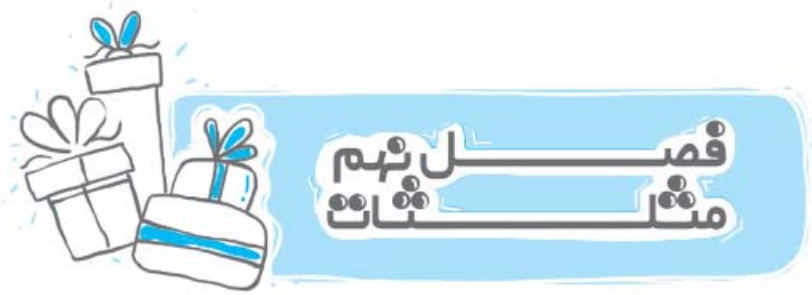
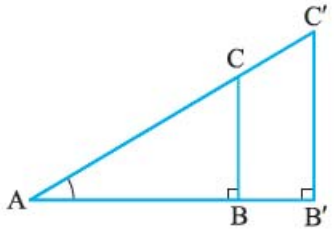
فهرست

فصل اول: مجموعه‌ها ۷
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل اول ۱۶
فصل دوم: الگو و دنباله ۲۳
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل دوم ۳۴
فصل سوم: توان و ریشه ۴۳
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل سوم ۵۴
فصل چهارم: قدرمطلق و جزء صحیح ۶۳
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل چهارم ۷۹
فصل پنجم: معادله و تابع درجه‌دوم ۹۳
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل پنجم ۱۰۸
فصل ششم: تعیین علامت و نامعادله ۱۲۵
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل ششم ۱۳۵
فصل هفتم: هندسه تحلیلی ۱۴۲
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل هفتم ۱۵۳
فصل هشتم: تابع ۱۶۱
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل هشتم ۱۹۳
فصل نهم: مثلثات ۲۱۸
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل نهم ۲۴۸
فصل دهم: توابع نمایی و لگاریتمی ۲۶۸
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل دهم ۲۸۵
فصل یازدهم: حد و پیوستگی ۲۹۶
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل یازدهم ۳۲۲
فصل دوازدهم: آشنایی با مفهوم مشتق ۳۴۳
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل دوازدهم ۳۷۱
فصل سیزدهم: کاربرد مشتق ۳۸۹
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل سیزدهم ۴۰۹
فصل چهاردهم: ترکیبیات ۴۳۰
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل چهاردهم ۴۴۸
فصل پانزدهم: احتمال ۴۵۶
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل پانزدهم ۴۷۶
فصل شانزدهم: آمار ۴۸۷
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل شانزدهم ۴۹۸
فصل هفدهم: مقاطع مخروطی ۵۰۶
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل هفدهم ۵۲۹
فصل هجدهم: هندسه ۵۴۲
پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل هجدهم ۵۵۸
آزمون‌های جامع ۵۷۰
پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌های جامع ۵۸۱
پاسخ‌نامهٔ کلیدی ۶۰۴



معرفی نسبت‌های مثلثاتی

توی مثلث قائم‌الزاویه، مقدار این نسبت‌ها فقط به اندازه زاویهٔ A بستگی دارد.



$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$$

$$\cos A = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$$

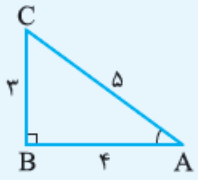
$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$

$$\cot A = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'}$$

در مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائم ۳ و ۴، مجموع سینوس و تانژانت زاویهٔ کوچک‌تر چه‌قدر است؟

۱) ۱/۴ ۲) ۱/۳ ۳) ۱/۳۵ ۴) ۱/۲

گزینهٔ «۳» از رابطهٔ فیثاغورس می‌دانیم که طول وتر این مثلث ۵ است، زاویهٔ کوچک‌تر هم زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر است. پس:



$$\left.\begin{array}{l} \sin A = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶ \\ \tan A = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} \sin A + \tan A = ۱/۳۵$$

بین نسبت‌های مثلثاتی این رابطه‌ها را داریم:

$$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱,\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ ,\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ ,\ \tan\theta \times \cot\theta = ۱$$

و این رابطه‌ها را هم می‌شود نتیجه گرفت:

$$۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta}\ ,\ ۱ + \cot^۲\theta = \frac{۱}{\sin^۲\theta}$$

البته به جای این رابطه‌ها می‌شود از مثلث قائم‌الزاویه هم استفاده کرد.

؟ اگر $\sin A = \frac{۱۲}{۱۳}$، مقدار $\tan A$ کدام است؟ (A زاویه‌ای از مثلث قائم‌الزاویه است.)

۱) ۲/۴ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۳ ۴) ۲/۶

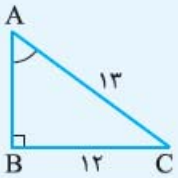
= گزینهٔ «۱» **راه‌حل اول** گفتیم $\sin^۲ A + \cos^۲ A = ۱$، پس داریم:

$$\frac{۱۴۴}{۱۶۹} + \cos^۲ A = ۱$$

$$\Rightarrow \cos^۲ A = ۱ - \frac{۱۴۴}{۱۶۹} = \frac{۱۶۹ - ۱۴۴}{۱۶۹} = \frac{۲۵}{۱۶۹} \Rightarrow \cos A = \frac{۵}{۱۳}$$

$$\Rightarrow \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{۱۲}{۱۳}}{\frac{۵}{۱۳}} = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

راه‌حل دوم مثلث قائم‌الزاویه را به صورت روبه‌رو در نظر بگیرید:



با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس طول ضلع سوم مثلث می‌شود $AB = ۵$؛

پس داریم: $\tan A = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{BC}{AB} = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$

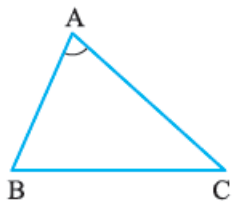
اشاره بد نیست سه‌تایی‌های فیثاغورس مانند: (۸,۱۵,۱۷)، (۷,۲۴,۲۵)، (۵,۱۲,۱۳) و (۳,۴,۵) را حفظ باشیم.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $۰^\circ, ۳۰^\circ, ۴۵^\circ, ۶۰^\circ$ و ۹۰° را باید حفظ باشیم.

	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	ت ن
cot	ت ن	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۰

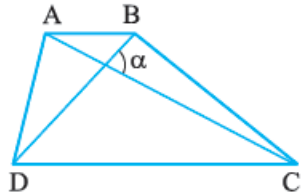
منظور از «ت ن» همان تعریف نشده است. (چون مخرج صفر می‌شود، می‌گوییم جواب تعریف‌نشده است.)

با استفاده از سینوس، می‌توانیم مساحت مثلث و چهارضلعی را حساب کنیم.



$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin A$$

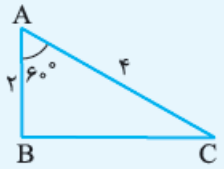
(نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها)



$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} AC \times BD \times \sin \alpha$$

(نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویهٔ بین قطرها)

در شکل روبه‌رو، طول ارتفاع وارد بر ضلع AC کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$

۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

گزینهٔ «۲» **راه‌حل اول** مساحت مثلث را حساب کنیم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin A=\frac{۱}{۲}(۲)(۴)\sin ۶۰^\circ=۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳}$$

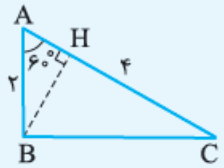
از طرف دیگر این مساحت برابر است با:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC\times BH$$

پس:

$$۲\sqrt{۳}=\frac{۱}{۲}\underbrace{(۴)}_{AC}BH \Rightarrow BH=\sqrt{۳}$$

راه‌حل دوم شکل را ببینید:



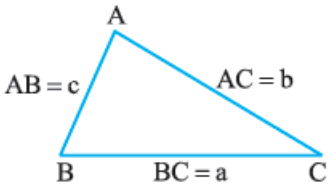
در مثلث ABH تعریف سینوس را می‌نویسیم:

$$\sin\hat{A}=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{BH}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{BH}{۲} \Rightarrow BH=\sqrt{۳}$$

اشاره مساحت مثلث ABC را با هر کدام از فرمول‌های زیر می‌شود حساب کرد و جواب همهٔ آن‌ها یکی است:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin A=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times \sin B=\frac{۱}{۲}AC\times BC\times \sin C$$



پس داریم:

$$ab\sin C=bc\sin A=ac\sin B$$

یا:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

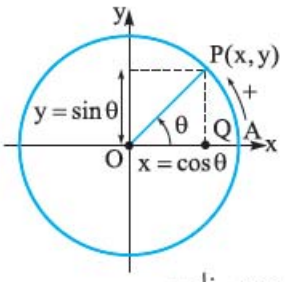
یعنی در مثلث، تقسیم سینوس هر زاویه به طول ضلع مقابلش، مقدار ثابتی است.

اشاره برای مساحت مثلث برحسب طول اضلاع، یک فرمول دیگر به نام هرون داریم:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (p=\frac{a+b+c}{۲}=\text{نصف محیط})$$

دایرهٔ مثلثاتی

مرکز این دایره مبدأ مختصات و شعاعش برابر ۱ است. نقطهٔ $A(۱,۰)$ نقطهٔ شروع است و جهت مثبت، پادساعت‌گرد است. اگر از نقطهٔ P (انتهای کمان) بر دو محور عمود کنیم، مقدار $\sin\theta$ و $\cos\theta$ به دست می‌آید.

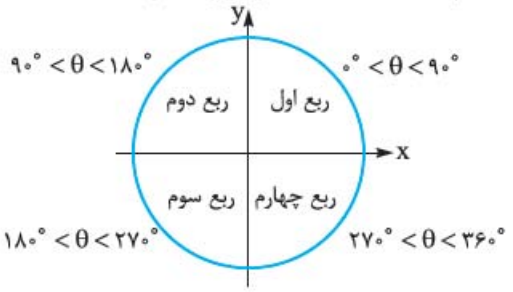


$\cos\theta$ همان طول نقطهٔ P است: $x_P = \cos\theta = OQ$

$\sin\theta$ همان عرض نقطهٔ P است: $y_P = \sin\theta = PQ$

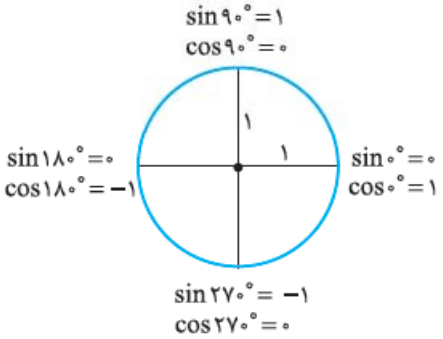
مقدار $\tan\theta$ را هم داریم: $\tan\theta = \dfrac{y_P}{x_P} = \dfrac{PQ}{OQ}$

محورها دایره را به ۴ قسمت تقسیم می‌کنند که هر کدام را یک ناحیه یا ربع می‌نامیم.



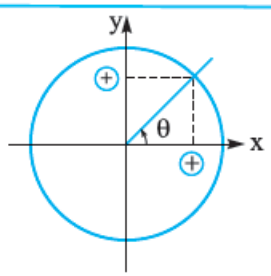
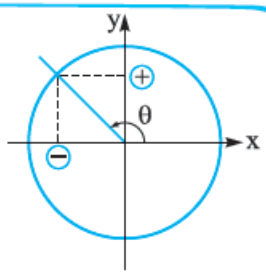
خود زاویه‌های °۰، °۹۰، °۱۸۰، °۲۷۰ و °۳۶۰ در مرز ناحیه‌ها هستند و آن‌ها را جزء هیچ‌کدام از ناحیه‌ها در نظر نمی‌گیریم.

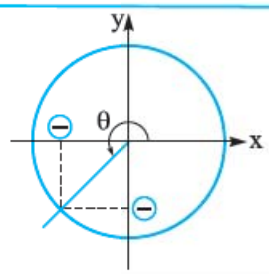
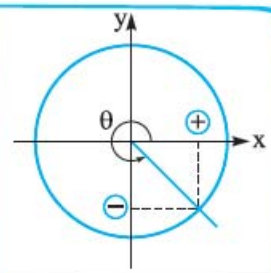
اشاره چون شعاع دایرهٔ مثلثاتی ۱ است، داریم:



همواره مقدار $\sin\theta$ و $\cos\theta$ بین ۱ و ۱− هستند.

علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی مختلف را باید بلد باشیم:

شکل دایره		
ناحیه	اول	دوم
$\sin\theta$	+	+
$\cos\theta$	+	−
$\tan\theta$	+	−
$\cot\theta$	+	−

شکل دایره		
ناحیه	سوم	چهارم
$\sin\theta$	−	−
$\cos\theta$	−	+
$\tan\theta$	+	−
$\cot\theta$	+	−

اگر $\sin\theta = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و این زاویه در ربع دوم باشد، مقدار $\cot\theta$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $-\sqrt{۲}$ ۴) -۲

گزینهٔ «۳» از همین اول کار حواسمان باشد که جواب، عددی منفی است؛ چون در ربع دوم $\cot\theta < ۰$ است. حالا با فرمول $۱+\cot^۲\theta = \frac{۱}{\sin^۲\theta}$ داریم:

$$۱+\cot^۲\theta = \frac{۱}{(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲} = ۳ \Rightarrow \cot^۲\theta = ۲ \xrightarrow{\cot\theta<۰} \cot\theta = -\sqrt{۲}$$

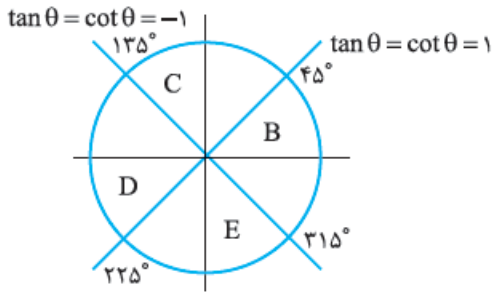
اگر $\sqrt{۱+\tan^۲\theta} = \frac{۱}{\cos\theta}$ و $\sqrt{۱-\cos^۲\theta} = -\sin\theta$، آن‌گاه حاصل $\frac{\cot\theta - ۱}{|\cot\theta|+۱} + \frac{\tan\theta}{|\tan\theta|}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۱

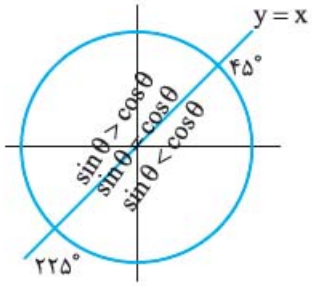
گزینهٔ «۱» می‌دانیم $۱+\tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta}$ پس $\sqrt{۱+\tan^۲\theta} = \frac{۱}{|\cos\theta|}$، اما سؤال گفته $\frac{۱}{\cos\theta}$؛ پس $\cos\theta > ۰$ است. در مورد $\sqrt{۱-\cos^۲\theta}$ هم می‌دانیم جواب $\sqrt{\sin^۲\theta} = |\sin\theta|$ است و سؤال گفته $-\sin\theta$ پس $\sin\theta < ۰$. با این شرایط θ در ربع چهارم قرار دارد و تانژانت و کتانژانت آن منفی‌اند؛

$$\tan\theta < ۰, \cot\theta < ۰ \Rightarrow \frac{\cot\theta - ۱}{|\cot\theta|+۱} + \frac{\tan\theta}{|\tan\theta|} = \frac{\cot\theta - ۱}{-\cot\theta + ۱} + \frac{\tan\theta}{-\tan\theta}$$
$$= -۱ + -۱ = -۲$$

مقایسهٔ مقدار نسبت‌های مثلثاتی

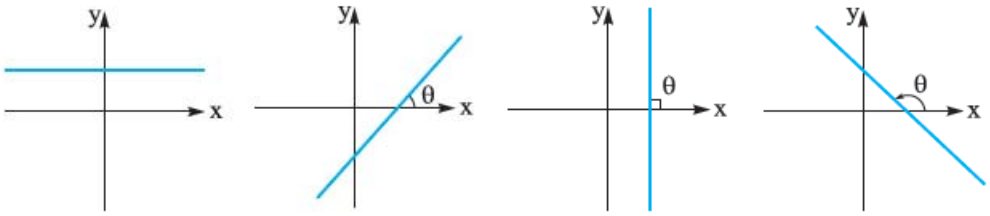


در نواحی B، C، D و E مقدار تانژانت از کتانژانت کم‌تر است.



خط $y = x$ و زاویه‌های ۴۵° و ۲۲۵°، مرز سینوس و کسینوس هستند.

اشاره مقدار شیب یک خط برابر تانژانت زاویهٔ خط با جهت مثبت محور xها است. حالت‌های مختلف را ببینید:



$۹۰^\circ < \theta < ۱۸۰^\circ$	$\theta = ۹۰^\circ$	$۰ < \theta < ۹۰^\circ$	$\theta = ۰$
$m = \tan\theta < ۰$	$m = \tan\theta =$ ت‌ن	$m = \tan\theta > ۰$	$m = \tan\theta = ۰$
شیب منفی است.	شیب تعریف نمی‌شود.	شیب مثبت است.	شیب صفر است.

