مشاوران آموزش
ناشر تخصصی علوم انسانی

سرشناسه : علیزاده نائینی، مصطفی، ۱۳۶۳ -
عنوان و نام پدیدآور : ریاضی و آمار تست‌های سطح بالا / مولف مصطفی علیزاده نائینی، منوچهر واعظی، مهناز حامدی؛ ویراستار: مریم سرلک چیوایی.
مشخصات ظاهری : ۲۹۴ ص: مصور (بخشی‌رنگی)، جدول (بخشی‌رنگی)؛ ۱۴/۵× ۲۱/۵ س‌م.
مشخصات نشر : تهران: مشاوران آموزش، ۱۳۹۸
فروست : مجموعه‌کتاب‌های‌تیزشیم.
شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۲۱۸-۱۸۳-۱
وضعیت‌فهرست‌نویسی: فیپای مختصر
شناسه افزوده : واعظی، منوچهر، ۱۳۳۶ -
شناسه افزوده : حامدی، مهناز، ۱۳۷۰ -
شماره‌کتابشناسی‌ملی: ۵۶۳۹۱۴۲
وضعیت رکورد : فیپا

مشاوران آموزش
ناشر تخصصی علوم انسانی

عنوان	ریاضی و آمار تست‌های سطح بالا (تیزشیم)
ناشر	مشاوران آموزش
لیتوگرافی، چاپ و صحافی	شریف
شمارگان	۲۰۰۰
قطع	رقعی
نوبت چاپ	دوم - ۱۴۰۰
قیمت	۸۰۰۰۰ تومان
شابک	۹۷۸-۶۰۰-۲۱۸-۱۸۳-۱

دفتر انتشارات
تهران، خیابان انقلاب، خیابان ۱۲ فروردین، کوچه مهر، پلاک ۱۸
تلفن: ۶۶۹۵۳۲۰۵

دفتر فروش
تلفن: ۶۶۹۷۵۷۲۷

آشنایی با گروه تولید کتاب تیزشیم ریاضی و آمار

خانوادهٔ تألیف

مؤلفان: مصطفی علیزاده نائینی - منوچهر واعظی - مهناز حامدی
ویراستاران: مریم سرلک چیوایی - سها سلیمان‌زاده - ملیحه حشمتی

خانوادهٔ چاپ و طراحی

طراح جلد: آذر سعیدی‌منش
گرافیست: آذر سعیدی‌منش
طراح لی‌اوت: آتنا کلانتری
نظارت بر چاپ: عباس جعفری
صفحه‌آرا: طرلان محمدی
حروف‌نگار: سپهر عزیزی

پیشگفتار

سخن ناشر

وقتی عبارت «تیزشیم» را می‌بینید؛ یعنی گویندهٔ این عبارت که مشاوران آموزش باشد، چند اندیشهٔ کلیدی را به‌عنوان فرض پذیرفته است:

۱. تیزشیم یعنی تیز بشویم؛ یعنی تیزهوشی ناشی از رفتار و عملکرد و تلاش ماست نه ناشی از ژنتیک و وراثت.

۲. تیزشیم یعنی حتماً بدو! همین‌طور یک‌جا بمانی که تیز نمی‌شوی ...

۳. تیزشیم یعنی چاقوی ذهنت را تیز کن! چاقوی ذهن چطور تیز می‌شود؟ با برخورد با تست‌هایی که به همین منظور برای شما آماده شده است. «تست‌های سطح بالا» برای تیزشدن شماست.

۴. تیزشیم یعنی کوتاه نیا! یعنی قبول نکن که اگر تا سال قبل در ذهن همکلاسی‌ها و معلم‌ها دانش‌آموزِ کُندی تصوّر می‌شدی، امسال هم همین‌طور قرار است باشد. نه! تیزشیم، یعنی جنگجو باش! کوتاه نیا!

۵. تیزشیم یعنی تا آخرین لحظه! یعنی تو خودت را کسی فرض کن که هر چه ضربه بخورد، بلند می‌شود. تیزشیم یعنی جنگجویی که همیشه دقیقهٔ ۹۰ گل می‌زند و بعد از این که بازی تمام شد، غصه می‌خورد و در حین بازی همیشه می‌جنگد و به خودش اجازه نمی‌دهد که حین بازی غصه بخورد. چرا که می‌داند هر لحظه احتمال نتیجه گرفتن وجود دارد.

۶. تیزشیم یعنی همراه شما هستیم تا هر لحظه که خسته شدید از تیز کردن ذهن‌تان، با تست‌ها و پاسخ‌ها و درسنامه نقش «فلفلی را بازی کنیم» که شما می‌خورید و می‌دوید از بس می‌سوزاندتان! یادتان نرود که زیبایی در همین سوختن‌هاست!

در انتها بگوییم که امیدوارم مجموعه کتاب‌های تیزشیم، برای شما دانش‌آموزان علوم انسانی که به دنبال بالا رفتن از سطح متوسط هستید و دلتان می‌خواهد قله را نه از تعریف دیگران، بلکه با حضور خودتان تجربه کنید، مفید باشد.

وحید تمـنا

مقدمه

سال کنکور، سالی بسیار طلایی در زندگی تحصیلی هر دانش‌آموز است. درس ریاضی در رشتهٔ علوم انسانی از دروسی است که در تغییر درصدها و رتبهٔ شما بسیار حائز اهمیت است. معمولاً دانش‌آموزان به‌دنبال کتابی هستند که تمام مباحث مهم را به‌صورت کاربردی و فشرده آموزش دهد. کتاب «تیزشیم» مشاوران بر این خواستهٔ شما جامهٔ عمل پوشانیده است.

کتابی که پیش روی شماست در ۷ فصل شامل ۲۷ درس و ۱۸ آزمون تنظیم شده است. در هر آزمون بیش از ۲۰ سؤال متنوع شامل سؤالات نسبتاً ساده؛ اما مهم و پرتکرار در کنکور تا سؤالات سطح دشوارتر آورده شده است و تمام مباحثی را در برمی‌گیرد که در امتحانات مدرسه و کنکور سراسری با آن مواجه می‌شوید. در پاسخنامه علاوه بر حل تشریحی سؤال، روش حل سؤال مورد نظر را نیز آورده‌ایم. همچنین با آوردن درسنامه‌ای کامل در ابتدای هر فصل، مطالب کتاب درسی، نکات مهم و روش‌های پاسخگویی به سؤالات هر مبحث را به‌صورت کاربردی و متفاوت نشان داده‌ایم.

بسیار امیدواریم با کتابی که نوشته‌ایم و با تلاشی که شما خواهید کرد، قدرت تست‌زنی و تسلط شما را در حل مسائل افزایش دهیم.

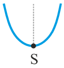
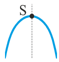
از دوستان واحد فنی و تولیدِ مجموعهٔ مشاوران آموزش که در تهیهٔ این کتاب ما را یاری کردند، بسیار سپاسگزاریم.

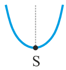
گروه تألیف

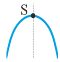
فهرست

درس چهارم: نمودار تابع درجهٔ ۲

نمودار تابع درجهٔ ۲

نمودار تابع درجهٔ ۲ (سهمی) به یکی از صورت‌های  یا  می‌باشد که به نقطهٔ S رأس نمودار (سهمی) می‌گویند.

اگر در تابع درجهٔ۲، ضریب x^2 مثبت باشد آنگاه دهانهٔ سهمی رو به بالا و نمودار به شکل  است. در این حالت رأس سهمی نقطهٔ مینیمم (min) یا کمترین مقدار تابع خواهد بود.

اگر در تابع درجهٔ ۲، ضریب x^2 منفی باشد، آنگاه دهانهٔ سهمی رو به پایین و نمودار به شکل  است. در این حالت رأس سهمی نقطهٔ ماکسیمم (max) یا بیشترین مقدار تابع خواهد بود.

مختصات رأس سهمی، در ضابطهٔ تابع درجهٔ ۲

در تابع درجهٔ ۲ به معادلهٔ $f(x)=y=ax^2+bx+c$، اگر $S(x_S,y_S)$ مختصات رأس سهمی باشد، طول نقطهٔ رأس سهمی (x_S) از رابطهٔ $x_S=\frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید که با جای‌گذاری این مقدار در معادلهٔ $f(x)$ یعنی محاسبهٔ $y_S=f(x_S)=f(\frac{-b}{2a})$ مقدار عرض نقطهٔ S یعنی عرض رأس سهمی به دست می‌آید.

نکته

برای محاسبهٔ عرض نقطهٔ رأس سهمی (y_S) بدون جای‌گذاری در ضابطهٔ $f(x)$ نیز می‌توانید مقدار y_S را از رابطهٔ $y_S=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ حساب کنید.

