فهرست

درس دوم احتمال هم‌شانس

احتمال مقدماتی

در فضای نمونه‌ای هم‌شانس (همهٔ اعضای S شانس یکسان دارند)، احتمال (یعنی شانس) رخ‌دادن هر پیشامد، متناسب با تعداد اعضای آن است. یعنی هر چه پیشامد A، تعداد عضو بیشتری داشته باشد، شانس بیشتری دارد، به بیان دقیق‌تر، احتمال پیشامد A از فضای نمونه‌ای S برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

تذکر از این تعریف نتیجه می‌شود که: (۱) $P(\varnothing)=۰$ (۲) $P(S)=۱$ (۳) $۰<P(\text{پیشامدهای دیگر})<۱$

مدل‌های مختلفی از سؤال در این قسمت هست: سکه، تاس، عددسازی، کلمه‌سازی، انتخاب، چیدن، ساختن مثلث، گروه‌ها، گوی‌ها و ...

در هر کدام از این مدل‌ها، برای محاسبهٔ احتمال، باید بلد باشیم که $n(A)$ و $n(S)$ را به سرعت به دست بیاوریم، تیپ‌های مختلف را با هم ببینیم:

۱. پرتاب تاس در پرتاب تاس دیدیم که فضای نمونه‌ای به صورت $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ در نتیجه $n(S)=۶$ است، برای احتمال پیشامدی مانند A: «مضرب ۳ بیاید» تعداد اعضای A را به دست می‌آوریم: $A=\{۳,۶\}$ پس $n(A)=۲$ و احتمال آن برابر است با: $P(A)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$.

تست در پرتاب یک تاس، احتمال کدام پیشامد با بقیه فرق دارد؟

۱) مضرب ۳ یا زوج بیاید.
۲) فرد یا اول بیاید.
۳) نه مضرب ۴ باشد و نه اول
۴) مضرب ۳ نیاید.

پاسخ ۳ در پرتاب یک تاس $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ فضای نمونه‌ای است؛ پس $n(S)=۶$.

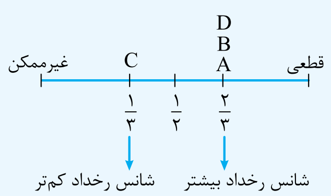
در (۱) می‌خواهیم مضرب ۳ یا زوج باشد. مضارب ۳ عبارت‌اند از ۳ و ۶ و اعداد زوج عبارت‌اند از ۶ و ۴ و ۲؛ پس اجتماع این‌ها می‌شود $A=\{۲,۳,۴,۶\}$ که پیشامدی ۴ عضوی است و احتمالش می‌شود $\frac{۴}{۶}=\frac{n(A)}{n(S)}=P(A)$.

در (۲) احتمال فردها یا اول‌ها را داریم؛ یعنی پیشامد $B=\{\underbrace{۱,\overbrace{۳,۵,۲}^{\text{اول}}}_{\text{فرد}}\}$ که این هم ۴ عضوی است و احتمالش $P(B)=\frac{۴}{۶}$ خواهد بود. پس می‌گوییم A و B هم‌شانس هستند.

در (۳) مضرب ۴ نباشد و اول هم نباشد؛ یعنی ۴ و همچنین ۲ و ۳ و ۵ را نمی‌خواهیم، پس پیشامد مورد نظر $C=\{۱,۶\}$ است که احتمالش $\frac{۲}{۶}=\frac{n(C)}{n(S)}=P(C)$ می‌شود.

در (۴) باید مضرب ۳ نیاید؛ یعنی $D'=\{۳,۶\}$؛ پس $D=\{۱,۲,۴,۵\}$ که احتمال این هم $\frac{۴}{۶}$ خواهد شد؛ پس (۳) با بقیه متفاوت بود.