اتحادهای مثلثاتی

با استفاده از روابط مثلثاتی می‌توانیم نشان بدهیم که بعضی از تساوی‌ها همیشه درست هستند. این تساوی‌ها را اتحاد مثلثاتی می‌نامیم. در حل برخی از تست‌ها بد نیست که یک مقدار مشخص به θ بدهیم:

اگر رابطهٔ $\sin^۴\theta + \cos^۴\theta = ۱ + B\sin^۲\theta\cos^۲\theta$ یک اتحاد باشد، B کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) −۱ ۴) −۲

گزینهٔ «۴» **راه‌حل اول** θ را ۴۵° قرار دهیم:

$$\sin^۴ ۴۵^\circ + \cos^۴ ۴۵^\circ = ۱ + B\sin^۲ ۴۵^\circ \cos^۲ ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۴ + (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۴ = ۱ + B(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲$$

$(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۴$ یا همان $((\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲)^۲$ می‌شود $\frac{۱}{۴}$ پس:

$$\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = ۱ + B(\frac{۱}{۴})$$

$$\Rightarrow ۱ + \frac{B}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow B = -۲$$

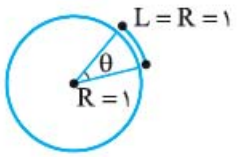
راه‌حل دوم از طرف چپ به راست برسیم: (صورت اتحاد به شکل $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$ را به یاد داریم)

$$\sin^۴\theta+\cos^۴\theta=(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)^۲-۲\sin^۲\theta\cos^۲\theta=۱-۲\sin^۲\theta\cos^۲\theta$$

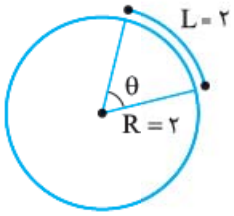
$$\Rightarrow\ B=-۲$$

معرفی رادیان

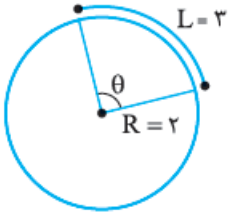
یک رادیان زاویه‌ای است که طول کمان روبرویش برابر شعاع دایره باشد.



این دایرهٔ مثلثاتی است و زاویهٔ θ ۱ رادیان است.



این زاویه ۱ رادیان است.

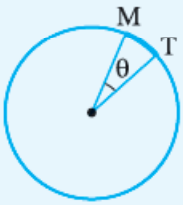


این زاویه از ۱ رادیان بیشتر است.

درواقع اندازهٔ زاویه برحسب رادیان برابر است با:

$$\theta=\frac{\text{طول کمان}}{\text{شعاع دایره}}=\frac{L}{R}$$

روی زمین فاصله تهران تا مشهد ۹۰۰ کیلومتر و شعاع زمین ۶۳۰۰ کیلومتر است. زاویه‌ای که رأسش مرکز زمین رسم شده و انتهای ضلع‌های آن تهران و مشهد باشند چند رادیان است؟

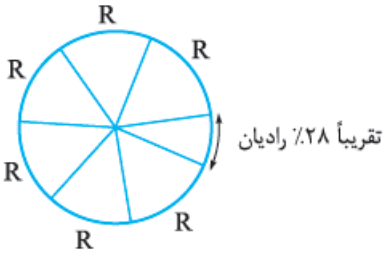


۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۱۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲۱}$

گزینهٔ «۲»

$$\theta=\frac{L}{R}=\frac{۹۰۰}{۶۳۰۰}=\frac{۱}{۷}$$

اشاره محیط دایره برابر $۲\pi R$ است، پس با دقت به این‌که $\pi\simeq ۳/۱۴$، محیط دایره تقریباً $۶/۲۸R$ است. یعنی در محیط دایره شش زاویه به اندازهٔ ۱ رادیان جا می‌شود.



در دایره به شعاع ۱، کل محیط دایره برابر $L=۲\pi$ است که می‌شود ۳۶۰° پس: $۲\pi=۳۶۰^\circ\ \Rightarrow\ \pi=۱۸۰^\circ$

پس اولاً هر ۱ رادیان می‌شود $\frac{۱۸۰}{\pi}$ درجه (تقریباً ۵۷/۳ درجه)

ثانیاً هر ۱ درجه می‌شود $\frac{\pi}{۱۸۰}$ رادیان (تقریباً ۰/۰۱۷ رادیان)

ثالثاً برای تبدیل از درجه به رادیان باید مقدار زاویه را در $\frac{\pi}{۱۸۰}$ ضرب کنیم. مثلاً:

$$۳۶^\circ=۳۶\times\frac{\pi}{۱۸۰}=\frac{\pi}{۵}(\text{rad})$$

$$۵۰^\circ=۵۰\times\frac{\pi}{۱۸۰}=\frac{۵\pi}{۱۸}(\text{rad})$$

زاویهٔ ۲۴° برحسب رادیان چه‌قدر از $\frac{\pi}{۱۰}$ بیشتر است؟

۱) $\frac{\pi}{۴۰}$ ۲) $\frac{\pi}{۳۰}$ ۳) $\frac{\pi}{۶۰}$ ۴) $\frac{\pi}{۲۰}$

گزینهٔ «۲» **راه‌حل اول** اول ۲۴° را برحسب رادیان بنویسیم: $۲۴^\circ = ۲۴\frac{\pi}{۱۸۰} \overset{\div ۶}{\underset{\div ۶}{=}} \frac{۴\pi}{۳۰} = \frac{۲\pi}{۱۵}$

اختلاف با $\frac{\pi}{۱۰}$: $\frac{۲\pi}{۱۵} - \frac{\pi}{۱۰} = \frac{۴\pi - ۳\pi}{۳۰} = \frac{\pi}{۳۰}$

راه‌حل دوم $\frac{\pi}{۱۰}$ رادیان می‌شود ۱۸°، اختلاف آن با ۲۴° می‌شود ۶° و سؤال برحسب رادیان خواسته:

$$۶^\circ = \frac{۶\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۳۰}(\text{rad})$$

کدام درست است؟

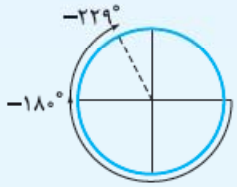
۱) -۴ رادیان در ربع سوم است.

۲) در مثلثی با دو ضلع ۱، زاویهٔ بین برابر ۱ رادیان، طول ضلع سوم از ۱ بیشتر است.

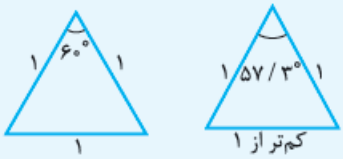
۳) کمان ۱۸° در دایرهٔ با شعاع ۱، طولی برابر ۰/۳۱۴ دارد.

۴) سینوس زاویهٔ ۳ رادیان، منفی است.

گزینهٔ «۳» در ۱، -۴ رادیان یعنی $-۴ \times ۵۷/۳ \simeq -۲۲۹^\circ$ که در ربع دوم می‌افتد.



در ۲، زاویهٔ بین دو ضلع ۱ رادیان یعنی $۵۷/۳^\circ$ که از ۶۰° کم‌تر است؛ پس ضلع سوم از ۱ کم‌تر است.



در ۳، کمان ۱۸° می‌شود $۱۸ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۱۰}$ رادیان و طولش برابر است با:

$$L = R\theta = ۱ \times \frac{\pi}{۱۰} = \frac{۳/۱۴}{۱۰} = ۰/۳۱۴$$

و این درست است.

در ۴، زاویهٔ ۳ رادیان می‌شود $۳ \times ۵۷/۳^\circ \simeq ۱۷۲^\circ$ که در ربع دوم قرار دارد و سینوسش مثبت است.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای وابسته به θ

زاویه‌هایی مثل $\frac{\pi}{۲} \pm \theta$، $\pi \pm \theta$، $\frac{۳\pi}{۲} \pm \theta$ و $-\theta$ را در این قسمت می‌بینیم.

در اولین قدم یادتان باشد که ۲π یا همان ۳۶۰° را می‌توانیم از کمان حذف یا به آن اضافه کنیم؛ مثلاً ۳۹۰° همان ۳۰° است (در اصطلاح این دو کمان «هم‌انتها» هستند)، یا $\frac{۲۵\pi}{۳}$ همان $\frac{\pi}{۳}$ است

در قدم بعدی باید ربع کمان را تعیین کنیم. $\frac{\pi}{۲}-\alpha$ ربع اول است، $\frac{\pi}{۲}+\alpha$ و $\pi-\alpha$ ربع دوم هستند. کمان‌های $\pi+\alpha$ و $\frac{۳\pi}{۲}-\alpha$ در ربع سوم قرار دارند و کمان $\frac{۳\pi}{۲}+\alpha$ و $-\alpha$ در ربع چهارم واقع می‌شوند. علامت نسبت را در آن ربع می‌نویسیم و در گام آخر باید روی نسبت مثلثاتی تصمیم بگیریم. قانون این است که اگر $\frac{\pi}{۲}$ یا $\frac{۳\pi}{۲}$ داشت نسبت را عوض می‌کنیم (sin می‌شود cos و برعکس، tan می‌شود cot و برعکس)؛ این‌ها را ببینید:

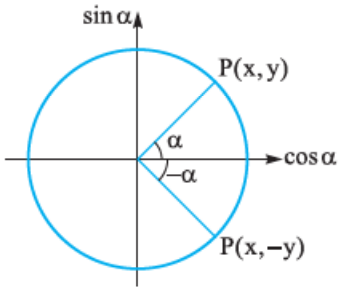
$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha) \xrightarrow{\text{ربع دوم}} +\cos\alpha$ ($\frac{\pi}{۲}$ دارد و عوض می‌شود.)

$\cos(\pi+\alpha) \xrightarrow{\text{ربع سوم}} -\cos\alpha$ (π دارد و عوض نمی‌شود.)

$\tan(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha) \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} -\cot\alpha$ ($\frac{۳\pi}{۲}$ دارد و عوض می‌شود.)

کتاب درسی سه حالت خاص هم دارد:

دو زاویهٔ قرینه



$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

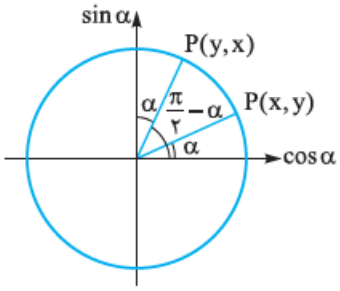
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$

*کسینوس منفی را می‌خورد و بقیه به پشت خود می‌اندازند.

دو زاویهٔ متمم

$\alpha+\beta=۹۰^\circ$

$\beta=۹۰-\alpha$ یا $\frac{\pi}{۲}-\alpha$



$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$

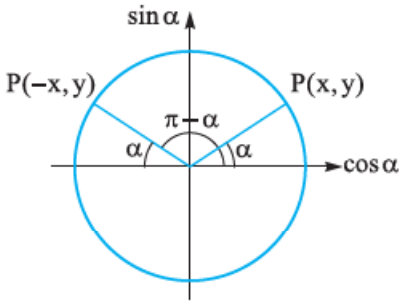
$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$

$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$

دو زاویهٔ مکمل

$\alpha+\beta=۱۸۰^\circ$

$\beta=۱۸۰^\circ-\alpha$ یا $\pi-\alpha$



$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

اگر α کمانی در ربع اول باشد، در میان عبارات زیر چند مقدار مختلف هست؟

$$\sin(\pi+\alpha),\cos(\alpha+\frac{\pi}{۲}),\sin(\alpha-\pi),\cos(\alpha-\frac{\pi}{۲})$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۲»

$$\sin(\pi+\alpha) \xrightarrow[\sin<۰]{\text{ربع سوم}} =-\sin\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha) \xrightarrow[\cos<۰]{\text{ربع دوم}} =-\sin\alpha$$ (چون $\frac{\pi}{۲}$ داشت، عوض شد.)

$$\sin(\alpha-\pi)=-\sin(\pi-\alpha) \xrightarrow[\sin>۰]{\text{ربع دوم}} =-\sin\alpha$$

اشاره دقت کردید؟ برای $\alpha-\pi$ نوشتیم $-(\pi-\alpha)$ و چون سینوس بود، منفی را به پشت خودش آورد.

$$\cos(\alpha-\frac{\pi}{۲})=\cos(-(\frac{\pi}{۲}-\alpha)) \xrightarrow{\text{منفی را می‌خورد}} =\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$$

$$\xrightarrow[\cos>۰]{\text{ربع اول}} =+\sin\alpha$$

پس ۳تا از آن‌ها $-\sin\alpha$ و یکی دیگر $\sin\alpha$ بود، یعنی ۲ مقدار مختلف وجود دارد.

حاصل $\frac{\sin ۱۲۰^\circ}{\tan ۶۰۰^\circ}$ چه‌قدر بیشتر از $\cos ۸۴۰^\circ \tan\frac{۱۱\pi}{۴}$ است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

گزینهٔ «۱»

$$\sin ۱۲۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ) \xrightarrow[\sin>۰]{\text{ربع دوم}} =\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۶۰۰^\circ=\tan ۲۴۰^\circ=\tan(۱۸۰^\circ+۶۰^\circ) \xrightarrow[\tan>۰]{\text{ربع سوم}} =\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$$

۳۶۰° کم کنیم

پس جواب اولی می‌شود $\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\sqrt{۳}}$ یعنی $\frac{۱}{۲}$.

حالا دومی:

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴} \xrightarrow{\frac{۸\pi}{۴}\text{ کم کنیم}} =\tan\frac{۳\pi}{۴}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۴}) \xrightarrow[\tan<۰]{\text{ربع دوم}}$$

$$=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\cos ۸۴۰^\circ \xrightarrow[(۲\times ۳۶۰^\circ)]{۷۲۰^\circ\text{ کم کنیم}} =\cos ۱۲۰^\circ=\cos(۹۰^\circ+۳۰^\circ) \xrightarrow[\cos<۰]{\text{ربع دوم}} =-\sin ۳۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$$

پس حاصل سومی هم می‌شود $+\frac{۱}{۲}$ و اختلافشان صفر است.

اگر $\tan 40^\circ = 0/8$ ، حاصل $\dfrac{\sin 130^\circ - \cos 310^\circ}{\sin 230^\circ + \cos 140^\circ}$ کدام است؟

۱) $0/1$ ۲) $0/3$ ۳) $-0/1$ ۴) $-0/3$

گزینهٔ «۳» همه کمان‌ها را برحسب 40° بنویسیم:

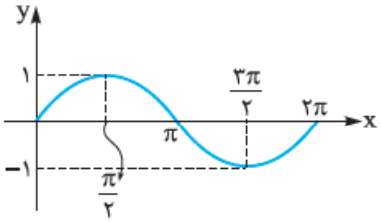
$$\frac{\sin(\overbrace{90^\circ + 40^\circ}^{\text{دوم}}) - \cos(\overbrace{270^\circ + 40^\circ}^{\text{چهارم}})}{\sin(\underbrace{270^\circ - 40^\circ}_{\text{سوم}}) + \cos(\underbrace{180^\circ - 40^\circ}_{\text{دوم}})}$$

در صورت نسبت‌ها عوض می‌شوند، در مخرج هم سینوس باید کسینوس شود:

$$= \frac{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ}{-\cos 40^\circ - \cos 40^\circ} = \frac{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ}{-2\cos 40^\circ}$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tan 40^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{10} = \frac{-1}{2} + \frac{4}{10} = -\frac{1}{10}$$

نمودار توابع سینوسی و کسینوسی



نمودار $y = \sin x$ به صورت مقابل است:

البته این نمودار فقط در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ رسم شده است.

اما در بازه‌های دیگر به صورت $[2k\pi, 2k\pi + 2\pi]$ هم همین شکل را دارد، چون مضارب زوج π تأثیری روی کمان نمی‌گذارند.

ویژگی‌های نمودار $y = \sin x$ را مرور کنیم:

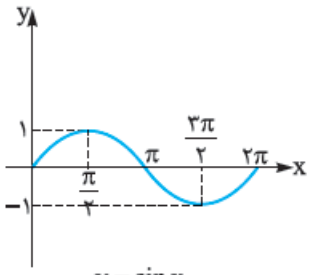
★ دامنه $= \mathbb{R}$ ، برد $= [-1, 1]$، دورهٔ تناوب $= 2\pi$

★ نقاط برخورد تابع با محور x (صفرهای تابع): $x = k\pi$

★ نقاط ماکزیمم (جاهایی که حداکثر مقدار را دارد): $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

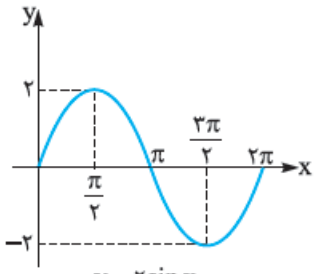
★ نقاطی که تابع حداقل مقدار را دارد (نقاط مینیمم): $x = 2k\pi + \dfrac{3\pi}{2}$

اشاره مثل هر تابع دیگر، با انتقال نمودار تابع $\sin x$ می‌توانیم نمودارهای جدیدی بکشیم. شکل‌ها را ببینید:



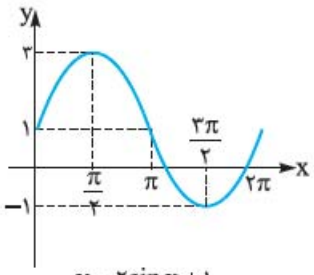
$y = \sin x$

$\Rightarrow$



$y = 2\sin x$

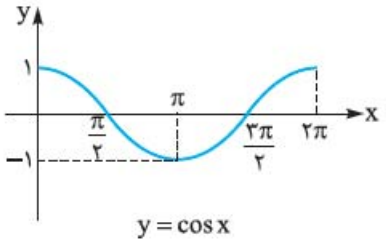
$\Rightarrow$



$y = ۲\sin x + ۱$

اشاره تغییرات مقدار $\sin x$ هم مورد توجه کتاب درسی است. از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ سینوس زیاد می‌شود (از صفر به ۱ می‌رسد) سپس از $\frac{\pi}{۲}$ تا $\frac{۳\pi}{۲}$ مقدار سینوس از ۱ به ۱− کاهش می‌یابد و در انتها، از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π، سینوس از ۱− به صفر می‌رسد (زیاد می‌شود).