محور تقارن سهمی و نقاط تقاطع سهمی با محورهای مختصات

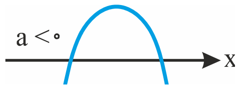
محور تقارن سهمی: در نمودار تابع درجهٔ ۲، خطی که از رأس سهمی (S) می‌گذرد و موازی محور y ها یا عمود بر محور x ها رسم می‌شود محور تقارن سهمی نامیده می‌شود و معادلهٔ این خط به صورت $x=\frac{-b}{2a}$ است. در واقع معادلهٔ محور تقارن سهمی همان خط $x=x_S$ است.

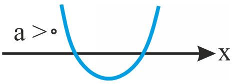
نقاط تقاطع سهمی با محورهای مختصات

برای به دست آوردن نقاط تقاطع سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ با محور x ها کافی است به جای $f(x)$ یا y در ضابطهٔ تابع، عدد صفر را قرار دهیم و معادلهٔ درجهٔ دوم

$ax^2+bx+c=0$ را حل کنیم. جواب‌های به دست آمده از حل این معادلهٔ درجهٔ ۲، طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور x ها هستند. که به وضوح عرض (y) این نقاط هم برابر صفر می‌باشد. اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ را به روش Δ یا همان روش کلی حل کنید یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد.

حالت اول: اگر $\Delta>0$ باشد پس معادلهٔ درجهٔ ۲ دارای ۲ جواب است و این یعنی نمودار محور x ها را حتماً در ۲ نقطه قطع می‌کند که با توجه به علامت a (ضریب x^2) یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

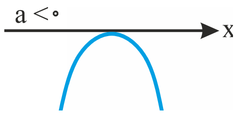


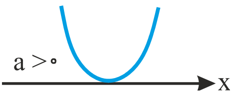


نکته

در این حالت نمودار تابع $f(x)$ حداقل از سه ناحیه (سه ناحیه یا هر چهار ناحیه) از ۴ ناحیهٔ مختصاتی عبور می‌کند.

حالت دوم: اگر $\Delta=0$ آنگاه معادلهٔ درجهٔ ۲ دارای ۱ جواب (جواب مضاعف) است و این یعنی نمودار محور xها را در یک نقطه قطع می‌کند که با توجه به علامت a (ضریب x^2) یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

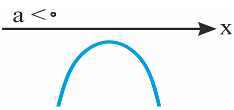


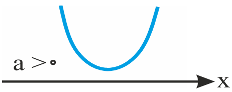


نکته

در این حالت با شرط $a<0$ نمودار تابع $f(x)$ فقط از ربع سوم و چهارم عبور می‌کند و اگر $a>0$ آنگاه نمودار تابع $f(x)$ فقط از ربع اول و دوم عبور می‌کند.

حالت سوم: اگر $\Delta<0$ آنگاه معادلهٔ درجه ۲ ریشهٔ حقیقی ندارد و این بدان معنی است که نمودار محور xها را قطع نمی‌کند یعنی یا نمودار کاملاً بالای محور x ها قرار دارد و یا نمودار کاملاً پایین محور x ها قرار دارد. که با توجه به علامت a (ضریب x^2) یکی از دو حالت روبه‌رو اتفاق می‌افتد.





نکته

در این حالت اگر $a<0$ آنگاه نمودار تابع $f(x)$ فقط از ربع سوم و چهارم عبور می‌کند و اگر $a>0$ آنگاه نمودار تابع $f(x)$ فقط از ربع اول و دوم عبور خواهد کرد.

محل برخورد نمودار تابع درجهٔ ۲ با محور yها

همانطور که قبلاً نیز گفته شد محل برخورد نمودار تابع $f(x)$ با محور yها همان نقطهٔ عرض از مبدأ تابع است، پس برای تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ کافی است جای x در ضابطهٔ تابع، عدد صفر را قرار دهیم و مقدار $f(x)$ را به دست آوریم.

$$f(x)=ax^{۲}+bx+c \Rightarrow f(۰)=a(۰)^{۲}+b(۰)+c \Rightarrow f(۰)=c$$

پس نقطهٔ برخورد سهمی به معادلهٔ $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ با محور yها همیشه نقطهٔ $(۰,c)$ است.

مثال

اگر منحنی $y=(a-۲)x^{۲}+ax+۴$ نسبت به خط $x=\frac{۱}{۲}$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

۱) $۱+\sqrt{۱۷}$　۲) $\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$　۳) $۱-\sqrt{۱۷}$　۴) $\frac{-۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$

پاسخ: محور تقارن منحنی خط $x=+\frac{۱}{۲}$ است، بنابراین:

$$\text{محور تقارن}: x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-a}{۲(a-۲)}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow -a=\frac{۱}{۲}(۲(a-۲))\Rightarrow -a=a-۲\Rightarrow a=۱$$

برای یافتن محل برخورد منحنی با محور xها باید $y=۰$ قرار دهیم و از آنجا x را محاسبه کنیم:

$$y=۰\Rightarrow ۰=(۱-۲)x^{۲}+x+۴\Rightarrow -x^{۲}+x+۴=۰$$

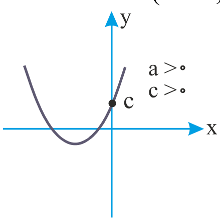
$$\Rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱^{۲}-۴\times(-۱)\times۴}}{۲\times(-۱)}=\frac{-۱\pm\sqrt{۱۷}}{-۲}\Rightarrow\begin{cases}\frac{-۱+\sqrt{۱۷}}{-۲}=\frac{۱-\sqrt{۱۷}}{۲}\\ \frac{-۱-\sqrt{۱۷}}{-۲}=\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}\end{cases}$$

گزینهٔ ۲ صحیح است.

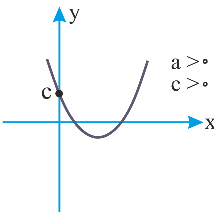
نمودار تابع درجهٔ ۲

با توجه به علامت a و c در تابع درجهٔ ۲ (با فرض $c\neq۰$) چهار حالت زیر امکان‌پذیر است. (با توجه به علامت Δ نمودار محور طول‌ها را در دو، یک و یا صفر نقطه قطع می‌کند.)

حالت اول $(a>۰ , c>۰)$:



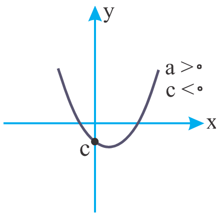
هر دو ریشه منفی و نمودار از ناحیهٔ ۴ عبور نمی‌کند.

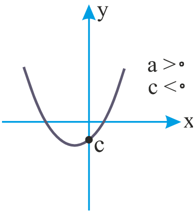


هر دو ریشه مثبت و نمودار از ناحیهٔ ۳ عبور نمی‌کند.

حالت دوم $(a > 0 , c < 0)$:

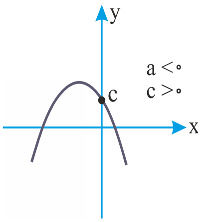
یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است و نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند. (در این حالت Δ همواره مثبت است.)

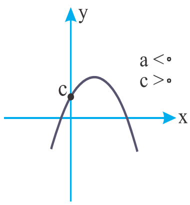




حالت سوم $(a < 0 , c > 0)$:

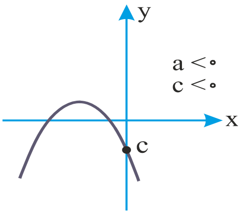
یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است و نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند. (در این حالت Δ همواره مثبت است.)



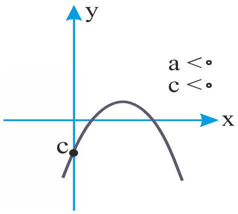


حالت چهارم $(a < 0 , c < 0)$:

هر دو ریشه منفی و نمودار از ناحیهٔ ۱ عبور نمی‌کند.



هر دو ریشه مثبت و نمودار از ناحیهٔ ۲ عبور نمی‌کند.



نکته

در حالت‌های دوم و سوم، Δ همواره مثبت است و معادله حتماً دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت است. (a و c مختلف‌العلامت $\Leftrightarrow$ دو ریشهٔ معادله مختلف‌العلامت)

در حالت‌های اول و چهارم، Δ می‌تواند صفر یا منفی نیز باشد. یعنی برای حالت‌های اول و چهارم شما می‌توانید برای هر نمودار، دو حالت دیگر را در نظر بگیرید، یکی حالتی که $\Delta = 0$ یعنی وقتی نمودار بر محور x ها مماس است و یک حالت وقتی است که $\Delta < 0$ یعنی نمودار محور x ها را قطع نمی‌کند که در این حالت، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

در حالت‌های اول و چهارم اگر Δ مثبت یا معادله دارای دو ریشه باشد آنگاه آن دو ریشه حتماً هم‌علامت هستند.