تذکر کتاب درسی در مقایسهٔ احتمال پیشامدهای مختلف، این محور را هم کشیده است:



• **دو تاس** • پرتاب دو تاس یکی از مهم‌ترین مسئله‌های فصل احتمال است. فضای نمونه‌ای آن $۳۶ = ۶^۲$ عضو دارد که در جدول روبه‌رو آن‌ها را می‌آوریم:
در پرتاب دو تاس ۳۶ حالت به وجود می‌آید که در ۶ حالت (روی قطر) اعداد دو تاس با هم برابرند، در ۱۵ خانهٔ بالاتر از قطر، عدد تاس اول بیشتر است و در ۱۵ خانهٔ پایین‌تر از قطر، عدد تاس دوم بیشتر است.
در هر خانهٔ جدول، مجموع دو تاس را نوشته‌ایم؛ همان‌طور که می‌بینید مثلاً در ۳ تا خانه از ۳۶ خانه، مجموع برابر ۴ است، پس احتمال این‌که مجموع دو تاس برابر ۴ باشد برابر است با $\frac{۳}{۳۶}$.

تاس اول

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲

تاس دوم

این یعنی تاس اول ۶ و تاس دوم ۲ است.

در این شش خانهٔ روی قطر دو تاس مساوی هم هستند.

تذکر *در پرتاب دو تاس همیشه حالت (۱,۵) با حالت (۵,۱) فرق دارد و برای این‌که اشتباه نکنید همواره فرض کنید که دو تاس متمایز هستند. یعنی همیشه بگویید: تاس اول، تاس دوم و...*

بعضی‌ها دوست دارند تعداد حالت‌های مجموع دو تاس را حفظ باشند، جدول زیر به ما کمک می‌کند که با یک الگوی خوب، حالت‌ها را حفظ کنیم:

بیشترین احتمال

جمع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

یک واحد یک واحد زیاد می‌شود — یک واحد یک واحد کم می‌شود

مثلاً احتمال این‌که مجموع دو تاس ۱۱ باشد، برابر است با: $\frac{\text{تعداد حالت‌ها}}{۳۶} = \frac{۲}{۳۶}$

تست در پرتاب دو تاس، احتمال این‌که «اختلاف تاس‌ها ۲ یا مجموع دو تاس کم‌تر از ۵ باشد» کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۸}$

پاسخ ۲ پیشامد مطلوب از اجتماع دوتا پیشامد ساخته شده:

$A =$ اختلاف تاس‌ها ۲ باشد و $B =$ جمع کم‌تر از ۵ باشد

جدول را ببینید:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	B	B	AB			
۲	B	B		A		
۳	AB				A	
۴		A				A
۵			A			
۶				A		

A دارای ۸ عضو و B شامل ۶ عضو است و ۲ تا عضو هم که مشترک است، پس ۱۲تا از ۳۶ تا خانهٔ جدول، مطلوب هستند، پس احتمال برابر است با: $\frac{۱}{۳} = \frac{۱۲}{۳۶}$.

• **۲. پرتاب سکه ـ جنسیت فرزندان یک خانواده** • وقتی یک سکه را پرتاب می‌کنیم، احتمال «رو» برابر احتمال «پشت» و هر کدام برابر $\frac{۱}{۲}$ هستند، دقیقاً مثل این‌که وقتی بچه‌ای به دنیا می‌آید، احتمال دختر (یا پسر) بودنش، $\frac{۱}{۲}$ است، پس آزمایش پرتاب سکه دقیقاً مثل جنسیت فرزندان یک خانواده است. با یک نکتهٔ راحت می‌توانیم تمام تست‌های این قسمت را مثل آب خوردن حل کنیم:

نکته ۱) در یک خانواده با n فرزند، احتمال این‌که خانواده k فرزند پسر (یا دختر) داشته باشد، برابر است با: $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$

۲) در n بار پرتاب یک سکه (پرتاب n تا سکه)، احتمال این‌که سکه k بار «رو» بیاید برابر است با: $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$

مثلاً اگر ۵ سکه را با هم پرتاب کنیم، احتمال این که ۳تا سکه رو بیاید برابر است با: $\frac{۱۰}{۳۲} = \frac{\binom{۵}{۳}}{۲^۵}$

تست در یک خانواده با ۶ فرزند، احتمال این‌که تعداد پسرها دو برابر تعداد دخترها باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۶۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $(\frac{۱۵}{۶۴})^۲$

