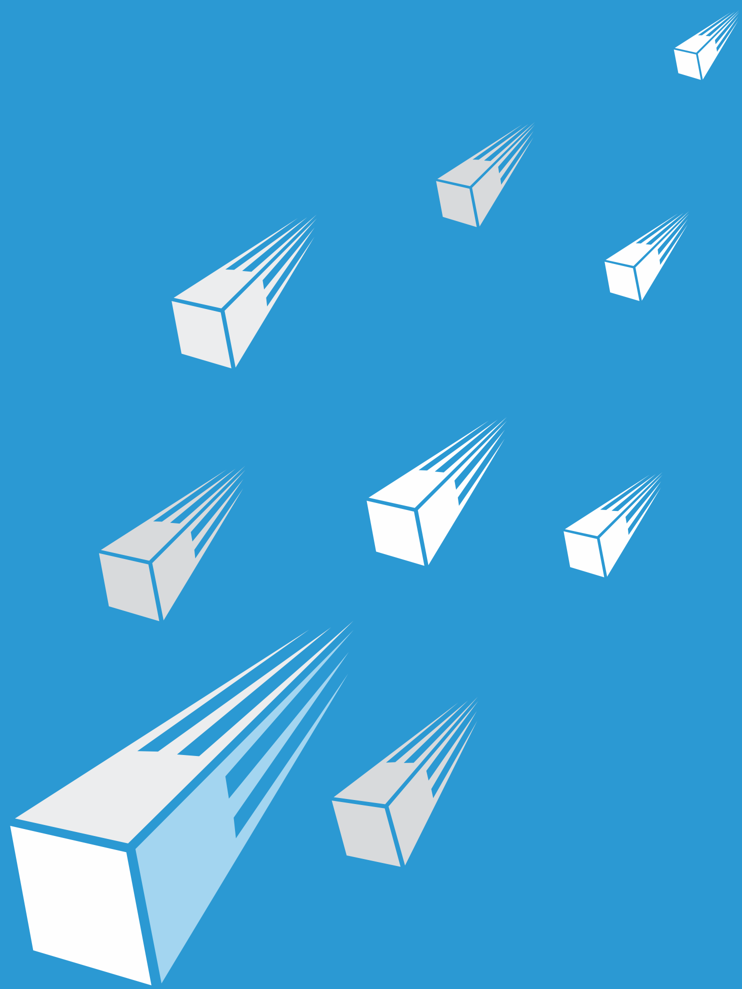


ریاضی یازدهم

(علوم تجربی)

از مجموعه شهاب

پیام ابراهیمی فخار

حمیدرضا بیات

سعید بیاتی

پیشگفتار

به نام خداوند جان و خرد

کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که مجموعه کتاب‌های «شهاب» را در اختیار دانش‌آموزان عزیز و دبیران گرامی قرار می‌دهیم. این مجموعه در اصل برای دانش‌آموزان «مدارس استعدادهای درخشان» تألیف شده است؛ اما استفاده از آن‌ها، به دانش‌آموزان ممتاز سایر مدارس کشور و داوطلبان شرکت در مسابقات نیز توصیه می‌شود.

از ویژگی‌های «ریاضی ۱۰ اُم شهاب» می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- آموزش پیشرفته کتاب درسی با مثال‌های متنوع؛
- تمرین‌های تفکیک شده براساس درس‌های هر فصل به همراه پاسخ‌نامهٔ تشریحی؛
- پرسش چهارگزینه‌ای برای هر فصل به همراه پاسخ‌نامهٔ تشریحی؛
- طبقه‌بندی تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای به کمی دشوار ( )، دشوار ( ) و دارای نکتهٔ کلیدی ( )؛

امیدواریم این کتاب مورد توجه دانش‌آموزان عزیز، دبیران گرامی و خانواده‌ها قرار گیرد و در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر واقع شود.

در پایان لازم می‌دانیم از مؤلفان محترم کتاب آقایان: حمیدرضا بیات، مرتضی خمامی‌ابدی و کیان کریمی‌خراسانی که این کتاب را زیر نظر دبیر مجموعه آقای مهندس هادی عزیززاده تألیف کرده‌اند، تشکر کنیم.

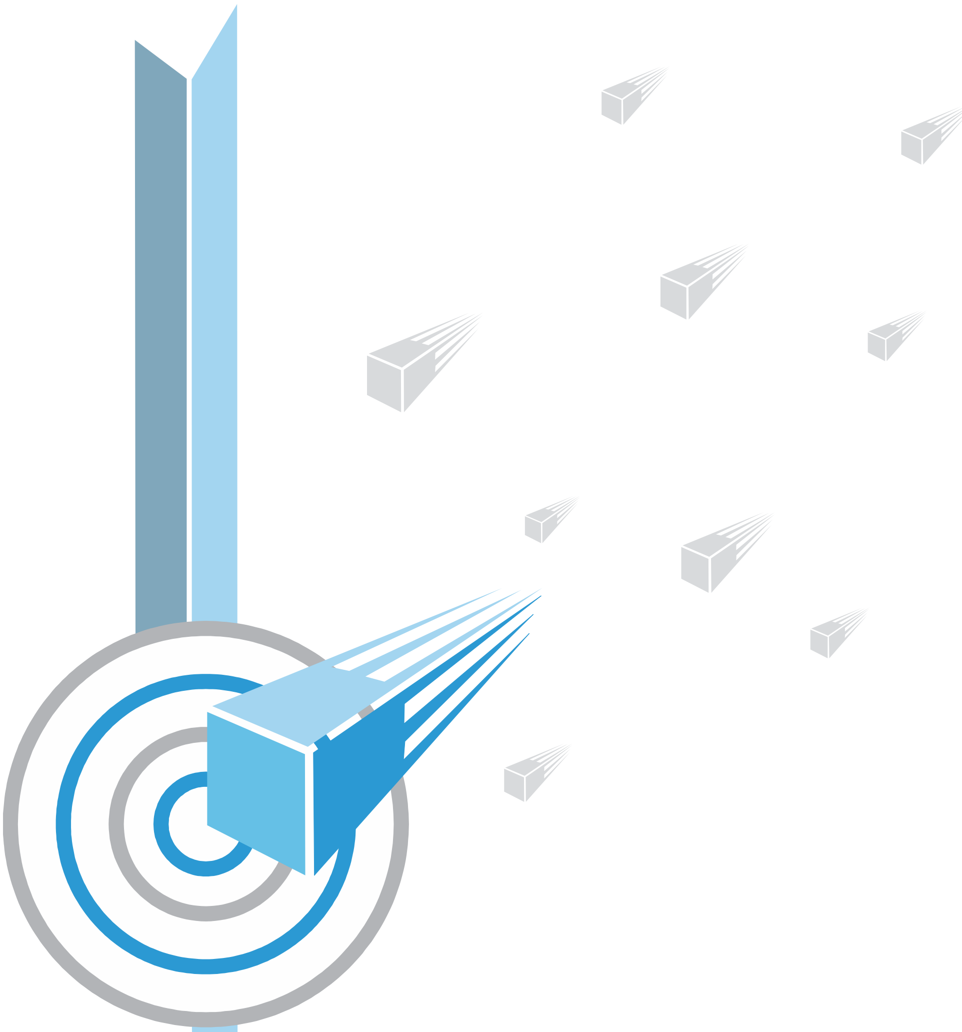
هم‌چنین از خانم‌ها سپیده خداوردی و سمیه آهنگر که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی و خانم بهاره خدامی و نرگس سربندی که زحمت ترسیم شکل‌ها را برعهده داشته‌اند، سپاسگزاریم.

