌شود:

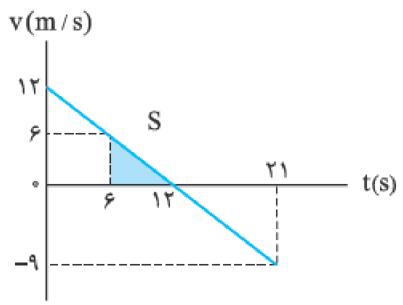
$$v = at + ۳ = ۰ \xrightarrow{t=۴\,s} ۴a + ۳ = ۰ \Rightarrow a = \frac{-۳}{۴}\,m/s^۲$$

حالا می‌توانیم معادلهٔ $x - t$ این حرکت را به طور کامل نوشته و با قراردادن $t = ۸\,s$ در آن، مکان متحرک را به دست آوریم: $x = \frac{-۳}{۸}t^۲ + ۳t + ۴ \xrightarrow{t=۸\,s} x = \frac{-۳}{۸}(۸)^۲ + ۳(۸) + ۴ = ۴$

۲۶۱- گزینهٔ «۲» با توجه به نمودار داده‌شده، شیب آن را که همان شتاب ثابت حرکت است تعیین می‌کنیم: $a = \frac{-۹ - ۱۲}{۲۱ - ۰} = \frac{-۲۱}{۲۱} = -۱\,m/s^۲$

حالا می‌توانیم سرعت متحرک در لحظه‌های $t = ۶\,s$ و $t = ۱۲\,s$ را به دست آوریم:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = -t + ۱۲ \Rightarrow \begin{cases} (t = ۶\,s): v = -۶ + ۱۲ = ۶\,m/s \\ (t = ۱۲\,s): v = -۱۲ + ۱۲ = ۰ \end{cases}$$



بزرگی جابه‌جایی متحرک در زمان خواسته‌شده برابر است با مساحت قسمت رنگ‌شده در شکل مقابل:

$$S = \frac{(۱۲ - ۶) \times ۶}{۲} = ۱۸\,m$$

۲۶۲- گزینهٔ «۲» در لحظهٔ $t = ۱۰\,s$ قطار A می‌ایستد، پس جابه‌جایی هر دو قطار را تا لحظهٔ $t = ۱۰\,s$ محاسبه می‌کنیم:

ابتدا جابه‌جایی قطار B را تا لحظهٔ $t = ۱۰\,s$ به دست می‌آوریم. برای این کار نیاز به شتاب قطار B داریم:

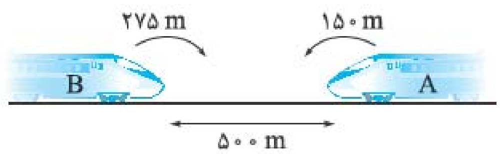
$$a_B = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{-۴۰}{۱۶} = -۲/۵\,m/s$$

$$\Delta x_B = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t = \frac{۱}{۲} \times (-۲/۵) \times ۱۰۰ + ۴۰(۱۰) = ۲۷۵\,m$$

حالا جابه‌جایی قطار A را به کمک سطح زیر نمودار محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x_A = \text{منهای مساحت} = -\frac{۳۰\times۱۰}{۲} = -۱۵۰\ \text{m}$$

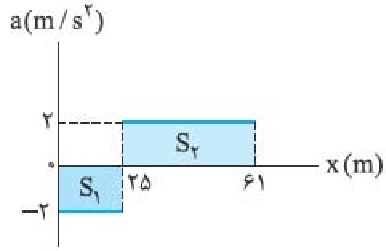
یعنی جهت حرکت قطار A و B مخالف یکدیگر است. به شکل مقابل توجه کنید.



پس فاصلهٔ قطار B از قطار A به سادگی محاسبه می‌شود:

$$\text{فاصلهٔ اولیه} - \text{مقدار مسافتی که به هم نزدیک شدند} = ۵۰۰ - ۱۵۰ - ۲۷۵ = ۷۵\ \text{m}$$

۲۶۳- گزینهٔ «۲» نموداری که در این تست معرفی شده است نمودار $a - x$ است؛ یعنی شتاب ـ مکان. به فرمول مستقل از زمان $v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x$ توجه کنید. عبارت $a\Delta x$ همان مساحت زیر نمودار در نمودار شتاب ـ مکان است.

