

فصل اول

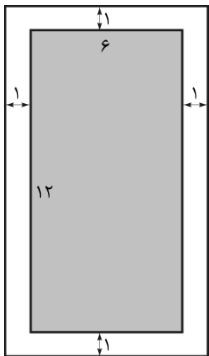
راهبردهای حل مسئله

راهبرد رسم شکل

کشیدن یک شکل مناسب می‌تواند به حل مسئله کمک کند یا به طور کامل آن را حل کند؛ به طوری که نیازی به نوشتن عملیات و محاسبه نباشد. گاهی ممکن است شکل را فقط تصور کنید و آن را رسم نکنید. منظور از رسم شکل، نقاشی نیست؛ بلکه می‌توانید برای این کار، شکل‌های ساده بکشید. مثال‌های زیر را با راهبرد رسم شکل حل کنید.

▼ **مثال ۱:** یک باغچه‌ی مستطیل شکل به طول ۱۲ و عرض ۶ متر داریم. اگر به فاصله‌ی یک متر از ضلع‌های باغچه دورتادور آن را نرده بکشیم، چند متر نرده احتیاج داریم؟

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۱، صفحه‌ی ۲)



✓ **پاسخ:** ابتدا یک مستطیل رسم می‌کنیم که طول آن ۱۲ و عرض آن ۶ متر است. حال به فاصله‌ی یک متر از هر ضلع آن یک خط می‌کشیم. یک مستطیل جدید به وجود می‌آید که طول و عرض آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{طول} = ۱۲ + ۱ + ۱ = ۱۴ \text{ متر}$$

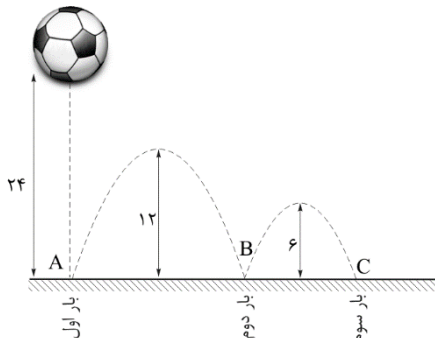
$$\text{عرض} = ۶ + ۱ + ۱ = ۸ \text{ متر}$$

طول نرده‌ی استفاده شده برابر محیط مستطیل جدید است:

$$\text{طول نرده} = ۲(\text{طول} + \text{عرض}) = ۲(۸ + ۱۴) = ۴۴ \text{ متر}$$

▼ **مثال ۲:** توپی از ارتفاع ۲۴ متری سطح زمین رها می‌شود و پس از زمین خوردن، نصف ارتفاع قبلی خود بالا می‌آید. این توپ از لحظه‌ی رها شدن تا سومین مرتبه‌ای که به زمین می‌خورد، چند متر حرکت کرده است؟

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۲، صفحه‌ی ۲)



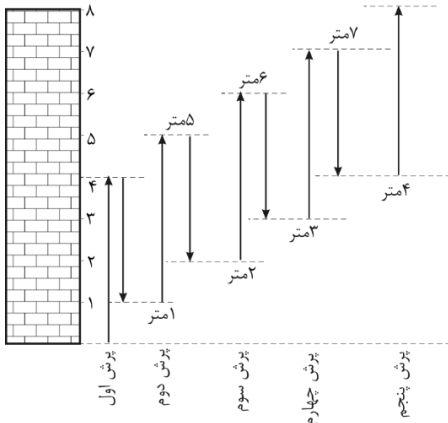
✓ **پاسخ:** به شکل مقابل دقت کنید. توپ در ابتدا در ارتفاع ۲۴ متری قرار دارد. در نقطه‌ی A توپ برای بار اول به زمین فورده است که ۲۴ متر طی کرده است. در نقطه‌ی B توپ برای بار دوم به زمین فورده است که چون تا نصف ارتفاع قبلی بالا می‌رود، $۱۲ + ۱۲ = ۲۴$ متر طی می‌کند تا به نقطه‌ی B برسد. در نقطه‌ی C توپ برای بار سوم به زمین می‌خورد که چون تا نصف ارتفاع قبلی (۶ متر) بالا می‌رود، $۶ + ۶ = ۱۲$ متری طی می‌کند تا به نقطه‌ی C برسد. پس در مجموع، توپ مسافت زیر را طی می‌کند:

$$\text{مسافت طی شده} = ۲۴ + ۲۴ + ۱۲ = ۶۰ \text{ متر}$$



▼ **مثال ۳:** قورباغه‌ای می‌خواهد از یک دیوار عمودی بالا برود. او با هر جهش ۴ متر بالا می‌رود و هر بار ۳ متر سُر می‌خورد و پایین می‌آید. اگر ارتفاع دیوار ۸ متر باشد، او با چند جهش به بالای دیوار می‌رسد؟

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۳، صفحه ۲)



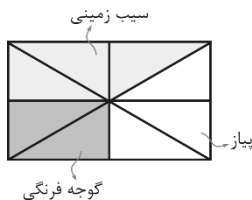
✓ **پاسخ:** ریواری به ارتفاع ۸ متر مطابق شکل را در نظر بگیرید. دیوار را مدرج می‌کنیم.

در هر پرش قورباغه ۴ متر بالا می‌رود و ۳ متر سر می‌خورد. بنابراین قورباغه در هر پرش، ۱ متر بالا می‌رود، یعنی پرش دوم را از فاصله‌ی ۱ متری سطح زمین می‌پرد. به این صورت که بعد از پرش دوم، به ارتفاع ۲ متری می‌رسد. با توجه به شکل، در پرش پنجم قورباغه از ارتفاع ۴ متری به ارتفاع ۸ متری می‌پرد که فواصلی مسئله است.

▼ **مثال ۴:** کشاورزی $\frac{1}{4}$ زمین خود را گوجه‌فرنگی و $\frac{1}{4}$ بقیه‌ی زمین را سیب‌زمینی کاشته است و بقیه‌ی زمین را که ۱۲ هکتار است پیاز کاشته است.

(کتاب پرتکار، سؤال ۲۲، صفحه ۱۱ - کتاب درسی، مشابه و مکمل تمرین‌های ۱ و ۳، صفحه ۱۰)

حساب کنید کل زمین این کشاورز چند هکتار مساحت دارد؟

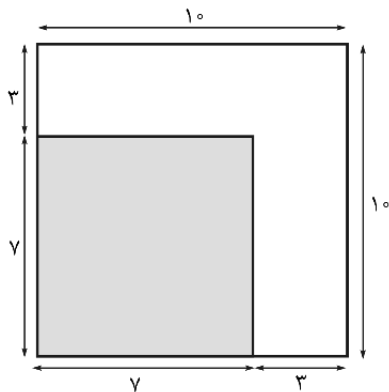


✓ **پاسخ:** فرض می‌کنیم شکل مقابل، زمین کشاورزی باشد. آن را به ۸ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم.

$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ زمین گوجه‌فرنگی است، یعنی دو فانه از هشت فانه گوجه‌فرنگی کاشته شده است. از طرفی $\frac{1}{4}$ بقیه یعنی نصف بقیه‌ی زمین، سیب‌زمینی کاشته شده است، چون شش فانه باقی مانده است، سه فانه‌ی آن سیب‌زمینی کاشته می‌شود. سه فانه باقی می‌ماند که در آن پیاز کاشته می‌شود و این سه فانه، ۱۲ هکتار مساحت دارد، پس هر فانه $\frac{12}{3} = 4$ هکتار مساحت دارد. پس کل زمین $4 \times 8 = 32$ هکتار مساحت دارد.

