

ریاضیات

گسسته

دوازدهم

ادوارد ویتن

متولد ۱۹۵۱

عضو انجمن تئوری و مطالعات

پیشرفته پرینستون

برنده مدال فیلدز ۱۹۹۰

و مدال آنتنشتاین

1

CHAPTER

آشنایی با نظریه اعداد



درس اول: استدلال ریاضی

اثبات مستقیم

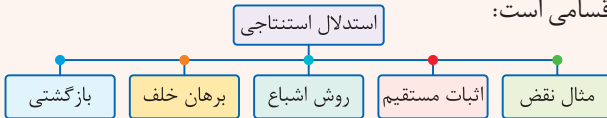
TEST 001

درستی کدام گزینه با استفاده از «اثبات مستقیم» قابل استدلال نیست؟

- (۱) مجموع دو عدد فرد متوالی مضرب ۴ است.
- (۲) مربع هر عدد فرد به شکل $8q+1$ است.
- (۳) مجموع هر سه عدد متوالی بر ۳ بخش پذیر است.
- (۴) مجموع دو عدد زوج متوالی مضرب ۴ است.

MiniBOX

🍏 اگر برای اثبات درستی یا نادرستی یک گزاره، از حقایقی استفاده کنیم که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم از نوعی استدلال به نام **استدلال استنتاجی** استفاده کرده‌ایم. استدلال استنتاجی دارای انواع و اقسامی است:



🍏 برای اثبات یک گزاره به روش **اثبات مستقیم**، ابتدا باید گزاره داده شده را به زبان ریاضی برگردانیم. جدول زیر برای برگرداندن یک گزاره به **زبان ریاضیات** کمک مهمی به شما می‌کند:

نماد ریاضی	عبارت فارسی
$2k+1, 2k'+1$	دو عدد فرد
$2k, 2k'$	دو عدد زوج
$2k-1, 2k+1$	دو عدد فرد متوالی
$2k, 2k+2$	دو عدد زوج متوالی
$k-1, k, k+1$	سه عدد متوالی
$\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$	عدد گویا

نماد ریاضی	عبارت فارسی
$2k$	عدد زوج
$2k+1$	عدد فرد
$3k$	عدد مضرب ۳
k^2	عدد مربع کامل
$(2k+1)^2$	عدد فرد مربع کامل
$\frac{1}{a}$	وارون عدد a



ANALYSE

تک تک گزینه ها را بررسی می‌کنیم: ■

$$1) (2k - 1) + (2k + 1) = 4k$$

$$2) (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k \underbrace{(k + 1)}_{2q} + 1 = 4q + 1$$

دقت کنید که $k + 1$ و k دو عدد صحیح متوالی هستند و قطعاً یکی از آن‌ها زوج است. پس حاصل ضرب آن‌ها نیز عددی زوج به شکل $2q$ خواهد بود.

$$3) (k - 1) + k + (k + 1) = 3k$$

$$4) (2k) + (2k + 2) = 4k + 2 \neq 4k'$$

پاسخ گزینهٔ ۴

NOTE



مثال نقض [پاد نمونه]

درستی کدام یک از گزاره‌های زیر را با مثال نقض نمی‌توان رد کرد؟

(۱) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.

(۲) مجموع هر دو گنگ، عددی گنگ است.

(۳) برای هر دو عدد حقیقی X و Y همواره $\sqrt{X+Y} = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$.

(۴) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $4k + 1$ مربع کامل است.

MiniBOX

🍏 اگر حکمی در مورد تمام اعضای یک مجموعه بیان شود، به آن **حکم کلی** گفته می‌شود. احکام کلی ممکن است درست یا نادرست باشند. احکام کلی معمولاً با کلماتی نظیر **هر**، **همه**، **تمام** و ... یا **هیچ**، **هیچ‌یک**، **هیچ‌کدام** و ... بیان می‌شوند.