مثال

اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

۱) $\{a : 1 < a < 5\}$
۲) $\{a : a < 1\}$
۳) ϕ
۴) $\mathbb{R}$

پاسخ: عبارت درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c$ همواره منفی است، اگر نمودار $y=ax^۲+bx+c$ کاملاً زیر محور xها باشد، پس باید $\begin{cases} a<۰ \\ \Delta<۰ \end{cases}$، بنابراین برای این که عبارت درجهٔ دوم $(a-۱)x^۲+(a-۱)x+۱$ همواره منفی باشد باید:

$$\begin{cases} x^۲\text{ضریب} <۰ \Rightarrow (a-۱)<۰ \Rightarrow a<۱ \quad (۱) \\ \Delta<۰ \Rightarrow (a-۱)^۲-۴(a-۱)<۰ \xrightarrow{\text{از } a-۱ \text{ فاکتور می‌گیریم}} \\ (a-۱)(a-۱-۴)<۰ \Rightarrow (a-۱)(a-۵)<۰ \end{cases}$$

با توجه به ریشه‌های معادلهٔ $(a-۱)(a-۵)=۰$، سه حالت در نظر می‌گیریم:

۱) اگر $a<۱$ آنگاه $\overbrace{(a-۱)}^{-}\overbrace{(a-۵)}^{-} \Rightarrow (a-۱)(a-۵)>۰$ پس $a<۱$ قابل قبول نیست.

۲) اگر $۱<a<۵$ آنگاه $\overbrace{(a-۱)}^{+}\overbrace{(a-۵)}^{-} \Rightarrow (a-۱)(a-۵)<۰$ پس $۱<a<۵$ قابل قبول است.

۳) اگر $a>۵$ آنگاه $\overbrace{(a-۱)}^{+}\overbrace{(a-۵)}^{+} \Rightarrow (a-۱)(a-۵)>۰$ پس $a>۵$ قابل قبول نیست.

پس برای آن که Δ ی معادله، منفی باشد ، (۲) $۱<a<۵$ به دست می‌آید.

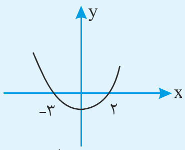
از آن‌جا که شرایط (۱) و (۲) باید با هم برقرار باشند، بنابراین مقداری برای a یافت نمی‌شود؛ پس این عبارت نمی‌تواند همواره منفی باشد. **گزینهٔ ۳ صحیح است.**

نکته بسیار مهم

اگر نقاط $(\alpha,۰)$ و $(\beta,۰)$ ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ ۲ باشند، آنگاه صورت کلی آن معادله به صورت $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ و خط $x=\frac{\alpha+\beta}{۲}$ محور تقارن منحنی خواهد بود.

مثال

معادلهٔ سهمی به شکل مقابل، کدام عبارت می‌تواند باشد؟



۱) $x^۲+x-۴$
۲) $\frac{۳}{۲}x^۲+\frac{۳}{۲}x-۹$
۳) $-x^۲-x+۴$
۴) $-\frac{۳}{۲}x^۲-\frac{۳}{۲}x+۹$

پاسخ: با توجه به این که سهمی از نقاط $(۲,۰)$ و $(-۳,۰)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن به فرم $y=a(x-۲)(x+۳)$ است و چون سهمی دارای مینیمم است، پس $a>۰$ می‌باشد.

$$y=a(x^۲+x-۶)=ax^۲+ax-۶a$$

با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌های ۳ و ۴ غلط هستند زیرا در این گزینه‌ها $a<۰$ می‌باشد.

با توجه به این که عبارت ثابت در معادلهٔ درجهٔ ۲ یعنی $-۶a$ باید ۶- برابر ضریب $x^۲$ یعنی a باشد پس: **گزینهٔ ۲ صحیح است.**

برخورد نمودار تابع درجهٔ ۲ با یک خط یا با یک نمودار دیگر

برای به دست آوردن نقطهٔ تقاطع یک سهمی با یک خط یا یک نمودار دیگر ابتدا باید در هر دو معادله، y را تنها کنیم و در یک سمت معادله قرار دهیم و در سمت دیگر هر دو معادله روابطی برحسب x باشد. سپس معادله‌های به دست آمده را مساوی قرار داده و معادلهٔ حاصل را حل می‌کنیم. از حل این معادله، x های به دست آمده، x نقطهٔ تقاطع دو منحنی خواهند بود. کافی است این x را در یکی از دو رابطهٔ اصلی قرار دهیم تا y نقطهٔ تقاطع نیز به دست آید.

مثال

نقطهٔ (نقاط) تقاطع نمودارهای $y-x^2-4x+2=0$ و $y=-(x-1)^2+3$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا دو معادله را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$y-x^2-4x+2=0 \Rightarrow y=x^2+4x-2$$

$$y=-(x-1)^2+3 \Rightarrow y=-(x^2-2x+1)+3=-x^2+2x-1+3$$

$$\Rightarrow y=-x^2+2x+2$$

حال دو معادله را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم: $x^2+4x-2=-x^2+2x+2$

$$\Rightarrow \underline{x^2}\,\underline{\underline{+4x}}-2+\underline{x^2}\,\underline{\underline{-2x}}-2=0 \Rightarrow 2x^2+2x-4=0 \Rightarrow x^2+x-2=0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=1 \end{cases}$$

حال کافی است این مقادیر را به جای x در یکی از روابط بالا جای‌گذاری کنیم و مقدارهای y متناظر با هریک را به دست آوریم تا نقاط برخورد به دست آید.

$$y=-(x-1)^2+3$$

$$x=1 \Rightarrow y=-(1-1)^2+3 \Rightarrow y=0+3=3 \Rightarrow y=3$$

$$x=-2 \Rightarrow y=-((-2)-1)^2+3 \Rightarrow y=-(-3)^2+3=-9+3 \Rightarrow y=-6$$

پس نقاط $(1,3)$ و $(-2,-6)$ نقاط تقاطع دو منحنی هستند.

معادلهٔ سهمی به فرم مربع کامل

اگر معادلهٔ سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ را به فرم مربع کامل $f(x)=a(x-h)^2+k$ بنویسیم آنگاه مختصات رأس سهمی نقطهٔ $S(h,k)$ خواهد بود و خط $x=h$ محور تقارن سهمی می‌باشد.

نکته

مقادیر h و k را با توجه به مختصات رأس سهمی به راحتی می‌توان برحسب a، b و c محاسبه کرد.

$$x_S=\frac{-b}{2a}=h \qquad y_S=\frac{-\Delta}{4a}=k$$

مثال

معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲-۸x-۱=۰$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ: به کمک نکتهٔ قبل فرض می‌کنیم $f(x)=۲x^۲-۸x-۱$ یک تابع درجهٔ ۲ باشد آنگاه مختصات رأس این سهمی برابر است با:

$$x_S=\frac{۸}{۲\times ۲}=۲\Rightarrow f(x_S)=f(۲)=۲\times ۴-۸(۲)-۱=۸-۱۶-۱=-۹$$

پس می‌توان $f(x)$ را به فرم مربع کامل نوشت:

$$f(x)=۲(x-x_S)^۲+y_S=۲(x-۲)^۲-۹$$

در نتیجه:

$$۲x^۲-۸x-۱=۰\Rightarrow ۲(x-۲)^۲-۹=۰$$

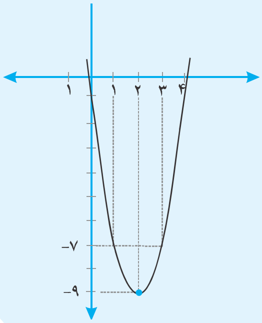
$$\Rightarrow ۲(x-۲)^۲=۹\Rightarrow (x-۲)^۲=\frac{۹}{۲}\Rightarrow x-۲=\pm\frac{۳}{\sqrt{۲}}\Rightarrow x=۲\pm\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

نتیجه: در واقع اگر نمودار تابع درجهٔ دوم $f(x)=۲x^۲-۸x-۱$ را رسم کنیم آنگاه مختصات رأس این سهمی برابر $S(۲,-۹)$ خواهد بود و نمودار ۲ ریشه دارد یعنی این نمودار محور xها را در نقاط $x_۱=۲+\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ و $x_۲=۲-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ قطع می‌کند.

$$f(x)=۲(x-۲)^۲-۹$$

نقطهٔ عرض از مبدأ:

$$f(۰)=-۱\Rightarrow (۰,-۱)$$



بهینه‌سازی

منظور از بهینه‌سازی یک کمیت، محاسبهٔ بیشترین یا کمترین مقدار ممکن برای آن کمیت است. مثلاً اگر کمیت مورد نظر سود باشد بهینهٔ کمیت سود زمانی است که بیشترین مقدار سود را داشته باشیم و اگر کمیت مورد نظر هزینه باشد بهینهٔ آن کمیت زمانی است که کمترین مقدار آن را داشته باشیم. در این فصل با مسائل بهینه‌سازی سر و کار داریم که اطلاعات مسئله یک تابع درجهٔ ۲ برحسب یک متغیر به ما می‌دهد و با توجه به علامت a (ضریب $x^۲$ در تابع درجهٔ۲) مقدار ماکسیمم یا مینیمم تابع را به دست می‌آوریم.