پاسخ ۱ باید تعداد پسرها ۴ تا و تعداد دخترها ۲ تا باشد! پس احتمال این را می‌خواهیم که ۴ تا پسر داشته باشیم:

$$P(\text{۴ تا پسر}) = P(\text{۲ تا دختر}) = \frac{\binom{۶}{۴}}{۲^۶} = \frac{۱۵}{۶۴}$$

یادآوری $\binom{۶}{۴} = \binom{۶}{۲} = \frac{۶ \times ۵}{۲} = ۱۵$

۳. کیسه و مهره‌های رنگی

رسیدیم به معروف‌ترین و مهم‌ترین تست‌های احتمال! تست می‌گوید که یک کیسه داریم و درون آن n تا مهرهٔ سفید و m تا مهرهٔ سیاه وجود دارد، مثلاً ۳تا مهره برمی‌داریم و چه‌قدر احتمال دارد که ۲تا سفید باشد؟ در این تست‌ها فضای نمونه‌ای برابر است با: $\binom{\text{کل}}{\text{تعداد انتخاب‌ها}}$ و برای محاسبهٔ تعداد اعضای پیشامد مطلوب، از بین رنگ‌ها انتخاب می‌کنیم. در مثالی که زدیم باید ۲تا از سفیدها و یکی از سیاه‌ها را انتخاب کنیم: $\dfrac{\binom{n}{۲}\times\binom{m}{۱}}{\binom{m+n}{۳}}$.

تذکر دقت کنید که مجموع انتخاب‌ها در صورت و مجموع انتخاب‌ها در مخرج کسر، باید برابر ۳ باشد.

تست در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ سبز، ۳ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز داریم. اگر ۳ مهره با هم بیرون بیاوریم، شانس کدام اتفاق کم‌تر از بقیه است؟

۱) سه رنگ متفاوت خارج شود.
۲) مهره‌های خارج‌شده فقط از دو رنگ باشند.
۳) در بین مهره‌های خارج‌شده، فقط یک آبی باشد.
۴) در بین مهره‌ها، فقط دو قرمز باشد.

پاسخ ۱ $n(S)$ برای همهٔ پیشامدها یکسان و برابر است با $\binom{۱۲}{۳}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۳\times۲\times۱}=۲۲۰$. پس برویم دنبال تعداد عضو پیشامدها:

در ۱ برای سه رنگ متفاوت داریم:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{یک آبی}}\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یک سبز}}\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{یک قرمز}}=۳\times۴\times۵=۶۰$$

در ۲ برای این‌که مهره‌ها فقط از دو رنگ باشند، باید دوتا از مهره‌ها هم‌رنگ و سومی متفاوت باشد؛ یعنی:

$$n(B)=\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{دو آبی}}\times\underbrace{\binom{۹}{۱}}_{\text{یکی دیگر}}+\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{دو سبز}}\times\underbrace{\binom{۸}{۱}}_{\text{یکی دیگر}}+\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{دو قرمز}}\times\underbrace{\binom{۷}{۱}}_{\text{یکی دیگر}}=۳\times۹+۶\times۸+۱۰\times۷=۲۷+۴۸+۷۰=۱۴۵$$

در ۳ فقط یک آبی و بنابراین دوتا از بین سبز و قرمز می‌خواهیم:

$$n(C)=\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{یک آبی}}\times\underbrace{\binom{۹}{۲}}_{\text{دوتا دیگر}}=۳\times۳۶=۱۰۸$$

در ۴ دو قرمز و یکی دیگر می‌خواهیم:

$$n(D)=\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{دو قرمز}}\times\underbrace{\binom{۷}{۱}}_{\text{یکی دیگر}}=۷۰$$

پس شانس ۱ از همه کم‌تر است؛ چون تعداد اعضای پیشامدش از همه کم‌تر است.

تذکر گاهی اوقات به جای الفاظ کیسه و مهره، تست می‌گوید: چند نوع جاندار یا دانش‌آموزان تجربی و ریاضی و .... ولی داستان همان داستان است!