نمودار $y = \cos x$ به صورت مقابل است:



$y = \cos x$

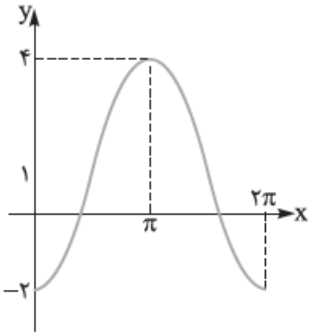
نمودار این تابع هم در فاصله‌های $[۲k\pi, ۲k\pi + ۲\pi]$ تکرار می‌شود.

دامنه، برد و دورهٔ تناوب آن مثل $y = \sin x$ است: $T = ۲\pi \ , \ R = [-۱,۱] \ , \ D = \mathbb{R}$

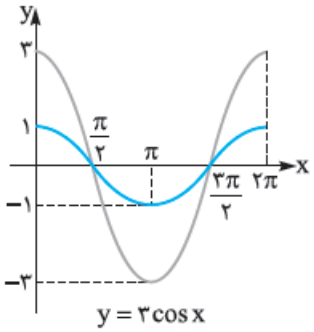
نقاط برخورد $y = \cos x$ با محور xها در طول‌های $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ است.

بیشترین مقدار تابع در نقاط $x = ۲k\pi$ رخ می‌دهد و کم‌ترین مقدار آن در $x = ۲k\pi + \pi$ است.

نمودار $y = ۱ - ۳\cos x$ را ببینید:



$y = -۳\cos x + ۱$

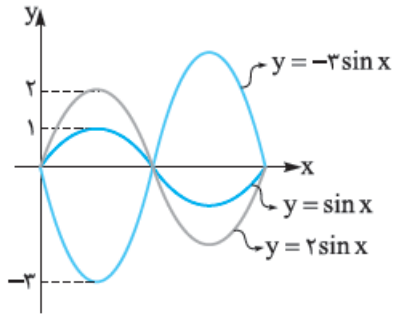


$y = ۳\cos x$

بررسی نمودارهای $y = b\cos ax$ و $y = b\sin ax$:

وقتی ضریب b را در تابع ضرب می‌کنیم عرض نقاط، b برابر می‌شوند. اگر $b < ۰$ باشد جای ماکزیمم و مینیمم عوض می‌شود.

با ضرب a در x، مقادیر xها (یعنی اعداد محور افقی) بر a تقسیم می‌شوند.

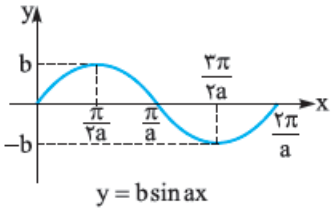


پس نمودار $y = b\sin ax$ به صورت مقابل است:

عرض ماکزیمم و مینیمم

$$y = b\sin a x$$

طول‌های نقاط



$y = b\sin ax$

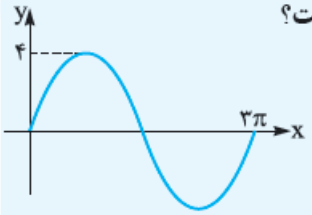
★ صفرهای تابع: $x = \frac{k\pi}{a}$

★ طول نقاط ماکزیمم: $x = \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{a}$

★ طول نقاط مینیمم: $x = \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{a}$

★ دورهٔ تناوب: $T = \frac{2\pi}{|a|}$

شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = m\sin nx$ است. $m + n$ کدام است؟



۱) $\frac{10}{3}$ ۲) $\frac{11}{3}$

۳) $\frac{13}{3}$ ۴) $\frac{14}{3}$

گزینهٔ «۴» بیشترین مقدار تابع ۴ است؛ پس $m = 4$. نقطهٔ 3π (دورهٔ تناوب برابر 3π است) در محل $\frac{2\pi}{a}$ است؛ پس:

$$3\pi = \frac{2\pi}{a} \Rightarrow a = \frac{2}{3} = n$$

پس $n = \frac{2}{3}$ و داریم:

$$m + n = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

اشاره گفتیم دورهٔ تناوب تابع‌های $y = \sin ax$ و $y = \cos ax$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است.

بیایید با هم چند مثال حل کنیم:

دورهٔ تناوب تابع $f(x) = 2\sin\frac{3x}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

گزینهٔ «۲»

$$T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$$

دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \cos 3x - 2\sin 2x$ کدام است؟

۱) 3π ۲) 2π ۳) π ۴) $\frac{\pi}{2}$

گزینهٔ «۲» در تابع‌های جمع و تفریق، باید از دوره‌های تناوب ک.م.م بگیریم:

$$\cos 3x : T_1 = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin 2x : T_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\xrightarrow{\text{ک.م.م}} T = 2\pi$$

مسائل کاربردی توابع متناوب

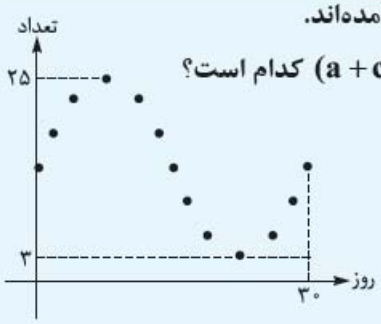
تابع‌های متناوب برای پدیده‌های تکراری به کار می‌روند. اگر داده‌ها را در یک دورهٔ تناوب داشته باشیم، تابعی به شکل $f(t) = a\sin(bt) + c$ برای آن‌ها به دست می‌آوریم.

a را دامنهٔ موج می‌نامیم که نصف دامنهٔ تغییرات داده است. c مقدار اولیهٔ تابع و برابر معدل بیشترین و کم‌ترین داده است. برای b هم داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{۲\pi}{T}$$

تعداد مشتریان یک مغازه در ۳۰ روز ماه در نمودار زیر آمده‌اند.

اگر $f(t) = a\sin bt + c$ تعداد مشتریان را نشان دهد، $(a+c)b$ کدام است؟



۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۳}$

۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}$

گزینهٔ «۲»

$$a = \frac{\max - \min}{۲} = \frac{۲۵ - ۳}{۲} = ۱۱$$

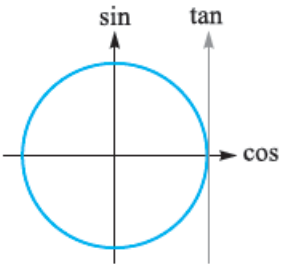
$$c = \frac{\max + \min}{۲} = \frac{۲۵ + ۳}{۲} = ۱۴$$

$$b = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۳۰} = \frac{\pi}{۱۵}$$

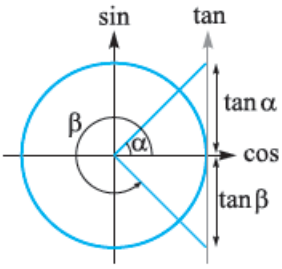
$$\Rightarrow (a+c)b = (۱۱+۱۴)\frac{\pi}{۱۵} = \frac{۲۵\pi}{۱۵} = \frac{۵\pi}{۳}$$

تابع تانژانت و محاسبهٔ تانژانت از دایرهٔ مثلثاتی

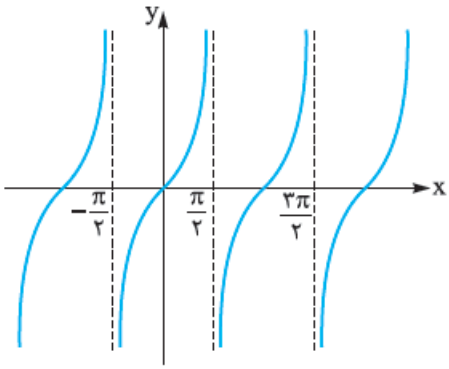
محور تانژانت، مماس بر دایرهٔ مثلثاتی و موازی محور sin است:



برای به دست آوردن $\tan\alpha$ باید شعاع را امتداد دهیم تا به محور تانژانت بخورد. دقت کنید که زاویهٔ β در ربع چهارم و تانژانت آن منفی است.



نمودار تابع $y = \tan x$ به شکل صفحهٔ بعد درمی‌آید:



در دامنهٔ آن نقاط $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ را نداریم (در این نقاط تانژانت وجود ندارد)، برد آن $\mathbb{R}$ است و دورهٔ تناوبش $T = \pi$ است.

صفرهای این تابع در محل صفرهای $y = \sin x$ هستند. پس طول نقاط تلاقی نمودار تابع با محور xها، $x = k\pi$ است.

اشاره دورهٔ تناوب $y = \tan ax$ به صورت $T = \frac{\pi}{|a|}$ و نقاط برخورد آن با محور افقی در $x = \frac{k\pi}{a}$ است.

دورهٔ تناوب کدام تابع از بقیه کم‌تر است؟

۱) $y = \tan 3x$ ۲) $y = \sin 5x$ ۳) $y = \cos 4x$ ۴) $y = \sin \pi x$

گزینهٔ «۱» دوره‌های تناوب به ترتیب $T_1 = \frac{\pi}{3}$، $T_2 = \frac{2\pi}{5}$، $T_3 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ و $T_4 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ هستند که ۱ از همه کم‌تر است.

نسبت‌های مثلثاتی 2α

می‌توان ثابت کرد که:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

در رابطهٔ $\cos 2\alpha$، صورت‌های دیگری هم هست:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

اگر $\sin\alpha = \frac{1}{3}$، آن‌گاه مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟

۱) ۰/۷۸ ۲) ۰/۸۸ ۳) ۰/۲۲ ۴) ۰/۳۳

گزینهٔ «۱» چون $\sin\alpha$ را داریم، سراغ فرمول $\cos 2\alpha$ برحسب $\sin\alpha$ می‌رویم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2(\frac{1}{3})^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \simeq 0/78$$

اگر $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$، آن‌گاه مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) -1

گزینهٔ «۳» فرمول $\sin 2\alpha$ به حاصل‌ضرب سینوس و کسینوس نیاز دارد. رابطهٔ $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = (\frac{1}{2})^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{\text{این ۱ است}} + \underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\text{این } \sin 2\alpha \text{ است}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{4} - 1 = \frac{-3}{4}$$

اگر $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \frac{3}{5}$. آن‌گاه مقدار $\sin 4\alpha$ کدام است؟ (α در ربع اول است.)

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۷۲ ۳) ۰/۳۶ ۴) ۰/۹۶

گزینهٔ «۴» شما هم با دیدن $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$ یاد اتحاد مزدوج افتادید؟

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \underbrace{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}_{\text{این } \cos 2\alpha \text{ است}}\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{\text{این ۱ است}} = \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$$

از رابطهٔ $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ هم نتیجه می‌شود $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$ (دقت کنید که α در ربع اول و $\sin 2\alpha$ مثبت است).

پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\cos 2\alpha = \frac{3}{5}\\ \sin 2\alpha = \frac{4}{5}\end{array}\right\} \Rightarrow \sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2(\frac{3}{5})(\frac{4}{5}) = \frac{24}{25} \xrightarrow[\times 4]{\times 4} = 0/96$$

اشاره دقت کردید برای $\sin 4\alpha$ چه کار کردیم؟

4α را به صورت $2(2\alpha)$ در نظر گرفتیم و فرمول $\sin 2(\alpha)$ را استفاده کردیم.

این‌ها را ببینید:

$$\sin x = \sin 2(\frac{x}{2}) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$1 - \sin^2 \pi x = \cos^2(\pi x)$$

$$\cos^2\frac{x}{3} - \sin^2\frac{x}{3} = \cos(\frac{2x}{3})$$

اشاره از تقسیم $\sin 2\alpha$ بر $\cos 2\alpha$ می‌توان نشان داد که $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

اگر $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{-1}{2}$. آن‌گاه مقدار $\tan 4\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{24}{7}$ ۲) $\frac{24}{7}$ ۳) $\frac{25}{7}$ ۴) $-\frac{25}{7}$

گزینهٔ «۲» اول عبارت $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ را ساده کنیم تا بعد سراغ $\tan 4\alpha$ برویم:

$$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\cos^2\alpha - 1} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \tan\alpha = \frac{-1}{2}$$

آهان! پس $\tan\alpha = \frac{-1}{2}$ و داریم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2(\frac{-1}{2})}{1-(\frac{-1}{2})^2} = \frac{-1}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$$

$$\tan 4\alpha = \tan 2(2\alpha) = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{2(\frac{-4}{3})}{1-(\frac{-4}{3})^2} = \frac{\frac{-8}{3}}{1-\frac{16}{9}} = \frac{\frac{-8}{3}}{\frac{-7}{9}} = \frac{24}{7}$$

اشاره در مثال قبل دیدیم که $1+\cos 2\alpha$ به صورت $2\cos^2\alpha$ ساده می‌شود.

این دو رابطه را فرمول‌های طلایی می‌نامیم:

$$2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$$

$$2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$$

با کمک این فرمول‌ها می‌توانیم کسرها را ساده کرده و با داشتن کسینوس یک کمان، سینوس و کسینوس نصف آن را حساب کنیم. ببینید:

$$\alpha = 22/5^\circ \Rightarrow 2\sin^2 22/5^\circ = 1-\cos\underbrace{2\times 22/5^\circ}_{45^\circ} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\xrightarrow[\div 2]{} \sin^2 22/5^\circ = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 22/5^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\alpha = 15^\circ \Rightarrow 2\cos^2 15^\circ = 1+\cos 2\times 15^\circ = 1+\cos 30^\circ = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\xrightarrow{\div 2} \cos^2 15^\circ = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

و با کمی محاسبهٔ رادیکالی می‌شود به $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ هم رسید.

این فرمول‌ها را در ذهن نگه دارید:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1-2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

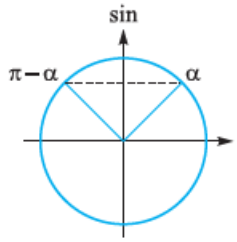
$$(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha$$

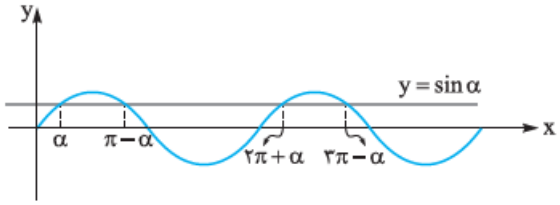
$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$$

معادلهٔ مثلثاتی

۱- جواب معادلهٔ $\sin x = \sin\alpha$ را با استفاده از دایره یا نمودار می‌توان به دست آورد:





$$\sin x = \sin\alpha$$

در این شکل‌ها می‌بینید در هر دورهٔ تناوب مقدار سینوس ۲ بار به $\sin\alpha$ می‌رسد، مثلاً از صفر تا 2π یک بار وقتی $x=\alpha$ است و بار دیگر وقتی $x=\pi-\alpha$ است.

با این دیدگاه جواب کلی معادلهٔ سینوسی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

کتاب درسی جواب دوم را به صورت $x = (2k+1)\pi - \alpha$ نوشته است.

از معادلهٔ $\sin x = \frac{-1}{2}$ جواب کلی x به کدام صورت است؟

۱) $\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{5\pi}{6} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$

گزینهٔ «۴» $\frac{-1}{2}$، سینوس زاویهٔ $-\frac{\pi}{6}$ است. پس معادله به صورت $\sin x = \sin(-\frac{\pi}{6})$ است و جواب کلی آن را داریم:

$$x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{6}) = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi + \pi - (\frac{-\pi}{6}) = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}$$

سؤال می‌تواند جواب‌ها را در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ بخواهد:

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow[k=1]{\text{بین ۰ و } 2\pi} x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \xrightarrow[k=0]{\text{بین ۰ و } 2\pi} x = \frac{7\pi}{6}$$

در این فاصله دو جواب داریم که جمع آن‌ها $\frac{7\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = 3\pi$ است.

اشاره به جای x و α ممکن است هر چیز دیگری هم باشد. اشکالی ندارد! ببینید:

(به جای x، 2x است.)

$$\sin 2x = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

(در دو طرف x است.)

$$\sin 3x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{4} \end{cases}$$

از معادلهٔ $\frac{۱}{۲}\sin ۳x = \sin x \cos x$. چند جواب برای x در بازهٔ $(۰,\pi)$ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۲» اول دو طرف را در ۲ ضرب کنیم:

$$\sin ۳x = ۲\sin x \cos x = \sin ۲x$$

حالا جواب کلی معادلهٔ $\sin ۳x = \sin ۲x$ را بلدیم:

$$\begin{cases} ۳x = ۲k\pi + ۲x \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - ۲x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi \xrightarrow{\text{بین ۰ و } \pi} \text{ندارد} \\ ۵x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۵} \xrightarrow[k=۰ \text{ و } ۱]{\text{بین ۰ و } \pi} x = \frac{\pi}{۵}, \frac{۳\pi}{۵} \Rightarrow \text{۲ جواب} \end{cases}$$

اشاره بعضی وقت‌ها باید معادله را به صورت درجه‌دوم حل کنیم.