▼ **مثال ۵:** اگر از طول ضلع مربعی ۳۰ درصد کم شود، از مساحت آن چند درصد کم می‌شود؟

(کتاب پرتکار، سؤال ۳، صفحه ۷ - کتاب درسی، مشابه تمرین ۲، صفحه ۱۰)



✓ **پاسخ:** چون طول ضلع مربع را نداریم، پس می‌توان ضلع مربع را هر مقدار دلخواه در نظر گرفت.

فرض می‌کنیم طول مربع ۱۰ باشد، وقتی ۳۰٪ از طول ضلع مربع کم شود، ضلع مربع جدید می‌شود ۷. قسمت هاشورفورده، مربع جدید به طول ضلع ۷ است و قسمت سفید، مقداری است که از مساحت مربع کم شده است. داریم:

$$مقدار مساحت کم شده = 10 \times 10 - 7 \times 7 = 51$$

$$\text{درصد کم شدن مساحت} = \frac{51}{100} \times 100 = 51\%$$

راهبرد الگوسازی

برای حل بعضی از مسئله‌ها باید تمامی حالت‌های ممکن را بنویسید. برای اینکه هیچ حالتی از قلم نیفتد، لازم است آنها را با نظم، الگو و ترتیبی مشخص بنویسید. الگوسازی به شما کمک می‌کند تا مطمئن شوید همه حالت‌ها را نوشته‌اید. بنابراین در مسئله‌هایی که لازم است تمامی جواب‌ها و پاسخ‌های ممکن را بنویسید، می‌توانید از این راهبرد استفاده کنید. با توجه به نظم و ترتیبی که می‌سازید، به این راهبرد تفکر نظام‌دار نیز می‌گویند. مثال‌های زیر را با راهبرد الگوسازی حل کنید.



مثال ۶: دو عدد طبیعی پیدا کنید که حاصل ضرب آنها ۳۰ و حاصل جمع آنها کمترین مقدار باشد. جدول را با یک نظم و ترتیب کامل کنید.

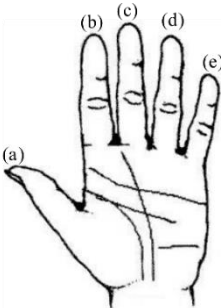
(کتاب درسی، مشابه تمرین ۱، صفحه ۳)

اولین عدد	دومین عدد	حاصل جمع
۱	۳۰	۳۱
۲	۱۵	۱۷
۳	۱۰	۱۳
۵	۶	۱۱
۶	۵	۱۱
۱۰	۳	۱۳
۱۵	۲	۱۷
۳۰	۱	۳۱

پاسخ: ابتدا کوچکترین عدد طبیعی یعنی ۱ را در ستون سمت چپ قرار می‌دهیم. با توجه به اینکه $1 \times 30 = 30$ است، عدد ۳۰ در ستون دوم قرار می‌گیرد. عدد بعدی یعنی ۲ را در ستون اول قرار می‌دهیم، چون $2 \times 15 = 30$ است، پس در ستون دوم عدد ۱۵ قرار می‌گیرد و به همین ترتیب با توجه به $3 \times 10 = 30$ ، $5 \times 6 = 30$ ، $6 \times 5 = 30$ ، $10 \times 3 = 30$ ، $15 \times 2 = 30$ و $30 \times 1 = 30$ جدول را تکمیل می‌کنیم. دقت کنید به عنوان مثال عدد ۴ یا ۷ نمی‌تواند در ستون-ها قرار گیرد. حال ستون سوم را تکمیل می‌کنیم. با توجه به جدول، کمترین مقدار حاصل جمع برابر ۱۱ است و دو عدد مورد نظر ۵ و ۶ است.

مثال ۷: با انگشتان یک دست به ۵ صورت می‌توان عدد ۱ را نشان داد. با چند صورت می‌توان عدد ۲ را نشان داد؟

(کتاب درسی، تمرین ۲، صفحه ۳)



پاسخ: برای نشان دادن عدد ۲ توسط انگشتان دست، ابتدا هر یک از انگشتان را نام‌گذاری می‌کنیم. باید دو انگشت انتخاب کنیم. برای پیدا کردن الگو، ابتدا انگشت اول را ثابت و انگشت دوم را عوض می‌کنیم. سپس برای انگشت اول، انگشت دیگری انتخاب می‌کنیم و انگشت دوم را عوض می‌کنیم. به الگوی زیر دقت کنید.

(b,c), (b,d), (b,e) (c,d), (c,e) (d,e)
(a,b), (a,c), (a,d), (a,e)

پس در مجموع ۱۰ انتخاب می‌توانیم داشته باشیم. دقت کنید که انتخاب (a,b) و (b,a) فرق ندارد.

مثال ۸: با رقم‌های ۳، ۴ و ۷ تمام عددهای سه رقمی ممکن را بنویسید (در عددهای شما می‌تواند رقم تکراری هم باشد).

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۳، صفحه ۳)

(, ,)

پاسخ: مانند سؤال قبل، یک سه‌تایی تعریف می‌کنیم که نشان‌گر رقم یکان، دهگان و صدگان است. در ابتدا صدگان و دهگان را ثابت و یکان را تغییر می‌دهیم و سپس دهگان را عوض می‌کنیم و صدگان ثابت، یکان‌های مختلفی را جایگزین می‌کنیم و به همین صورت، مطابق الگو پیش می‌رویم و تمامی حالات را به دست می‌آوریم.

صدگان ۷			صدگان ۴			صدگان ۳		
(۷,۷,۷)	(۷,۴,۷)	(۷,۳,۷)	(۴,۷,۷)	(۴,۴,۷)	(۴,۳,۷)	(۳,۷,۷)	(۳,۴,۷)	(۳,۳,۷)
(۷,۷,۴)	(۷,۴,۴)	(۷,۳,۴)	(۴,۷,۴)	(۴,۴,۴)	(۴,۳,۴)	(۳,۷,۴)	(۳,۴,۴)	(۳,۳,۴)
(۷,۷,۳)	(۷,۴,۳)	(۷,۳,۳)	(۴,۷,۳)	(۴,۴,۳)	(۴,۳,۳)	(۳,۷,۳)	(۳,۴,۳)	(۳,۳,۳)
دهگان ۷	دهگان ۴	دهگان ۳	دهگان ۷	دهگان ۴	دهگان ۳	دهگان ۷	دهگان ۴	دهگان ۳

با توجه به جدول فوق، ۲۷ عدد مختلف با این سه عدد می‌توان ساخت.

مثال ۹: تعداد زیادی سکه‌های ۵۰ و ۲۰۰ تومانی داریم. به چند حالت می‌توان کرایه‌ی ۱۰۰۰ تومانی

تاکسی را پرداخت کرد؟

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۴، صفحه ۳)

تعداد سکه‌ی ۲۰۰ تومانی	تعداد سکه‌ی ۵۰ تومانی
۵	۰
۴	۴
۳	۸
۲	۱۲
۱	۱۶
۰	۲۰

پاسخ: ابتدا بیرون اینکه از سکه‌های ۵۰ تومانی استفاده کنیم، مناسبه می‌کنیم که با چند سکه‌ی ۲۰۰ تومانی می‌توان کرایه را پرداخت کرد. ۵ سکه‌ی ۲۰۰ تومانی می‌شود ۱۰۰۰ تومانی ($5 \times 200 = 1000$). بنابراین سطر اول جدول رو به رو تکمیل می‌شود. برای تکمیل سطرهای بعد باید در نظر گرفت که با کاهش یک سکه‌ی ۲۰۰ تومانی، به جایش می‌توان ۴ سکه‌ی ۵۰ تومانی قرار داد. حال جدول را کامل می‌کنیم. با توجه به جدول، در شش حالت می‌توان با سکه‌های ۵۰ و ۲۰۰ تومانی کرایه‌ی ۱۰۰۰ تومانی را پرداخت کرد.