تست از بین ۴ ببر و ۶تا شیر و ۲تا زرافه، ۲تا را انتخاب می‌کنیم، با چه احتمالی حیوانات انتخاب‌شده از یک نوع <u>نیستند</u>؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ ۱ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با: $n(S)=\binom{۱۲}{۲}=\frac{۱۲\times۱۱}{۲}=۶۶$، $n(A)$ را با اصل جمع باید به دست بیاوریم:

$$n(A)=\underbrace{\overbrace{\binom{۴}{۱}\times\binom{۶}{۱}}^{\text{ببر و شیر}}}_{۴\times۶}+\underbrace{\overbrace{\binom{۴}{۱}\times\binom{۲}{۱}}^{\text{ببر و زرافه}}}_{۴\times۲}+\underbrace{\overbrace{\binom{۶}{۱}\times\binom{۲}{۱}}^{\text{شیر و زرافه}}}_{۶\times۲}=۲۴+۸+۱۲=۴۴$$

پس احتمال برابر است با:

$$P(A)=\frac{۴۴}{۶۶}=\frac{۲}{۳}$$

۴. کیسه و مهره‌های شماره‌دار

در بعضی از تست‌ها مهره‌های درون کیسه، شماره‌دار هستند و باید تعدادی از آن مهره‌ها را خارج کنیم و احتمال اتفاق خاص را بررسی کنیم، در این سؤال‌ها دقت کنید که

۱) $n(S)$ باز هم برابر $\binom{\text{کل}}{\text{تعداد انتخاب‌ها}}$ است.

۲) ترتیب شماره‌های خارج‌شده اهمیت ندارد یعنی در این مسائل برخلاف پرتاب دو تاس (۱,۲) و (۲,۱) با هم فرقی ندارند.

۳) وقتی که شماره‌های ۱ تا n را در کیسه داریم و ۲ تا مهره خارج می‌کنیم، امکان ندارد که مثلاً ۲ و ۲ خارج شده باشند *(چون یه دونه «۲» داریم!)*

تست از میان ۶ گوی با شماره‌های ۱ تا ۶، سه گوی با هم خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های خارج‌شده زوج است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ ۲ ابتدا $n(S)$ را به دست می‌آوریم:

$$n(S) = \text{تعداد انتخاب‌های ۳ گوی از ۶ گوی} = \binom{6}{3} = \frac{6\times5\times4}{1\times2\times3} = 20$$

مجموع سه عدد وقتی زوج می‌شود که یا «هر سه عدد زوج باشند» و یا «دوتا از اعداد فرد و دیگری زوج باشد»، پس:

در اعداد ۱ تا ۶، ۳ تا عدد فرد داریم. ۳ تا عدد زوج داریم: {۶،۴،۲}

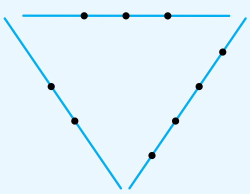
$$n(A) = \underbrace{\binom{3}{3}}_{\text{انتخاب ۳ تا زوج}} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{انتخاب ۲ تا فرد}} \times \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{انتخاب ۱ زوج}} = 1 + 3\times3 = 10$$

پس احتمال می‌شود: $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

احتمال به کمک آنالیز ترکیبی • در خیلی از تست‌ها، برای محاسبهٔ $n(S)$ و $n(A)$ برمی‌گردیم به فصل آنالیز ترکیبی و از مطالبی که آن‌جا یاد گرفتیم، استفاده می‌کنیم، خب! طبیعتاً تنوع این تست‌ها خیلی زیاد است! در جدول زیر نمونه‌های اصلی را مرور می‌کنیم:

	بیان آزمایش	$n(S)$	خواستهٔ سؤال	شمارش پیشامد A و رسیدن به $n(A)$	$P(A)$
مدل چیدمان	۵ نفر کنار هم در صف می‌ایستند.	$5! = 120$	علی نفر اول باشد و رضا آخر نباشد.	$\underset{\text{فقط علی}}{1}\ \underbrace{\_\ \_\ \_}_{3!}\ \underset{\text{به‌جز علی و رضا}}{3}$ $n(A) = 3\times6 = 18$	$\frac{3}{20} = \frac{18}{120}$
مدل عددسازی	با ارقام ۱، ۲، ۳، ۵ و ۶ عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز می‌سازیم.	$5\times4\times3 = 60$	کم‌تر از ۳۰۰ باشد.	$\underset{\text{۱ یا ۲}}{2}\times4\times3 = 24$	$\frac{2}{5} = \frac{24}{60}$
مدل کلمه‌سازی	با حروف کلمهٔ SPACET کلمه‌ای ۳حرفی می‌سازیم.	$6\times5\times4 = 120$	در کلمهٔ جدید، P و S کنار هم باشند.	S P □ $\underset{\text{صف‌دوتایی}}{2}\times\underset{\text{بستهٔ S و P}}{2!}\times\underset{\text{حرف‌دیگر}}{4} = 16$	$\frac{2}{15} = \frac{16}{120}$