از معادلهٔ $\cos ۲x = \sin x$. جمع جواب‌ها در $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) $\frac{۵\pi}{۲}$

گزینهٔ «۴» چون در طرف راست $\sin x$ داریم، به جای $\cos ۲x$ فرمولش را می‌نویسیم. (فرمولی که sin دارد!)

$$\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x = \sin x \Rightarrow ۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰$$

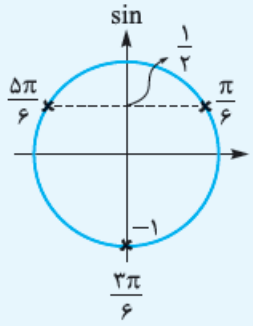
حالا $\sin x$ را t می‌گیریم تا معادلهٔ درجه‌دوم را ببینیم:

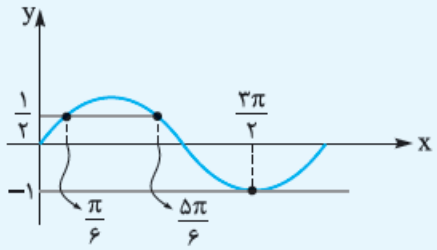
$$۲t^۲ + t - ۱ = ۰ \xrightarrow[b=a+c]{} t = -۱ \ , \ t = +\frac{۱}{۲}$$

پس دوتا معادله داریم:

$$\sin x = -۱ \ , \ \sin x = \frac{۱}{۲}$$

حل این معادله‌ها را در دایره و دستگاه مختصات ببینید:





پس جواب‌ها در فاصلهٔ $(۰,۲\pi)$ عبارت‌اند از: $\frac{۳\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۶}, \frac{\pi}{۶}$ و جمع آن‌ها می‌شود $\frac{۵\pi}{۲}$.

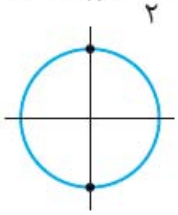
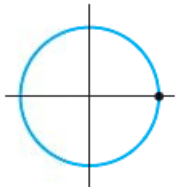
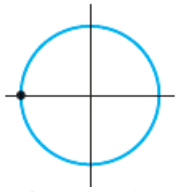
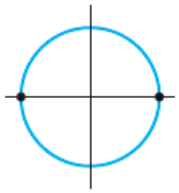
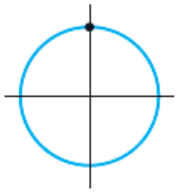
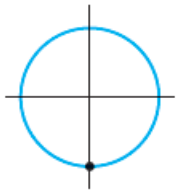
اشاره البته می‌توانستیم معادله‌ها را با فرمول جواب کلی هم حل کنیم:

$$\sin x = -۱ = \sin(-\frac{\pi}{۲}) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{-\pi}{۲} = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{-\pi}{۲} = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

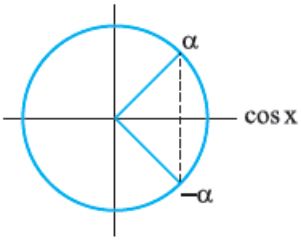
معادلات مثلثاتی در حالت خاص

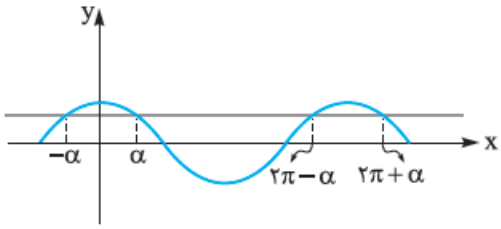
جواب کلی ۶ تا معادلهٔ مثلثاتی را حفظ می‌کنیم:

$\cos x = ۰ \Downarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ 	$\cos x = ۱ \Downarrow x = ۲k\pi$  ریشهٔ مضاعف دارد	$\cos x = -۱ \Downarrow x = ۲k\pi + \pi$  ریشهٔ مضاعف دارد
$\sin x = ۰ \Downarrow x = k\pi$ 	$\sin x = ۱ \Downarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$  ریشهٔ مضاعف دارد	$\sin x = -۱ \Downarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$  ریشهٔ مضاعف دارد

۲- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos x = \cos\alpha$ را نیز باید بلد باشیم:

$$\cos x = \cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi - \alpha \end{cases}$$





تمام حرف‌هایی که در مورد معادلهٔ سینوسی داشتیم در این‌جا هم هست.

چند مثال سریع ببینید:

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{8}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{-1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 4k\pi \pm \frac{4\pi}{3}$$

$$\cos 3x = \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \\ 3x = 2k\pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

دقت می‌کنید که جواب کلی معادلهٔ $\cos x = \cos\alpha$ را به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ هم می‌آوریم!

از معادلهٔ $2\cos^2 x = 1 + \cos x$ چند جواب برای x در فاصلهٔ $(0, 2\pi)$ داریم؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ «۲» اگر -1 را به طرف چپ ببریم عبارت $2\cos^2 x - 1$ همان فرمول $\cos 2x$ است. پس:

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{\text{از } 0 \text{ تا } 2\pi} \text{نداریم} \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \xrightarrow[k=1,2]{\text{از } 0 \text{ تا } 2\pi} x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

پس ۲ جواب داریم.

اشاره اگر به k عدد بدهیم می‌بینیم مقادیر $x = 2k\pi$ در بین اعداد $x = \frac{2k\pi}{3}$ ظاهر می‌شوند:

$$2k\pi : 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$$

$$\frac{2k\pi}{3} : 0, \pm\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{4\pi}{3}, \pm 2\pi, \pm\frac{8\pi}{3}, \pm\frac{10\pi}{3}, \pm 4\pi, \ldots$$

پس جواب $x = \frac{2k\pi}{3}$ کافی است. (جواب‌های بالایی را در خودش دارد.)

یعنی جواب این معادله فقط $x = \frac{2k\pi}{3}$ است.

مثلثات

۳۶۰- مجموع دو زاویه $\frac{۳\pi}{۱۰}$ رادیان و تفاضلشان ۱۸° است، زاویهٔ بزرگ‌تر چند برابر زاویهٔ کوچک‌تر است؟ *(کتاب درسی)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۶۱- کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟ *(کتاب درسی)*

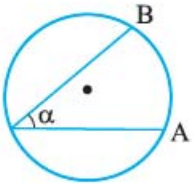
۱) در دایرهٔ مثلثاتی، طول کمان روبه‌روی زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}$ تقریباً ۱/۵۷ واحد است.

۲) زاویه‌های $\frac{۲\pi}{۳}$، $\frac{\pi}{۹}$ و $\frac{۲\pi}{۹}$ رادیان زاویه‌های یک مثلث‌اند.

۳) اگر زاویهٔ بین دو ساق یک مثلث متساوی‌الساقین ۱ رادیان باشد، آن‌گاه اندازهٔ قاعدهٔ این مثلث بزرگ‌تر از اندازهٔ هر کدام از ساق‌ها است.

۴) انتهای کمان‌های $\frac{۴\pi}{۳}$ و $-\frac{۸\pi}{۳}$ روی دایرهٔ مثلثاتی، بر هم منطبق‌اند.

۳۶۲- شعاع دایرهٔ روبه‌رو ۸ و اندازهٔ کمان AB برابر ۶ سانتی‌متر است. اندازهٔ زاویهٔ α چند رادیان است؟ *(کتاب درسی)*



۱) ۰/۳۲۵ ۲) ۰/۳۷۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸۵

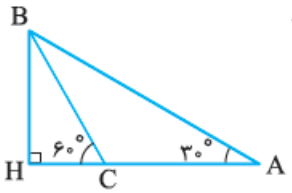
۳۶۳- نقاط A و B روی دایرهٔ مثلثاتی نقاط انتهایی کمان‌های $\frac{۱۱\pi}{۵}$ رادیان و ۱۵۰° درجه‌اند. اگر از A به B در جهت مثبت مثلثاتی حرکت کنیم چه کمانی را طی کرده‌ایم؟ *(کتاب درسی)*

۱) $\frac{۱۱\pi}{۳۰}$ ۲) $\frac{۱۳\pi}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱۷\pi}{۳۰}$ ۴) $\frac{۱۹\pi}{۳۰}$

۳۶۴- از نقطهٔ A زاویهٔ رؤیت بلندترین نقطهٔ ساختمانی ۳۰ درجه است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ A تا پای ساختمان ۳۰ متر باشد، ارتفاع ساختمان کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) $۱۰\sqrt{۳}$ ۴) $۳۰\sqrt{۳}$

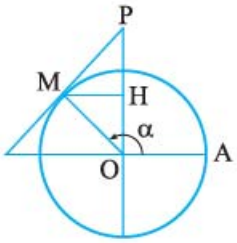
۳۶۵- در شکل مقابل زاویهٔ A برابر ۳۰ درجه و زاویهٔ C برابر ۶۰ درجه است. اگر طول AC برابر ۵۰ متر باشد، طول AH چند متر است؟



۱) ۷۵ ۲) ۸۰ ۳) ۸۵ ۴) ۹۰

۳۶۶- علی می‌خواهد ارتفاع درختی را که طول سایه‌اش ۲ متر است حساب کند. اگر طول قد و طول سایهٔ علی به ترتیب ۱/۸ متر و ۶۰ سانتی‌متر باشد، ارتفاع درخت چه‌قدر است؟ *(کتاب درسی)*

۱) ۶/۶ متر ۲) ۶ متر ۳) ۵/۴ متر ۴) ۵ متر



۳۶۷- در دایرهٔ مثلثاتی مطابق شکل مقابل، OA روی محور کسینوس‌ها و OP روی محور سینوس‌ها قرار دارد. اگر MH عمود بر OP و زاویهٔ $AOM = \alpha$ فرض شود، HP برابر کدام است؟

۱) $\sin\alpha\tan\alpha$ ۲) $\cos^2\alpha$

۳) $\cos\alpha\cot\alpha$ ۴) $\sin^2\alpha$

۳۶۸- در مثلث ABC داریم $A = \frac{\pi}{2}$ ، $\tan B = \sqrt{2}$ و $a = 3\sqrt{3}$. اندازهٔ ضلع c کدام است؟

۱) $\sqrt{6}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۶۹- بالنی طبق شکل روبه‌رو با دو طناب به زمین وصل شده است که طول یکی ۶۰ متر است. طول طناب دیگر تقریباً چه‌قدر است؟ *(کتاب درسی)*

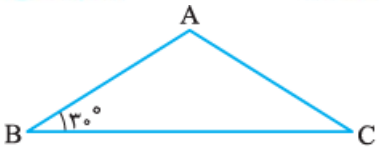
۱) ۵۱

۲) ۶۵

۳) ۷۳

۴) ۹۷

۳۷۰- در شکل زیر، $AB = AC = 6$. اندازهٔ مساحت مثلث کدام است؟ *(کتاب درسی)*



۱) $6\sqrt{3}$ ۲) $9\sqrt{3}$

۳) $12\sqrt{3}$ ۴) $18\sqrt{3}$

۳۷۱- طول بزرگ‌ترین قطر یک هشت‌ضلعی منتظم ۱۲ سانتی‌متر است، اندازهٔ مساحت این هشت‌ضلعی برابر کدام است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $72\sqrt{2}$ ۲) $96\sqrt{2}$ ۳) $72\sqrt{3}$ ۴) $96\sqrt{3}$

۳۷۲- چند مثلث می‌توان ساخت که طول دو ضلعش ۴ و ۶ سانتی‌متر و مساحتش ۶ سانتی‌متر مربع باشد؟ *(کتاب درسی)*

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۳۷۳- در متوازی‌الاضلاعی اندازهٔ دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویهٔ بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟ *(سراسری ۹۲)*

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۳۷۴- اگر α در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی باشد و $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. حاصل عبارت زیر کدام است؟ *(کتاب درسی)*

$$5\sin\alpha + 5\cos\alpha + 8\tan\alpha - 9\cot\alpha$$

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۵ ۴) -5

۳۷۵- اگر $\sin\alpha = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ و انتهای کمان α در ناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد، مقدار $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{-\sqrt{2}}{3}$

۳۷۶- حاصل عبارت $\frac{\cos^2 x}{1+\sin x} - 1$ برابر کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\sin x$ ۲) $-\sin x$ ۳) $1-\cos x$ ۴) $\cos x - 1$

۳۷۷- اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ باشد. حاصل عبارت $\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2 x(1-\cos^2 x)}}$ برابر است با:

۱) $\sin x - \cos x$ ۲) $\sin 2x$

۳) $-\sin x - \cos x$ ۴) $\sin x + \cos x$

۳۷۸- اگر $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{5}$ باشد. حاصل $\sin^6 x + \cos^6 x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{7}$

۳۷۹- اگر $\sin^2 x + 2\cos^2 x = \frac{3}{2}$ باشد. آن‌گاه $\tan^2 x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۳۸۰- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ باشد. حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $-\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{16}{3}$ ۴) $-\frac{16}{3}$

۳۸۱- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = \tan x$ باشد. ضابطهٔ تابع $(fog)(x)$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ برابر کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

۳۸۲- اگر $\sin 2\alpha < 0$ و $\cos\alpha\tan\alpha < 0$. آن‌گاه انتهای α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۳۸۳- اگر $x = 283^\circ$. کدام گزینه درست است؟

۱) $\cos x < \sin x$ ۲) $\tan x < \sin x$ ۳) $\tan^2 x < \sin^2 x$ ۴) $\cos x < \tan x$

۳۸۴- اگر $\cos x\sqrt{1+\tan^2 x} > \sqrt{1+\sin 2x}$. آن‌گاه انتهای کمان x در کدام ناحیه است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۳۸۵- اگر $120^\circ \le x \le 225^\circ$. کدام گزینه درست است؟

۱) $-1 \le \cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos x \le -\frac{1}{2}$

۳) $-\frac{1}{2} \le \cos x \le 0$ ۴) $-1 \le \cos x \le -\frac{1}{2}$

۳۸۶- اگر $\frac{-\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹}$ و $\cos ۳x = \frac{m-۱}{۲}$ ، مقادیر m در کدام فاصله است؟

۱) $(۱,۲]$ ۲) $(۰,۲)$ ۳) $(۲,۳]$ ۴) $[۳,۴)$

۳۸۷- مقدار عددی $\cos^۲ \frac{۳\pi}{۸} + \cos^۲ \frac{\pi}{۸}$ برابر است با:

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۳۸۸- حاصل عبارت $۲\cos(\frac{-۱۲۵\pi}{۴}) + ۳\tan(\frac{۱۲۵\pi}{۴}) + ۴\cot(\frac{-۱۲۵\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲}-۱$ ۲) $-\sqrt{۲}+۱$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\sqrt{۲}+۱$

۳۸۹- از تساوی $\frac{۲\sin(\alpha-۳\pi)+\cos(\alpha-\frac{\pi}{۲})}{\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)} = ۲$ مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-۱/۵$ ۳) ۲ ۴) $۱/۵$

۳۹۰- اگر $\tan\theta = ۰/۲$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)+\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}$ کدام است؟ (سراسری ۹۱)

۱) -۲ ۲) $۱/۲$ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۹۱- اگر $\tan ۲۰^\circ = ۰/۳۶$ باشد، حاصل $\frac{\sin ۱۶۰^\circ - \cos ۲۰۰^\circ}{\cos ۱۱۰^\circ + \sin ۷۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۱۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۸}$ ۴) $\frac{۳۱}{۱۶}$

۳۹۲- حاصل $\cos\frac{۳\pi}{۱۴} + \cos\frac{۵\pi}{۱۴} + \cos\frac{۷\pi}{۱۴} + \cos\frac{۹\pi}{۱۴} + \cos\frac{۱۱\pi}{۱۴}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۳۹۳- دورهٔ تناوب تابع $y = \tan(x - \frac{\pi}{۴})$ برابر است با:

۱) $۲\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) $\pi - \frac{\pi}{۴}$

۳۹۴- دورهٔ تناوب کدام تابع برابر π نیست؟ (کتاب درسی)

۱) $f(x) = ۲\sin ۲x - ۱$ ۲) $g(x) = \tan(\frac{\pi}{۳} - x)$

۳) $h(x) = ۳\cos(\frac{\pi}{۲} - ۲x) + ۲$ ۴) $k(x) = ۱ - ۲\sin(\frac{x}{۲})$

۳۹۵- مقدار $\sin ۲۲/۵^\circ$ برابر کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$ ۲) $\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$ ۴) $\sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}}$

۳۹۶- حاصل $\cos ۱۶۵^\circ \cos ۱۰۵^\circ$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

۳۹۷- حاصل عبارت $\sin 7/5^\circ \sin 97/5^\circ \cos 15^\circ$ چه‌قدر است؟

۱) $-\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۳۹۸- اگر $\tan\frac{2\pi}{3}\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=1$ باشد. مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۳۹۹- اگر $\cos 4x = a$ باشد. حاصل $\sin x\sin(\frac{\pi}{2}+x)\sin(\pi+x)\sin(\frac{3\pi}{2}+x)$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{a-1}{8}$ ۲) $\frac{1-a}{4}$ ۳) $\frac{1-a}{8}$ ۴) $\frac{a-1}{4}$

۴۰۰- کسر $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$ برابر است با:

۱) $1+\tan^2\alpha$ ۲) $\sin^2\alpha$ ۳) $(1+\tan\alpha)^2$ ۴) $\cot^2\alpha$

۴۰۱- حاصل کسر $\frac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos x+\cos 2x}$ کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\tan x$ ۳) $\cot x$ ۴) $\cos x$

۴۰۲- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(A=\frac{\pi}{2})$. حاصل عبارت $\frac{1+\cos 2C}{\sin 2B}$ برابر کدام است؟

۱) $\cos C$ ۲) $\cot C$ ۳) $\sin C$ ۴) $\tan C$

۴۰۳- به فرض $f(x)=x^2-2$. مقدار $f(f(f(2\cos x)))$ کدام است؟

۱) $2\sin^8 x$ ۲) $2\cos^8 x$ ۳) $2\sin 8x$ ۴) $2\cos 8x$

۴۰۴- اگر $\sin x-\cos x=\frac{1}{2}$ باشد. آن‌گاه $\sin 2x$ برابر است با:

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴۰۵- اگر $\sin x-\cos x=-\frac{1}{2}$ باشد. حاصل $\cos 4x$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{8}$

۴۰۶- اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$ باشد. مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2}-2\alpha)$ کدام است؟ (سراسری ۹۵)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۴۰۷- اگر $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{2}$ باشد. مقدار $\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2})$ کدام است؟ (خارج ۹۵)

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

۴۰۸- اگر $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ باشد. حاصل $\sqrt{1+\sin 2x}$ برابر است با:

۱) $|\sin x-\cos x|$ ۲) $\sin x+\cos x$ ۳) $\sin x-\cos x$ ۴) $-(\sin x+\cos x)$

۴۰۹- حاصل عبارت $\frac{2(1+\sin x)}{1+\cos x}$ کدام است؟

۱) $(1+\cot\frac{x}{2})^2$ ۲) $(1-\tan\frac{x}{2})^2$ ۳) $(1+\tan\frac{x}{2})^2$ ۴) $(1-\cot\frac{x}{2})^2$

۴۱۰- اگر $\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}=1$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟ (خارج ۹۴)

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۴۱۱- مقدار عددی $\cos^4\frac{\pi}{12}-\sin^4\frac{\pi}{12}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴۱۲- حاصل عبارت $\sin x.\cos x\,(1-2\sin^2 x)$ به ازای $x=7/5^\circ$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{3}{16}$

۴۱۳- عبارت $8\sin^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin x$ به ازای جمیع مقادیر x برابر است با:

۱) $\cos 2x$ ۲) $-\cos 2x$ ۳) $\sin 2x$ ۴) $-\sin 2x$

۴۱۴- عبارت $\cos^2(x-\frac{\pi}{4})-\sin x\cos x$ به ازای جمیع مقادیر x برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)$ ۲) $\frac{1}{2}(\cos 2x-\sin 2x)$

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۴۱۵- کدام گزینه درست است؟ (کتاب درسی)

۱) تابع سینوس در بازهٔ $(0,\pi)$ صعودی است.