(آزمون کانون - ۹۳ - کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۳، صفحه ۳)

مثال ۱۰: چند عدد طبیعی از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ داریم که در آن‌ها رقم ۵ وجود دارد؟

۱۰ (۱) ۱۵ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴)

پاسخ: رقم ۵ یا باید در یکان باشد یا باید در دهگان باشد. هنگامی که ۵ در دهگان باشد، رقم یکان ۱۰ حالت مقلف می‌تواند داشته باشد. (۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹) و هنگامی که ۵ در یکان باشد، رقم دهگان نیز ۱۰ حالت مقلف می‌تواند داشته باشد. (۰۵، ۱۵، ۲۵، ۳۵، ۴۵، ۵۵، ۶۵، ۷۵، ۸۵، ۹۵) اما باید دقت کنید که ۵۵ در دو حالت تکرار شده است، پس در مجموع $۱۰ + ۱۰ - ۱ = ۱۹$ عدد وجود دارد که رقم ۵ در آن‌ها وجود دارد. گزینه ی «۳» صحیح است.

مثال ۱۱: با اسکناس‌های ۱۰۰۰ و ۲۰۰۰ تومانی به چند حالت می‌توان ۱۰۰۰۰ تومان ساخت به شرطی که از هر اسکناس ۱۰۰۰ و ۲۰۰۰ تومانی حداقل یک اسکناس استفاده شود؟

(آزمون کانون - ۹۲ - کتاب درسی، مشابه و مکمل تمرین ۴، صفحه ۳)

۴ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴)

پاسخ: ابتدا همه‌ی حالت را می‌نویسیم و سپس حالت‌هایی که اسکناس‌های ۱۰۰۰ و ۲۰۰۰ تومانی با هم وجود ندارند را حذف می‌کنیم. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که تمامی اسکناس‌ها ۲۰۰۰ تومانی است. برای این حالت ۵ اسکناس ۲۰۰۰ تومانی ($۵ \times ۲۰۰۰ = ۱۰۰۰۰$) احتیاج است. با کم شدن یک اسکناس ۲۰۰۰ تومانی، باید دو اسکناس ۱۰۰۰ تومانی اضافه شود. با توجه به توضیحات جدول، روبرو را تکمیل می‌کنیم. تعداد کل حالات ۶ است. اما باید توجه داشت که در حالت اول، اسکناس ۱۰۰۰ تومانی و در حالت ششم، اسکناس ۲۰۰۰ تومانی استفاده نشده است. پس در کل $۶ - ۲ = ۴$ حالت وجود دارد. گزینه ی «۱» صحیح است.

اسکناس ۲۰۰۰ تومانی	اسکناس ۱۰۰۰ تومانی
۵	۰
۴	۲
۳	۴
۲	۶
۱	۸
۰	۱۰

راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب

به شرایط و اطلاعات مسئله توجه کنید و حالت‌های نامطلوب و نادرست را کنار بگذارید، آنگاه پاسخ مسئله یا همان حالت‌های مطلوب به دست می‌آیند. برای پیدا کردن تمام حالت‌های ممکن می‌توانید از راهبرد الگوسازی استفاده کنید. ابتدا فهرستی از تمام حالت‌ها به دست آورید؛ سپس با توجه به شرایط گفته شده در مسئله حالت‌های نامطلوب را حذف کنید. این راهبرد برای مسائلی استفاده می‌شود که حالت‌های زیادی دارد. مثال‌های زیر را با راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب حل کنید.

مثال ۱۲: مجموع سه عدد طبیعی مختلف ۱۸ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۱۰ می‌باشد. بزرگترین عدد کدام است؟

(کتاب پرکنار، سوال ۱۱، صفحه ۸ - کتاب درسی، مشابه تمرین ۱، صفحه ۴)

(ابتدا همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسید و سپس حالت‌های نامطلوب را حذف کنید)

مجموع	عدد سوم	عدد دوم	عدد اول
۱۱۲	۱۱۰	۱	۱
۵۸	۵۵	۲	۱
۲۸	۲۲	۵	۱
۲۲	۱۱	۱۰	۱
۱۸	۱۱	۵	۲

پاسخ: ابتدا تمام حالت‌هایی که حاصل ضرب سه عدد طبیعی برابر ۱۱۰ می‌شود را می‌نویسیم. برای این کار جدول مقابل را تنظیم می‌کنیم. از کوچکترین عددها استفاده می‌کنیم. ابتدا عدد اول و دوم را یک در نظر می‌گیریم. راهبرد به این صورت است که عدد اول را ثابت و عددهای دوم و سوم را تغییر می‌دهیم و تمامی حالات را به دست می‌آوریم و سپس عدد اول را تغییر داده و تمامی حالت‌های اعداد دوم و سوم را می‌نویسیم و با همین الگو تمامی حالت‌ها را به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن تمامی اعداد، در نظر گرفتن $۱۱۰ = ۱۱ \times ۲ \times ۵$ کمک زیادی می‌کند. دقت کنید وقتی عدد یک را به عنوان عدد اول در نظر می‌گیریم و تمامی حالت‌ها را می‌نویسیم، با تغییر عدد اول دیگر عدد ۱ در عددها وجود ندارد. با توجه به جدول، سه عدد ۱۱ و ۵ و ۲ دارای مجموع ۱۸ و حاصل ضرب ۱۱۰ هستند.



▼ **مثال ۱۳:** شیمیا عددی سه رقمی را روی کارت نوشت و از مینا خواست عدد را حدس بزند. مینا سؤالی پرسید و شیمیا جواب «خیر» داد و بهتر است مینا

(آزمون کانون - ۹۳ - کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۶، صفحه ۴)

کدام سوال زیر را پرسیده باشد تا تعداد حالات نامطلوب بیشتری حذف شود؟

(۱) عدد مورد نظر فرد است؟ (۲) عدد مورد نظر بزرگ‌تر از ۵۰۰ است؟

(۳) عدد مورد نظر کوچک‌تر از ۸۰۰ است؟ (۴) ارقام عدد مورد نظر شامل صفر و یک است؟

✓ **پاسخ:** گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم که در هر حالت، چند حالت نامطلوب حذف می‌شود. دقت کنید ۹۰۰ عدد سه رقمی وجود دارد.
گزینه ۱: «۱»:

عدد مورد نظر فرد است؟ ← فیر ← نصف اعداد یعنی ۴۵۰ عدد حذف می‌شود.
گزینه ۲: «۲»:

عدد مورد نظر بزرگ‌تر از ۵۰۰ است؟ ← فیر ← یعنی عددهای ۵۰۱ تا ۹۹۹ که ۴۹۹ تا است، حذف می‌شود.
گزینه ۳: «۳»:

عدد مورد نظر کوچک‌تر از ۸۰۰ است؟ ← فیر ← یعنی عددهای ۱۰۰ تا ۷۹۹ که ۷۰۰ تا است، حذف می‌شود.
گزینه ۴: «۴»:

ارقام عدد مورد نظر شامل صفر و یک است؟ ← فیر ← یعنی عدد شامل ارقام ۲ تا ۹ است که ۵۱۲ عدد را شامل می‌شود. یعنی $900 - 512 = 388$ عدد حذف می‌شود.