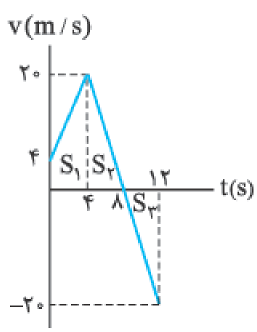


$$S_۱ + S_۲ = -۵۰ + ۳۶\times۲ = ۲۲ = a\Delta x$$

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲\,\underbrace{a\Delta x}_{\text{مساحت زیر نمودار}}$$

$$v^۲ - ۱۰۰ = ۲\times۲۲ \Rightarrow v^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow v = ۱۲\ \text{m/s}$$

۲۶۴- گزینهٔ «۳» نمودار $a - t$ داده‌شده نشان می‌دهد که متحرک، دو حرکت با شتاب‌های ثابت ولی متفاوت را انجام داده است. با استفاده از نمودار $a - t$، نمودار $v - t$ را رسم می‌کنیم. نمودار $v - t$ این متحرک از دو خط با شیب‌های $+۴$ و -۵ تشکیل می‌شود:



$$v_۱ = a_۱t_۱ + v_۰ = ۴\times۴ + ۴ = ۲۰\ \text{m/s}$$

$$v_۲ = a_۲t_۲ + v_۱ = -۵\times(۱۲-۴) + ۲۰ = -۲۰\ \text{m/s}$$

$$S_۱ = \frac{(۴+۲۰)\times۴}{۲} = ۴۸ \quad , \quad S_۲ = \frac{(۸-۴)\times۲۰}{۲} = ۴۰$$

$$|S_۳| = \frac{(۱۲-۸)\times۲۰}{۲} = ۴۰ \Rightarrow \text{مسافت طی‌شده} = S_۱ + S_۲ + |S_۳| = ۱۲۸\ \text{m}$$

۲۶۵- گزینهٔ «۳» **گام اول** این حرکت سه مرحله دارد. سرعت نهایی هر مرحله، سرعت اولیه برای مرحلهٔ بعدی است. با استفاده از این مطلب و نمودار داده‌شده، معادله‌های $v - t$ را برای سه بازهٔ زمانی به دست می‌آوریم:

$$v_۱ = a_۱t + v_۰ \Rightarrow v_۱ = ۲t - ۱۰ \xrightarrow{t=۱۰s} v_۱ = ۱۰\ \text{m/s}$$

$$v_۲ = a_۲t + v_۱ \Rightarrow v_۲ = ۴t + ۱۰ \xrightarrow{t=۵s} v_۲ = ۳۰\ \text{m/s}$$

$$v_۳ = a_۳t + v_۲ \Rightarrow v_۳ = -۲t + ۳۰ \xrightarrow{t=۲۰s} v_۳ = -۱۰\ \text{m/s}$$

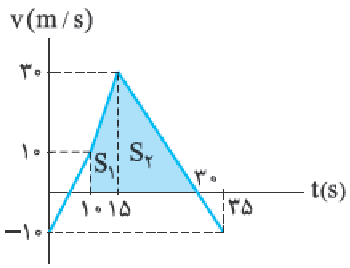
بیشترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ هنگامی است که سرعت متحرک در معادلهٔ $v_۳$ برابر صفر شود. در این نقطه متحرک تغییر جهت داده و به مبدأ نزدیک می‌شود:

$v_۳ = -۲t + ۳۰ = ۰ \Rightarrow t_۳ = ۱۵\ s \Rightarrow$ که با توجه به حرکت دو مرحلهٔ قبل، این لحظه، $۳۰\ s$ بعد از آغاز حرکت اولیه است (یعنی $t = ۳۰\ s$).

گام‌دوم روش اول: رسم نمودار: نمودار $v-t$ هر مرحله از حرکت را رسم می‌کنیم.

از صفر تا $۱۰\ s$ متحرک از مبدأ دور شده و دوباره به مبدأ برگشته و جابه‌جایی صفر است.

از صفر تا $۱۰\ s$، سطح پایین و بالای محور t برابر بوده و در نتیجه جابه‌جایی کل در این بازه، صفر است.



پس کافی است تا مساحت قسمت رنگ‌شده را به دست آوریم تا بیشترین فاصله از مبدأ به دست آید:

$$\Delta x = S_۱ + S_۲ = \frac{(۱۰+۳۰)\times ۵}{۲} + \frac{۳۰\times ۱۵}{۲} = ۱۰۰ + ۲۲۵ = ۳۲۵\ m$$

روش دوم: از معادلهٔ مستقل از شتاب در بازهٔ زمانی صفر تا $۳۰\ s$ استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x = \frac{v_۱+v_۲}{۲}\Delta t \Rightarrow \Delta x_۱ &= \frac{-۱۰+۱۰}{۲}\times ۱۰ = ۰ \\ \Delta x_۲ &= \frac{۱۰+۳۰}{۲}\times ۵ = ۱۰۰\ m \\ \Delta x_۳ &= \frac{۳۰+۰}{۲}\times ۱۵ = ۲۲۵\ m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta x_{\text{کل}} = ۱۰۰ + ۲۲۵ = ۳۲۵\ m$$