۲) تابع کسینوس در بازهٔ $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ نزولی است.

۳) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

۴) تابع تانژانت در هر بازه‌ای که تعریف شده باشد، اکیداً صعودی است.

۴۱۶- کدام گزینه نادرست است؟ $k\in\mathbb{Z}$ (کتاب درسی)

۱) مقدار تابع سینوس در نقاط $x=k\pi$ برابر صفر است.

۲) مقدار تابع کسینوس در نقاط $x=k\pi$ برابر -1 است.

۳) حداکثر تابع سینوس در نقاط $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ به دست می‌آید.

۴) حداکثر تابع کسینوس در نقاط $x=2k\pi$ به دست می‌آید.

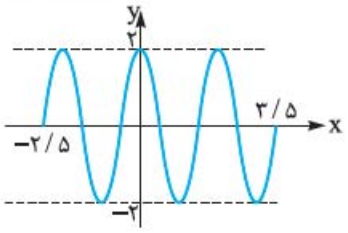
۴۱۷- در کدام تابع مینیمم برابر ۳− و ماکزیمم برابر ۵ و دورهٔ تناوب برابر ۳ است؟ (کتاب درسی)

۱) $y = ۴\cos(\frac{۳\pi}{۲}x) + ۱$
۲) $y = \cos(\frac{۳\pi}{۲}x) + ۴$
۳) $y = ۴\sin(\frac{۲\pi}{۳}x) + ۱$
۴) $y = \sin(\frac{۲\pi}{۳}x) + ۴$

۴۱۸- کم‌ترین مقدار عبارت $۲ + \sin x \cos x$ کدام است؟

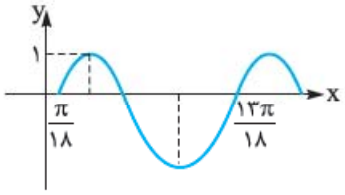
۱) ۱
۲) ۲
۳) صفر
۴) $\frac{۳}{۲}$

۴۱۹- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin\pi(\frac{۱}{۲} + bx)$ است. a.b کدام است؟ (سراسری ۹۲)



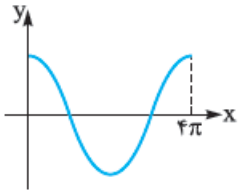
۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

۴۲۰- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a - ۲\cos(bx + \frac{\pi}{۲})$ است. $a + b$ کدام است؟ (سراسری ۹۵)



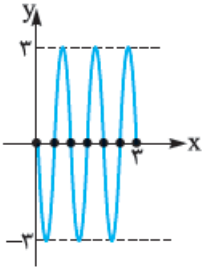
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

۴۲۱- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲} + ۲\cos mx$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x = \frac{۱۶\pi}{۳}$ کدام است؟ (سراسری ۹۶)



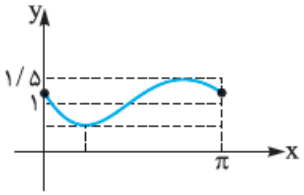
۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) صفر

۴۲۲- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. a.b کدام است؟ (خارج ۹۲)



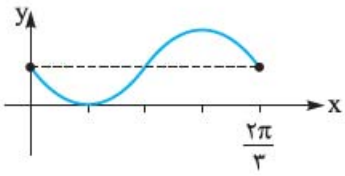
۱) −۶
۲) −۳
۳) ۴/۵
۴) ۶

۴۲۳- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۱ + a\sin(bx - \frac{\pi}{۶})$ است. $a + b$ کدام است؟ (خارج ۹۵)



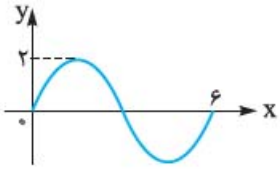
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

۴۲۴- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin(mx)$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x = \frac{7\pi}{6}$، کدام است؟ (خارج ۹۶)



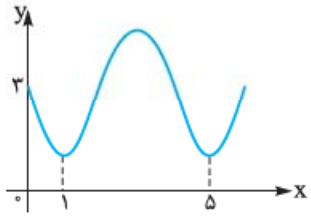
۱) صفر
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) ۲

۴۲۵- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟ (خارج ۹۳)



۱) $\frac{4}{3}$
۲) $\frac{5}{3}$
۳) $\frac{7}{3}$
۴) $\frac{8}{3}$

۴۲۶- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطهٔ $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟ (سراسری ۹۳)



۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

۴۲۷- در پرتاب یک توپ رابطهٔ بین سرعت توپ (v)، مسافت طی‌شده (d) و زاویهٔ پرتاب (θ) به صورت $d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$ است. اگر یک توپ را با سرعت $12 m/s$ به فاصلهٔ ۷/۲ متری پرتاب کنیم، زاویهٔ پرتاب برابر کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{\pi}{6}$
۲) $\frac{\pi}{8}$
۳) $\frac{\pi}{10}$
۴) $\frac{\pi}{12}$

۴۲۸- نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$، روی بازهٔ $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند؟ (خارج ۹۱)

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۴۲۹- یکی از جواب‌های معادلهٔ $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}$
۲) $\frac{5\pi}{6}$
۳) $\frac{7\pi}{6}$
۴) $\frac{4\pi}{3}$

۴۳۰- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$، کدام است؟ (سراسری ۹۵)

۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$
۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

۴۳۱- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$، کدام است؟ (سراسری ۹۶)

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۴۳۲- جواب کلی معادلهٔ $\sin(\pi + x)\cos(\frac{\pi}{2} + x) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$
۲) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$
۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$
۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

۴۳۳- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin(\pi - x)\cos(\frac{3\pi}{2} + x) + 2\cot x \sin(\pi + x) = 0$. کدام است؟

۱) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۴۳۴- انتهای کمان‌های x از معادلهٔ $\cos 2x \sin x = \cos 2x$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟

۱) شش‌ضلعی غیرمنتظم ۲) پنج‌ضلعی منتظم

۳) شش‌ضلعی منتظم ۴) پنج‌ضلعی غیرمنتظم

۴۳۵- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$. با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ (خارج ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۴۳۶- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$. به کدام صورت است؟ (سراسری ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۴۳۷- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (خارج ۹۶)

۱) $\frac{14\pi}{3}$ ۲) 4π ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) 5π

۴۳۸- مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$. کدام است؟ (خارج ۹۲)

۱) 8π ۲) 9π ۳) 10π ۴) 11π

۴۳۹- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ به کدام صورت است؟ (سراسری ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

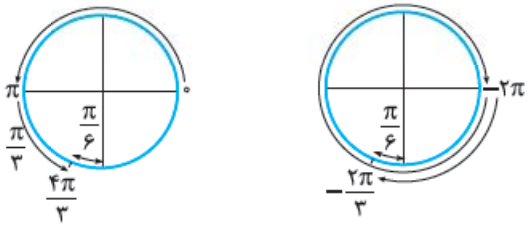
۳۶۰- گزینهٔ «۲» کافی است همهٔ واحدها را به درجه تبدیل کنیم. $\frac{۳\pi}{۱۰}$ رادیان یعنی $\frac{۳\times ۱۸۰^\circ}{۱۰}=۵۴^\circ$، پس داریم:

$$\begin{cases} x+y=۵۴^\circ \\ x-y=۱۸^\circ \end{cases} \Rightarrow ۲x=۷۲^\circ \Rightarrow x=۳۶^\circ \Rightarrow y=۱۸^\circ$$

پس نسبت زاویهٔ بزرگ‌تر به کوچک‌تر برابر است با: $\frac{۳۶^\circ}{۱۸^\circ}=۲$

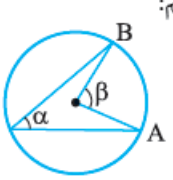
۳۶۱- گزینهٔ «۳» ۱ درست است؛ چون π تقریباً برابر ۳/۱۴ واحد و در نتیجه $\frac{\pi}{۲}$ تقریباً برابر است با $\frac{۳/۱۴}{۲}=۱/۵۷$. برای بررسی درستی ۲ مجموع زاویه‌ها را حساب می‌کنیم: $\frac{۲\pi}{۹}+\frac{\pi}{۹}+\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۲\pi+\pi+۶\pi}{۹}=\frac{۹\pi}{۹}=\pi$ پس درست است. در مورد ۳ می‌دانیم ۱ رادیان کمی از $\frac{\pi}{۳}$ کوچک‌تر است (۱ رادیان تقریباً برابر ۵۷° است)، اگر زاویهٔ رأس مثلث ۶۰° یعنی $\frac{\pi}{۳}$ رادیان بود سه ضلع برابر بودند، پس حالا ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۱ رادیان از هر کدام از دو ساق دیگر کوچک‌تر است؛ یعنی ۳ نادرست است. در مورد ۴ هم می‌گوییم:

$$\begin{aligned} \frac{۴\pi}{۳} &= \pi+\frac{\pi}{۳} \\ -\frac{۸\pi}{۳} &= -۲\pi-\frac{۲\pi}{۳} \end{aligned} \Rightarrow$$



پس این دو نقطه بر هم منطبق‌اند.

۳۶۲- گزینهٔ «۲» اگر زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان AB را در نظر بگیریم، داریم:

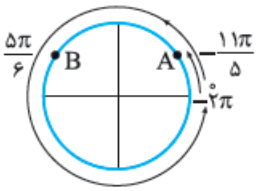


$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{r}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$$

و حالا که α زاویهٔ محاطی است پس برابر نصف اندازهٔ کمان روبه‌رویش است و در نتیجه:

$$\alpha=\frac{\beta}{۲}=\frac{۰/۷۵}{۲}=۰/۳۷۵$$

۳۶۳- گزینهٔ «۴» انتهای کمان‌های $-\frac{۱۱\pi}{۵}$ رادیان و ۱۵۰° را روی دایره مشخص می‌کنیم:



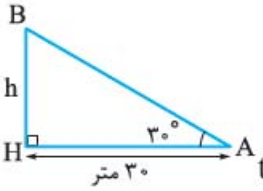
$$۱۵۰^\circ \Rightarrow ۱۵۰\times\frac{\pi}{۱۸۰^\circ}=\frac{۵\pi}{۶} \text{ رادیان}$$

$$\frac{۱۱\pi}{۵}=\frac{۱۰\pi}{۵}+\frac{\pi}{۵}=۲\pi+\frac{\pi}{۵}$$

بنابراین فاصلهٔ بین A و B برابر است با:

$$\frac{۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۵}=\frac{۲۵\pi-۶\pi}{۳۰}=\frac{۱۹\pi}{۳۰}$$

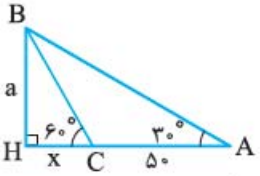
۳۶۴- گزینهٔ «۳» اول برای سؤال یک شکل می‌کشیم:



حالا در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB می‌توانیم بنویسیم:

$$\tan A = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \tan ۳۰^\circ = \frac{h}{۳۰} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{h}{۳۰} \Rightarrow h = ۱۰\sqrt{۳}$$

۳۶۵- گزینهٔ «۱» اگر در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ BHA و BHC نسبت مثلثاتی تانژانت زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° را بنویسیم، داریم:

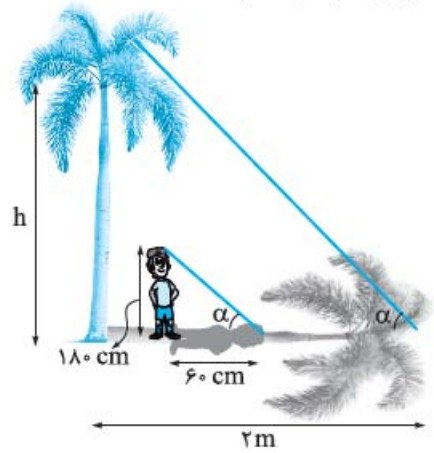


$$\left.\begin{array}{l} \tan ۳۰^\circ = \dfrac{a}{x+۵۰} \\ \tan ۶۰^\circ = \dfrac{a}{x} \end{array}\right\} \xrightarrow{\div} \frac{\tan ۳۰^\circ}{\tan ۶۰^\circ} = \frac{\frac{a}{x+۵۰}}{\frac{a}{x}} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{x}{x+۵۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{x}{x+۵۰} \Rightarrow ۳x = x + ۵۰ \Rightarrow ۲x = ۵۰ \Rightarrow x = ۲۵$$

پس طول AH برابر است با: $۲۵ + ۵۰ = ۷۵$

۳۶۶- گزینهٔ «۲» طبق شکل زیر، چون زاویهٔ تابش خورشید برای تشکیل سایه برای علی و درخت یکسان است پس در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ایجادشده می‌توانیم بنویسیم:

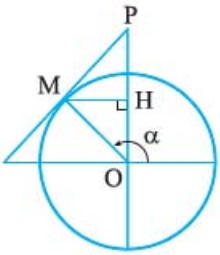


$$\left.\begin{array}{l} \tan \alpha = \dfrac{h}{۲} \\ \tan \alpha = \dfrac{۱۸۰}{۶۰} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{h}{۲} = \frac{۱۸۰}{۶۰}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{۲} = ۳$$

$$\Rightarrow h = ۶$$

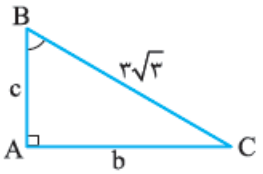
۳۶۷- گزینهٔ «۳» در شکل روبه‌رو، $MH = -\cos\alpha$ و $OH = \sin\alpha$ است، می‌دانیم شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، پس مثلث OMP قائم‌الزاویه و MH ارتفاع وارد بر وتر مثلث است؛ پس:



$$MH^۲ = OH \times HP \Rightarrow \cos^۲\alpha = \sin\alpha \times HP$$

$$\Rightarrow HP = \frac{\cos^۲\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha \times \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha \cot\alpha$$

۳۶۸- گزینهٔ «۴» اول مثلث را رسم می‌کنیم:



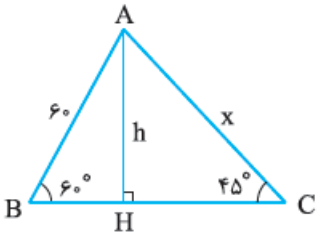
چون $B+C=۹۰^\circ$ پس $\tan B=\cot C$ و می‌توانیم بنویسیم:

$$\cot C=\sqrt{۲} \Rightarrow ۱+\cot^۲ C=\frac{۱}{\sin^۲ C} \Rightarrow ۳=\frac{۱}{\sin^۲ C} \Rightarrow \sin^۲ C=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\sin C=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{c}{۳\sqrt{۳}} \Rightarrow c=۳$$

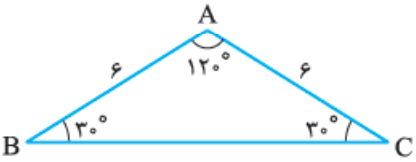
۳۶۹- گزینهٔ «۳» در شکل زیر، اگر ارتفاع AH مثلث ABC را رسم کنیم، می‌توانیم بنویسیم:



$$\left.\begin{array}{l}\sin ۶۰^\circ=\dfrac{h}{۶۰}\\ \sin ۴۵^\circ=\dfrac{h}{x}\end{array}\right\} \xrightarrow{\div} \frac{\sin ۶۰^\circ}{\sin ۴۵^\circ}=\frac{\frac{h}{۶۰}}{\frac{h}{x}} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{x}{۶۰}$$