گزینه ۳ «۳» صحیح است.

راهبرد الگویابی

در ریاضی با دو نوع الگوی عددی یا هندسی روبه‌رو می‌شویم. کشف الگو، رابطه و نظم موجود در بین دنباله‌های عددی یا هندسی کمک می‌کند تا بتوانید خواسته‌ی مسئله را به دست آورید. این راهبرد در مسئله‌هایی کاربرد دارد که بین شکل‌ها یا عددها، الگو و رابطه‌ی خاصی وجود داشته باشد. مثال‌های زیر را با راهبرد الگویابی حل کنید.

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۱، صفحه ۵)

▼ **مثال ۱۴:** سه عدد بعدی الگوهای زیر را بنویسید. رابطه‌ی بین عددها را توضیح دهید.

(الف) ۱, ۶, ۱۱, ۱۶, ۲۱,

(ب) ۱, ۴, ۹, ۱۶,

(پ) ۶۴, ۳۲, ۱۶, ۸,

✓ **پاسخ:** در هر الگو باید دید چه رابطه‌ای بین عددها برقرار است.

(الف) هر عدد از جمع عدد قبلی به اضافه‌ی ۵ به دست می‌آید. پس یک ضریب ۵ باید برای n وجود داشته باشد.

۲۶, ۳۱, ۳۶ ← سه جمله‌ی بعدی
 $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 5+1 & 2(5)+1 & 3(5)+1 & 4(5)+1 \end{matrix}$

(ب) با دقت به جمله‌ها، هر عدد مربع کامل است، یعنی از ضرب یک عدد در خودش به دست می‌آید.

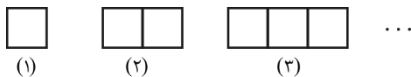
۲۵, ۳۶, ۴۹ ← سه جمله‌ی بعدی
 $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5^2 & 6^2 & 7^2 & 8^2 \end{matrix}$

(پ) هر جمله از تقسیم جمله‌ی قبلی بر ۲ به دست می‌آید:

۴, ۲, ۱ ← سه جمله‌ی بعدی
 $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{64}{2} & \frac{32}{2} & \frac{16}{2} \end{matrix}$

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۶، صفحه ۵)

▼ **مثال ۱۵:** شکل پنجم در الگوی زیر از چند پاره‌خط ساخته شده است؟



۱۶ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲ (۲)

۲۰ (۱)



✓ پاسخ: شکل ۱ از ۴ پاره‌فقط، شکل ۲ از $۴+۳=۷$ پاره‌فقط و شکل ۳ از $۷+۳$ پاره‌فقط تشکیل شده است. به همین صورت داریم:

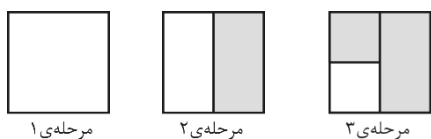
شماره شکل	تعداد پاره‌فقط
۱	۴
۲	$۴+۳=۷$
۳	$۴+۳+۳=۱۰$
۴	$۴+۳+۳+۳=۱۳$
۵	$۴+۳+۳+۳+۳=۱۶$

بنابراین شکل پنجم از ۱۶ پاره‌فقط تشکیل شده است.
گزینه‌ی «۳» صحیح است.

▼ مثال ۱۶: در الگوی زیر، اگر طول هر ضلع مربع بزرگ ۱۶ سانتی‌متر باشد و در هر مرحله نصف قسمت سفید را هاشور می‌زنیم، مساحت قسمت

(آزمون کانون - ۹۳ - کتاب درسی، مشابه تمرین ۷، صفحه‌ی ۱۱)

هاشور خورده در مرحله‌ی هفتم چند سانتی‌متر مربع خواهد بود؟



مرحله‌ی ۱

مرحله‌ی ۲

مرحله‌ی ۳

...

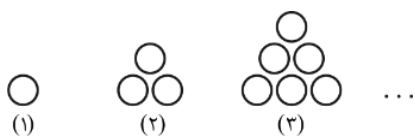
✓ پاسخ: در هر مرحله، نصف قسمت سفید از مرحله‌ی قبلی هاشور می‌شود. جدول زیر را در نظر بگیرید:

شماره مرحله	مساحت قسمت سفید
۱	$۱۶ \times ۱۶ = ۲۵۶$
۲	$\frac{۲۵۶}{۲} = ۱۲۸$
۳	$\frac{۱۲۸}{۲} = ۶۴$
۴	$\frac{۶۴}{۲} = ۳۲$
۵	$\frac{۳۲}{۲} = ۱۶$
۶	$\frac{۱۶}{۲} = ۸$
۷	$\frac{۸}{۲} = ۴$

بنابراین در مرحله‌ی هفتم، مساحت قسمت سفید ۴ سانتی‌متر مربع است. پس مساحت قسمت هاشورخورده برابر $۲۵۶ - ۴ = ۲۵۲$ سانتی‌متر مربع است.

(کتاب پرکار، سؤال ۱۶، صفحه‌ی ۹ - کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۶، صفحه‌ی ۵)

▼ مثال ۱۷: با توجه به الگوی داده شده، شکل دهم با چند دایره ساخته می‌شود؟



شماره شکل	تعداد دایره
۱	۱
۲	$۱+۲$
۳	$۱+۲+۳$
۴	$۱+۲+۳+۴$
⋮	⋮
۱۰	$۱+۲+۳+...+۱۰=۵۵$

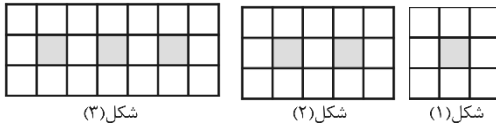
✓ پاسخ: در شکل اول، ۱ دایره داریم، در شکل دوم، $۱+۲$ دایره داریم و در شکل سوم،

$۱+۲+۳$ دایره وجود دارد. به همین صورت داریم:



(کتاب درسی، مشابه تمرین ۳، صفحه ۵)

مثال ۱۸: اگر شکل‌ها به همین ترتیب ادامه پیدا کنند، چه کسری از شکل شماره ۸، رنگی است؟



پاسخ: برای اینکه مقدار کسر رنگ شده را بیابیم، کفایت تعداد مربع‌های رنگ شده را به تعداد کل مربع‌ها تقسیم کنیم. در شکل (۱)، $\frac{1}{9}$ شکل رنگ شده

است، در شکل دوم $\frac{2}{15}$ و در شکل سوم $\frac{3}{21}$ شکل رنگ شده است. دقت کنید که صورت کسرهای موجود برابر شماره‌ی شکل است و مخرج نیز شش تا شش تا اضافه می‌شود، پس ضریب ۶ دارد. به الگوی جدول زیر دقت کنید.

شماره شکل	تعداد دایره
۱	$\frac{1}{9} = \frac{1}{6(1)+3}$
۲	$\frac{2}{15} = \frac{2}{6(2)+3}$
۳	$\frac{3}{21} = \frac{3}{6(3)+3}$
⋮	⋮
۸	$\frac{8}{6(8)+3} = \frac{8}{51}$

بنابراین در شکل هشتم، $\frac{8}{51}$ شکل رنگ شده است.

(آزمون کانون - ۹۳ - کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۱، صفحه ۵)

مثال ۱۹: در الگوی زیر، اولین عدد سطر هفتم از سمت راست کدام است؟

۱	۲, ۳	۴, ۵, ۶	۷, ۸, ۹, ۱۰	۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵
	۴۰۳ (۴)	۲۴۱۵ (۳)	۴۶۵ (۲)	۲۴۸۵ (۱)

پاسخ: تعداد عددهای هر سطر را می‌نویسیم:

اولین عدد سمت راست سطر هفتم، یعنی آخرین عدد سطر هفتم. برای اینکه ببینیم این عدد چند است، باید اعداد تمام سطرها با هم جمع شوند.