۲۶۶- گزینهٔ «۲» **روش اول:** حرکت سقوط آزاد، یک حرکت با شتاب ثابت است و می‌توانیم سرعت متوسط را به شکل زیر به دست آوریم:

$$v_{av} = \frac{v_۰ + v}{۲} = \frac{۰ - gt}{۲} = \frac{-۱۰\times ۳}{۲} = -۱۵\ m/s \Rightarrow |v_{av}| = ۱۵\ m/s$$

روش دوم: می‌دانیم که جابه‌جایی گلوله در ۳ ثانیهٔ اول برابر است با: $|\Delta y| = ۵ + ۱۵ + ۲۵ = ۴۵m$

$$\Rightarrow |v_{av}| = \frac{|\Delta y|}{\Delta t} = \frac{۴۵}{۳} = ۱۵\ m/s$$

۲۶۷- گزینهٔ «۳» معادلهٔ مکان ـ زمان در سقوط آزاد را برای دو گلوله می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \Delta y_۱ = -\frac{۱}{۲}gt_۱^۲ \\ \Delta y_۲ = -\frac{۱}{۲}gt_۲^۲ \end{cases} \xrightarrow[g=۱۰\,m/s^۲]{t_۲ = t_۱ - ۲/۵} \begin{cases} \Delta y_۱ = -۵t_۱^۲ \\ \Delta y_۲ = -۵(t_۱ - ۲/۵)^۲ \end{cases}$$

در لحظهٔ موردنظر $(t_۱)$، گلولهٔ اول $۶۸/۷۵\ m$ پایین‌تر از گلولهٔ دوم است. معادلات مکان دو گلوله را از هم کم کرده و مساوی $-۶۸/۷۵\ m$ قرار می‌دهیم:

$$\Delta y_۱ - \Delta y_۲ = -۶۸/۷۵\ m$$

$$-۵t_۱^۲ - [-۵(t_۱^۲ + ۶/۲۵ - ۵t_۱)] = \cancel{-۵t_۱^۲} + \cancel{۵t_۱^۲} + ۳۱/۲۵ - ۲۵t_۱ = -۶۸/۷۵$$

$$\Rightarrow -۲۵t_۱ = -۱۰۰ \Rightarrow t_۱ = ۴\,s$$

۲۶۸- گزینهٔ «۲» **گام اول** زمان قسمت اول حرکت را حساب می‌کنیم:

$$v = -gt_۱ \Rightarrow -۱۵ = -۱۰t_۱ \Rightarrow t_۱ = ۱/۵\,s$$

گام دوم ارتفاع سقوط در قسمت اول حرکت را با توجه به زمان $۱/۵\,s$ به دست می‌آوریم:

$$\Delta y_۱ = -\frac{۱}{۲}gt_۱^۲ \Rightarrow \Delta y_۱ = \frac{-۱}{۲} \times ۱۰ \times ۲/۲۵ = -۱۱/۲۵\,m$$

گام سوم محاسبهٔ کل ارتفاع سقوط:

$$h = \Delta y_{\text{کل}} = \Delta y_۱ + \Delta y_۲ = -۱۱/۲۵ - ۵۰ = -۶۱/۲۵\,m$$

گام چهارم محاسبهٔ زمان کل سقوط:

$$h = \Delta y_{\text{کل}} = \frac{-۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow -۶۱/۲۵ = \frac{-۱}{۲} \times ۱۰ \times t^۲ \Rightarrow t^۲ = ۱۲/۲۵ \Rightarrow t = ۳/۵\,s$$

۲۶۹- گزینهٔ «۴» **گام اول** زمان رسیدن سنگ به آب $(t_۱)$: از جدول تصاعد حسابی سقوط آزاد می‌دانیم که $۴۵\,m$ سقوط، $۳\,s$ طول می‌کشد: $t_۱ = ۳s$.

$$۵ + ۱۵ + ۲۵ = ۴۵\,m$$

گام دوم زمان رسیدن صوت از آب به گوش $(t_۲)$:

$$\Delta x = vt \Rightarrow ۴۵ = ۳۴۰t_۱ \Rightarrow t_۲ = \frac{۴۵}{۳۴۰} \simeq ۰/۱\,s$$

گام سوم محاسبهٔ زمان کل:

$$t = t_۱ + t_۲ = ۳ + ۰/۱ = ۳/۱\,s$$