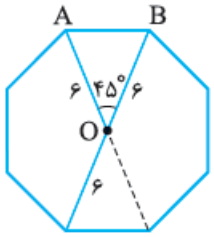
$$\Rightarrow x=\frac{۶۰\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow x\simeq\frac{۶۰\times ۱/۷}{۱/۴}=۷۲/۸۵\simeq ۷۳ \text{ متر}$$

۳۷۰- گزینهٔ «۲» در شکل روبه‌رو، چون $AB=AC$ پس $B=C=۳۰^\circ$ و در نتیجه $A=۱۲۰^\circ$، بنابراین طبق رابطهٔ مساحت مثلث داریم:



$$S=\frac{۱}{۲}AB\times AC\sin A \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۶\times \sin ۱۲۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۹\sqrt{۳}$$

۳۷۱- گزینهٔ «۱» طبق شکل روبه‌رو، زاویهٔ بین دو قطر مجاور یک هشت‌ضلعی منتظم برابر است با $\frac{۳۶۰^\circ}{۸}=۴۵^\circ$، بنابراین برای پیداکردن مساحت هشت‌ضلعی می‌توانیم مساحت مثلث OAB را پیدا و ۸ برابر کنیم:



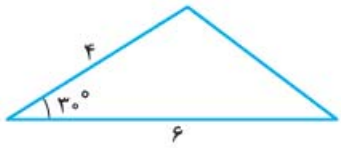
$$S_{OAB}=\frac{۱}{۲}OA\times OB\times \sin ۴۵^\circ=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۶\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۹\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{هشت‌ضلعی}}{S}=۸\times ۹\sqrt{۲}=۷۲\sqrt{۲}$$

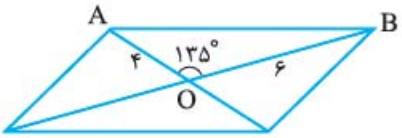
۳۷۲- گزینهٔ «۳» طبق شکل روبه‌رو، اگر مساحت مثلث برابر ۶ سانتی‌متر مربع باشد باید داشته باشیم:

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۶\times \sin\alpha \Rightarrow ۶=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۶\times \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\frac{۱}{۲}$$

و چون α زاویه‌ای است بین صفر و ۱۸۰°، پس از $\sin\alpha = \frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌گیریم $\alpha = ۳۰^\circ$ یا $\alpha = ۱۵۰^\circ$، پس دو مثلث با این ویژگی وجود دارد:



۳۷۳- گزینهٔ «۲» می‌دانیم قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند، بنابراین در مثلث OAB داریم $OA = ۴$، $OB = ۶$ و $O = ۱۳۵^\circ$، پس برای پیداکردن مساحت متوازی‌الاضلاع می‌توانیم مساحت مثلث OAB را پیدا و ۴ برابر کنیم:



$$S = ۴\times\frac{۱}{۲}OA\times OB\times\sin ۱۳۵^\circ = ۴\times\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۶\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۲۴\sqrt{۲}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ۲۴ برابر $\sqrt{۲}$ است.

۳۷۴- گزینهٔ «۳» اول با استفاده از $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویهٔ α را پیدا می‌کنیم:

$$\cos^۲\alpha = ۱-\sin^۲\alpha \Rightarrow \cos^۲\alpha = ۱-\frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع دوم}} \cos\alpha = -\frac{۴}{۵}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\frac{۳}{۵}}{-\frac{۴}{۵}} = -\frac{۳}{۴}, \cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} \Rightarrow \cot\alpha = -\frac{۴}{۳}$$

حالا حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$۵\sin\alpha + ۵\cos\alpha + ۸\tan\alpha - ۹\cot\alpha = ۵(\frac{۳}{۵}) + ۵(-\frac{۴}{۵}) + ۸(-\frac{۳}{۴}) - ۹(\frac{-۴}{۳})$$
$$= ۳-۴-۶+۱۲ = ۵$$

۳۷۵- گزینهٔ «۱» می‌دانیم $\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha) = -\cos\alpha$، پس باید با استفاده از $\sin\alpha = \frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}$ مقدار $\cos\alpha$ را پیدا کنیم:

$$\cos^۲\alpha = ۱-\sin^۲\alpha = ۱-(\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳})^۲ = ۱-\frac{۸}{۹} = \frac{۱}{۹} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیهٔ چهارم}} \cos\alpha = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین مقدار $\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)$ برابر است با: $-\cos\alpha = -\frac{۱}{۳}$

۳۷۶- گزینهٔ «۱» مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$۱-\frac{\cos^۲ x}{۱+\sin x} = \frac{\overbrace{۱+\sin x-\cos^۲ x}^{\sin^۲ x}}{۱+\sin x} = \frac{\sin^۲ x+\sin x}{۱+\sin x} = \frac{\sin x(\sin x+۱)}{۱+\sin x} = \sin x$$

۳۷۷- گزینهٔ «۴» **راه‌حل اول** عبارت را ساده می‌کنیم. فقط هر جا که عاملی را از زیر رادیکال بیرون می‌آوریم باید بگذاریمش داخل قدرمطلق و علامتش را تعیین کنیم:

$$\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2 x(1-\cos^2 x)}}=\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2 x\sin^2 x}}=\sqrt{1+2|\sin x\cos x|}$$

$$\xlongequal{0<x<\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+2\sin x\cos x}=\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}$$

$$=\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}=|\sin x+\cos x|\xlongequal{0<x<\frac{\pi}{4}}\sin x+\cos x$$

راه‌حل دوم اگر در $\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2 x(1-\cos^2 x)}}$ به جای x بگذاریم $x=0$، $\sqrt{1+2\sqrt{1(1-1)}}=1$ حاصل می‌شود و در گزینه‌ها فقط ۴ به ازای $x=0$ برابر ۱ می‌شود.

۳۷۸- گزینهٔ «۳» می‌دانیم $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$ و $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{5}\Rightarrow 1-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{3}{5}\Rightarrow \sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{5}$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-3(\frac{1}{5})=\frac{2}{5}$$

۳۷۹- گزینهٔ «۱» می‌دانیم $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2 x$ و $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$، پس اگر طرفین تساوی داده‌شده را بر $\cos^2 x$ تقسیم کنیم، داریم:

$$\sin^2 x+2\cos^2 x=\frac{3}{2}\xrightarrow{\div\cos^2 x}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{3}{2\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \tan^2 x+2=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\tan^2 x\Rightarrow \frac{1}{2}\tan^2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow \tan^2 x=1$$

۳۸۰- گزینهٔ «۲» می‌دانیم $\tan x+\cot x=\frac{1}{\sin x\cos x}$، پس از تساوی $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$ باید مقدار $\sin x\cos x$ را پیدا کنیم. برای این کار کافی است طرفین تساوی را به توان ۲ برسانیم:

$$\sin x+\cos x=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1+2\sin x\cos x=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin x\cos x=-\frac{3}{8}$$

پس حاصل $\tan x+\cot x$ برابر است با:

$$\frac{1}{\sin x\cos x}=-\frac{8}{3}$$

۳۸۱- گزینهٔ «۳» تعجب نکنید، سؤال به نظر مربوط به تابع است اما راه‌حلش با اتحادهای مثلثاتی است:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+bx^2}} \\ g(x)=\tan x \end{array}\right\} \Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

حالا چون $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ و $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$(fog)(x)=\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x}}}=\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{1}{|\cos x|}}\overset{\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}}{=\!=\!=}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{1}{-\cos x}}=-\sin x$$

۳۸۲- گزینهٔ «۴» از $\cos\alpha\tan\alpha<0$ نتیجه می‌گیریم:

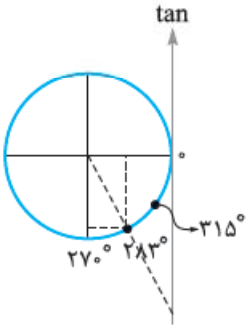
$$\cos\alpha\tan\alpha<0 \Rightarrow \cos\alpha\times\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}<0 \Rightarrow \sin\alpha<0$$

و از $\sin 2\alpha>0$ نتیجه می‌گیریم:

$$\sin 2\alpha>0 \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha>0 \xrightarrow{\sin\alpha<0} \cos\alpha>0$$

پس باید $\sin\alpha<0$ و $\cos\alpha>0$ باشد؛ یعنی α در ناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی است.

۳۸۳- گزینهٔ «۲» محل زاویهٔ 283° را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم:



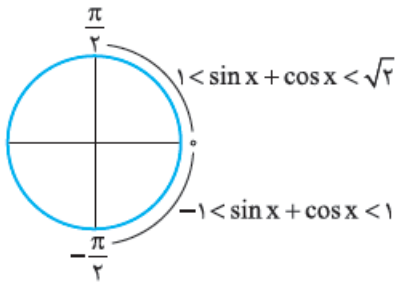
با توجه به محل زاویهٔ 283°، $\sin x$ منفی و $\cos x$ مثبت است؛ پس ۱ نادرست است. اگر مقدار $\tan x$ را مشخص کنیم با توجه به منفی‌بودن $\sin x$ و $\tan x$ ۲ درست است یعنی $\tan x<\sin x$. نادرستی گزینه‌های (۳) و (۴) را هم خودتان توضیح دهید.

۳۸۴- گزینهٔ «۴» اولاً از $\cos x\sqrt{1+\tan^2 x}>\sqrt{1+\sin 2x}$ چون هر دو رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفرند، پس باید $\cos x>0$ باشد؛ یعنی x در ربع اول یا چهارم است و ثانیاً چون $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ و $1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$ داریم:

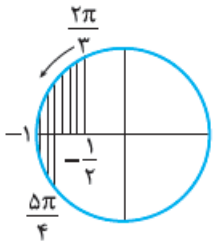
$$\cos x\sqrt{1+\tan^2 x}>\sqrt{1+\sin 2x} \Rightarrow \cos x\times\dfrac{1}{|\cos x|}>|\sin x+\cos x|$$

$$\xrightarrow{\cos x>0} 1>|\sin x+\cos x|$$

حالا با توجه به این‌که در ربع اول همواره $\sin x+\cos x>1$ است، پس x باید در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد.



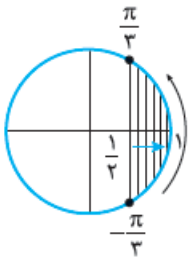
۳۸۵- گزینهٔ «۴» محل زاویهٔ ۱۲۰° ($\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان) و ۲۲۵° ($\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان) را روی دایره مشخص می‌کنیم و بررسی می‌کنیم با حرکت از $\frac{۲\pi}{۳}$ به $\frac{۵\pi}{۴}$ کسینوس زاویه در چه محدوده‌ای تغییر می‌کند:



با توجه به شکل وقتی $\frac{۲\pi}{۳} \le x \le \frac{۵\pi}{۴}$ است، داریم: $-۱ \le \cos x \le -\frac{۱}{۲}$

حواستان باشد نمی‌توانیم به اصطلاح از طرفین کسینوس بگیریم؛ یعنی اگر این کار را کنیم غلط است.

۳۸۶- گزینهٔ «۳» از $-\frac{\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹}$ داریم $-\frac{\pi}{۳} < ۳x < \frac{\pi}{۳}$، حالا کمان بین $-\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۳}$ را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم و محدودهٔ تغییرات کسینوس را به دست می‌آوریم:



با توجه به شکل از $-\frac{\pi}{۳} < ۳x < \frac{\pi}{۳}$ داریم:

$$\frac{۱}{۲} < \cos ۳x \le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{m-۱}{۲} \le ۱ \Rightarrow ۱ < m-۱ \le ۲$$
$$\Rightarrow ۲ < m \le ۳$$

۳۸۷- گزینهٔ «۲»

می‌دانیم $\frac{۳\pi}{۸} = \frac{۴\pi}{۸} - \frac{\pi}{۸}$ پس:

$$\cos(\frac{۳\pi}{۸}) = \cos(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}) = \sin\frac{\pi}{۸}$$

پس عبارت داده‌شده برابر است با:

$$\cos^۲\frac{\pi}{۸} + \cos^۲\frac{۳\pi}{۸} = \cos^۲\frac{\pi}{۸} + \sin^۲\frac{\pi}{۸} = ۱$$

۳۸۸- گزینهٔ «۱» زاویهٔ $\frac{۱۲۵\pi}{۴}$ را می‌توانیم به شکل $\frac{۱۲۴\pi}{۴} + \frac{\pi}{۴} = ۳۱\pi + \frac{\pi}{۴}$ بنویسیم، پس از آن‌جا که مجموع یا تفریق مضارب زوج π در سینوس، کسینوس و تمام مضارب π در تانژانت و کتانژانت تأثیری ندارند؛ داریم:

$$۲\cos(\frac{-۱۲۵\pi}{۴}) + ۳\tan(\frac{۱۲۵\pi}{۴}) + ۴\cot(\frac{-۱۲۵\pi}{۴}) = ۲\cos(۳۱\pi + \frac{\pi}{۴}) +$$
$$۳\tan(۳۱\pi + \frac{\pi}{۴}) - ۴\cot(۳۱\pi + \frac{\pi}{۴}) = ۲\cos(\pi + \frac{\pi}{۴}) + ۳\tan(\frac{\pi}{۴}) - ۴\cot(\frac{\pi}{۴})$$
$$= -۲\cos\frac{\pi}{۴} + ۳\tan\frac{\pi}{۴} - ۴\cot\frac{\pi}{۴} = -۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) + ۳ - ۴ = -\sqrt{۲} - ۱$$

۳۸۹- گزینهٔ «۳» حاصل هر کدام از عامل را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۲\sin(\alpha - ۳\pi) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{۲})}{\sin(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha)} = ۲ \Rightarrow \frac{-۲\sin\alpha + \sin\alpha}{-\cos\alpha} = ۲$$
$$\Rightarrow \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = ۲ \Rightarrow \tan\alpha = ۲$$

۳۹۰- گزینهٔ «۱» اول عامل‌های صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)+\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{۲\sin\theta}$$

حالا اگر صورت و مخرج کسر را بر $\cos\theta$ تقسیم کنیم داریم:

$$\frac{\tan\theta-۱}{۲\tan\theta}\ \overset{\tan\theta=۰/۲}{=\!=\!=}\ \frac{۰/۲-۱}{۲(۰/۲)}=\frac{-۰/۸}{۰/۴}=-۲$$

۳۹۱- گزینهٔ «۳» چون $\tan ۲۰^\circ=۰/۳۶$ را داریم، همهٔ زاویه‌ها را به صورت مجموع یا تفاضل مضارب ۹۰° و ۲۰° می‌نویسیم:

$$\frac{\sin ۱۶۰^\circ-\cos ۲۰۰^\circ}{\cos ۱۱۰^\circ+\sin ۷۰^\circ}=\frac{\sin(۱۸۰^\circ-۲۰^\circ)-\cos(۱۸۰^\circ+۲۰^\circ)}{\cos(۹۰^\circ+۲۰^\circ)+\sin(۹۰^\circ-۲۰^\circ)}=\frac{\sin ۲۰^\circ+\cos ۲۰^\circ}{-\sin ۲۰^\circ+\cos ۲۰^\circ}$$

حالا صورت و مخرج کسر را بر $\cos ۲۰^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\tan ۲۰^\circ+۱}{-\tan ۲۰^\circ+۱}\ \overset{\tan ۲۰^\circ=۰/۳۶}{=\!=\!=}\ \frac{۰/۳۶+۱}{-۰/۳۶+۱}=\frac{۱/۳۶}{۰/۶۴}=\frac{۱۳۶}{۶۴}=\frac{۱۷}{۸}$$

۳۹۲- گزینهٔ «۲» اگر توجه کنیم در عبارت داده‌شده مجموع زاویه‌ها از اول و آخر عبارت برابر π می‌شود:

$$\overbrace{\cos\frac{۳\pi}{۱۴}+\cos\frac{۵\pi}{۱۴}+\cos\underbrace{\frac{۷\pi}{۱۴}}_{\frac{\pi}{۲}}+\cos\frac{۹\pi}{۱۴}+\cos\frac{۱۱\pi}{۱۴}}^{\pi}$$

پس با توجه به رابطهٔ $\cos\alpha+\cos(\pi-\alpha)=۰$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\overbrace{(\cos\frac{۳\pi}{۱۴}+\cos\frac{۱۱\pi}{۱۴})}^{۰}+\overbrace{(\cos\frac{۵\pi}{۱۴}+\cos\frac{۹\pi}{۱۴})}^{۰}+\overbrace{\cos\frac{۷\pi}{۱۴}}^{۰}=۰$$

۳۹۳- گزینهٔ «۳» می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $y=a\tan(bx+c)+d$ برابر است با $\frac{\pi}{|b|}$، پس دورهٔ تناوب تابع $y=\tan(x-\frac{\pi}{۴})$ برابر است با $\frac{\pi}{۱}=\pi$.

۳۹۴- گزینهٔ «۴» دورهٔ تناوب هر گزینه را پیدا می‌کنیم:

۱) $f(x)=۲\sin ۲x-۱\ \Rightarrow\ T=\frac{۲\pi}{|۲|}=\pi$

۲) $g(x)=\tan(\frac{\pi}{۳}-x)\ \Rightarrow\ T=\frac{\pi}{|-۱|}=\pi$

۳) $h(x)=۳\cos(\frac{\pi}{۲}-۲x)+۲\ \Rightarrow\ T=\frac{۲\pi}{|-۲|}=\pi$

۴) $k(x)=۱-۲\sin(\frac{x}{۲})\ \Rightarrow\ T=\frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۲}|}=۴\pi$

پس جواب ۴ است.