شماره سطر	تعداد عدد	آخرین عدد
۱	۱	۱
۲	۲	$1+2=3$
۳	۳	$1+2+3=6$
۴	۴	$1+2+3+4=10$
۵	۵	$1+2+3+4+5=15$
⋮	⋮	⋮
۷۰	۷۰	$1+2+\dots+70=2485$

آخرین عدد هفتمین سطر:

$$1+2+3+\dots+69+70 = (70+1) \times \frac{70}{2} = 71 \times 35 = 2485$$

گزینه‌ی «ا» صحیح است.



راهبرد حدس و آزمایش

ممکن است حلّ یک مسئله، روش و راه حلّ مستقیمی نداشته باشد یا راه رسیدن به جواب آن طولانی و دشوار باشد. شما می‌توانید با یک روش منطقی و منظم، پاسخ احتمالی مسئله را حدس بزنید؛ سپس با توجه به شرایط گفته شده در مسئله، حدس خود را بررسی کنید و با توجه به نتیجه‌ی به دست آمده، حدس بعدی را بزنید تا کم‌کم به پاسخ مسئله نزدیک شوید. برای نشان دادن حدس‌ها و آزمایش‌های خود راه حل مناسبی پیدا کنید. مثال‌های زیر را با راهبرد حدس و آزمایش حل کنید.

▼ **مثال ۲۰:** ۲۰ دستگاه دوچرخه و سه چرخه در یک پارکینگ وجود دارد. اگر تعداد کل چرخ‌های آنها ۵۵ عدد باشد، چند دوچرخه و چند سه چرخه در پارکینگ وجود دارد؟

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۱، صفحه ۷)

تعداد سه چرخه	تعداد دوچرخه	تعداد چرخ‌ها
۱۰	۱۰	$۱۰ \times ۳ + ۱۰ \times ۲ = ۵۰$
۱۱	۹	$۱۱ \times ۳ + ۹ \times ۲ = ۵۱$
۱۲	۸	$۱۲ \times ۳ + ۸ \times ۲ = ۵۲$
۱۳	۷	$۱۳ \times ۳ + ۷ \times ۲ = ۵۳$
۱۴	۶	$۱۴ \times ۳ + ۶ \times ۲ = ۵۴$
۱۵	۵	$۱۵ \times ۳ + ۵ \times ۲ = ۵۵$

✓ **پاسخ:** جدول روبه‌رو را در نظر بگیرید. ابتدا ۱۰ دوچرخه و ۱۰ سه چرخه در نظر بگیرید. و تعداد چرخ‌ها را حساب کنید. با توجه به تعداد چرخ‌ها، چون $۵۰ < ۵۵$ است، باید از تعداد دوچرخه‌ها کم و به تعداد سه چرخه‌ها اضافه شود. در مرحله‌ی دوم ۱۱ سه چرخه و ۹ دوچرخه در نظر می‌گیریم، مشاهده می‌شود که تعداد چرخ‌ها زیاده است. اگر به همین صورت ادامه دهیم، فوایدیم یافت که با ۱۵ سه چرخه و ۵ دوچرخه، تعداد چرخ‌ها ۵۵ عدد می‌شود.

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۲، صفحه ۷)

▼ **مثال ۲۱:** دو زاویه متمم‌اند. یکی از این زاویه‌ها ۳ برابر زاویه‌ی دیگر است. اندازه‌ی هر زاویه را پیدا کنید.

زاویه‌ی کوچکتر	زاویه‌ی بزرگتر	مجموع زوایا
۲۰°	$۲۰^\circ \times ۳ = ۶۰^\circ$	$۲۰^\circ + ۶۰^\circ = ۸۰^\circ$
۳۰°	$۳۰^\circ \times ۳ = ۹۰^\circ$	$۳۰^\circ + ۹۰^\circ = ۱۲۰^\circ$
۲۵°	$۲۵^\circ \times ۳ = ۷۵^\circ$	$۲۵^\circ + ۷۵^\circ = ۱۰۰^\circ$
$۲۲/۵^\circ$	$۲۲/۵^\circ \times ۳ = ۶۷/۵^\circ$	$۲۲/۵^\circ + ۶۷/۵^\circ = ۹۰^\circ$

✓ **پاسخ:** دو زاویه در نظر می‌گیریم که یکی ۳ برابر دیگری باشد، با در نظر گرفتن این دو زاویه، زوایا را اضافه یا کم می‌کنیم تا مجموع آن‌ها ۹۰° شود. در مرحله‌ی اول زاویه‌ی کوچک را ۲۰° در نظر می‌گیریم، مشاهده می‌شود که زاویه‌ی دیگر ۶۰° می‌شود. مجموع دو زاویه ۸۰° می‌شود. در مرحله‌ی دوم زاویه را ۳۰° در نظر می‌گیریم، زاویه‌ی دوم ۹۰° می‌شود. مشاهده می‌شود که مجموع آن‌ها ۱۲۰° می‌شود. بنابراین زاویه‌ی اول باید بین این دو زاویه باشد، با در نظر گرفتن ۲۵° برای زاویه‌ی اول نیز مجموع دو زاویه بیشتر از ۹۰° می‌شود، پس عدد بعدی که امتحان می‌کنیم، بین ۲۰° و ۲۵° باید باشد. با در نظر گرفتن زاویه‌ی کوچک $۲۲/۵^\circ$ ، مجموع دو زاویه ۹۰° می‌شود.

(کتاب پرکننده سؤال ۱۰، صفحه ۱۰ و ۱۱ - کتاب درسی، مشابه تمرین ۳، صفحه ۷)

▼ **مثال ۲۲:** در رابطه‌های زیر به جای \square چه عددی می‌توان قرار داد؟

(الف) $-۲ \times \square + ۳ = ۱$

(ب) $۲ \times \square + ۵ = -۱$

\square	حاصل سمت چپ
۴	$(-۲) \times ۴ + ۳ = -۵$
۳	$(-۲) \times ۳ + ۳ = -۳$
۲	$(-۲) \times ۲ + ۳ = -۱$
۱	$(-۲) \times ۱ + ۳ = ۱$
\square	حاصل سمت چپ
۰	$۲(۰) + ۵ = ۵$
-۱	$۲(-۱) + ۵ = ۳$
-۲	$۲(-۲) + ۵ = ۱$
-۳	$۲ \times (-۳) + ۵ = -۱$

✓ **پاسخ:** در هر مورد به جای \square عددی را در عرض می‌زنیم و حاصل سمت چپ تساوی را به دست می‌آوریم. با توجه به مقدار به دست آمده، عدد مورد نظر را تغییر می‌دهیم. (الف) برای عدد مورد نظر، ابتدا با ۴ شروع می‌کنیم. مقدار سمت چپ برابر $-۵ = -۲ \times ۴ + ۳$ می‌شود. چون \square در -۲ ضرب شده است، پس عدد درسی باید کمتر باشد. جدول روبه‌رو را ادامه می‌دهیم. با توجه به جدول، به جای \square باید عدد ۱ قرار دهیم. (ب) مانند قسمت اول، در ابتدای کار به جای \square عددی را در عرض می‌زنیم، به عنوان مثال صفر و با توجه به مقدار به دست آمده، عدد درسی خود را کم یا زیاد می‌کنیم. با توجه به جدول، به جای \square باید عدد -۳ قرار دهیم.