انتشارات مبتکران

پست الکترونیک برای آگاهی از نقطه نظرها و پیشنهادها: bayat@mobtakeran.com

فهرست

عنوان	صفحه



فصل اول

هندسه تحلیلی و جبر

معادله خط

$y = mx + h \longrightarrow$ شیب خط $= m$ و عرض از مبدأ $= h$

$ax + by + c = ۰ \longrightarrow$ شیب خط $= -\frac{a}{b}$ و عرض از مبدأ $= -\frac{c}{b}$

مثلاً شیب خط $۲x + ۳y + ۵ = ۰$ برابر $m = -\frac{۲}{۳}$ است.

تعیین معادله خط

الف) خطی که از دو نقطه $A(x_۱, y_۱)$ با شیب m می‌گذرد: $y - y_۱ = m(x - x_۱)$

ب) خطی که از دو نقطه $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ می‌گذرد: $y - y_۱ = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}(x - x_۱)$

مثلاً خط گذرنده از دو نقطه $A(۳, -۱)$ و $B(-۲, ۴)$ به صورت زیر است:

شیب $m = \frac{۴ - (-۱)}{-۲ - ۳} = \frac{۵}{-۵} = -۱$

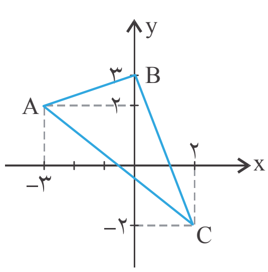
معادله خط : $y - ۴ = -۱(x + ۲) \Rightarrow y = -x + ۲$

نکته:

۱) اگر شیب دو خط با هم برابر باشد دو خط موازی‌اند.

۲) اگر دو خط غیرموازی با محورهای مختصات در صورتی که شیب‌هایشان عکس و قرینه یکدیگر باشد بر هم عمودند. به بیان دیگر دو خط با شیب‌های m و m' در صورتی بر هم عمودند که: $mm' = -۱$

مثال **در شکل مقابل معادله ارتفاع BH را بنویسید.**



پاسخ

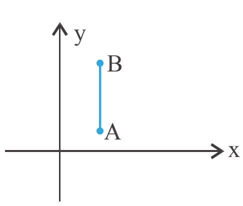
شیب خط $AC = m_{AC} = \frac{-۲ - ۲}{۲ - (-۳)} = \frac{-۴}{۵}$

چون ارتفاع BH بر خط AC عمود است پس شیب BH عکس و قرینه شیب AC است. یعنی: $m_{BH} = \frac{۵}{۴}$

پس معادله ارتفاع BH عبارتست از: $y - ۳ = \frac{۵}{۴}(x - ۰) \Rightarrow y = \frac{۵}{۴}x + ۳$

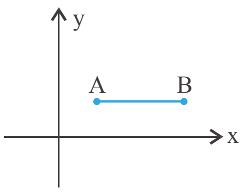
فاصله دو نقطه

الف) اگر A و B دو نقطه هم‌طول در صفحه باشند داریم:



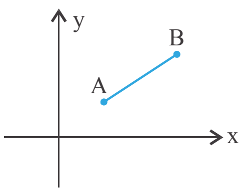
$$AB = |y_B - y_A|$$

ب) اگر A و B دو نقطه هم‌عرض در صفحه باشند داریم:



$$AB=|x_B-x_A|$$

ج) فاصله دو نقطه $A(x_۱-y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با:



$$AB=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$$

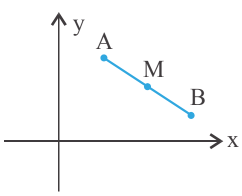
مثال **مساحت دایره‌ای که نقاط $A(-۳,۵)$ و $B(۲,۱)$ دو سر قطری از آن باشند کدام است؟**

پاسخ

$$AB=\sqrt{(-۳-۲)^۲+(۵-۱)^۲}=\sqrt{۴۱}=۲R \Rightarrow R=\frac{\sqrt{۴۱}}{۲}$$

$$\Rightarrow S=\pi R^۲=\pi(\frac{\sqrt{۴۱}}{۲})^۲=\frac{۴۱\pi}{۴}$$

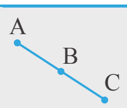
مختصات نقطه وسط پاره‌خط



$$M\left(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲}\right)$$

نکته: قرینه نقطه A نسبت به نقطه B نقطه‌ای است مانند C که مختصاتش عبارت است از:

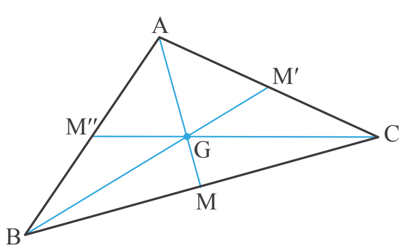
$$C(۲x_B-x_A\ ,\ ۲y_B-y_A)$$



مثلاً قرینه نقطه $A(-۲,۳)$ نسبت به نقطه $B(۳,-۵)$ عبارت است از:

$$C(۲(۳)-(-۲)\ ,\ ۲(-۵)-۳)=C(۸,-۱۳)$$

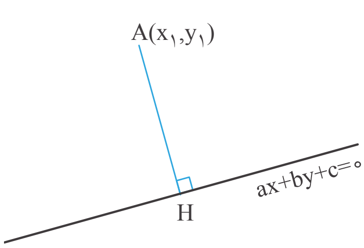
مختصات مرکز ثقل مثلث



$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{۳},\frac{y_A+y_B+y_C}{۳}\right)$$

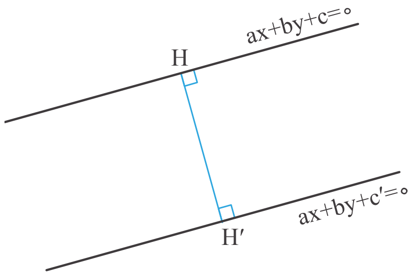
توجه: مرکز ثقل مثلث محل برخورد میانه‌ها است.