مثال

اگر $۳x+۲y=۶۰$ آنگاه بیشترین مقدار xy چقدر است؟

پاسخ: برای یافتن بیشترین مقدار باید یک تابع درجهٔ ۲ بسازیم. برای این کار ابتدا از رابطهٔ $۳x+۲y=۶۰$، مقدار x یا y را برحسب متغیر دیگر به دست می‌آوریم و حاصل را در رابطهٔ xy جای‌گذاری می‌کنیم تا رابطهٔ مطلوب به دست آید.

$$۳x+۲y=۶۰$$

$$\Rightarrow ۲y=۶۰-۳x \Rightarrow y=\frac{۶۰-۳x}{۲} \Rightarrow y=۳۰-\frac{۳}{۲}x \Rightarrow xy=x(۳۰-\frac{۳}{۲}x)$$

$$\Rightarrow xy=۳۰x-\frac{۳}{۲}x^۲ \Rightarrow xy=-\frac{۳}{۲}x^۲+۳۰x$$

برای محاسبهٔ بیشترین مقدار، xy کافی است بیشترین مقدار $-\frac{۳}{۲}x^۲+۳۰x$ را محاسبه کنیم که یک تابع درجهٔ ۲ است پس مطلوب است: $Max(-\frac{۳}{۲}x^۲+۳۰x)=?$

با استفاده از ویژگی‌های رأس سهمی و اینکه $a<۰$ داریم: $\frac{-b}{۲a}=\frac{-۳۰}{۲(-\frac{۳}{۲})}=\frac{-۳۰}{-۳}=۱۰$

پس بیشترین مقدار زمانی است که $x=۱۰$ باشد، حال با جای‌گذاری در رابطهٔ $xy=-\frac{۳}{۲}x^۲+۳۰x$ بیشترین مقدار xy را به دست می‌آوریم.

$$Max(-\frac{۳}{۲}x^۲+۳۰x)=-\frac{۳}{۲}(۱۰)^۲+۳۰(۱۰)=-\frac{۳}{۲}\times۱۰۰+۳۰۰=-۱۵۰+۳۰۰=۱۵۰$$

اگر سؤال از ما خواسته بود که بیشترین مقدار xy به ازای چه مقادیری از x و y رخ می‌دهد کافی بود $x=۱۰$ را در رابطهٔ $y=-\frac{۳}{۲}x+۳۰$ قرار داده و مقدار y را به ازای این مقدار x حساب کنیم.

$$y=۳۰-\frac{۳}{۲}x \Rightarrow y=۳۰-\frac{۳}{۲}(۱۰)=۳۰-۱۵=۱۵$$

پس به ازای $x=۱۰$ و $y=۱۵$ مقدار xy بیشترین مقدار را خواهد داشت.

بازاریابی (توابع هزینه، درآمد و سود)

در این نوع مسائلِ بهینه‌سازی معمولاً با سه تابع زیر سر و کار داریم که در آنها x تعداد کالا می‌باشد.

۱- تابع هزینه $(C(x))$ ۲- تابع درآمد $(R(x))$ ۳- تابع سود $(P(x))$

رابطه‌ای که بین این سه تابع برقرار است به صورت زیر است:

سود = درآمد − هزینه $\Rightarrow P(x)=R(x)-C(x)$

در این مسائل معمولاً توابع درآمد و سود قرار است ماکسیمم شوند و تابع هزینه قرار است مینیمم شود که این توابع در اینجا یک تابع درجهٔ ۲ خواهند بود که با محاسبهٔ x_S و جای‌گذاری در تابع داده شده مقدار ماکسیمم یا مینیمم خواسته شده به دست می‌آید.

نقطهٔ سر به سر

دستگاه‌های تولیدی با توجه به هزینه‌هایی که برای تولید کالاهایشان دارند، در ابتدای فروش سوددهی نخواهند داشت؛ پس باید به یک میزانی از فروش برسند تا هزینه‌ها $(C(x))$ با میزان

درآمد $(R(x))$ برابر شود و این یعنی $P(x)=۰$. این سطح از تولید که بنگاه اقتصادی نه سود می‌برد و نه ضرر می‌کند را نقطهٔ سربه‌سر می‌گویند و از این به بعد سوددهی آغاز می‌شود.

مثال!

در یک کارگاه تولیدی برای شروع کار ۶۰۰,۰۰۰ تومان هزینهٔ اولیه و برای هر واحد کالا ۴۵۰۰ تومان هزینه می‌شود. اگر P قیمت هر واحد از این کالا باشد، تعداد فروش این کالا از رابطهٔ $۹۰۰۰۰-۱۵P$ به دست می‌آید. بیشترین مقدار سود حاصل از فروش این کالا چقدر است و این مقدار سود به ازای تولید چقدر از این کالا به دست می‌آید.

پاسخ: اگر x تعداد فروش کالای مورد نظر باشد با توجه به رابطهٔ تعداد فروش داریم:

$$x=۹۰۰۰۰-۱۵P$$

اگر $C(x)$ تابع هزینه برای تولید تعداد x واحد کالا باشد آنگاه داریم:

$$C(x)=۶۰۰,۰۰۰+۴۵۰۰x$$

و چون درآمد برابر است با «قیمت هر واحد کالا» ضرب در «تعداد فروش آن کالا»

پس خواهیم داشت:

$$R(x)=x\times P$$

پس باید ابتدا P را برحسب x از رابطهٔ $x=۹۰۰۰۰-۱۵P$ به دست آوریم، پس داریم:

$$x=۹۰۰۰۰-۱۵P \Rightarrow ۱۵P=۹۰۰۰۰-x \Rightarrow P=\frac{۹۰۰۰۰-x}{۱۵}=۶۰۰۰-\frac{x}{۱۵}$$

پس تابع درآمد برای x کالا به صورت زیر خواهد بود:

$$R(x)=x\times P=x\times(۶۰۰۰-\frac{x}{۱۵})=۶۰۰۰x-\frac{x^۲}{۱۵}=\frac{-x^۲}{۱۵}+۶۰۰۰x$$

حال تابع سود را به دست می‌آوریم:

$$P(x)=R(x)-C(x)$$

$$\Rightarrow P(x)=(\frac{-x^۲}{۱۵}+۶۰۰۰x)-(۶۰۰,۰۰۰+۴۵۰۰x)=\frac{-x^۲}{۱۵}+۱۵۰۰x-۶۰۰,۰۰۰$$

حال مقدار کالایی که سود ماکزیمم به ازای آن به دست می‌آید را به دست می‌آوریم:

$$x_s=\frac{-b}{۲a} \Rightarrow x_s=\frac{-۱۵۰۰}{۲\times\frac{-۱}{۱۵}}=\frac{۱۵۰۰}{\frac{۲}{۱۵}}=\frac{۱۵۰۰\times۱۵}{۲}=\frac{۲۲۵۰۰}{۲}=۱۱۲۵۰$$

پس بیشترین سود هنگامی به دست می‌آید که ۱۱۲۵۰ واحد از کالا فروش رود و این مقدار سود برابر است با:

$$P(x)=\frac{-x^۲}{۱۵}+۱۵۰۰x-۶۰۰,۰۰۰$$

$$\Rightarrow P(۱۱۲۵۰)=\frac{-(۱۱۲۵۰)^۲}{۱۵}+۱۵۰۰(۱۱۲۵۰)-۶۰۰,۰۰۰$$

$$\Rightarrow P(۱۱۲۵۰)=-\frac{۱۱۲۵۰\times۱۱۲۵۰}{۱۵}+۱۱۲۵۰\times۱۵۰۰-۶۰۰,۰۰۰$$

$$=(-۷۵۰\times۱۱۲۵۰)+(۱۵۰۰\times۱۱۲۵۰)-۶۰۰,۰۰۰=۱۱۲۵۰(۱۵۰۰-۷۵۰)-۶۰۰,۰۰۰$$

$$\Rightarrow P(۱۱۲۵۰)=۷۵۰(۱۱۲۵۰)-۶۰۰,۰۰۰=۸,۴۳۷,۵۰۰-۶۰۰,۰۰۰=۷,۸۳۷,۵۰۰$$

۴۷. کدام گزینه یک تابع را نشان می‌دهد؟

۱) $\{(۱,۳),(-۱,۳),(۱,\frac{۱}{۴})\}$
۲) $\{(\frac{\sqrt{۳}}{۳},۱),(\frac{۱}{\sqrt{۳}},۲),(\frac{۱}{۳},۲)\}$
۳) $\{(\frac{۳}{۳},۳^{۰}),(۳^{۰},۱),(۱^{\frac{۱}{۲}},-۱)\}$
۴) $\{(۲,-۳),(۱,۲),(-۲,۴)\}$