🍇 «تمام اعداد اول، فرد هستند» یک حکم کلی نادرست است زیرا ۲ عددی اول است ولی فرد نیست.

🍇 «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است» یک حکم کلی درست است.

🍏 به مثالی که نشان دهد یک حکم کلی، نادرست است، **مثال نقض [پاد نمونه]** گفته می‌شود.

🍇 «به‌ازای همه n های طبیعی، عبارت $n^2 + n + 4$ عددی اول است»

برای رد حکم کلی فوق عدد $n = 40$ یک مثال نقض است زیرا:

$$n = 40 \Rightarrow 40^2 + 40 + 4 = 40(40 + 1) + 4 = (40 \times 41) + 4 = 41(40 + 1) = 41 \times 41$$

🍏 با ارائه **مثال نقض** نمی‌توان درستی یک حکم را اثبات کرد، بلکه فقط برای نشان دادن **نادرستی یک حکم**، از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

🍇 «عدد صحیحی وجود ندارد که دو برابر آن مربع کامل و سه برابر آن مکعب کامل باشد.» یک حکم

کلی است که مثال نقض آن ۷۲ می‌باشد.

$$72 \times 2 = 144 = 12^2$$

$$72 \times 3 = 216 = 6^3$$

ANALYSE

🍏 برای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) مثال نقض وجود دارد و گزینه (۴) با استدلال استنتاجی قابل اثبات است.

🍏 مرکب $1 \quad n = 4 \Rightarrow 2^4 - 1 = 15$

🍏 $2 \quad \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$

🍏 $3 \quad \sqrt{1+1} \neq \sqrt{1} + \sqrt{1}$

🍏 $4 \quad k = n(n+1) \Rightarrow 4k+1 = 4n^2 + 4n+1 = (2n+1)^2$

پاسخ گزینه ۴



کدام گزاره برای تمام اعداد طبیعی درست است؟

- (۱) عبارت $n^2 + 3n$ همواره مضرب ۴ است.
- (۲) عبارت $n^2 + 3n + 5$ همواره فرد است.
- (۳) عبارت $n^2 + n^2$ مضرب ۳ است.
- (۴) عبارت $n^2 + 3n$ به‌ازای هیچ مقداری از n مربع کامل نیست.

MiniBOX

گاهی برای اثبات درستی ارزش یک گزاره لازم است همه حالت‌های ممکن در مورد مساله را در نظر بگیریم. این روش استدلال را **روش اشباع** می‌نامند.

می‌خواهیم ثابت کنیم حاصل ضرب دو عدد متوالی زوج است. حاصل ضرب دو عدد متوالی را به صورت $n(n+1)$ نشان می‌دهیم و حال برای اثبات، برای n دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\bullet n = 2k \Rightarrow n(n+1) = \underbrace{2k(2k+1)}_{k'} = 2k'$$

$$\bullet n = 2k + 1 \Rightarrow n(n+1) = (2k)(2k+2) = \underbrace{2k(2k+2)}_{k''} = 2k''$$

می‌خواهیم ثابت کنیم حاصل ضرب سه عدد متوالی مضرب ۶ است. حاصل ضرب سه عدد متوالی را به صورت $n(n+1)(n+2)$ نشان می‌دهیم و حال برای اثبات، ۶ حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\bullet n = 6k \Rightarrow n(n+1)(n+2) = 6k(6k+1)(6k+2) = 6k'$$

$$\bullet n = 6k + 1 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (6k+1) \underbrace{(6k+2)}_{2k_1} \underbrace{(6k+3)}_{3k_2} = 6k''$$

⋮ ⋮ ⋮

$$\bullet n = 6k + 5 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (6k+5) \underbrace{(6k+6)}_{6k_1} (6k+7) = 6k'''$$