فاصله نقطه از خط



$$AH=\frac{|ax_۲+by_۲+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

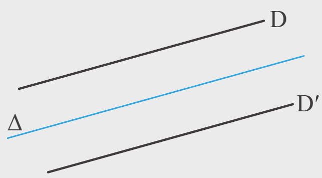
فاصله بین دو خط موازی



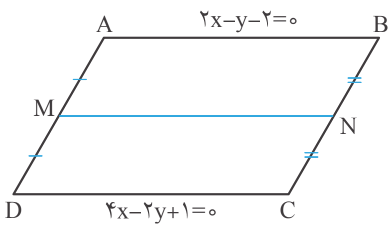
$$d = HH' = \frac{|C - C'|}{\sqrt{a^{۲} + b^{۲}}}$$

نکته: معادله خطی که با دو خط $D: ax + by + c = ۰$ و $D': ax + by + c' = ۰$ موازی باشد و از آنها به فاصله برابر باشد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Delta : ax + by + \frac{c + c'}{۲} = ۰$$



مثال در شکل مقابل معادله خط **MN** کدام است؟

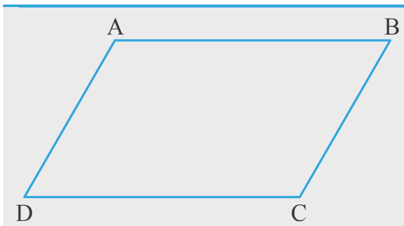


پاسخ

$$\begin{matrix} ۴x - ۲y - ۴ = ۰ \\ ۴x - ۲y + ۱ = ۰ \end{matrix} \Rightarrow \Delta : ۴x - ۲y + \frac{-۴ + ۱}{۲} = ۰ \Rightarrow ۴x - ۲y - \frac{۳}{۲} = ۰$$

نکته: در متوازی‌الاضلاع ABCD داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_D + x_B \\ , \\ y_A + y_C = y_D + y_B \end{cases}$$



مثال هرگاه نقاط $A(۰,-۲)$ و $B(۱,۳)$ و $C(۲,۱)$ رئوس متوازی‌الاضلاع **ABCD** باشند، طول قطر **BD** کدام است؟

پاسخ

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ , \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۰ + ۲ = ۱ + x_D \Rightarrow x_D = ۱ \\ , \\ -۲ + ۱ = ۳ + y_D \Rightarrow y_D = -۴ \end{cases} \Rightarrow D(۱,-۴)$$

پس طول قطر BD برابر است با:

$$BD = |-۴ - ۳| = ۷$$

حل معادله به روش تغییر متغیر

بسیاری از معادلات را می‌توان با یک تغییر متغیر به معادله درجه دوم تبدیل کرد و سپس جواب‌های معادله را به دست آورد.

مثال معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $۲x^۴+۳x^۲-۵=۰$ ب) $(x^۲-۲x)^۲-x^۲+۲x-۲=۰$

پاسخ الف)

$$۲x^۴+۳x^۲-۵=۰ \xrightarrow{x^۲=u} ۲u^۲+۳u-۵=۰ \Rightarrow u=۱\,,u=-\frac{۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases} u=۱ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm ۱ \\ , \\ u=-\frac{۵}{۲} \Rightarrow x^۲=-\frac{۵}{۲} \text{ غیر ممکن} \end{cases}$$

پس معادله ۲ ریشه دارد.

ب)

$$(x^۲-۲x)^۲-x^۲+۲x-۲=۰ \Rightarrow (x^۲-۲x)^۲-(x^۲-۲x)-۲=۰ \xrightarrow{x^۲-۲x=u} u^۲-u-۲=۰ \Rightarrow u=-۱,u=۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=-۱ \Rightarrow x^۲-۲x=-۱ \Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰ \Rightarrow (x-۱)^۲=۰ \Rightarrow x=۱ \\ , \\ u=۲ \Rightarrow x^۲-۲x=۲ \Rightarrow x^۲-۲x-۲=۰ \Rightarrow x=\frac{۲\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=۱\pm\sqrt{۳} \end{cases}$$

پس معادله ۳ ریشه دارد.

روابط بین ریشه‌های معادله درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند داریم:

$$\alpha+\beta=S=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\cdot\beta=P=\frac{c}{a}$$

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

مثلاً در معادله $۲x^۲+۵x-۱=۰$ مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{۵}{۲} \quad , \quad P=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۲}$$

نکته: با توجه به S و P روابط زیر را بین ریشه‌های معادله درجه دوم می‌توان به دست آورد:

الف) $\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P \longrightarrow$ (مجموع مجذورات ریشه‌ها)

ب) $\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS \longrightarrow$ (مجموع مکعبات ریشه‌ها)

ج) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}} \longrightarrow$ (مجموع جذر ریشه‌ها)

د) $|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|=|\sqrt{S-۲\sqrt{P}} \longrightarrow$ (قدرمطلق تفاضل جذر ریشه‌ها)

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله $x^۲-۵x+۱=۰$ باشند مقدار عبارت $\frac{۱}{\beta^۳}+\frac{۱}{\alpha^۳}$ را بیابید.

پاسخ

$$\frac{۱}{\alpha^۳}+\frac{۱}{\beta^۳}=\frac{\beta^۳+\alpha^۳}{\alpha^۳\beta^۳}=\frac{S^۳-۳PS}{P^۳} \overset{S=۵\,,\,P=۱}{=\!=\!=} \frac{۵^۳-۳(۱)(۵)}{(۱)^۳}=۱۲۵-۱۵=۱۱۰$$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله $۲x^۲-۳x-۱=۰$ باشند مقدار عبارت $(۲\alpha^۳-\alpha)(۲\beta^۳-\beta)$ را بیابید.