۴۸. اگر $f(x)=\frac{۲x^۲+۲}{x^۲-۳}$ باشد، مقدار $f(۲-\sqrt{۳})$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) $۱-\sqrt{۳}$
۲) $-۲+\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) $۱+\sqrt{۳}$

۴۹. برد تابع $\begin{cases} f:\{۱,۳\}\to B \\ f(x)=-۳x+۲ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\{-۱,۲\}$
۲) $\{۱,۸\}$
۳) $\{۲,-۸\}$
۴) $\{-۱,-۸\}$

۵۰. کدام یک از رابطه‌های زیر، یک رابطهٔ خطی بین x و y را نشان می‌دهد؟

۱) $y=\frac{۳}{x-۲}$
۲) $y=۲\sqrt{x}$
۳) $y=x^۲$
۴) $۳y=۲x-۱$

۵۱. خط گذرنده از نقطهٔ $A(۱,۳)$ و عمود برخط به معادلهٔ $۳y-x=۲$، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۵۲. اگر نقطهٔ $A=(۷m-۳,-۹+۵m)$ روی نیم‌ساز ناحیهٔ اول باشد، m کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) -۳
۴) ۴

۵۳. یک کارگاه تولیدی دارای ۱۰ کارگر ثابت و ۱۵ کارگر پاره وقت است. هر کارگر ثابت، ماهیانه یک میلیون تومان و هر کارگر پاره وقت به‌ازای تولید هر یک واحد کالا ۲۰۰۰۰ تومان دستمزد دریافت می‌کنند و هزینه‌های کارگاه در یک ماه معادل ۱۰ میلیون تومان است، اگر این کارگاه در ماه گذشته ۴۰۰ واحد کالای ۱۰۰۰۰۰ تومانی تولید کرده باشد و $\frac{۱}{۴}$ از کالاها تولید کارگران پاره وقت باشد، سود کارگاه در ماه گذشته چند میلیون تومان بوده‌است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۸
۳) ۵
۴) صفر

۵۴. خط $x=۱$ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=-۲x^۲+bx+c$ است. این سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند. عرض رأس سهمی کدام است؟ (خارج از کشور ۹۰)

۱) ۳/۵
۲) ۴
۳) ۴/۵
۴) ۵

۵۵. رأس سهمی به معادلهٔ $y=-x^۲+ax+۵$ بر روی خط به معادلهٔ $x=۲$ قرار دارد. این سهمی از کدام نقطه می‌گذرد؟ (سراسری ۸۵)

۱) $(-۱,۴)$
۲) $(-۱,۵)$
۳) $(۱,۸)$
۴) $(۱,۹)$

۵۶. رأس سهمی در معادلهٔ $y = ax^2 + b$ را دو واحد به سمت چپ و ۱ واحد بـه سـمت بـالا انتقـال داده‌ایم، معادلهٔ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$ به‌دست آمده است. مقدار $a^2 + b^2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۵۷. بیش‌ترین مقدار تفاضل $\frac{1}{9}$ مربع عددی، از ۶ برابر آن عدد، کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) ۵۴ ۲) ۶۳ ۳) ۷۲ ۴) ۸۱

۵۸. در یک زمین گلخانه‌ای، اگر با فاصله‌های یکسان ۴۰ بوته گوجه‌فرنگی کاشته شود، بـه طور متوسط از هر بوته ۸ کیلوگرم محصول به‌دست می‌آید. به ازای هر بوتهٔ اضافی کـه کاشته شود، به مقدار $\frac{1}{8}$ کیلوگرم از محصول بوته‌ها کاسته مـی‌شـود. در ایـن صـورت بیش‌ترین محصول برداشتی و تعداد بوتهٔ اضافی کدام است؟

۱) ۱۲ , ۳۳۸ ۲) ۸ , ۳۳۶ ۳) ۰ , ۳۲۰ ۴) ۲ , ۳۲۵

۵۹. اگر برد تابع ثابت f، مجموعهٔ $\{7, a-1\}$ و زوج مرتب $(2, b-3)$ عضو f باشـد، $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۰. در تابع $f(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 1 \\ 2x-1 & x < 1 \end{cases}$، اگر $f(a) = 3$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۶۱. برد تابع $f(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 1 \\ -2x+2 & x < 1 \end{cases}$ کدام است؟

۱) $(-1, \infty)$ ۲) $[-1, 0)$ ۳) $(0, \infty)$ ۴) $[-1, \infty)$

۶۲. کدام تابع زیر پلکانی است؟

۱) $f(x) = \begin{cases} 2x & x > 2 \\ 1 & x \leq -1 \end{cases}$ ۲) $f(x) = \begin{cases} -x & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$

۳) $f(x) = \begin{cases} 3 & x > 2 \\ -2 & x \leq -1 \end{cases}$ ۴) $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

۶۳. حاصل عبارت $[-\frac{\pi}{2}] + [1 - \pi]$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۶۴. اگر $f(x) = |x^2 - 5|$ و $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ باشد، مقدار $\frac{1+f(-2)}{g(2)}$ کدام است؟ (سراسری ۸۷)

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۵. اگر $f(x) = 2x - 2$ و $g(x) = 2x^2 + x + 3$، مجموع ریشه‌های $(f+g)(2x)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{-3}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{-3}{4}$

۶۶. اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x\le -۱ \\ x-۲ & x>۱ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x+۴ & x\le ۲ \\ ۳x+۲ & x>۲ \end{cases}$، ضابطهٔ تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $(f-g)(x)=\begin{cases} x-۳ & x\le -۱ \\ -۶ & ۱<x<۲ \\ -۲x-۴ & x\ge ۲ \end{cases}$

۲) $(f-g)(x)=\begin{cases} x-۲ & x\le -۱ \\ ۴x-۲ & -۱\le x\le ۱ \\ -۶ & ۱<x\le ۲ \\ -۲x-۴ & x>۲ \end{cases}$

۳) $(f-g)(x)=\begin{cases} x-۳ & x\le -۱ \\ -۶ & ۱<x\le ۲ \\ -۲x-۴ & x>۲ \end{cases}$

۴) $(f-g)(x)=\begin{cases} ۴x-۳ & x\le -۱ \\ ۳x-۱ & -۱\le x\le ۱ \\ -۶ & ۱<x\le ۲ \\ -۲x-۴ & x>۲ \end{cases}$

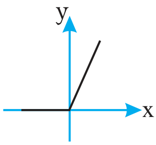
۶۷. اگر رابطهٔ $\{(۳,a+۲b),(۵,۴),(۷,۲),(۳,۷),(۵,۲a-b)\}$، یک تابع باشد، $a^۲-b^۲$ کدام است؟ (سراسری ۹۸)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶۸. می‌خواهیم با یک قطعه سیم به طول ۵۶ متر، زمینی به شکل مستطیل، که یک طرف آن دیوار است محصور شود. بیشترین مساحت زمین محصور شده، کدام است؟ (سراسری ۹۸)

۱) ۳۶۴ ۲) ۳۷۸
۳) ۳۹۲ ۴) ۴۰۶

۶۹. شکل روبرو، نمودار کدام تابع است؟ (سراسری ۹۸)



۱) $y=x-|x|$
۲) $y=x+|x|$
۳) $y=|x-۱|-۱$
۴) $y=۱-|x-۱|$

۷۰. در تابع $f(x)=[x+\frac{۳}{۲}]-[-x]$، مقدار $f(\frac{۹}{۴})+f(-\frac{۱}{۲})$، کدام است؟ (سراسری ۹۸)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۷۱. اگر $f=\{(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶),(۱,۷)\}$ و $g=\{(۱,۳),(۲,۶),(۵,۲),(۴,۹)\}$ باشند. برد تابع $g-f$، کدام است؟ (سراسری ۹۸)