۳۹۵- گزینهٔ «۱» می‌دانیم $۲۲/۵^\circ = \frac{۴۵^\circ}{۲}$، پس با استفاده از رابطهٔ $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲ \alpha$ داریم:

$$\cos ۴۵^\circ = ۱ - ۲\sin^۲ ۲۲/۵^\circ \Rightarrow \sin^۲ ۲۲/۵^\circ = \frac{۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲ - \sqrt{۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow \sin ۲۲/۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲}$$

۳۹۶- گزینهٔ «۳» اول هر دو زاویه را کوچک‌تر می‌کنیم:

$$\cos ۱۶۵^\circ \cos ۱۰۵^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ)\cos(۹۰^\circ + ۱۵^\circ) = (-\cos ۱۵^\circ)(-\sin ۱۵^\circ)$$

حالا با توجه به $\sin a \cos a = \frac{۱}{۲}\sin ۲a$ داریم: $\cos ۱۵^\circ \sin ۱۵^\circ = \frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۴}$

۳۹۷- گزینهٔ «۳»

اولاً $۹۷/۵^\circ = ۹۰^\circ + ۷/۵^\circ$ پس: $\sin ۹۷/۵^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۷/۵^\circ) = \cos ۷/۵^\circ$

بنابراین عبارت برابر است با: $\sin ۷/۵^\circ \cos ۷/۵^\circ \cos ۱۵^\circ$

حالا با استفاده از اتحاد $\sin a \cos a = \frac{۱}{۲}\sin ۲a$ داریم:

$$\overbrace{\sin ۷/۵^\circ \cos ۷/۵^\circ}\cos ۱۵^\circ = \frac{۱}{۲}\overbrace{\sin ۱۵^\circ \cos ۱۵^\circ} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸}$$

۳۹۸- گزینهٔ «۲» می‌دانیم $\tan \frac{۲\pi}{۳} = -\tan \frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$ و $\sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = -\cos x$

پس: $\tan \frac{۲\pi}{۳}\sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۱ \Rightarrow (-\sqrt{۳})(-\cos x) = ۱ \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

حالا مقدار $\cos ۲x$ را با استفاده از اتحاد $\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$ پیدا می‌کنیم:

$$\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱ = ۲(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲ - ۱ = \frac{۲}{۳} - ۱ = -\frac{۱}{۳}$$

۳۹۹- گزینهٔ «۳» ابتدا همهٔ عوامل را ساده می‌کنیم:

$$\sin x \sin(\frac{\pi}{۲} + x)\sin(\pi + x)\sin(\frac{۳\pi}{۲} + x) = \sin x \cos x(-\sin x)(-\cos x)$$

$$= \sin^۲ x \cos^۲ x = \frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x$$

حالا چون $\cos ۴x = a$ را داریم با استفاده از اتحاد $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲ \alpha$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\cos ۴x = ۱ - ۲\sin^۲ ۲x \Rightarrow a = ۱ - ۲\sin^۲ ۲x \Rightarrow \sin^۲ ۲x = \frac{۱ - a}{۲}$$

پس حاصل عبارت برابر است با: $\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x = \frac{۱}{۴}(\frac{۱ - a}{۲}) = \frac{۱ - a}{۸}$

۴۰۰- گزینهٔ «۳» می‌دانیم $1+\sin 2\alpha = 1+2\sin\alpha\cos\alpha = (\sin\alpha+\cos\alpha)^2$، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha} = \left(\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = (\tan\alpha+1)^2$$

۴۰۱- گزینهٔ «۲» با استفاده از اتحادهای $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ و $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$ داریم:

$$\frac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos x+\cos 2x} = \frac{\sin x+2\sin x\cos x}{\cos x+2\cos^2 x} = \frac{\sin x(1+2\cos x)}{\cos x(1+2\cos x)} = \tan x$$

۴۰۲- گزینهٔ «۲» اولاً می‌دانیم $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$ و $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1+\cos 2C}{\sin 2B} = \frac{2\cos^2 C}{2\sin B\cos B}$$

حالا چون $A=\frac{\pi}{2}$ پس $B+C=\frac{\pi}{2}$ و در نتیجه $\sin B=\cos C$ و $\cos B=\sin C$، پس:

$$\frac{2\cos^2 C}{2\sin B\cos B} = \frac{\cos^2 C}{\cos C\sin C} = \frac{\cos C}{\sin C} = \cot C$$

۴۰۳- گزینهٔ «۴» اول $f(2\cos x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=x^2-2 \Rightarrow f(2\cos x)=(2\cos x)^2-2=4\cos^2 x-2$$
$$=2(2\cos^2 x-1)=2\cos 2x$$

پس داریم $f(2\cos x)=2\cos 2x$ و در نتیجه می‌توانیم بگوییم:

$$f(f(f(2\cos x)))=f(f(2\cos 2x))=f(2\cos 4x)=2\cos 8x$$

۴۰۴- گزینهٔ «۱» چون $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ است، پس برای پیداکردن آن از تساوی $\sin x-\cos x=\frac{1}{2}$ کافی است طرفین تساوی را به توان ۲ برسانیم:

$$\sin x-\cos x=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow -\sin 2x=\frac{1}{4}-1 \Rightarrow \sin 2x=\frac{3}{4}$$

۴۰۵- گزینهٔ «۴» مثل سؤال قبل، اول $\sin 2x$ را پیدا می‌کنیم:

$$\sin x-\cos x=-\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow -\sin 2x=\frac{1}{4}-1 \Rightarrow \sin 2x=\frac{3}{4}$$

حال با استفاده از اتحاد $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\cos 4x=1-2\sin^2 2x \Rightarrow \cos 4x=1-2\left(\frac{3}{4}\right)^2=1-2\times\frac{9}{16}=1-\frac{9}{8}=-\frac{1}{8}$$

۴۰۶- گزینهٔ «۱» می‌دانیم $\cos(\frac{3\pi}{2}-2\alpha)=-\sin 2\alpha$ پس باید از تساوی $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$، مقدار $\sin 2\alpha$ را پیدا کنیم. مثل دو سؤال قبل، کافی است طرفین تساوی را به توان ۲ برسانیم:

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\sin 2\alpha=\frac{1}{4}-1\Rightarrow \sin 2\alpha=\frac{3}{4}$$

پس حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$-\sin 2\alpha=-\frac{3}{4}$$

۴۰۷- گزینهٔ «۱» **راه‌حل اول** اولاً می‌دانیم $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{2}$، پس:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{2}\Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$$

ثانیاً $\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2})=-\cot\frac{\alpha}{2}$، پس:

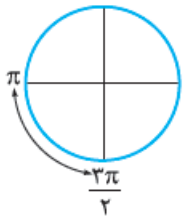
$$\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2})=-\cot\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}=-2$$

راه‌حل دوم اگر هم فرمول بالا را بلد نباشیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}$$

و باقی راه‌حل مثل راه‌حل اول است.

۴۰۸- گزینهٔ «۴» می‌دانیم $1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$



پس با توجه به این‌که $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$، $\sin x<0$ و $\cos x<0$ است؛ در نتیجه:

$$\sqrt{1+\sin 2x}=\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}=|\overbrace{\sin x+\cos x}^{\ominus}|=-\sin x-\cos x$$

۴۰۹- گزینهٔ «۳» **راه‌حل اول** می‌دانیم:

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}\ ,\ 1+\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{2(1+\sin x)}{1+\cos x}=\frac{2(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}=(\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}})^2=(\tan\frac{x}{2}+1)^2$$

راه‌حل دوم عبارت $\frac{2(1+\sin x)}{1+\cos x}$ به ازای $x=0$ برابر می‌شود با $\frac{2(1+0)}{1+1}=1$ و در گزینه‌ها فقط، ۲ و ۳ به ازای $x=0$ برابر ۱ می‌شوند. از طرف دیگر عبارت $\frac{2(1+\sin x)}{1+\cos x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ برابر ۴ می‌شود و از بین ۲ و ۳ مقدار ۳ برابر ۴ است؛ پس جواب می‌شود ۳.

۴۱۰- گزینهٔ «۳» **راه‌حل اول** می‌دانیم $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow -2\cot x = 1 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2}$$

حالا با توجه به رابطهٔ بالا داریم:

$$\cot x - \tan x = 2\cot 2x \Rightarrow -\frac{1}{2} - (-2) = 2\cot 2x \Rightarrow \frac{3}{2} = 2\cot 2x$$

$$\Rightarrow \cot 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan 2x = \frac{4}{3}$$

راه‌حل دوم اگر فرمول بالا را بلد نباشیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} - \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{-\cos x}{\frac{1}{2}\sin x} = 1 \Rightarrow -2\cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{-1}{2}$$

و بقیهٔ راه‌حل هم مثل راه‌حل اول.

۴۱۱- گزینهٔ «۲» عبارت داده‌شده را تجزیه می‌کنیم:

$$\cos^4\frac{\pi}{12} - \sin^4\frac{\pi}{12} = (\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12})\overbrace{(\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12})}^{1}$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$$

حالا با توجه به اتحاد $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ داریم:

$$\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۱۲- گزینهٔ «۲» می‌دانیم:

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \ , \ \sin a\cos a = \frac{1}{2}\sin 2a$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin x\cos x(1 - 2\sin^2 x) \overset{x = 7/5^\circ}{=\!=\!=} \sin 7/5^\circ \cos 7/5^\circ (1 - 2\sin^2 7/5^\circ)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 30^\circ = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

۴۱۳- گزینهٔ «۴» می‌دانیم $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$8\sin^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin x = 8\sin^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$= 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}(2\sin^2\frac{x}{2} - 1)$$

حالا با توجه به $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ نتیجه می‌گیریم:

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}(2\sin^2\frac{x}{2} - 1) = 2\sin x(-\cos x) = -2\sin x\cos x = -\sin 2x$$

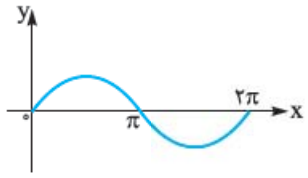
۴۱۴- گزینهٔ «۳» می‌دانیم $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1+\cos 2a)$ و $\sin a \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a$ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\cos^2(x-\frac{\pi}{4}) - \sin x \cos x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x-\frac{\pi}{2})) - \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$= \frac{1}{2}(1+\sin 2x) - \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}$$

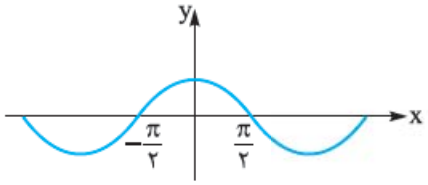
۴۱۵- گزینهٔ «۴» هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ نمودار تابع سینوس به صورت



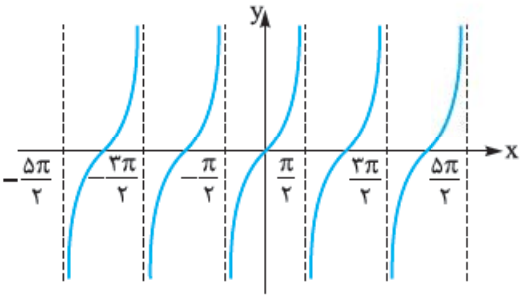
است و در بازهٔ $(0,\pi)$ نایکنوا است.

۲ نمودار تابع کسینوس در بازهٔ



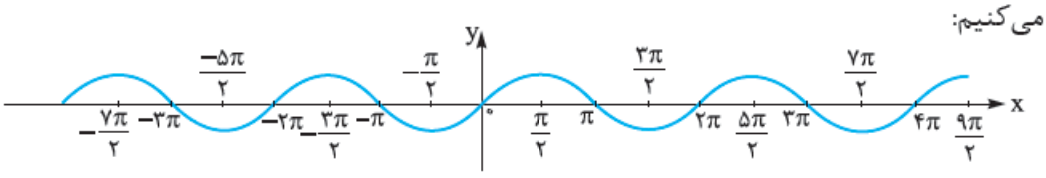
است و در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ نایکنوا است.

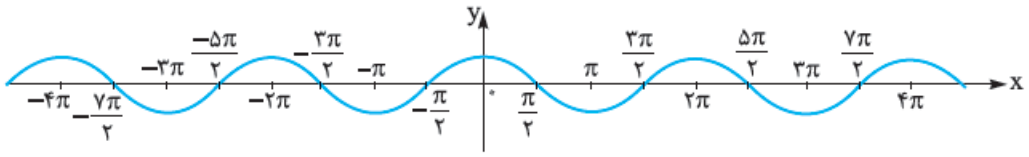
۳ و ۴ نمودار تابع تانژانت به صورت



است و در هر بازه‌ای که تعریف شده باشد اکیداً صعودی است اما می‌توان بازه‌هایی یافت که تابع در آن غیریکنوا باشد.

۴۱۶- گزینهٔ «۲» همهٔ گزینه‌ها را با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ بررسی می‌کنیم:





حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ درست است؛ چون تابع $y=\sin x$ محور xها را در $x=k\pi$ قطع می‌کند و مقدار تابع در این نقاط برابر صفر است.

۲ نادرست است؛ چون مقدار تابع کسینوس در نقاط $x=(2k+1)\pi$ برابر -1 است.

۳ درست است؛ چون حداکثر تابع سینوس در نقاط $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ به دست می‌آید و

۴ نیز درست است؛ چون حداکثر مقدار تابع کسینوس در نقاط $x = ۲k\pi$ به دست می‌آید.

۴۱۷- گزینهٔ «۳» می‌دانیم اگر ضابطهٔ تابع مثلثاتی به شکل $y = a\sin(bx) + c$ یا $y = a\cos(bx) + c$ باشد مقدار ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب تابع برابر است با:

$T = \frac{۲\pi}{|b|}$ ، ماکزیمم $= |a| + c$ ، مینیمم $= -|a| + c$

و در نتیجه $|a| = \frac{\max - \min}{۲}$ و $c = \frac{\max + \min}{۲}$، بنابراین داریم:

$$\text{دورهٔ تناوب} = ۳ \Rightarrow ۳ = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow b = \pm\frac{۲\pi}{۳}$$

$$|a| = \frac{۵-(-۳)}{۲} = ۴ \Rightarrow a = \pm ۴ \ , \ c = \frac{\max + \min}{۲} = \frac{۵-۳}{۲} = ۱$$

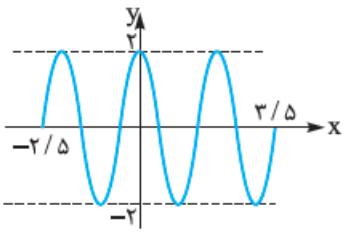
پس ضابطهٔ تابع به صورت $y = \pm ۴\sin(\pm\frac{۲\pi}{۳}x) + ۱$ یا $y = \pm ۴\cos(\pm\frac{۲\pi}{۳}x) + ۱$ است که می‌شود ۳.

۴۱۸- گزینهٔ «۴» می‌دانیم $۲ + \sin x\cos x = ۲ + \frac{۱}{۲}\sin ۲x$ پس باید مینیمم تابع $y = \frac{۱}{۲}\sin ۲x + ۲$ را پیدا کنیم و طبق مطالبی که در پاسخ سؤال قبل دیدیم، می‌شود:

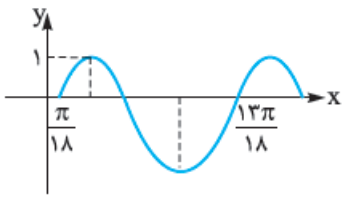
$$\min = -|\frac{۱}{۲}| + ۲ = \frac{۳}{۲}$$

۴۱۹- گزینهٔ «۱» اولاً $\sin\pi(\frac{۱}{۲} + bx) = \sin(\frac{\pi}{۲} + \pi bx) = \cos(\pi bx)$، پس ضابطهٔ تابع به صورت $y = a\cos(\pi bx)$ است. حالا از روی نمودار مشخص است که ۳ برابر دورهٔ تناوب برابر است با: $۳/۵ - (-۲/۵) = ۶$ پس $۳T = ۶ \Rightarrow T = ۲$ پس داریم $\frac{۲\pi}{|\pi b|} = ۲ \Rightarrow b = \pm ۱$؛

از طرف دیگر فاصلهٔ بین مینیمم و ماکزیمم تابع برابر ۴ است بنابراین $۲|a| = ۴ \Rightarrow a = \pm ۲$، از طرفی شروع نمودار تابع مثل $y = \cos x$ است پس $a > ۰$ و $b > ۰$ و در نتیجه $ab = ۲ \times ۱ = ۲$.