پاسخ چون α و β ریشه‌های معادله‌اند پس در معادله صدق می‌کنند یعنی:

$$۲\alpha^۲-۳\alpha-۱=۰ \Rightarrow ۲\alpha^۲-۱=۳\alpha \Rightarrow ۲\alpha^۳-\alpha=۳\alpha^۲$$

$$۲\beta^{۲}-۳\beta-۱=۰ \Rightarrow ۲\beta^{۲}-۱=۳\beta \Rightarrow ۲\beta^{۳}-\beta=۳\beta^{۲}$$ و

$$\Rightarrow (۲\alpha^{۳}-\alpha)(۲\beta^{۳}-\beta)=۳\alpha^{۲}.۳\beta^{۲}=۹(\alpha.\beta)^{۲}=۹P^{۲}=۹(-\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{۹}{۴}$$

تشکیل معادله درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دومی باشند در این صورت با تشکیل S و P معادله درجه دوم را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^{۲}-Sx+P=۰$$

مثال **معادله درجه دومی با ضرایب گویا بنویسید که یکی از ریشه‌هایش $\sqrt{۳}-۵$ باشد.**

پاسخ اگر یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم با ضرایب گویا $\sqrt{۳}-۵$ باشد حتماً ریشه دیگر $۵+\sqrt{۳}$ است پس:

$$\begin{matrix}\alpha=۵-\sqrt{۳}\\ \beta=۵+\sqrt{۳}\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}S=۱۰\\ P=۲۵-۳=۲۲\end{cases} \Rightarrow x^{۲}-۱۰x+۲۲=۰$$

مثال **معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادله درجه دوم $x^{۲}-۳x+۱=۰$ باشد.**

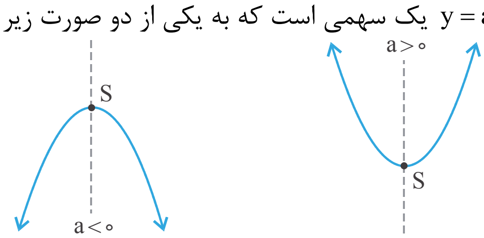
پاسخ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^{۲}-۳x+۱=۰$ باشد و α' و β' ریشه‌های معادله خواسته شده در این صورت داریم:

$$\begin{matrix}\alpha'=\alpha^{۲}\\ \beta'=\beta^{۲}\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}S'=\alpha'+\beta'=\alpha^{۲}+\beta^{۲}=S^{۲}-۲P=۹-۲=۷\\ P'=\alpha'.\beta'=\alpha^{۲}.\beta^{۲}=(\alpha.\beta)^{۲}=P^{۲}=۱\end{cases}$$

با توجه به اینکه $S'=۷$ و $P'=۱$ معادله جدید به صورت $x^{۲}-۷x+۱=۰$ است.

ماکزیمم و می‌نیمم سهمی

- نمودار تابع درجه دوم $y=ax^{۲}+bx+c$ یک سهمی است که به یکی از دو صورت زیر است:



- مختصات رأس سهمی به صورت $S\left(-\frac{b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a}\right)$ است.
- خط $x=-\frac{b}{۲a}$ محور تقارن سهمی است.
- در حالت $a<۰$ نقطه S نقطه ماکزیمم سهمی و در حالت $a>۰$ نقطه S نقطه مینیمم سهمی است.

مثال **کمترین مقدار سهمی به معادله $y=mx^{۲}+۴x+m$ برابر -۳ است، m کدام است؟**

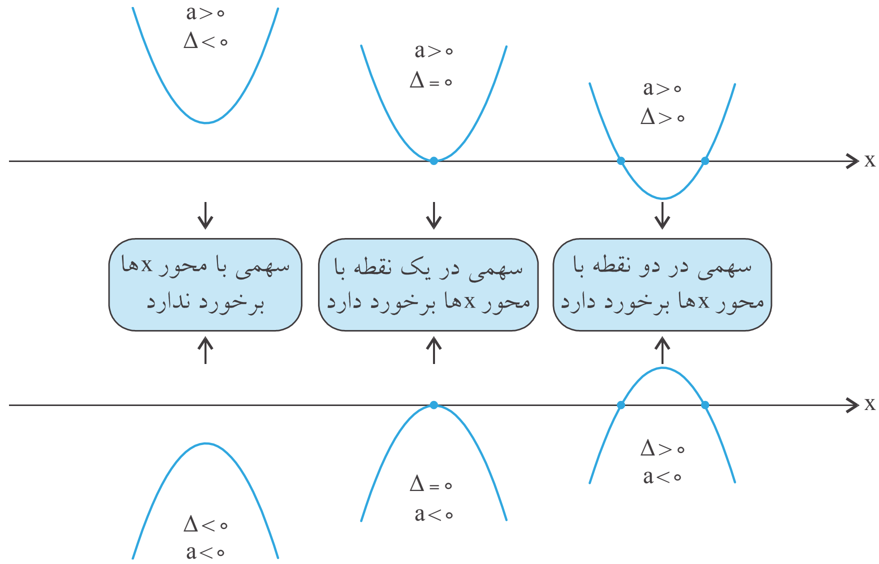
پاسخ

$$\frac{-\Delta}{۴a}=-۳ \Rightarrow -\frac{۱۶-۴m^{۲}}{۴m}=-۳ \Rightarrow ۱۶-۴m^{۲}=۱۲m \Rightarrow ۴m^{۲}+۱۲m-۱۶=۰ \Rightarrow m^{۲}+۳m-۴=۰$$

$$\Rightarrow (m-۱)(m+۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases}m=۱ \text{ ق ق}\\ ,\\ m=-۴ \text{ غ ق ق}\end{cases}$$

صفرهای تابع درجه ۲

- نقاط تلاقی نمودار تابع درجه ۲ با محور xها را صفرهای تابع درجه ۲ می‌گویند. چون در این نقاط مقدار تابع برابر صفر می‌شود.
- با توجه به علامت Δ می‌توان تعداد صفرهای تابع درجه ۲ را تعیین کرد به صورت زیر:



نکته: با توجه به نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ داریم:

الف) علامت a را با توجه به باز شدن جهت دهانه سهمی (ماکزیمم و یا مینیمم داشتن) می‌توان تعیین کرد.

ب) علامت b را با توجه به علامت طول رأس سهمی یعنی $x=-\frac{b}{2a}$ می‌توان تعیین کرد.

ج) علامت c را با توجه به محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها می‌توان تعیین کرد چون $f(0)=c$ است.