تست ۳ از نقاط شکل، ۳تا را انتخاب می‌کنیم، با کدام احتمال مثلث با رئوس نقاط انتخابی وجود دارد؟



۱) $\frac{27}{28}$ ۲) $\frac{20}{21}$

۳) $\frac{79}{84}$ ۴) $\frac{13}{14}$

پاسخ ۳ برای انتخاب ۳ تا از نقاط به تعداد $n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9\times8\times7}{3\times2} = 84$ حالت داریم. برای ساخته‌شدن مثلث باید نقاط از یک خط نباشند. پس با استفاده از متمم می‌گوییم:

$$n(A) = n(S) - n(A') = \binom{9}{3} - \underbrace{\left(\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{2}{3}\right)}_{\text{سه نقطه روی یک خط}} = 84 - (1+4+0) = 79$$

دقت کردید؟ یا هر سه نقطه روی خط بالایی‌اند یا هر سه روی خط سمت راست یا هر سه روی خط سمت چپ (که امکان ندارد چون فقط دوتا نقطه روی این خط است). پس احتمال می‌شود: $P(A) = \frac{79}{84}$

تذکر جایگشت‌های خاص، یکی‌درمیان‌ها، بسته‌بندی اشیا و ... در تست‌های احتمال خیلی محبوب هستند.

تست ۴ ۷ کارت با شماره‌های ۱ تا ۷ را کنار هم می‌چینیم، چه‌قدر احتمال دارد که ارقام زوج و فرد یکی در میان قرار بگیرند؟

۱) $\frac{3}{70}$ ۲) $\frac{2}{35}$ ۳) $\frac{1}{70}$ ۴) $\frac{1}{35}$

پاسخ ۴ از چینش اعداد ۱ تا ۷ به تعداد $7!$ صف ایجاد می‌شود. پس $n(S) = 7!$.

برای یکی در میان شدن باید فرم کلی این‌جوری باشد: فرد زوج فرد زوج فرد زوج فرد، پس حتماً صف با یک عدد فرد شروع شود! پس جایگاه اعداد فرد مشخص است و $4!$ جایگشت دارند و جایگاه اعداد زوج نیز مشخص است و $3!$ جایگشت دارند، پس: $n(A) = 3!\times4!$، حالا احتمال را حساب می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{3!\times4!}{7!} = \frac{3!}{5\times6\times7} = \frac{1}{35}$$

حرف آخر • همیشه قرار نیست شمارش تعداد اعضای $n(A)$ با استفاده از اصل ضرب و جمع و ترکیب و این‌ها باشد. بعضی اوقات، به‌خصوص در مسائل عددها و برای بررسی بخش‌پذیری یا اول‌بودن، تنها راه، نوشتن اعضای S و پیداکردن اعضای A است.

تست زیر را ببینید:

تست با ارقام ۱، ۲، ۴ و ۵ عددی دورقمی می‌سازیم (تکرار ارقام مجاز است). با کدام احتمال اول است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ ۳ اعداد دورقمی با این ارقام عبارت‌اند از:

$n(S) = ۴ \times ۴ = ۱۶$

$S = \{۱۱,۱۲,۱۴,۱۵,۲۱,۲۲,۲۴,۲۵,۴۱,۴۲,۴۴,۴۵,۵۱,۵۲,۵۴,۵۵\}$

که در بین آن‌ها فقط ۱۱ و ۴۱ اول‌اند. پس $n(A) = ۲$ و احتمال می‌شود $\frac{۲}{۱۶}$ یا $\frac{۱}{۸}$.