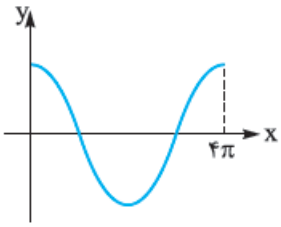
۴۲۰- گزینهٔ «۴» اولاً $\cos(bx + \frac{\pi}{۲}) = -\sin bx$، پس ضابطهٔ تابع به صورت $y = ۲\sin(bx) + a$ است. حالا با توجه به شکل، دورهٔ تناوب تابع برابر است با:



$$\frac{۱۳\pi}{۱۸} - \frac{\pi}{۱۸} = \frac{۱۲\pi}{۱۸} = \frac{۲\pi}{۳}$$

پس داریم $\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۳}$ و در نتیجه $b=\pm ۳$؛ از طرف دیگر ماکزیمم تابع برابر است با ۱، پس $۱=|۲|+a$ و $a=-۱$، از طرف دیگر شکل تابع مثل تابع $y=\sin x$ است پس $b=۳$ و مقدار $a+b$ برابر است با: $-۱+۳=۲$

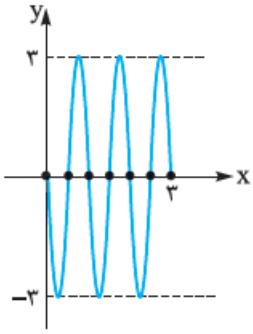
۴۲۱- گزینهٔ «۱» با توجه به شکل، دورهٔ تناوب تابع $y=۲\cos mx+\frac{۱}{۲}$ برابر است با $\frac{۲\pi}{|m|}=۴\pi$ پس $|m|=\frac{۱}{۲}$، پس مقدار تابع در $x=\frac{۱۶\pi}{۳}$ برابر است با:



$$x=\frac{۱۶\pi}{۳}\Rightarrow y=۲\cos\frac{۱}{۲}(\frac{۱۶\pi}{۳})+\frac{۱}{۲}=۲\cos\frac{۸\pi}{۳}+\frac{۱}{۲}=۲\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۳})+\frac{۱}{۲}$$

$$=-۲\cos\frac{\pi}{۳}+\frac{۱}{۲}=-۲(\frac{۱}{۲})+\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

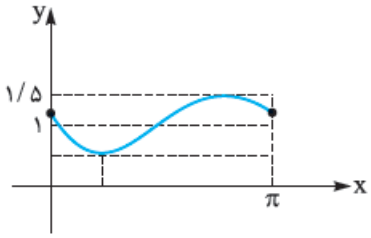
۴۲۲- گزینهٔ «۱» اولاً با توجه به نمودار، چون تابع $y=a\sin(b\pi x)$ در بازهٔ $[۰,۳]$ سه بار تکرار شده است، پس دورهٔ تناوب تابع برابر ۱ است، داریم:



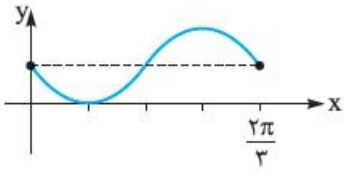
$$T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}\Rightarrow ۱=\frac{۲}{|b|}\Rightarrow |b|=۲\Rightarrow b=\pm ۲$$

و ثانیاً فاصلهٔ بین مینیمم و ماکزیمم برابر ۶ است پس $۲|a|=۶$ و در نتیجه $|a|=۳\Rightarrow a=\pm ۳$. شروع نمودار قرینهٔ $y=\sin x$ است پس یا $a=۳$ و $b=-۲$ یا $a=-۳$ و $b=۲$ پس $ab=-۶$.

۴۲۳- گزینهٔ «۳» با توجه به نمودار تابع $y=۱+a\sin(bx-\frac{\pi}{۶})$، اولاً دورهٔ تناوب تابع برابر است با π پس $\frac{۲\pi}{|b|}=\pi$ یعنی $|b|=۲$، ثانیاً ماکزیمم تابع برابر است با ۱/۵ پس $|a|+۱=۱/۵\Rightarrow |a|=\frac{۱}{۲}$ و ثالثاً در $x=۰$ عرض تابع از ۱ بیشتر است پس $۱+a\sin(-\frac{\pi}{۶})>۱$ و $۱-\frac{a}{۲}>۱$ در نتیجه $a<۰$، بنابراین $a=-\frac{۱}{۲}$ و $b=۲$ و در نتیجه $a+b=-\frac{۱}{۲}+۲=\frac{۳}{۲}$.

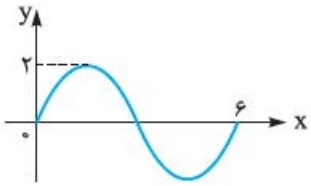


۴۲۴- گزینهٔ «۴» با توجه به نمودار تابع $y=۱-\sin(mx)$ دورهٔ تناوب تابع برابر است با $\frac{۲\pi}{۳}$ پس $\frac{۲\pi}{|m|}=\frac{۲\pi}{۳}$ در نتیجه $|m|=۳$، از طرف دیگر شروع منحنی مثل تابع $y=-\sin x$ است پس $m=۳$، بنابراین $y=۱-\sin(۳x)$ و مقدار تابع به ازای $x=\frac{۷\pi}{۶}$ برابر است با:



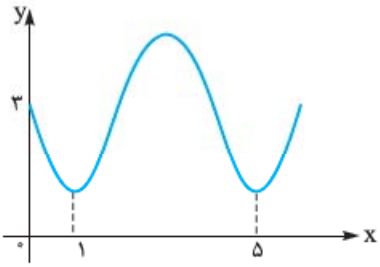
$$x=\frac{۷\pi}{۶} \Rightarrow ۱-\sin(۳\times\frac{۷\pi}{۶})=۱-\sin(\frac{۷\pi}{۲})=۱+۱=۲$$

۴۲۵- گزینهٔ «۳» با توجه به نمودار تابع $y=a\sin(b\pi x)$ دورهٔ تناوب تابع برابر ۶ است پس $\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۶$ و در نتیجه $|b|=\frac{۱}{۳}$، از طرفی ماکزیمم تابع برابر است با ۲ پس $|a|=۲$، شروع منحنی شبیه منحنی $y=\sin x$ است پس یا $a=۲$ و $b=\frac{۱}{۳}$، یا $a=-۲$ و $b=\frac{-۱}{۳}$.



بنابراین مقدار $a+b$ برابر است با $۲+\frac{۱}{۳}=\frac{۷}{۳}$ یا $-۲-\frac{۱}{۳}=-\frac{۷}{۳}$

۴۲۶- گزینهٔ «۲» با توجه به نمودار تابع $y=\sin(b\pi x)+a$، دورهٔ تناوب تابع برابر است با طول بازهٔ $[۱,۵]$ یعنی ۴؛ پس: $\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۴$



و در نتیجه $|b|=\frac{۱}{۲}$، از طرف دیگر در $x=۰$ مقدار تابع برابر ۳ است، پس:

$$x=۰ \Rightarrow ۳=\sin(۰)+a \Rightarrow a=۳$$

شروع منحنی شبیه قرینهٔ تابع $\sin x$ است پس $b=-\frac{۱}{۲}$ پس $y=۳-\sin\frac{\pi x}{۲}$ بنابراین داریم:

$$x=\frac{۲۵}{۳} \Rightarrow y=۳-\sin\frac{۲۵\pi}{۶}=۳-\sin(۴\pi+\frac{\pi}{۶})=۳-\sin\frac{\pi}{۶}=۳-\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

۴۲۷- گزینهٔ «۴» کافی است مقدارهای داده‌شده را در رابطهٔ مسافت قرار دهیم و θ را حساب کنیم:

$$v=۱۲, d=۷/۲ \Rightarrow d=\frac{v^۲\sin ۲\theta}{۱۰} \Rightarrow ۷/۲=\frac{۱۲^۲\times\sin ۲\theta}{۱۰}$$

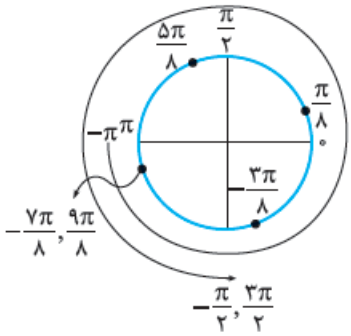
$$\Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۷۲}{۱۴۴}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲\theta=\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۱۲}$$

۴۲۸- گزینهٔ «۴» برای پیداکردن نقاط برخورد منحنی تابع با محور xها باید y را برابر صفر قرار دهیم:

$$y=۳\sin(\frac{\pi}{۴}-۲x) \xrightarrow{y=۰} \sin(\frac{\pi}{۴}-۲x)=۰ \Rightarrow \frac{\pi}{۴}-۲x=k\pi$$

$$\Rightarrow ۲x=-k\pi+\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=\frac{-k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}$$

حالا نقاط مربوط به جواب‌های معادله را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم. با توجه به دایره جواب‌های متعلق به بازهٔ $[-\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$ عبارت‌اند از:



$$-\pi+\frac{\pi}{۸}=\frac{-۷\pi}{۸} \quad ، \quad ۰+\frac{\pi}{۸}=\frac{\pi}{۸} \quad ، \quad \pi+\frac{\pi}{۸}=\frac{۹\pi}{۸}$$

$$-\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}=\frac{-۳\pi}{۸} \quad ، \quad \frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}=\frac{۵\pi}{۸}$$

۴۲۹- گزینهٔ «۳» اول معادلهٔ درجه‌دوم را حل می‌کنیم: $۲\sin^۲ x-۳\sin x-۲=۰$

$$\Delta \text{ فرمول}: \sin x=\frac{۳\pm\sqrt{۹-۴(۲)(-۲)}}{۲(۲)}=\frac{۳\pm۵}{۴} \Rightarrow \begin{cases}\sin x=۲ \text{ غ‌ق‌ق}\\ \sin x=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

حالا چون $\sin x=-\frac{۱}{۲}$ پس: $x=\frac{۷\pi}{۶}$

۴۳۰- گزینهٔ «۱» چون در معادلهٔ $۲\sin^۲ x+۳\cos x=۰$ هم $\sin^۲ x$ و هم $\cos x$ داریم، $\sin^۲ x$ را به $\cos^۲ x$ تبدیل می‌کنیم:

$$۲(۱-\cos^۲ x)+۳\cos x=۰ \Rightarrow -۲\cos^۲ x+۳\cos x+۲=۰$$

$$\Rightarrow \Delta \text{ فرمول}: \cos x=\frac{-۳\pm\sqrt{۹-۴(-۲)(۲)}}{۲(-۲)}=\frac{-۳\pm۵}{-۴} \Rightarrow \begin{cases}\cos x=۲\\ \cos x=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$\cos x=۲$ که غیر قابل قبول است و از $\cos x=-\frac{۱}{۲}$ داریم:

$$\cos x=-\frac{۱}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$$

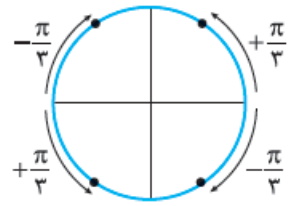
۴۳۱- گزینهٔ «۳» می‌دانیم $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$، پس:

$$\cos ۲x+۲\cos^۲ x=۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x-۱+۲\cos^۲ x=۰$$

$$\Rightarrow ۴\cos^۲ x=۱ \Rightarrow \cos^۲ x=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \begin{cases}\cos x=\frac{۱}{۲}\\ \cos x=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

حالا جواب‌های کلی معادله را می‌نویسیم و روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases}\cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\\ \cos x=-\frac{۱}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\end{cases} \Rightarrow$$



حالا با توجه به شکل، کل جواب‌ها را می‌توانیم به شکل $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ بنویسیم.

۴۳۲- گزینهٔ «۳» اول معادله را ساده می‌کنیم:

$$\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{2}+x)-2\sin(\pi-x)+1=0$$

$$\Rightarrow (-\sin x)(-\sin x)-2(\sin x)+1=0$$

$$\Rightarrow \sin^2 x-2\sin x+1=0 \Rightarrow (\sin x-1)^2=0 \Rightarrow \sin x=1$$

حالا چون $\sin x=1$ شده است پس $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$.

۴۳۳- گزینهٔ «۳» اول معادله را ساده می‌کنیم:

$$2\sin(\pi-x)\cos(\frac{3\pi}{2}+x)+3\cot x\sin(\pi+x)=0$$

$$\Rightarrow 2(\sin x)(\sin x)+3\frac{\cos x}{\sin x}(-\sin x)=0 \Rightarrow 2\sin^2 x-3\cos x=0$$

حالا هم $\sin^2 x$ داریم و هم $\cos x$، پس $\sin^2 x$ را به $\cos^2 x$ تبدیل می‌کنیم:

$$2(1-\cos^2 x)-3\cos x=0 \Rightarrow -2\cos^2 x-3\cos x+2=0$$

$$\Rightarrow \Delta \text{ فرمول}: \cos x=\frac{3\pm\sqrt{9-4(2)(-2)}}{2(-2)}=\frac{3\pm 5}{-4} \Rightarrow \begin{cases}\cos x=-2\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$\cos x=-2$ که غیر قابل قبول است و از $\cos x=\frac{1}{2}$ داریم:

$$\cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۴۳۴- گزینهٔ «۴» معادله را ساده می‌کنیم:

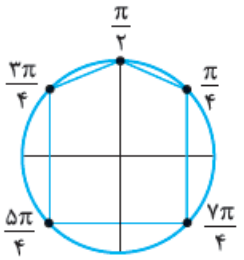
$$\cos 2x\sin x=\cos 2x \Rightarrow \cos 2x(\sin x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\cos 2x=0\\ \sin x=1\end{cases}$$

حالا جواب‌های کلی معادله را می‌نویسیم و روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

$$\cos 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$\sin x=1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$



پس نقاط انتهایی کمان‌ها رئوس یک پنج‌ضلعی غیرمنتظم‌اند.

۴۳۵- گزینهٔ «۱» کافی است معادله را به صورت تساوی دو عامل کسینوس بنویسیم:

$$\cos 3x+\cos x=0 \Rightarrow \cos 3x=-\cos x \Rightarrow \cos 3x=\cos(\pi-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \pi - x \\ ۳x = ۲k\pi - \pi + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴x = ۲k\pi + \pi \\ ۲x = ۲k\pi - \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

در صورت سؤال گفته $\cos x \neq ۰$، پس $x = k\pi - \frac{\pi}{۲}$ غیر قابل قبول است.

پس جواب می‌شود: $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

۴۳۶- گزینهٔ «۱» می‌دانیم $۲\cos^۲ x - ۱ = \cos ۲x$ و $۲\sin x \cos x = \sin ۲x$، پس می‌توانیم معادله را به شکل زیر بنویسیم:

$$۲\cos^۲ x + ۲\sin x \cos x = ۱ \Rightarrow ۲\sin x \cos x = ۱ - ۲\cos^۲ x$$

$$\Rightarrow \sin ۲x = -\cos ۲x \Rightarrow \tan ۲x = -۱$$

حالا جواب‌های کلی معادلهٔ تانژانت را می‌نویسیم:

$$\tan ۲x = -۱ = \tan(\frac{-\pi}{۴}) \Rightarrow ۲x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$$

۴۳۷- گزینهٔ «۴» می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{۲} - x) = \sin x$ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin ۲x + \sin x = ۰ \Rightarrow \sin ۲x = -\sin x \Rightarrow \sin ۲x = \sin(-x)$$

حالا جواب‌های کلی معادلهٔ سینوس را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} ۲x = ۲k\pi - x \\ ۲x = ۲k\pi + \pi + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۲k\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi \end{cases}$$

حالا جواب‌های متعلق به بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ در هر کدام از جواب‌های کلی را پیدا می‌کنیم:

$$x = \frac{۲k\pi}{۳} \Rightarrow x = ۰, x = \frac{۲\pi}{۳}, x = \frac{۴\pi}{۳}, x = ۲\pi$$

$$x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = \pi$$

پس مجموع جواب‌ها برابر است با: $۰ + \frac{۲\pi}{۳} + \frac{۴\pi}{۳} + ۲\pi + \pi = ۵\pi$

۴۳۸- گزینهٔ «۴» $\cos \pi = -۱$ پس می‌توانیم بنویسیم: $\sin ۵x + \sin ۴x = ۰$، بنابراین:

$$\sin ۵x = -\sin ۴x \Rightarrow \sin ۵x = \sin(-۴x) \Rightarrow \begin{cases} ۵x = ۲k\pi - ۴x \\ ۵x = ۲k\pi + \pi + ۴x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۲k\pi}{۹} \\ x = ۲k\pi + \pi \end{cases}$$

نقاط جواب کلی $\frac{۲k\pi}{۹}$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ عبارت‌اند از: $۰, \frac{۲\pi}{۹}, \frac{۴\pi}{۹}, \ldots, \frac{۱۶\pi}{۹}, \frac{۱۸\pi}{۹}$

پس مجموع این جواب‌ها برابر است با:

$$0+\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{9}+\cdots+\frac{16\pi}{9}+\frac{18\pi}{9}=\frac{2\pi}{9}(1+2+\cdots+9)=\frac{2\pi}{9}\times\frac{9\times 10}{2}=10\pi$$

تنها نقطهٔ جواب کلی $2k\pi+\pi$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت است از: π

و در نتیجه مجموع کل جواب‌های معادله برابر است با: $10\pi+\pi=11\pi$

۴۳۹- گزینهٔ «۲» می‌دانیم $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$ و $\sin(\frac{3\pi}{2}+x)=-\cos x$، پس می‌توانیم معادله را به صورت زیر بنویسیم:

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\sin(\frac{3\pi}{2}+x)\ \Rightarrow\ -\cos 2x=-\cos x\ \Rightarrow\ \cos 2x=\cos x$$

حالا جواب‌های کلی معادلهٔ کسینوس را می‌نویسیم:

$$\cos 2x=\cos x\ \Rightarrow\ \begin{cases}2x=2k\pi+x\\2x=2k\pi-x\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=2k\pi\\x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$$

جواب $x=\frac{2k\pi}{3}$ شامل نقاط جواب $x=2k\pi$ نیز هست، پس کل جواب‌های معادله عبارت‌اند از:

$$x=\frac{2k\pi}{3}$$