راهبرد زیر مسئله

مسئله‌ی پیچیده و چند مرحله‌ای را به چند مسئله‌ی ساده تبدیل کنید. فهرستی از زیرمسئله‌ها را درست کنید؛ سپس به ترتیب به آنها پاسخ دهید. اگر ترتیب زیرمسئله‌ها را درست تشخیص داده باشید، حل هر زیرمسئله به حل مسئله‌ی بعدی کمک می‌کند تا در نهایت به خواسته‌ی اصلی مسئله برسید. به مثال‌های زیر دقت کنید.

▼ **مثال ۲۳:** پس‌انداز هفتگی رزیتا ۲۰۰۰ تومان است. او حساب کرد ۶ هفته پس‌انداز او، نصف قیمت کیفی است که دوست دارد بخرد. قیمت کیف چقدر است؟

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۱، صفحه ۷)

☑ **پاسخ:** در ابتدا مناسبه می‌کنیم که پس‌انداز رزیتا در ۶ هفته بقدر است.

تومان $12000 = 6 \times 2000$ ؛ پس‌انداز شش هفته

مال باید دقت کنید که پس‌انداز ۶ هفته‌ی رزیتا، نصف قیمت کیف است، بنابراین قیمت کیف، دو برابر پس‌انداز شش هفته‌ای رزیتا است.

$24000 = 12000 \times 2 =$ قیمت کیف

▼ **مثال ۲۴:** طول، عرض و عمق یک استخر به ترتیب ۸، ۴ و ۳ متر است. می‌خواهند کف و دیواره‌های این استخر را رنگ کنند. اگر برای هر متر مربع

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۲، صفحه ۷)

0.2 کیلوگرم رنگ لازم باشد، برای رنگ کردن استخر چند کیلوگرم رنگ نیاز است؟

☑ **پاسخ:** ابتدا باید مناسبه کنیم که چند مترمربع را می‌خواهیم رنگ کنیم. می‌خواهیم کف و دیواره‌ها را رنگ کنیم. به مکعب روبه‌رو دقت کنید. دیواره‌ی استخر از دو مستطیل به ابعاد ۳ و ۴ و دو مستطیل به ابعاد ۸ و ۳ تشکیل شده است و همچنین کف استخر مستطیلی به ابعاد ۴ و ۸ است. پس داریم: مساحتی که می‌خواهد رنگ شود: متر مربع

$$2(3 \times 4) + 2(3 \times 8) + 4 \times 8 = 24 + 48 + 32 = 104$$

در مرحله‌ی بعد باید دید چند کیلوگرم رنگ نیاز است. چون هر متر مربع 0.2 کیلوگرم رنگ نیاز دارد، پس

برای رنگ آمیزی استخر به $20.8 = 104 \times 0.2$ کیلوگرم رنگ نیاز است.

▼ **مثال ۲۵:** میوه فروشی، امروز ۳۰ کیلوگرم سیب به قیمت هر کیلوگرم ۳۵۰۰ تومان و ۶۰ کیلوگرم پرتقال به قیمت هر کیلوگرم ۱۵۰۰ تومان خرید. او هر کیلوگرم سیب را ۴۰۰۰ تومان و هر کیلوگرم پرتقال را ۳۵۰۰ تومان فروخت. این میوه‌فروشی، از این کار خود چقدر سود برده است؟

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۳، صفحه ۷)

☑ **پاسخ:** در مرحله‌ی اول باید دید که بقدر پول از فروش میوه‌های ذکر شده به دست می‌آید. هر کیلوگرم سیب ۴۰۰۰ تومان است و هر کیلوگرم پرتقال ۲۵۰۰ تومان است، پس پول به دست آمده از فروش ۳۰ کیلوگرم سیب و ۶۰ کیلوگرم پرتقال برابر است با:

$$30 \times 4000 + 60 \times 3500 = 120000 + 210000 = 330000 \text{ تومان}$$

مال باید دید میوه‌فروشی، چند تومان برای خرید این میوه‌ها پرداخته است. او هر کیلوگرم سیب را ۳۵۰۰ تومان و هر کیلوگرم پرتقال را ۱۵۰۰ تومان فریده است پس:

$$30 \times 3500 + 60 \times 1500 = 105000 + 90000 = 195000 \text{ تومان}$$

$$135000 = 330000 - 195000 \text{؛ سود فروشنده}$$

افتلاف این دو مقدار، سود فروشنده است.

▼ **مثال ۲۶:** در یک کارگاه تولید کفش، ۴۹۶۰ جفت کفش تولید شده است. $\frac{5}{8}$ آنها پسرانه و بقیه دخترانه است. اگر قیمت هر جفت کفش پسرانه

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۵، صفحه ۱۱)

۳۷۰۰۰ تومان و قیمت هر جفت کفش دخترانه ۴۴۰۰۰ تومان باشد، درآمد این کارگاه چقدر است؟

☑ **پاسخ:** ابتدا باید دید که چند جفت کفش پسرانه و چند جفت کفش دخترانه است. برای این کار کافیسست تعداد کل کفش‌ها را به ۸ تقسیم کنیم، ۵ قسمت آن پسرانه و ۳ قسمت آن دخترانه است.

$$4960 \div 8 = 620 \Rightarrow \begin{cases} \text{پسرانه: } 620 \times 5 = 3100 \\ \text{دخترانه: } 620 \times 3 = 1860 \end{cases}$$



مال باید مناسبه کرد که ۳۱۰۰ بفت کفش پسرانه که قیمت هر بفت آن ۳۷۰۰۰ تومان و ۱۸۶۰ بفت کفش دخترانه که قیمت هر بفت آن ۴۴۰۰۰ تومان است، پندر تومان است:

$$\text{تومان} \quad ۳۱۰۰ \times ۳۷۰۰۰ + ۱۸۶۰ \times ۴۴۰۰۰ = ۱۱۴۷۰۰۰۰ + ۸۱۸۴۰۰۰۰ = ۱۹۶۵۴۰۰۰۰$$

مثال ۲۷: علی هر ماه ۱۰۰۰۰۰۰ تومان حقوق می‌گیرد. او حساب کرد که اگر ۷ ماه پس‌انداز کند و در این ۷ ماه کلاً ۱۰۰۰۰۰۰ تومان خرج کند،

(آزمون کلون-۹۲- کتاب درسی، مشابه تمرین ۱، صفحه ۷)

ثلث پول تلویزیونی که می‌خواهد بخرد را دارد. کل پول تلویزیون چند تومان است؟

$$۶۹۰۰۰۰۰(۱) \quad ۲۰۷۰۰۰۰۰(۲) \quad ۱۵۰۰۰۰۰(۳) \quad ۲۷۰۰۰۰۰(۴)$$

پاسخ: فوق ۷ ماه علی برابر است با $۷ \times ۱۰۰۰۰۰۰ = ۷۰۰۰۰۰۰$ تومان. اگر او ۱۰۰۰۰۰۰ تومان خرج کند، پول او برابر با $۷۰۰۰۰۰۰ - ۱۰۰۰۰۰۰ = ۶۰۰۰۰۰۰$ تومان می‌شود.