ANALYSE

برای گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) به راحتی می‌توان مثال نقض ارائه کرد؛ اما گزینه (۲) همواره درست است:

$$\text{۱} \quad n = 3 \Rightarrow n^2 + 3n = 9 + 9 = 18 \neq 4k \quad \text{۲} \quad n^2 + 3n + 5 = n(n+3) + 5 = 2k + 5 = \text{فرد}$$

اختلاف n و $n+3$ برابر ۳ واحد است، بنابراین همواره یکی زوج و یکی فرد است و در نتیجه حاصل ضرب آن‌ها عددی زوج است.

$$\text{۳} \quad n = 1 \Rightarrow n^2 + n^2 = 2 \neq 3k$$

$$\text{۴} \quad n = 1 \Rightarrow n^2 + 3n = 4 = \text{مربع کامل}$$

پاسخ گزینه ۲



درس دوم: بخش پذیری در اعداد صحیح

بخش پذیری

TEST 006

کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $35 \mid 7$ ۲) $24 \mid 6$ ۳) $12 \mid 4$ ۴) $24 \mid 8$

MiniBOX

عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b \neq 0$ بخش پذیر می‌گوییم، هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به طوری که $a = bq$ در این صورت می‌نویسیم $b \mid a$ و می‌خوانیم b می‌شمارد a را یا b عاد می‌کند a را. به عبارت دیگر:

$$b \mid a \Leftrightarrow a = bq$$

برای رابطه $b \mid a$ دو تعبیر می‌توان به کار برد، که یکی از چپ به راست خوانده می‌شود و دیگری از راست به چپ:

1 b شمارنده یا مقسوم‌علیه یا عامل a است.

2 a مضرب b است یا a بر b بخش پذیر است.

چون $6 = 2 \times 3$ است بنابراین $6 \mid 2$ و $6 \mid 3$.

اگر عدد صحیح a بر عدد صحیح b بخش پذیر نباشد، در این صورت می‌نویسیم $b \nmid a$.

چون هیچ عدد صحیحی مانند q یافت نمی‌شود که به ازای آن تساوی $12 = 5 \times q$ برقرار باشد،

بنابراین 12 بر 5 بخش پذیر نیست، پس می‌نویسیم: $5 \nmid 12$

از اینجا به بعد تمامی پارامترهایی مانند a ، b ، c و ... که در تمام مسائل تئوری اعداد به‌کار می‌رود همواره اعداد صحیح هستند.

ANALYSE

تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

1 $35 = 7 \times 5 \Rightarrow 7 \mid 35$

2 $\nexists q \in \mathbb{Z}; 6 = 24 \times q$

3 $12 = 4 \times 3 \Rightarrow 4 \mid 12$

4 $24 = 3 \times 8 \Rightarrow 8 \mid 24$

پاسخ گزینه ۲

تأثیر علامت در بخش پذیری

TEST 007

کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

..... (۱) $6 \mid -48$ (۲) $-8 \mid 24$ (۳) $-7 \mid -91$ (۴) $-12 \mid 18$

MiniBOX

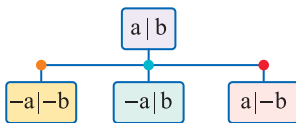
🍌 علامت اعداد در بخش پذیری هیچ نقشی ندارد. به مثال‌های عددی زیر دقت کنید:

🍌 $-15 = (-5)(3) \Rightarrow -5 \mid -15$

🍌 $-15 = (+5)(-3) \Rightarrow 5 \mid -15$

🍌 $15 = (-5)(-3) \Rightarrow -5 \mid 15$

🍌 اگر یک عدد بر عددی دیگر بخش پذیر باشد، قرینهٔ آن نیز بر دیگری بخش پذیر است و به‌طور کلی داریم:



🍌 چون ۱۴ بر ۷ بخش پذیر است، بنابراین می‌توان گفت:

🍌 $-7 \mid 14$

🍌 $-7 \mid -14$

🍌 $7 \mid -14$

ANALYSE

🍌 گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

❶ $-48 = 6 \times (-8) \Rightarrow 6 \mid -48$

❷ $24 = 3 \times (-8) \Rightarrow -8 \mid 24$

❸ $-91 = 13 \times (-7) \Rightarrow -7 \mid -91$

❹ $18 = -12 \times ? \Rightarrow -12 \nmid 18$

پاسخ گزینهٔ ۴



قانون تعدی

TEST 016

اگر $a \mid x$ و $bc \mid a$ آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟
 (۱) $b \mid 2x$ (۲) $a \mid c$ (۳) $a \mid b^2$ (۴) $x \mid c$

MiniBOX

اگر طرف چاق یک بخش پذیری با طرف لاغر بخش پذیری دیگری برابر باشد، آن‌گاه می‌توان این دو بخش پذیری را در هم ادغام کرد. این خاصیت را در تئوری اعداد، **خاصیت تعدی بخش پذیری** می‌نامند.

$$a \mid b \text{ و } b \mid c \Rightarrow a \mid c$$

$$\odot \begin{cases} a \mid b \Rightarrow b = aq \\ b \mid c \Rightarrow c = bq' \end{cases} \Rightarrow c = (aq)q' \Rightarrow c = a(\underbrace{qq'}_{q''}) \Rightarrow a \mid c$$

$$\bullet \bullet 4 \mid 8 \text{ و } 8 \mid 24 \Rightarrow 4 \mid 24$$

تعبیر عامیانه: نوکر من نوکری داشت، بنابراین نوکرِ نوکر من، نوکر من نیز به حساب می‌آید.

ANALYSE

ابتدا از خاصیت تعدی استفاده کرده و دو بخش پذیری را به یک بخش پذیری تبدیل می‌کنیم و سپس با لورل - هاردی ادامه می‌دهیم:

$$bc \mid a \text{ و } a \mid x \xrightarrow{\text{تعدی}} bc \mid x \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} b \mid x \xrightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} b \mid 2x$$

پاسخ گزینه ۱

NOTE



شبه تعدی و تباهی!!!

TEST 017

اگر $a \mid 60$ و $a \mid 420$ برای a چند جواب صحیح وجود دارد؟

..... ۶ (۱) ۲ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴)

MiniBOX

اگر طرف چاق یک بخش پذیری و طرف لاغر یک بخش پذیری دیگر دارای پارامترهای عیناً یکسان باشند و بخواهیم آن پارامتر را پیدا کنیم استفاده از تعدی ما را به تباهی خواهد بُرد. در این موارد کافی است رابطه بخش پذیری که پارامتر در طرف چاق آن واقع شده را باز کرده و به صورت تساوی بنویسیم و این تساوی را در بخش پذیری دیگر جایگذاری کنیم.

اگر $m \mid 12$ و $m \mid 180$ آن گاه برای یافتن m به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$12 \mid m \Rightarrow m = 12k \Rightarrow 12k \mid 180 \xrightarrow{+12} k \mid 15 \Rightarrow k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$$

بنابراین برای k و در نتیجه $m = 12k$ می‌توان ۸ جواب صحیح و ۴ جواب طبیعی به دست آورد.

ANALYSE

اگر ساده لوحانه عمل کنیم، به نتیجه $60 \mid 420$ خواهیم رسید که بدیهی است اما راه واقعی همان است که به شما آموختیم:

$$60 \mid a \Rightarrow a = 60q \Rightarrow 60q \mid 420 \xrightarrow{+60} q \mid 7 \Rightarrow q = \pm 1, \pm 7$$

با توجه به رابطه $a = 60q$ برای a نیز ۴ جواب وجود دارد که عبارتند از:

q	-1	1	-7	7
a	-60	60	-420	420

پاسخ گزینه ۴



ترکیب پارامتر و پیمانه مجهول

TEST 074

در هم‌نهشتی به پیمانه m سه عدد a ، ۴۱ و ۱۷۴ در یک کلاس هم‌نهشتی قرار دارند. کوچک‌ترین عدد سه رقمی a به طوری که مجموعه \mathbb{Z} به تعداد کمتری کلاس هم‌نهشتی افزایش شود، کدام است؟
 (۱) ۱۰۶ (۲) ۱۰۳ (۳) ۱۰۴ (۴) ۱۰۲