۱) $\{-۴,۱,۳\}$ ۲) $\{-۴,۲,۳\}$ ۳) $\{-۴,۱,۲,۳\}$ ۴) $\{۱,۲,۳,۴\}$

$$\Rightarrow a^2=(a\times(a+2))\times\frac{3}{4}+18$$

$$\Rightarrow a^2=(a^2+2a)\times\frac{3}{4}+18$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{2}a+18$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}a^2-\frac{3}{2}a-18=0 \xrightarrow{\times 4}$$

$$a^2-6a-72=0$$

$$\Rightarrow (a-12)(a+6)=0\Rightarrow\begin{cases}a=12\\ a=-6 \text{ غ.ق.ق}\end{cases}$$

$$\text{محیط مستطیل بزرگ}\xrightarrow{\text{خواستهٔ سؤال}}$$

$$=2((a+2)+a)=2(2a+2)$$

$$=4a+4\xrightarrow{a=12}4(12)+4=52$$

۴۶. گزینهٔ ۲ طرفین تساوی را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم.

$$3(x-4)(2x-2)\times\frac{x-3}{x-4}$$

$$+3(x-4)(2x-2)\times\frac{1}{2x-2}$$

$$=3(x-4)(2x-2)\times\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3(2x-2)(x-3)+3(x-4)$$

$$=2(x-4)(2x-2)$$

$$\Rightarrow 6x^2-24x+18+3x-12$$

$$=4x^2-20x+16$$

$$\Rightarrow 2x^2-x-10=0$$

$$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(2)(-10)$$

$$=1+80=81$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+1\pm 9}{2(2)}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\ x=-2\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{خواستهٔ سؤال}}\left|\frac{5}{2}-(-2)\right|=\left|\frac{5}{2}+2\right|$$

$$=|2/5+2|=|4/5|=4/5$$

آزمون ۱ – فصل دوم

۴۷. گزینهٔ ۴ گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ هر کدام، دارای دو زوج مرتب با مختص‌های اول (xهای) مساوی و مختص‌های دوم (yهای) نامساوی هستند؛ که این یعنی مجموعه داده شده تابع نیست.

«گزینهٔ ۱»: $(1,3),(1,\frac{1}{4})$

«گزینهٔ ۲»: $(\frac{\sqrt{3}}{3},1),(\frac{1}{\sqrt{3}},2)$

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

«گزینهٔ ۳»: $1^{\frac{1}{2}}, 3^0$ و $\frac{3}{3}$ همه با هم برابرند.

اما در «گزینهٔ ۴» چون هیچ دو مولفهٔ اولی یکسان نیست پس یک تابع را نشان می‌دهد.

۴۸. گزینهٔ ۱ ابتدا $(2-\sqrt{3})$ را در $f(x)=\frac{2x^2+2}{x^2-3}$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(2-\sqrt{3})=\frac{2(2-\sqrt{3})^2+2}{(2-\sqrt{3})^2-3}\qquad (*)$$

حاصل $(2-\sqrt{3})^2$ را به کمک اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای به دست می‌آوریم:

$$(2-\sqrt{3})^2=2^2-2(2)\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$$

$$=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$$

مقدار به‌دست آمده را در رابطهٔ $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(2-\sqrt{3})=\frac{2(2-\sqrt{3})^2+2}{(2-\sqrt{3})^2-3}$$

$$=\frac{2(7-4\sqrt{3})+2}{7-4\sqrt{3}-3}$$

$$=\frac{14-8\sqrt{3}+2}{7-4\sqrt{3}-3}=\frac{16-8\sqrt{3}}{4-4\sqrt{3}}$$

$$=\frac{8(2-\sqrt{3})}{4(1-\sqrt{3})}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}}$$

اینک مخرج کسر را با ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج گویا می‌کنیم.

$$\frac{2(2-\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{2(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{2(2+2\sqrt{3}-\sqrt{3}-3)}{1-3}$$
$$=\frac{2(-1+\sqrt{3})}{-2}=\frac{-1+\sqrt{3}}{-1}=1-\sqrt{3}$$

۴۹. گزینهٔ ۴ دامنهٔ تابع برابر $D_f=\{1,3\}$ است.

برای یافتن برد تابع، همهٔ اعضای D_f را در ضابطهٔ تابع $f(x)$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} f(1)=-3(1)+2=-3+2=-1 \\ f(3)=-3(3)+1=-9+1=-8 \end{cases}$$
$$\Rightarrow R_f=\{-1,-8\}$$

۵۰. گزینهٔ ۴ «گزینهٔ ۱» درست نیست، زیرا: اگر به y، مخرج یک بدهیم و طرفین وسطین کنیم، داریم:

$$y=\frac{3}{x-2}\xrightarrow{\text{به y مخرج ۱ می دهیم}}$$
$$\frac{y}{1}=\frac{3}{x-2}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$
$$xy-2y=3$$

یک رابطهٔ خطی (یعنی رابطه‌ای بین عامل x و عامل y) را نشان نمی‌دهد، زیرا جملهٔ xy وجود دارد.

«گزینهٔ ۲» درست نیست، زیرا تابع، یک رابطهٔ رادیکالی را نشان می‌دهد.

«گزینهٔ ۳» درست نیست، زیرا تابع یک سهمی (درجهٔ ۲) را نشان می‌دهد.

«گزینهٔ ۴» درست است، زیرا به ازای مقدار مشخصی از x، مقدار بدون تغییری برای y به‌دست آمده و در ضمن این رابطه با رابطهٔ y=ax+b که یک رابطهٔ خطی استاندارد است همسان بوده و مطابقت دارد.

$$3y=2x-1\xrightarrow{\text{طرفین را تقسیم بر ضریب y می‌کنیم.}}$$
$$y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$$

۵۱. گزینهٔ ۳ برای نوشتن معادلهٔ خط، به شیب و یک نقطه از خط نیاز داریم، می‌دانیم اگر خط L_1 با شیب m_1 بر خط L_2 با شیب m_2 عمود باشد آنگاه $m_1m_2=-1$

شیب خط داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$3y-x=2\Rightarrow 3y=2+x$$
$$\Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \qquad m_2=\frac{1}{3}$$

پس شیب خط مورد نظر برابر است با:

$$m_1m_2=-1\Rightarrow m_1(\frac{1}{3})=-1$$
$$\Rightarrow m_1=-3$$

حال با داشتن شیب $m_1=-3$ و نقطهٔ $A(1,3)$، معادلهٔ خط را به‌دست می‌آوریم.

$$y-y_A=m_1(x-x_A)$$
$$\Rightarrow y-3=-3(x-1)$$
$$\Rightarrow y-3=-3x+3\Rightarrow y=-3x+6$$

برای این‌که بدانیم این خط محور xها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند. کافی است به‌جای y، صفر قرار دهیم و مقدار x را به‌دست آوریم:

$$y=-3x+6\xrightarrow{y=0}-3x+6=0$$
$$\Rightarrow -3x=-6\Rightarrow x=2$$

۵۲. گزینهٔ ۳ هر نقطه روی نیمساز ناحیه‌های اول و سوم دارای طول و عرض برابر است، یعنی مولفه‌های اول و دوم زوج مرتب آن یکسان است.

$$\underbrace{7m-3}_{\text{مولفهٔ اول}}=\underbrace{-9+5m}_{\text{مولفهٔ دوم}}\Rightarrow 7m-5m=3-9$$
$$2m=-6\Rightarrow m=-3$$

۵۳. گزینهٔ ۲ درآمد کارگاه:

$$R(x)=400\times100{,}000=40{,}000{,}000$$

هزینه‌های کارگاه:

$$C(x)=\underbrace{10{,}000{,}000}_{\text{هزینهٔ ثابت}}+10\times\underbrace{1{,}000{,}000}_{\text{حقوق کارگران ثابت}}+\text{حقوق کارگران پاره وقت}$$

تعداد کالای تولیدی × قیمت هر واحد کالا = حقوق کارگران پاره وقت

$$=20{,}000\times(\frac{1}{4}\times400)=20{,}000\times100=2{,}000{,}000$$

توجه کنید تعدا کارگران پاره وقت و اینکه هر کارگر چه تعداد کالا تولید کرده‌است درمحاسبهٔ سود اهمیتی ندارد.