مال این مقدار پول، ثلث یعنی $\frac{۱}{۳}$ پول تلویزیون است. این بدان معناست که پول تلویزیون سه برابر پس‌انداز علی است.

$$\text{پول تلویزیون} = ۳ \times ۶۹۰۰۰۰۰ = ۲۰۷۰۰۰۰۰$$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

راهنمای حل مسئله‌ی ساده‌تر

برای حل بعضی از مسئله‌ها، ابتدا مسئله‌ای ساده‌تر را که با مسئله‌ی اصلی در ارتباط است، حل می‌کنیم. سپس با استفاده از نتیجه و پاسخ مسئله‌ی ساده شده، جواب مسئله‌ی اصلی را به دست می‌آوریم. برای ساده کردن مسئله می‌توان از عددهای تقریبی یا عددهای کوچک‌تر استفاده کرد. برای نتیجه‌گیری و پیدا کردن پاسخ مسئله‌ی اصلی از راهنمای الگویابی استفاده می‌کنیم و الگوی کشف شده در مسئله‌ی ساده را به مسئله‌ی اصلی مرتبط می‌کنیم. به مثال‌های زیر دقت کنید.

مثال ۲۸: قطر خورشید ۱۳۹۲۵۳۰ کیلومتر و قطر کره‌ی زمین $\frac{۱۲۷۵۶}{۶}$ کیلومتر است. قطر خورشید تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۱، صفحه ۸)

پاسخ: برای ساده‌تر شدن محاسبات می‌توان از عددهای تقریبی استفاده کرد.

$$\text{کیلومتر} \quad ۱۳۹۲۵۳۰ = ۱۰۰۰۰۰۰ \quad \text{قطر خورشید}$$

$$\text{کیلومتر} \quad \frac{۱۲۷۵۶}{۶} = ۱۰۰۰۰ \quad \text{قطر زمین}$$

$$\frac{\text{قطر خورشید}}{\text{قطر زمین}} = \frac{۱۰۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰} = ۱۰۰$$

بنابراین قطر خورشید تقریباً ۱۰۰ برابر قطر زمین است.

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۲، صفحه ۸)

مثال ۲۹: حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \dots + \frac{۱}{۱۰۲۴}$$

پاسخ: برای حل مسئله‌ی فوق، ابتدا ساده‌شده‌ی مسئله را حل می‌کنیم. یعنی:

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} = \frac{۲}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} = \frac{۴}{۸} + \frac{۲}{۸} + \frac{۱}{۸} = \frac{۷}{۸}$$

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۷}{۸} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱۴}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم مخرج حاصل جمع، برابر مخرج عدد آخر است و صورت یک واحد کمتر است. پس داریم:



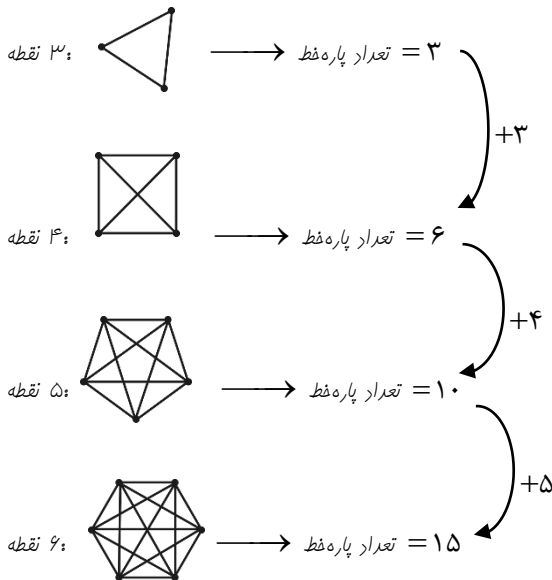
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024} = \frac{1024-1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

▼ مثال ۳۰: اگر ۱۱ نقطه را که هیچ سه‌تایی از آنها روی یک خط نیستند، دوبه‌دو به هم وصل کنیم؛ چند پاره‌خط به وجود می‌آید؟

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۳، صفحه ۸)

✓ پاسخ: تعداد پاره‌خط‌ها، در واقع مجموع تعداد ضلع‌ها و تعداد قطر‌هاست.

برای ساده شدن مسأله، ابتدا تعداد کم نقطه را در نظر می‌گیریم:



به الگوی فوقی دقت کنید، افزایش تعداد پاره‌خط‌ها در هر مرحله یک واحد افزایش می‌یابد.

$$\text{تعداد پاره‌خط: } ۷ \text{ نقطه} = ۱۵ + ۶ = ۲۱$$

$$\text{تعداد پاره‌خط: } ۸ \text{ نقطه} = ۲۱ + ۷ = ۲۸$$

$$\text{تعداد پاره‌خط: } ۹ \text{ نقطه} = ۲۸ + ۸ = ۳۶$$

$$\text{تعداد پاره‌خط: } ۱۰ \text{ نقطه} = ۳۶ + ۹ = ۴۵$$

$$\text{تعداد پاره‌خط: } ۱۱ \text{ نقطه} = ۴۵ + ۱۰ = ۵۵$$

▼ مثال ۳۱: حاصل عبارت زیر را با استفاده از راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر به دست آورید. (کتاب پرکنکار، سؤال ۶۵، صفحه ۱۶ - کتاب درسی، مشابه و مکمل تمرین ۶، صفحه ۸)

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{99}{100} = ?$$

✓ پاسخ: ابتدا ساده شده‌ی مسئله را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

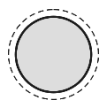
دقت کنید که حاصل ضرب کسرهای متوالی برابر کسری می‌شود که صورت آن برابر ۱ و مخرج آن برابر مخرج کسر آخر است، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$$



▼ **مثال ۲۲:** برای پیچیدن یک طناب به دور کره‌ی زمین، قطعاً به طنابی به طول ده‌ها هزار کیلومتر احتیاج داریم. اگر به این طناب ۳ متر اضافه کنیم و آن را به دور کره‌ی زمین محیط کنیم، این طناب به طور تقریبی چه مقدار از سطح زمین فاصله می‌گیرد؟ ($\pi = ۳$)

(آزمون کانون - ۹۳ - کتاب درسی، مشابه و مکمل تمرین ۱، صفحه ۸)



- (۱) ۲ میلی‌متر
(۲) ۱ سانتی‌متر
(۳) ۵ سانتی‌متر
(۴) ۵۰ سانتی‌متر

✓ **پاسخ:** اگر شعاع کره‌ی زمین باشد، محیط آن برابر $۲\pi r$ می‌باشد. طول طنابی که به دور زمین می‌پیچیم برابر محیط زمین می‌باشد. اگر سه متر به طول طناب اضافه کنیم و دایره‌ای جدید اطراف کره‌ی زمین با شعاع r' ایجاد کنیم، داریم:

$$۲\pi r + ۳ = ۲\pi r' \Rightarrow r' = \frac{۲\pi r + ۳}{۲\pi} = \frac{۲\pi r}{۲\pi} + \frac{۳}{۲\pi} = r + \frac{۳}{۶} \Rightarrow r' = r + ۰/۵$$

پون واحد بر حسب متر است، پس به شعاع دایره‌ی ایجاد شده، $۰/۵$ متر یا ۵۰ سانتی‌متر اضافه می‌شود. گزینه‌ی «۴» صحیح است.

راهبرد روش‌های نمادین

بسیاری از مسئله‌ها را می‌توانیم به کمک نمادهای جبری به یک معادله تبدیل کنیم. از فصل سوم به بعد می‌توانید از این راهبرد نیز برای حل مسئله استفاده کنید. در بعضی از مسئله‌ها هم می‌توانیم از مدل‌سازی هندسی استفاده کنیم. تبدیل مسئله به یک شکل هندسی و حل هندسی آن نیز نوعی روش نمادین یا مدل‌سازی به شمار می‌رود.