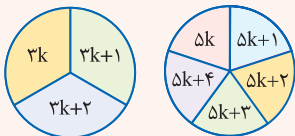
MiniBOX

در هم‌نهشتی به پیمانه m مجموعه \mathbb{Z} به m کلاس هم‌نهشتی افزایش می‌شود.

در هم‌نهشتی به پیمانه ۳ ، مجموعه \mathbb{Z} به ۳ کلاس هم‌نهشتی افزایش می‌شود که عبارتند از:

$$[۰]_۳ = \{۳k : k \in \mathbb{Z}\}, [۱]_۳ = \{۳k+۱ : k \in \mathbb{Z}\}, [۲]_۳ = \{۳k+۲ : k \in \mathbb{Z}\}$$

هر چه پیمانه بزرگ‌تر باشد \mathbb{Z} به کلاس‌های بیشتری افزایش می‌شود و هر چه پیمانه کوچک‌تر باشد \mathbb{Z} به کلاس‌های کمتری افزایش می‌شود.



در هم‌نهشتی به پیمانه ۳ ، مجموعه \mathbb{Z} به ۳ کلاس و در هم‌نهشتی به پیمانه ۵ مجموعه \mathbb{Z} به ۵ کلاس افزایش می‌شود.

اگر $a \in [r]_m$ و $b \in [r]_m$ باشد، آن‌گاه اعداد a و b هر دو به یک دسته هم‌نهشتی به پیمانه m تعلق دارند و به عبارت دیگر می‌توان نوشت: $a \equiv b \pmod{m}$

ANALYSE

اعداد a ، ۴۱ و ۱۷۴ در یک دسته هم‌نهشتی به پیمانه m قرار دارند، یعنی به پیمانه m هم‌نهشت هستند. حال ابتدا پیمانه m را پیدا می‌کنیم:

$$\underbrace{۱۷۴ \equiv ۴۱ \pmod{a}}_{1}$$

$$۱۷۴ \equiv ۴۱ \pmod{a} \Rightarrow m \mid ۱۷۴ - ۴۱ \Rightarrow m \mid ۱۳۳ \Rightarrow m \mid ۱۹ \times ۷ \Rightarrow m = ۷ \text{ یا } ۱۹$$

از آن‌جا که گفته شده مجموعه \mathbb{Z} به تعداد کمتری کلاس افزایش شود، بنابراین باید $m = ۷$ باشد. در نتیجه

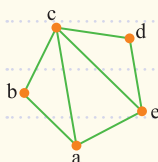
$$۴۱ \equiv a \pmod{۷} \Rightarrow a = ۷k + ۴۱ = \xrightarrow{k=۹} ۱۰۴ = \text{کوچک‌ترین عدد سه رقمی } a$$

برای این‌که $۷k + ۴۱$ سه رقمی شود باید $۷k$ خود را به حدود ۶۰ برساند که کافی است به $k = ۹$ بدهیم.