$$C(x)=۱۰,۰۰۰,۰۰۰+۱۰,۰۰۰,۰۰۰+۲,۰۰۰,۰۰۰=۲۲,۰۰۰,۰۰۰$$

$$P(x)=R(x)-C(x)=۴۰,۰۰۰,۰۰۰-۲۲,۰۰۰,۰۰۰=۱۸,۰۰۰,۰۰۰$$

۵۴. گزینهٔ ۴ معادلهٔ محور تقارن سهمی را می‌نویسیم:

$$x=-\frac{b}{۲a}=۱\Rightarrow\frac{-b}{۲(-۲)}=۱$$

$$\Rightarrow -b=-۴\Rightarrow b=۴$$

سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند، یعنی $c=۳$؛ پس معادلهٔ بازنویسی شدهٔ سهمی به صورت زیر است:

$$y=-۲x^۲+۴x+۳$$

حال عرض رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$y_s=\frac{-\Delta}{۴a}=-\frac{b^۲-۴ac}{۴a}$$

$$=-\frac{۴^۲-۴(-۲)(۳)}{۴(-۲)}=\frac{۱۶+۲۴}{۸}=\frac{۴۰}{۸}=۵$$

۵۵. گزینهٔ ۳ چون رأس سهمی روی خط $x=۲$ که یک خط عمودی است قرار دارد پس خط $x=۲$ خود محور تقارن این سهمی است. اینک معادلهٔ محور تقارن سهمی داده شده را می‌نویسیم:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-a}{۲(-۱)}=\frac{a}{۲}$$

یعنی $\frac{a}{۲}$ برابر با ۲ است:

$$\frac{a}{۲}=۲\Rightarrow a=۴$$

معادلهٔ سهمی را با $a=۴$ بازنویسی می‌کنیم:

$$y=-x^۲+۴x+۵$$

در بین گزینه‌ها تنها نقطهٔ $(۱,۸)$ روی این سهمی قرار دارد چون اگر به جای x عدد ۱ را بگذاریم برای y عدد ۸ به‌دست خواهد آمد:

$$y=-۱^۲+۴\times۱+۵=-۱+۴+۵=۸$$

۵۶. گزینهٔ ۴

$$y=ax^۲+b$$

$$\xrightarrow{\text{۲واحد به سمت چپ}} y=a(x+۲)^۲+b$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به سمت بالا}} y=a(x+۲)^۲+b+۱$$

$$\Rightarrow y=a(x^۲+۴x+۴)+b+۱$$

$$\Rightarrow y=ax^۲+۴ax+۴a+b+۱$$

پس معادلهٔ به‌دست آمده را با معادلهٔ جدید برابر قرار می‌دهیم:

$$ax^۲+۴ax+۴a+b+۱=-\frac{۱}{۲}x^۲-۲x$$

$$\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}\ ,\ ۴a=-۲\ ,\ ۴a+b+۱=۰$$

$$\Rightarrow ۴a+b+۱=۰$$

$$\xrightarrow{a=-\frac{۱}{۲}} ۴(-\frac{۱}{۲})+b+۱=۰$$

$$\Rightarrow -۲+b+۱=۰\Rightarrow b=۱$$

$$a^۲+b^۲\xrightarrow[b=۱]{a=-\frac{۱}{۲}}$$

$$(-\frac{۱}{۲})^۲+(۱)^۲=\frac{۱}{۴}+۱=\frac{۵}{۴}$$

۵۷. گزینهٔ ۴ اگر عدد مورد نظر را m بگیریم، $\frac{۱}{۹}$ مربع آن یعنی $\frac{۱}{۹}m^۲$ و شش برابر آن $۶m$ است.

$$\text{تفاضل}=۶m-\frac{۱}{۹}m^۲$$

برای به‌دست آوردن بیشترین مقدار عبارت بالا، آن‌را یک تابع درجهٔ دو در نظر گرفته وy رأس آن‌را به‌دست می‌آوریم. در اینجا چون ضریب $m^۲$ عددی منفی است، پس ماکزیمم یا بیشترین مقدار داریم.

$$f(x)=۶m-\frac{۱}{۹}m^۲$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۹}m^۲+۶m$$

$$y_s=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{b^۲-۴ac}{۴a}$$

$$=-\frac{۶^۲-۴(-\frac{۱}{۹})(۰)}{۴(-\frac{۱}{۹})}=-\frac{۳۶}{-\frac{۴}{۹}}=۸۱$$

۵۸. گزینهٔ ۱ فرض کنیم x بوتهٔ اضافی کاشته شود.

تعداد بوته‌ها $= ۴۰ + x$

محصول هر بوته $= ۸ - \frac{x}{۸}$

$\underbrace{\text{کل محصول}}_{f(x)} =$ تعداد بوته × محصول هر بوته

$\Rightarrow f(x) = (۴۰ + x)(۸ - \frac{x}{۸})$

$= ۳۲۰ - \frac{۴۰x}{۸} + ۸x - \frac{x^۲}{۸}$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{۱}{۸}x^۲ + ۳x + ۳۲۰$

پس از نوشتن ضرایب تابع درجهٔ ۲ داریم:

$a = -\frac{۱}{۸} \quad , \quad b = ۳ \quad , \quad c = ۳۲۰$

اینک ماکسیمم f را محاسبه می‌کنیم.

$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۳}{۲(\frac{-۱}{۸})} = \frac{-۳}{\frac{-۱}{۴}} = ۱۲$

بیشترین مقدار $= -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{b^۲ - ۴ac}{۴a}$

$= -\frac{۳^۲ - ۴(-\frac{۱}{۸}) \times ۳۲۰}{۴(-\frac{۱}{۸})}$

$= -\frac{۹ + ۱۶۰}{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱۶۹}{\frac{۱}{۲}} = ۳۳۸$

یا:

$f(x) = -\frac{۱}{۸}x^۲ + ۳x + ۳۲۰$

$\xrightarrow{x=۱۲} -\frac{۱}{۸}(۱۲)^۲ + ۳(۱۲) + ۳۲۰ = ۳۳۸$

۵۹. گزینهٔ ۲ برد تابع ثابت یک عضو دارد پس $a - ۱$ و ۷ برابرند:

$a - ۱ = ۷ \Rightarrow a = ۸$

همهٔ مولفه‌های دوم زوج‌های مرتب f نیز باید ۷ باشند:

$b - ۳ = ۷ \Rightarrow b = ۱۰ \Rightarrow b - a = ۱۰ - ۸ = ۲$

راه کوتاه‌تر: چون برد تابع ثابت یک عضو دارد پس: $b - ۳ = a - ۱$

$\Rightarrow b - a = -۱ + ۳ = ۲$

۶۰. گزینهٔ ۴ چون مشخص نیست که a در کدام‌یک از محدوده‌های داده شده $(x < ۱ , x \ge ۱)$ قرار دارد پس باید هر دو حالت را بررسی کنیم:

۱) a در محدوده $x \ge ۱$:

$f(x) = x - ۲ \Rightarrow f(a) = a - ۲$

$\Rightarrow a - ۲ = ۳ \Rightarrow a = ۵$

$a = ۵$ در محدودهٔ $x \ge ۱$ قرار دارد پس درست است.

۲) a در محدودهٔ $x < ۱$ باشد:

$f(x) = ۲x - ۱$

$\Rightarrow f(a) = ۲a - ۱$

$\Rightarrow ۲a - ۱ = ۳ \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲$

در محدودهٔ $x < ۱$ قرار ندارد، پس قبول نیست.

۶۱. گزینهٔ ۴ $x \ge ۱ \xrightarrow{-۲} x - ۲ \ge ۱ - ۲$

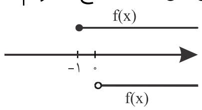
$\Rightarrow \underbrace{x - ۲}_{f(x)} \ge -۱ \Rightarrow f(x) \ge -۱$

$x < ۱ \xrightarrow{\times(-۲)} -۲x > -۲ \xrightarrow{+۲}$

$-۲x + ۲ > -۲ + ۲$

$\Rightarrow \underbrace{-۲x + ۲}_{f(x)} > ۰ \Rightarrow f(x) > ۰$

باید بین این دو اجتماع بگیریم:



$(f(x) \ge -۱) \cup (f(x) > ۰) = (f(x) \ge -۱)$

۶۲. گزینهٔ ۳ تابع پلکانی به تابعی چندضابطه‌ای گویند که همهٔ ضابطه‌هایش عدد ثابت (بدون متغیر) باشند.