▼ **مثال ۲۳:** احمد ۵۰۰۰ تومان پول داشت. او ۶ دفتر خرید و ۲۰۰۰ تومان برایش باقی ماند. قیمت هر دفتر چقدر است؟ (کتاب درسی، مشابه تمرین ۱، صفحه ۹)

□	عبارت سمت چپ
۱۰	۲۰۶۰
۱۰۰	۲۶۰۰
۲۰۰	۳۲۰۰
۳۰۰	۳۸۰۰
۴۰۰	۴۴۰۰
۵۰۰	۵۰۰۰

✓ **پاسخ:** متن سؤال را می‌توان با تساوی زیر نشان داد. دقت کنید که مربع، قیمت هر دفتر است.

$$۶ \times \square + ۲۰۰۰ = ۵۰۰۰$$

دقت کنید قیمت ۶ دفتر به اضافه‌ی ۲۰۰۰ تومان باقی‌مانده، کل پول می‌شود. حال عبارت فوق را با راهبرد درس و آزمایش حل می‌کنیم. ابتدا عدد ۱۰ را به جای مربع قرار می‌دهیم. پون حاصل عبارت سمت راست فیلی با ۵۰۰۰ فاصله دارد، عدد فیلی بزرگتری را امتحان می‌کنیم. و به همین صورت ادامه می‌دهیم.

▼ **مثال ۲۴:** فاطمه کتاب داستانی را در ۸ ساعت مطالعه کرد و ۱۵ صفحه از آن باقی ماند. اگر این کتاب ۹۵ صفحه داشته باشد، فاطمه به طور متوسط در هر ساعت چند صفحه از آن را مطالعه کرده است؟

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۲، صفحه ۹)

✓ **پاسخ:** متن سؤال را می‌توان با تساوی زیر نشان داد. در این تساوی، مربع، تعداد صفحه‌هایی است که فاطمه در یک ساعت می‌خواند. اگر او ۸ ساعت مطالعه کند، ۱۵ صفحه باقی می‌ماند. پس داریم:

$$۸ \times \square + ۱۵ = ۹۵$$

تساوی فوق را به کمک راهبرد درس و آزمایش حل می‌کنیم.

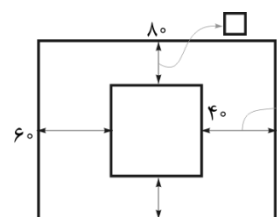
$$۸ \times ۱۰ + ۱۵ = ۹۵$$

اگر به جای □ عدد ۱۰ قرار دهیم، داریم:

بنابراین فاطمه در یک ساعت به طور متوسط ۱۰ صفحه کتاب خوانده است.

▼ **مثال ۲۵:** ابعاد یک سالن مستطیل شکل ۶۰ و ۸۰ سانتی‌متر است. می‌خواهند در مکانی از سقف این سالن دریچه‌ی کولر مربعی به ضلع ۴۰ سانتی‌متر قرار دهند؛ به طوری که از ۴ گوشه‌ی آن به یک اندازه باشد. محل دریچه را تعیین کنید.

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۳، صفحه ۹)



$$۲ \times \square + ۴۰ = ۶۰$$

$$۲ \times \circ + ۴۰ = ۸۰$$



✓ **پاسخ:** به شکل مقابل دقت کنید، وقتی درپیه از چهار گوشه به یک فاصله باشد، می‌توان نتیجه گرفت درپیه در وسط است. فاصله‌ی درپیه از طول زمین را با \square و از عرض زمین را با \circ نشان می‌دهیم. می‌توان تساوی زیر را نوشت:

با روش درس و آزمایش می‌توان نتیجه گرفت به جای \square عدد ۱۰ و به جای \circ بایر عدد ۲۰ قرار داد. یعنی درپیه، از طول سالن بایر ۱۰ سانتی‌متر فاصله و از عرض سالن ۲۰ سانتی‌متر فاصله داشته باشد.

(کتاب درس، مشابه تمرین ۱۰، صفحه ۱۱۲)

▼ **مثال ۳۶:** عددی را ۶ برابر ۲ واحد از آن کم کردیم، حاصل ۴ شد. عدد مورد نظر چند است؟

✓ **پاسخ:** فرض می‌کنیم عدد مورد نظر را با \square نشان دهیم. چون از ۶ برابر این عدد ۲ واحد کم کرده‌ایم و حاصل ۴ شده است، می‌توان سؤال را با تساوی زیر نشان داد:

$$6 \times \square - 2 = 4$$

برای پیدا کردن عدد مورد نظر از راهبرد درس و آزمایش استفاده می‌کنیم و سمت چپ تساوی را به دست می‌آوریم. عدد اول را ۳ در نظر می‌گیریم و ادامه می‌دهیم:

\square	سمت چپ تساوی
۳	۱۶
۲	۱۰
۱	۴

بنابراین عدد مورد نظر ۱ است.

▼ **مثال ۳۷:** ژاله در طی یک سال ۲۷ میلیون برای خرید یک خودرو جمع کرد. البته او هنوز ۳ میلیون پول کم دارد. او چند ماه دیگر باید کار کند تا پول مورد نیاز خود را تهیه کند؟

(کتاب پرکننده، سؤال ۳۹، صفحه ۱۳۱ - کتاب درس، مشابه و مکمل تمرین ۱، صفحه ۹)

✓ **پاسخ:** یک سال ۱۲ ماه است، بنابراین در طول ۱۲ ماه ۲۷ میلیون جمع کرده است. یعنی هر ماه $\frac{27}{12} = \frac{9}{4} = 2\frac{3}{4}$ میلیون جمع کرده است. تعداد ماه‌هایی که ژاله باید کار کند را با \square نشان می‌دهیم. متن سؤال را با تساوی زیر می‌توان نشان داد:

\square	سمت چپ تساوی
۱	$\frac{27}{12}$
۲	$\frac{4}{5}$
۳	$\frac{27}{4}$
۲	۸
$\frac{4}{3}$	۳

$$2\frac{3}{4} \times \square = 3$$

با راهبرد درس و آزمایش تساوی را حل می‌کنیم. عدد اولی را ۱ در نظر می‌گیریم.

بنابراین وی باید $1\frac{1}{3}$ ماه دیگر کار کند، یعنی ۱ ماه و ۱۰ روز دیگر باید کار کند.

▼ **مثال ۳۸:** کیفی را با ۲۵٪ تخفیف ۳۰۰۰ تومان خریداری کردیم. قیمت اولیه‌ی کیف چند تومان بوده است؟

(کتاب آبی، مثال ۹، صفحه ۶ - کتاب درس، مکمل و مرتبط با تمرین ۱، صفحه ۹)

- (۱) ۴۰۰۰
- (۲) ۵۰۰۰
- (۳) ۳۵۰۰
- (۴) ۴۵۰۰

✓ **پاسخ:** قیمت اولیه‌ی کیف را با \square نشان می‌دهیم. با ۲۵٪ تخفیف، قیمت کیف ۳۰۰۰ تومان می‌شود. یعنی قیمت کیف بعد از تخفیف، ۷۵٪ قیمت اصلی

\square	سمت چپ تساوی
۱۰۰۰	۷۵۰
۲۰۰۰	۱۵۰۰
۳۰۰۰	۲۲۵۰
۴۰۰۰	۳۰۰۰

$$\square = 3000 \times \frac{3}{4}$$

کیف است. چون $\frac{3}{4} = 75\%$ است، می‌توان تساوی زیر را نوشت:

با راهبرد درس و آزمایش می‌توان \square را به‌دست آورد.

بنابراین قیمت اولیه‌ی کیف ۴۰۰۰ تومان بوده است.

گزینه‌ی «ا» صحیح است.