مجموعه رأس‌ها و یال‌های گراف

TEST 136



اگر نمودار گراف G به صورت مقابل باشد، کدام گزینه درست است ؟

۱) $|E(G)| = 7, |V(G)| = 5$

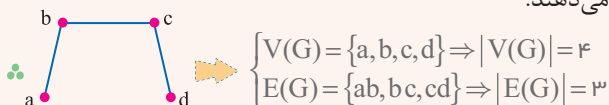
۲) $|E(G)| = 8, |V(G)| = 5$

۳) $|E(G)| = 5, |V(G)| = 7$

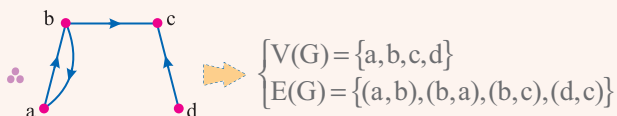
۴) $|E(G)| = 12, |V(G)| = 6$

MiniBOX

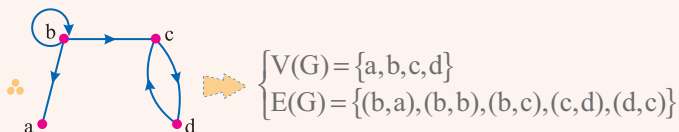
اگر G یک گراف باشد، مجموعه رأس‌های گراف G را با $V(G)$ و تعداد رأس‌ها را با $|V(G)|$ یا $n(V(G))$ نشان می‌دهند و همچنین مجموعه یال‌های گراف را با $E(G)$ و تعداد یال‌ها را با $|E(G)|$ یا $n(E(G))$ نشان می‌دهند.



اگر یال‌های گراف جهت‌دار باشد، یال‌های گراف را باید به صورت زوج مرتب نشان دهیم:



در بعضی گراف‌ها، یالی وجود دارد که یک رأس را به خودش وصل می‌کند. این یال‌ها را طوقه می‌نامند.



ANALYSE

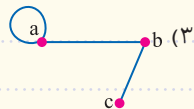
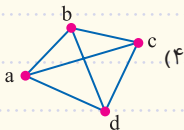
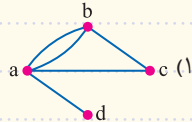
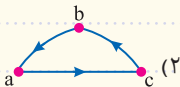
این گراف دارای ۵ رأس است بنابراین $n(V(G)) = 5$ و همچنین دارای ۷ یال است بنابراین $n(E(G)) = 7$. به عبارت دیگر:

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\} \Rightarrow |V(G)| = 5$$

$$E(G) = \{ab, ac, ae, bc, cd, ce, de\} \Rightarrow |E(G)| = 7$$

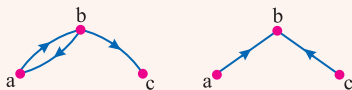
پاسخ گزینه ۱

کدام یک از گراف‌های زیر یک گراف ساده است؟

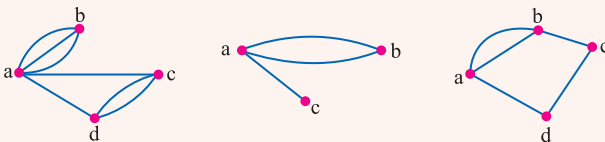


MiniBOX

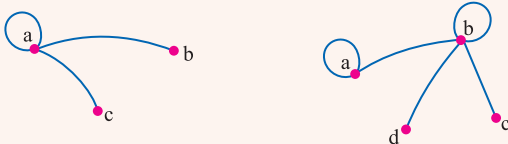
اگر برای یال‌های یک گراف، جهت تعیین شده باشد، این یال‌ها را **یال جهت‌دار** و گراف رسم شده را، **گراف جهت‌دار** می‌گوییم.



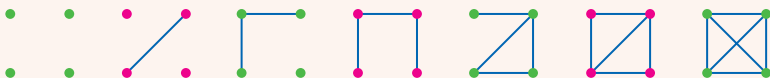
در بعضی از گراف‌ها بین دو رأس بیش از یک یال وجود دارد، این یال‌ها را **یال‌های موازی** و این گراف را، **گراف چندگانه** می‌نامند.



در بعضی از گراف‌ها ممکن است یک یال، یک رأس را به خود همان رأس وصل کند، این یال‌ها را **طوقه** و گراف را، **گراف طوقه‌دار** می‌نامند.