تعیین معادله سهمی به کمک نمودار

اگر سهمی محور xها را در ۲ نقطه x_1 و x_2 قطع کرده باشد معادله سهمی عبارت است از:

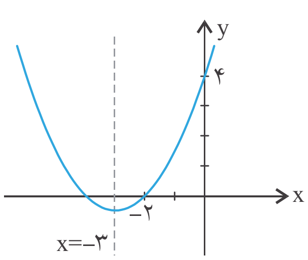
$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

و اگر سهمی محور xها را در یک نقطه به طول x_1 قطع کرده باشد معادله سهمی عبارت است از:

$$f(x)=a(x-x_1)^2$$

در هر دو حالت بالا برای تعیین پارامتر a باید مختصات یک نقطه از سهمی را داشته باشیم که با صدق دادن مختصات آن نقطه در معادله سهمی به راحتی a را می‌یابیم.

مثال **معادله سهمی شکل مقابل را بنویسید.**



پاسخ چون $x=-3$ محور تقارن است پس نقطه دیگر برخورد سمی با محور xها $x=-4$ است. یعنی صفرهای تابع ۲- و ۴- هستند و معادله سهمی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=a(x+2)(x+4)$$

چون سهمی از نقطه $(0,4)$ گذشته پس:

$$4=a(0+2)(0+4) \Rightarrow 4=8a \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

درنتیجه معادله سهمی به صورت مقابل است:

$$f(x)=\frac{1}{2}(x+2)(x+4) \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x+4$$

علامت صفرهای تابع درجه ۲ (علامت ریشه‌های معادله درجه دوم)

علامت صفرهای تابع درجه ۲ در واقع همان علامت ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ است که به صورت زیر می‌توانیم تعین کنیم:

الف) اگر $\frac{c}{a}<0$ آنگاه معادله ۲ ریشه مختلف‌العلامت دارد. (در این حالت Δ همواره مثبت است)

ب) اگر $\frac{c}{a}>0$ و $\Delta>0$، آنگاه معادله ۲ ریشه هم‌علامت دارد که:

* اگر $-\frac{b}{a}>0$ و $\Delta>0$ باشد، معادله ۲ ریشه مثبت دارد.

* اگر $-\frac{b}{a}<0$ و $\Delta>0$ باشد، معادله ۲ ریشه منفی دارد.

مثال **اگر تابع $y=2x^2+4x+m-2$ دو صفر با علامت منفی داشته باشد حدود m کدام است؟**

پاسخ

$$\Delta>0 \Rightarrow 16-8(m-2)>0 \Rightarrow 16-8m+16>0 \Rightarrow 8m<32 \Rightarrow m<4 \quad (1)$$

$$\frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{m-2}{2}>0 \Rightarrow m-2>0 \Rightarrow m>2 \quad (2)$$

$$-\frac{b}{a}<0 \Rightarrow \frac{-4}{2}<0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است} \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)\cap(3)} 2<m<4$$

معادلات گویا

برای حل یک معادله گویا پس از تجزیه کردن مخرج های کسرها می‌توان دو طرف تساوی را در (ک.م.م) مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود و سپس معادله به دست آمده را حل کرد. جواب‌های به دست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کنند و نیز این جواب‌ها باید در معادله اولیه صدق کنند.

مثال **معادله $\frac{x}{x^2-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{x-2}{x^2-x}$ را حل کنید.**

پاسخ

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{x+1}=\frac{x-2}{x(x-1)}$$

طرفین معادله را در $x(x-1)(x+1)$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$x^2-2(x)(x-1)=(x+1)(x-2) \Rightarrow x^2-2x^2+2x=x^2-x-2$$

$$\Rightarrow 2x^2-3x-2=0 \Rightarrow x_1,x_2=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm5}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

معادلات رادیکالی

برای حل یک معادله رادیکالی باید رادیکال را حذف کنیم و این کار را می‌توان با به توان رساندن و نیز با تغییر متغیر مناسب انجام داد. توجه داشته باشیم جواب‌های به دست آمده باید در معادله اولیه صدق کنند.

مثال **معادله $(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x})^2-2(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x})+1=0$ را حل کنید.**

پاسخ

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{x}=u \Rightarrow u^2-2u+1=0 \Rightarrow (u-1)^2=0 \Rightarrow u=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x+1}-\sqrt{x}=1 \Rightarrow \sqrt{3x+1}=\sqrt{x}+1 \Rightarrow 3x+1=(\sqrt{x}+1)^2$$

$$\Rightarrow 3x+1=x+1+2\sqrt{x} \Rightarrow 2x=2\sqrt{x} \Rightarrow 4x^2=4x \Rightarrow 4x^2-4x=0 \Rightarrow 4x(x-1)=0 \Rightarrow x=0, x=1$$

هر دو جواب به دست آمده در معادله اولیه صدق می‌کنند پس قابل قبول هستند.

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درس اول: هندسه تحلیلی

۱. قرینهٔ خط $x-2y=4$ نسبت به نقطهٔ $(2,m)$ خط $x-2y+6=0$ است. مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

۲. به ازای کدام مقدار m، سه نقطهٔ $(2,-1)$، $(2,3)$ و $(4,m)$ بر روی یک خط راست قرار دارند؟ (سراسری- ۹۰)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۳. اگر خطوط $x+y=0$ و $ax+4y-1=0$ و $3x-2y=-5$ از یک نقطه بگذرند، مقدار a کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) ۲- ۴) ۲

۴. نقطه‌های $A(-2,-1)$، $B(2,2)$ و $C(m,1)$ در دستگاه مختصات قرار گرفته‌اند. مقدار m چه‌قدر باشد تا مقدار $AC+CB$ حداقل باشد؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۵. نقطه‌ای با کدام طول بر روی محور xها انتخاب شود، به‌طوری که تفاضل فواصل آن از دو نقطهٔ $A(1,5)$ و $B(7,2)$ بیش‌ترین مقدار را داشته باشد؟ (سراسری- ۹۳)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۶. نقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلث با سه رأس $(0,3)$، $(3,0)$ و $(4,3)$ کدام است؟ (سنجش- ۸۲)

۱) $(1,2)$ ۲) $(3,1)$ ۳) $(3,2)$ ۴) $(2,3)$

۷. نقاط $A(2,2)$، $B(1,0)$ و $C(5,0)$ رأس‌های یک مثلث هستند. اگر عمودمنصف ضلع بزرگ این مثلث امتداد ضلع کوچک آن را در نقطهٔ M قطع کند، آن‌گاه فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۸. نقاط $A(2,3)$، $B(a-2,0)$ و $C(a+3,-1)$ رئوس یک مثلث هستند. اگر $N(\frac{5}{3},\frac{2}{3})$ مرکز ثقل این مثلث باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