۶۳. گزینهٔ ۱

$\pi = ۳/۱۴$

$\Rightarrow \begin{cases} [-\frac{\pi}{۲}] = [\frac{-۳/۱۴}{۲}] = [-۱/۵۷] = -۲ \\ [۱ - \pi] = [۱ - ۳/۱۴] = [-۲/۱۴] = -۳ \end{cases}$

$\Rightarrow -۲ + (-۳) = -۵$

۶۴. گزینهٔ ۴

$$f(-۲)=\left|(-۲)^۲-۵\right|=|۴-۵|=|-۱|=۱$$

$$g(۲)=\frac{۲}{۱+۲^۲}=\frac{۲}{۱+۴}=\frac{۲}{۵}$$

$$\frac{۱+f(-۲)}{g(۲)}=\frac{۱+۱}{\frac{۲}{۵}}=\frac{۲}{\frac{۲}{۵}}=۵$$

۶۵. گزینهٔ ۴

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$=(۲x-۲)+(۲x^۲+x+۳)$$
$$=۲x^۲+۳x+۱$$
$$\Rightarrow (f+g)(x)=۲x^۲+۳x+۱$$

در تابع $f+g$ اگر ورودی x باشد، خروجی $۲x^۲+۳x+۱$ است. بنابراین اگر ورودی $\square$ باشد، خروجی $۲\square^۲+۳\square+۱$ خواهد شد.

$$(f+g)(۲x)=۲(۲x)^۲+۳(۲x)+۱$$
$$=۲(۴x^۲)+۶x+۱=۸x^۲+۶x+۱$$
$$=(۴x+۱)(۲x+۱)$$

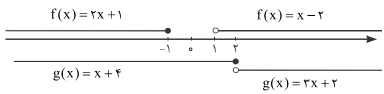
بدست آوردن ریشه‌های $(f+g)(۲x)$:

$$(f+g)(۲x)=۰$$
$$\Rightarrow (۴x+۱)(۲x+۱)=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۴x+۱=۰ \Rightarrow x_۱=-\frac{۱}{۴} \\ ۲x+۱=۰ \Rightarrow x_۲=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

مجموع ریشه‌ها:

$$x_۱+x_۲=\frac{-۱}{۴}+\frac{-۱}{۲}=\frac{-۱}{۴}+\frac{-۲}{۴}=\frac{-۳}{۴}$$

۶۶. گزینهٔ ۳ در نمودار زیر روی محور xها نشان دادیم برای هر کدام از بازه‌ها توابع f و g چه مقداری دارند.



به بازهٔ $-۱<x\le ۱$ دقت کنید. این بازه جزء دامنهٔ f نیست، فقط عضوی از دامنهٔ g است؛ پس در دامنهٔ $f-g$ تعریف نمی‌شود.

$$x\le -۱ \rightarrow (f-g)(x)$$
$$=(۲x+۱)-(x+۴)=x-۳$$
$$۱<x\le ۲ \rightarrow (f-g)(x)$$
$$=(x-۲)-(x+۴)=-۶$$
$$x>۲ \rightarrow (f-g)(x)$$
$$=(x-۲)-(۳x+۲)=-۲x-۴$$

$$(f-g)(x)=\begin{cases} x-۳ & x\le -۱ \\ -۶ & ۱<x\le ۲ \\ -۲x-۴ & x>۲ \end{cases}$$

تذکر: حتماً برای اینکه بدون اشتباه تابع $f-g$ را تشکیل بدهید بازه‌ای که تابع $f-g$ تعریف می‌شود را روی محور x مشخص کنید و براساس بازه‌های مختلف تابع را تشکیل دهید.

۶۷. گزینهٔ ۳ شرط تابع بودن در نمایش زوج مرتبی این است که هیچ دو زوج مرتبی مؤلفهٔ اول یکسان نداشته باشند و اگر مؤلفه‌های اول آن‌ها یکسان بود حتماً مؤلفه‌های دوم نیز برابر باشند.

دو زوج مرتب $(۵,۲a-b)$ و $(۵,۴)$ مؤلفه اول یکسان دارند پس باید مؤلفهٔ دوم آن‌ها نیز یکسان باشد.

$$۲a-b=۴ \quad (۱)$$

دو زوج مرتب $(۳,a+۲b)$ و $(۳,۷)$ مؤلفه اول برابر دارند پس:

$$a+۲b=۷ \quad (۲)$$

هردو رابطهٔ (۱) و (۲) باید برقرار باشند درنتیجه:

$$\begin{cases} ۲a-b=۴ \\ a+۲b=۷ \end{cases} \times(-۲)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a-b=۴ \\ -۲a-۴b=-۱۴ \end{cases}$$

$$۲a-b-۲a-۴b=۴-۱۴$$

$\Rightarrow -۵b=-۱۰ \Rightarrow b=\frac{-۱۰}{-۵}=۲$

حال با قرار دادن مقدار b در رابطهٔ (۱) یا (۲) مقدار a به‌دست می‌آید.

$۲a-b=۴ \xrightarrow{b=۲} ۲a-۲=۴$

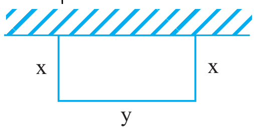
$\Rightarrow ۲a=۶ \Rightarrow a=۳$

پس داریم:

$\{(۳,۷),(۵,۴),(۷,۲),(۳,۷),(۵,۴)\}$ کـــه برابر است با: $\{(۳,۷),(۵,۴),(۷,۲)\}$

$a^۲-b^۲ \xrightarrow[b=۲]{a=۳} (۳)^۲-(۲)^۲=۹-۴=۵$

۶۸. گزینهٔ ۳ توجه داشته باشید سمتی کـه دیوار است نیاز به محصور شدن با سیم ندارد.



محیط: $۲x+y=۵۶$ (۱)

مساحت: xy

از رابطهٔ (۱) مقدار y را بر حسب x به دست می‌آوریم:

$۲x+y=۵۶ \Rightarrow y=۵۶-۲x$

حال در فرمول مساحت جای‌گذاری می‌کنیم:

$S=xy=x(۵۶-۲x)=۵۶x-۲x^۲$

به دنبال ماکزیمم مقدار این تابع هستیم:

رأس سهمی $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۵۶}{۲(-۲)}=۱۴$

$S=۵۶x-۲x^۲ \xrightarrow{x=۱۴}$

$S=۵۶(۱۴)-۲(۱۴)^۲$

$=۷۸۴-۲(۱۹۶)=۳۹۲$

۶۹. گزینهٔ ۲ با توجه به شکل مقدار تابع به ازای xهای منفی برابـر صـفر اسـت. حـال در گزینه‌ها به جای x یک عدد منفی مـثلاً (۱) را جای‌گذاری می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»:

$y=x-|x| \xrightarrow{x=-۱}$

$y=-۱-|-۱|=-۱-(۱)=-۲$ ✗

گزینهٔ «۲»:

$y=x+|x| \xrightarrow{x=-۱}$

$y=-۱+|-۱|=-۱+(۱)=۰$ ✓

گزینهٔ «۳»:

$y=|x-۱|-۱ \xrightarrow{x=-۱}$

$y=|-۱-۱|-۱=|-۲|-۱=(۲)-۱=۱$ ✗

گزینهٔ «۴»:

$y=۱-|x-۱| \xrightarrow{x=-۱}$

$y=۱-|-۱-۱|=۱-|-۲|=۱-(۲)=-۱$ ✗

۷۰. گزینهٔ ۴ در تـابع داده شـده یک‌بـار به‌جای x مقدار $\frac{۹}{۴}$ و بار دیگر مقـدار $-\frac{۱}{۲}$ را قرار می‌دهیم:

$f(x)=[x+\frac{۳}{۲}]-[-x] \xrightarrow{x=\frac{۹}{۴}} f(\frac{۹}{۴})$

$=[\frac{۹}{۴}+\frac{۳}{۲}]-[-\frac{۹}{۴}]=[\frac{۹+۶}{۴}]-[-\frac{۹}{۴}]$

$=[\frac{۱۵}{۴}]-\underbrace{[-۲/۲۵]}_{=-۳}=\underbrace{[۳/۷۵]}_{=۳}-(-۳)$

$=۳+۳=۶$

$f(x)=[x+\frac{۳}{۲}]-[-x] \xrightarrow{x=-\frac{۱}{۲}} f(-\frac{۱}{۲})$

$=[-\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}]-[-(-\frac{۱}{۲})]$

$=[\frac{۲}{۲}]-[\frac{۱}{۲}]=۱-۰=۱$

حال مقدار $f(\frac{۹}{۴})+f(-\frac{۱}{۲})$ را به دست می‌آوریم:

$f(\frac{۹}{۴})+f(-\frac{۱}{۲})=۶+۱=۷$

۷۱. گزینهٔ ۱ برای به دست آوردن برد تابع $g-f$، ابتـدا تـابع $g-f$ را تشـکیل مـی‌دهیم و برای تشکیل تابع به دامنهٔ تابع نیاز داریم:

$D_{g-f}=D_g \cap D_f$

$=\{۱,۲,۵,۴\} \cap \{۲,۳,۴,۱\}=\{۱,۲,۴\}$

پس:

$(g-f)(۱)=g(۱)-f(۱)=۳-۷=-۴$

$(g-f)(۲)=g(۲)-f(۲)=۶-۵=۱$