گرافی که یال جهت‌دار و یال موازی و طوقه نداشته باشد را **گراف ساده** می‌گویند و از این بعد در تمام کتاب بحث دربارهٔ گراف‌های ساده است و هر جا گفته می‌شود «گراف»، منظور گراف ساده است.





ANALYSE

تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم:

- ۱ بین دو رأس a و b ، یال های موازی وجود دارد بنابراین گراف ساده نیست.
- ۲ یال های گراف، جهت دار هستند بنابراین گراف ساده نیست.
- ۳ رأس a دارای طوقه است، بنابراین گراف طوقه دار است و ساده نیست.
- ۴ گراف ساده است، چون بین هر دو رأس متمایز، یک یال وجود دارد و طوقه و یال جهت دار آن وجود ندارد.

پاسخ گزینه ۴

U
T
O
N

رسم گراف در حالت مختلف

TEST 155

در گرافی با درجهٔ رئوس ۲، ۲، ۲، ۲، ۵، ۵ بین دو رأس از درجهٔ ماکزیمم چند مسیر وجود دارد؟

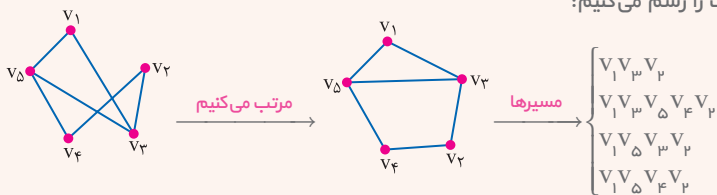
..... ۲ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴)

MiniBOX

🍏 اگر مجموعهٔ رأس‌ها و مجموعهٔ یال‌های یک گراف داده شود، برای پاسخ به هر سوالی [به جز سوال دربارهٔ تعداد اعضای آنها] باید گراف را رسم کنیم. بهترین راه برای رسم این است که رأس‌ها را گرد، دور هم بچینیم و یال‌های داده شده را به هم وصل کنیم.

🍏 در گراف G اگر $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ و $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$ باشد، مسیرهای بین v_1 و v_4 را نام ببرید.

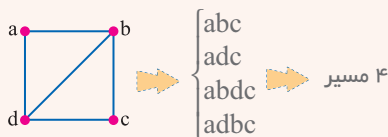
🍏 ابتدا گراف را رسم می‌کنیم:



🍏 اگر نمودار یک گراف به صورت توصیفی داده شود، [مثلاً تعداد یال‌ها و تعداد رأس‌ها داده شود] باید آن را رسم کنیم تا بتوانیم به خصوصیات گراف پی ببریم.

🍏 در گرافی با ۴ رأس و ۵ یال، بین دو رأس از درجهٔ کوچکتر چند مسیر وجود دارد؟

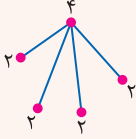
🍏 ابتدا گراف را رسم می‌کنیم، حال با توجه به شکل باید مسیرهای بین a و c را پیدا کنیم:



🍏 اگر درجهٔ رأس‌های یک گراف داده شود نیز باید گراف را رسم کنیم تا بتوانیم به خصوصیات آن پی ببریم. بهترین راه برای رسم یک گراف از روی درجهٔ رأس‌های آن، این است که در گام اول رأس‌های با درجهٔ بزرگتر را رسم کنیم و در گام‌های بعدی، به ایجاد رأس‌های با درجهٔ کوچک‌تر پردازیم.