۹. نقطهٔ $A(6,1)$ یک رأس متوازی‌الاضلاع و معادلات دو ضلع آن $2y-3x=12$ و $3y+x=7$ است. مختصات محل تلاقی دو قطر آن کدام است؟ (سنجش- ۹۱)

۱) $(2,3)$ ۲) $(2,2)$ ۳) $(3,2)$ ۴) $(3,3)$

۱۰. طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطهٔ $A(-1,0)$، $B(3,0)$ و $C(0,3)$ می‌گذرد، کدام است؟ (سراسری- ۸۲)

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳

۱۱. نقاط $A(1,0)$ ، $B(3a+2,2b-4)$، $C(4a,-4)$ و $D(b-5,2a-4)$ به ترتیب رئوس یک متوازی‌الاضلاع هستند. محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) $(-\frac{3}{2},-2)$ ۲) $(-\frac{1}{2},-1)$ ۳) $(-\frac{5}{2},-3)$ ۴) $(-\frac{7}{2},-4)$

۱۲. اگر $A(-۴,۵)$ و $B(۵,-۱)$ باشد، معادلهٔ یکی از خط‌هایی که از نقطهٔ $C(۳,۴)$ و نقطه‌هایی که پاره‌خط AB را به ۳ قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، می‌گذرد کدام است؟

۱) $۳x-۲y-۱=۰$ ۲) $۵x+۲y-۲۳=۰$ ۳) $x-۴y+۱۳=۰$ ۴) $۴x-۵y+۸=۰$

۱۳. فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط به معادلهٔ $۲y+m=mx+۴$ برابر ۲ واحد است. این خط محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (سنجش-۸۶)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴. نقاط $A(۲,-۱)$، $B(۳,۴)$ و $C(-۱,۶)$ سه رأس از مثلثی هستند. طول ارتفاع AH کدام است؟ (سنجش -۷۹)

۱) $\frac{۱۱}{\sqrt{۵}}$ ۲) $\frac{۱۱}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۹}{\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۱۳}{\sqrt{۳}}$

۱۵. مساحت متوازی‌الاضلاع محدود به خطوط $y=x+۳$ و $x=۴$ و محور yها و نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟ (سنجش-۸۹)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۶. محیط مستطیلی که یک ضلع آن نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم و مختصات دو رأس آن $A(-۲,-۳)$ و $B(-۴,۴)$ است، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۱۰\sqrt{۲}$ ۳) $۱۲\sqrt{۲}$ ۴) $۱۴\sqrt{۲}$

۱۷. دو خط به معادلات $y=۲x$ و $x=۲y$ بر دایره‌هایی به مرکز $M(۲\sqrt{۵},b)$ مماس هستند. شعاع کوچک‌ترین دایره کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

۱۸. معادلهٔ نیمساز زاویهٔ بین دو خط به معادلات $۳x-۴y=۴$ و $۱۲x+۵y=۹$ با شیب منفی کدام است؟ (سنجش- ۸۸)

۱) $x+y=۷$ ۲) $۲x+۷y+۳=۰$ ۳) $۳x+۱۱y-۷=۰$ ۴) $۳x+۱۱y+۱=۰$

۱۹. اگر فاصلهٔ دو خط موازی $۳x-۶y+۲=۰$ و $ax+۴y+c=۰$ برابر $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ باشد، $a-c$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

درس دوم: تابع درجه ۲ و معادله درجه دوم

۲۰. عدد $\sqrt{۶+۲\sqrt{۵}}$ ریشهٔ کدام‌یک از معادلات زیر می‌باشد؟

۱) $x^۲+۲x-۲=۰$ ۲) $x^۲+۲x-۴=۰$ ۳) $x^۲-۲x-۲=۰$ ۴) $x^۲-۲x-۴=۰$

۲۱. اگر معادلهٔ $x^۴-(m+۲)x^۲+m+۵=۰$ دارای ۴ ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $m<-۴$ ۲) $m>۴$ ۳) $-۴<m<۴$ ۴) $۴<m<۹$

۲۲. در معادلهٔ $۷x^۲-۶x+۱=۰$ اگر ریشه‌ها $x_۱$ و $x_۲$ باشند، کدام درست است؟

۱) $\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}>\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲}$ ۲) $\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}=\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲}$

۳) $x_۱(۱+x_۲)=۱-x_۲$ ۴) $x_۱+x_۲>\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}$

۲۳. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-x-m^۲=۰$ و $\alpha^۲+\alpha\beta=۸$ باشند، مقدار $|m|$ کدام است؟ (سنجش-۹۵)

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۱۴}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۱۴}$

۲۴. در معادلهٔ $۳x^۲-۱۷x+m=۰$ یک ریشه از سه برابر ریشهٔ دیگر ۳ واحد بیش‌تر است. m کدام است؟ (سراسری- ۸۷)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۲۵. در معادلهٔ $x^۲-sx+p=۰$ به شرطی که $s<۰$ و $p>۰$ باشد و تفاوت ریشه‌ها ۱ واحد باشد، s برابر با کدام گزینه است؟

۱) $-\sqrt{۴p+۱}$ ۲) $-۴p-۱$ ۳) $-\sqrt{۴p-۱}$ ۴) $۱-۴p$

۲۶. معادلهٔ $(x+2)(mx^2-2x-3)=0$، سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد. اگر حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله از مجموع ریشه‌های آن ۳ واحد بیش‌تر باشد، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۷. به ازای کدام مجموعه مقادیر a معادلهٔ درجهٔ دوم $9x^2-15ax+4a^2+1=0$ دارای دو ریشهٔ منفی است؟ (سنجش -۹۳)

۱) $|a|>\frac{2}{3}$ ۲) $a<-\frac{2}{3}$ ۳) $|a|<\frac{2}{3}$ ۴) $a>\frac{2}{3}$

۲۸. به ازای کدام مقادیر m معادلهٔ $x^3+3x^2+(m-6)x-m+2=0$ دارای دو ریشهٔ منفی و یک ریشهٔ مثبت است؟ (سنجش -۹۴)

۱) $m>2$ ۲) $-2<m<6$ ۳) $2<m<6$ ۴) $1<m<2$

۲۹. به ازای کدام مقدار m مجموع مجذورات دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $2x(x-m)=m-2$ برابر ۴ است؟ (سنجش -۸۹)

۱) -6 ۲) -2 ۳) 2 ۴) -3

۳۰. به ازای چند مقدار m مجموع ریشه‌های معادلهٔ $mx^2-(m-\frac{4}{3})x+3=0$ برابر با عکس قرینهٔ حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۳۱. اگر $x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$ باشد، حاصل $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|+\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ کدام است؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دو هستند) (آزاد -۸۱)

۱) $2\sqrt[4]{3}$ ۲) 2 ۳) 1 ۴) $\sqrt[4]{3}$

۳۲. اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ درجه دومی با ضرایب گویا، $\sqrt{3}-1$ باشد، مجموع مکعب دو جواب این معادله کدام است؟

۱) 10 ۲) 40 ۳) -20 ۴) -30

۳۳. $(\sqrt{5}-2)^3$ و $(\sqrt{5}+2)^3$ ریشه‌های کدام‌یک از معادله‌های درجه دوم زیر هستند؟

۱) $x^2-18\sqrt{5}x-1=0$ ۲) $x^2-48x+1=0$ ۳) $x^2-76x-1=0$ ۴) $x^2-14\sqrt{5}x-1=0$

۳۴. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند و $\frac{k}{\alpha+2}$ و $\frac{k}{\beta+2}$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-7x+\frac{m}{3}=0$ باشند، $\frac{m}{k}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 3 ۴) $\frac{5}{3}$

۳۵. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x=1$ باشند، به ازای کدام مقدار k ریشه‌های معادلهٔ $8x^2-kx-1=0$، $\alpha\beta^2$ و $\alpha^2\beta$ هستند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۳۶. مقدار تابع $f(x)=x^2+bx+c$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی -3 است. اگر این تابع دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد، فاصلهٔ ریشه‌های آن حداکثر چه‌قدر است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۳۷. به ازای کدام مقادیر a نمودار تابع $y=(a-1)x^2+3x+a+1$ در بالای محور xها قرار دارد؟ (سنجش -۹۳)

۱) $1<a<\frac{\sqrt{13}}{3}$ ۲) $a>\frac{\sqrt{13}}{2}$ ۳) $-\sqrt{\frac{13}{2}}<a<1$ ۴) $a<-\sqrt{\frac{13}{2}}$

۳۸. خط‌های $x=1$ و $y=-4$ به ترتیب محور تقارن و خط مماس بر نمودار یک تابع درجه دوم هستند. اگر نمودار این تابع محور yها را با عرض ۵ قطع کند، طول پاره‌خطی که روی محور xها جدا می‌کند، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) 1 ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) 2

۳۹. نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+4x+a-3$، از طرف بالا بر محور xها مماس شده است، طول نقطهٔ تماس کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

۴۰. دو تابع $f(x)=x^2+2x+a^2+1$ و $g(x)=x^2-x-2a^2-2$ دارای صفر مشترک x_1 هستند. x_1 کدام است؟ (سنجش -۸۹)

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) 2

۴۱. اگر $x_۱$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^۲-۳x-۱$ باشد، حاصل $(۲x_۱+۱)(x_۱-۲)(x_۱-۳)$ کدام است؟

۱) ۳　۲) ۵　۳) ۴　۴) ۶

۴۲. اگر قدرمطلق تفاضل صفرهای تابع $f(x)=-۲x^۲+۴x-۳m$ برابر ۴ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

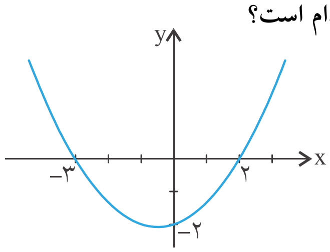
۱) بیش‌ترین مقدار تابع ۸ است.

۲) کم‌ترین مقدار تابع ۸ است.

۳) بیش‌ترین مقدار تابع ۴ است.

۴) کم‌ترین مقدار تابع ۴ است.

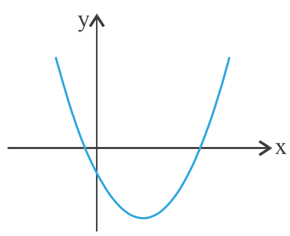
۴۳. شکل زیر، نمودار تابع درجه دوم به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ را نشان می‌دهد. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۲}$　۲) $-\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$　۴) $\frac{۴}{۳}$

۴۴. اگر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۳}x^۲+\frac{m}{۲}x+m^۲-۴$ به شکل زیر باشد، حدود m کدام است؟



۱) $۰<m<۲$　۲) $m>۲$ یا $m<-۲$

۳) $-۲<m<۰$　۴) $m>۰$ یا $m<-۲$

۴۵. نمودار منحنی $y=(m+۲)x^۲-۳x+۴$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد. مقادیر m کدام است؟ (سنجش-۹۵)

۱) $m<-۲$　۲) $-۲<m<-۱$　۳) $m<-\frac{۳}{۲}$　۴) $m<-\frac{۲۳}{۱۶}$

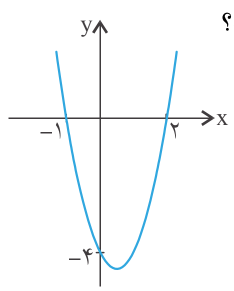
۴۶. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=(a-۳)x^۲+ax-۱$ از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $a\leq ۲$　۲) $۰<a\leq ۲$　۳) $۲<a<۳$　۴) $۰<a<۳$

۴۷. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع درجه دوم $f(x)=(۳a-۱)x^۲-(۲a+۳)x$ فقط از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $-\frac{۱}{۳}<a<\frac{۳}{۲}$　۲) $a>\frac{۱}{۳}$ یا $a<-\frac{۳}{۲}$　۳) $a>\frac{۳}{۲}$ یا $a<-\frac{۱}{۳}$　۴) $-\frac{۳}{۲}<a<\frac{۱}{۳}$

۴۸. نمودار تابع $y=ax^۲+bx+c$ به‌صورت زیر است. عبارت $cx^۲+bx+a$ به ازای چه مقادیری از x منفی است؟



۱) $-۱<x<\frac{۱}{۲}$

۲) $-۱<x<۲$

۳) $x>۲$ یا $x<-۱$

۴) $x>\frac{۱}{۲}$ یا $x<-۱$

درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی

۴۹. اگر قدرمطلق تفاضل جواب‌های معادلهٔ $\frac{x-۲}{x+۲}-\frac{x+۲}{x-۲}=ax(۱-\frac{x-۲}{x+۲})$ برابر ۸ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۲}{۳}$　۲) $\frac{۱}{۳}$　۳) $\frac{۲}{۵}$　۴) $\frac{۱}{۵}$