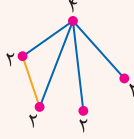


برای رسم گرافی با درجه رؤس $2, 2, 2, 2, 4$ ابتدا ۵ نقطه قرار می‌دهیم و در گام اول رأس با درجه ۴ را رسم می‌کنیم:



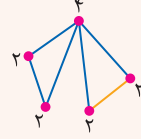
1

[رأس درجه ۴ را رسم می‌کنیم]



2

[با وصل کردن دو رأس درجه ۱، دو رأس درجه ۲ حاصل می‌شود]

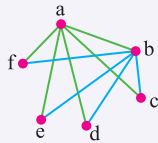


3

[با وصل کردن دو رأس درجه ۱ دیگر، دو رأس درجه ۲ حاصل می‌شود]

ANALYSE

ابتدا ۶ رأس قرار می‌دهیم و در گام اول یک رأس از درجه ۵ رسم می‌کنیم و در گام دوم رأس درجه ۵ بعدی را رسم می‌کنیم:



مسیرها

$$\left\{ \begin{array}{l} ab \\ acb \\ adb \\ aeb \\ afb \end{array} \right.$$

۵ مسیر

پاسخ گزینه ۳

اختلاف عدد احاطه‌گری گراف‌های C_{13} و P_9 کدام است؟

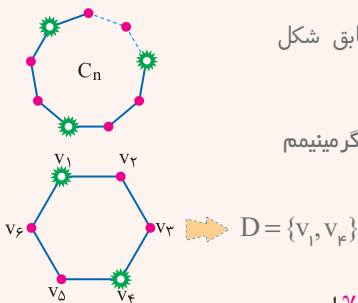
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

MiniBOX

🍏 در گراف‌های C_n عدد احاطه‌گری برابر با $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ است.

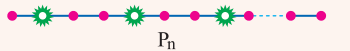
🍏 نوع مجموعه احاطه‌گر مینیمم در گراف‌های C_n مطابق شکل به صورت دو رأس در میان است:

🍏 در گراف C_6 ، در شکل زیر، یکی از مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم نمایش داده شده است:

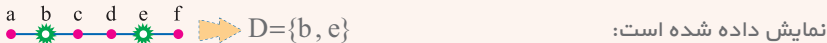


🍏 در گراف‌های P_n عدد احاطه‌گری برابر با $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ است.

🍏 همچنین نوع مجموعه احاطه‌گر مینیمم در گراف‌های P_n مطابق شکل به صورت دو رأس در میان است:



🍏 در گراف P_6 ، در شکل زیر، یکی از مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم



نمایش داده شده است:

🍏 در گراف‌های T_n [درخت‌های ستاره‌ای] عدد احاطه‌گری برابر $\gamma(T_n) = 1$ است.



ANALYSE

□ عدد احاطه‌گری در هر کدام از گراف‌های C_{13} و P_9 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(C_{13}) = \left\lceil \frac{13}{3} \right\rceil = \left\lceil 4.\overline{3} \right\rceil = 5 \\ \gamma(P_9) = \left\lceil \frac{9}{3} \right\rceil = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \gamma(C_{13}) - \gamma(P_9) = 5 - 3 = 2$$

پاسخ گزینه ۲

عدد احاطه‌گری در K_n , \bar{K}_n , ...

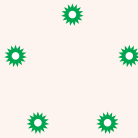
در گراف ۱- منتظم از مرتبه ۸ عدد احاطه‌گری کدام است؟

..... ۸ (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

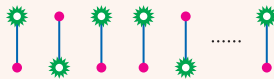
MiniBOX

عدد احاطه‌گری در گراف K_n برابر $\gamma(K_n) = 1$ است. 🍏در این گراف، مجموعه احاطه‌گر مینیمم (γ -مجموعه) هر کدام از رأس‌های گراف می‌تواند باشد. 🍏عدد احاطه‌گری در گراف \bar{K}_n برابر $\gamma(\bar{K}_n) = n$ است. 🍏

در این گراف، مجموعه احاطه‌گر مینیمم یک مجموعه شامل تمام رأس‌هاست. 🍏

عدد احاطه‌گری در گراف‌های ۱- منتظم مرتبه n برابر $\frac{n}{2}$ است. 🍏

یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از این گراف‌ها مطابق شکل است. 🍏



ANALYSE

عدد احاطه‌گری گراف ۱- منتظم از مرتبه ۸ برابر با ۴ است. 🍏



پاسخ گزینه ۲