۵۰. اگر $x=2$ یک جواب معادلهٔ $\frac{x-a}{x^2-x-12}-\frac{1}{x^2-9}=\frac{a-6}{2x-6}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۱) $\frac{10}{3}$ ۲) $\frac{13}{3}$ ۳) $\frac{11}{2}$ ۴) $\frac{15}{2}$

۵۱. اگر $x=2$ جواب معادلهٔ $\frac{2x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}=\frac{a+7x}{a^2-2x}$ باشد، مجموعهٔ مقادیر a چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۲. معادلهٔ $\frac{x^2+8x+15}{x^3+1}=\frac{x^2-25}{x^2-x+1}$، چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۳. اگر $ab\neq 0$ و $|a|\neq|b|$، تعداد جواب‌های متمایز معادلهٔ $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۴. معادلهٔ $\frac{3x^2-1}{x+2}+\frac{2x+4}{3x^2-1}=2$، چند جواب حقیقی متمایز دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۵. مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $\frac{2}{x^2+2x+2}+\frac{3}{x^2+2x+4}=\frac{6}{x^2+2x+3}$، چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۶. معادلهٔ $\sqrt{1+4\sqrt{x}}=\sqrt{x}+1$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۵۷. معادلهٔ $\sqrt{\sqrt{4x+16}-x}=1+\sqrt{1-x}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۸. اگر $x=8$ جواب معادلهٔ $x+a=\sqrt{10x-x^2}$ باشد، این معادله چند جواب حقیقی متمایز دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۹. معادلهٔ $\sqrt{2x^2+1}+2=\sqrt{x+2}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) فقط یک ریشهٔ مثبت ۳) فقط یک ریشهٔ منفی ۴) ۲

۶۰. اگر $x=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ یک ریشهٔ معادلهٔ $x^4+bx^2+c=0$ باشد، حاصل $b+c$ کدام است؟

۱) -8 ۲) -10 ۳) -12 ۴) -14

۶۱. تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^3-x^2+4x}=0$ کدام است؟ (سنجش -۸۹)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۲. حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^2+4x+3=\sqrt{x^2+4x+5}$ کدام است؟ (سراسری -۹۴)

۱) -2 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۶۳. تعداد ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(x^2+\sqrt{x}+1)^2+x^2+\sqrt{x}-1=0$ کدام است؟ (سنجش-۹۵)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ریشه ندارد.

پاسخ‌نامه

پاسخ پرسش‌های ۴ گزینه‌ای

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

هندسه تحلیلی

۱. گزینه ۲ می‌دانیم قرینهٔ نقطهٔ (x,y) نسبت به نقطهٔ (a,b)، نقطهٔ $(۲a-x,۲b-y)$ است. قرینهٔ یک خط نسبت به یک نقطه یعنی قرینهٔ تمام نقاط روی خط نسبت به آن نقطه. بنابراین نقطهٔ $A(x,y)$ را روی خط $x-۲y=۴$ در نظر می‌گیریم. اگر مختصات قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ $(۲,m)$ را $A'(x',y')$ در نظر بگیریم داریم:

$$\begin{cases} x'=۴-x \Rightarrow x=۴-x' \\ y'=۲m-y \Rightarrow y=۲m-y' \end{cases}$$

حال در معادلهٔ خط به جای x، $۴-x'$ و به جای y، $۲m-y'$ می‌گذاریم تا معادلهٔ خط قرینه به دست آید:

$$x-۲y=۴ \Rightarrow (۴-x')-۲(۲m-y')=۴ \Rightarrow ۴-x'-۴m+۲y'=۴$$
$$\Rightarrow -x'-۴m+۲y'=۰ \Rightarrow x'-۲y'+۴m=۰ \quad \text{یا} \quad x-۲y+۴m=۰$$

حال که معادلهٔ خط قرینه $x-۲y+۶=۰$ است؛ بنابراین:

$$۴m=۶ \Rightarrow m=\frac{۳}{۲}$$

۲. گزینه ۴ شیب خطی که از دو نقطهٔ $(۱,-۲)$ و $(۲,۳)$ می‌گذرد را به دست آورده و برابر با شیب خطی که از $(۴,m)$ و $(۲,۳)$ می‌گذرد قرار می‌دهیم.

$$\frac{۳-(-۲)}{۲-۱}=\frac{m-۳}{۴-۲} \Rightarrow \frac{m-۳}{۲}=۵ \Rightarrow m=۱۳$$

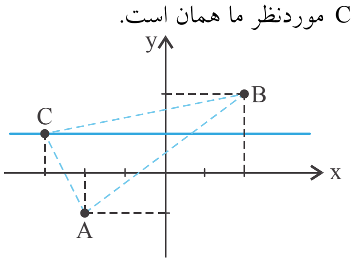
۳. گزینه ۲ ابتدا نقطهٔ تقاطع دو خط که معادلهٔ معلوم دارند را پیدا می‌کنیم. سپس این نقطه را در معادله خط دیگر صدق می‌دهیم:

$$\times ۲\begin{cases} x+y=۰ \\ ۳x-۲y=-۵ \end{cases} \Rightarrow ۲x+۳x=-۵ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow y=۱$$

مختصات نقطهٔ تقاطع $(-۱,۱)$ است. خط $ax+۴y-۱=۰$ نیز از این نقطه می‌گذرد، بنابراین:

$$-a+۴-۱=۰ \Rightarrow a=۳$$

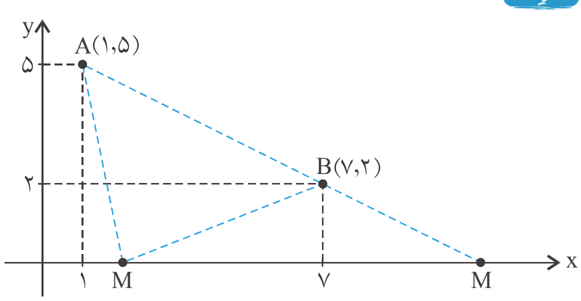
۴. گزینه ۴ نقطهٔ $C(m,۱)$، عرض ثابت ۱ دارد؛ بنابراین C روی خط $y=۱$ واقع شده است. با رسم $A(-۲,-۱)$ و $B(۲,۲)$ و خط $y=۱$ متوجه می‌شویم که A و B در دو طرف خط $y=۱$ قرار دارند. نقطهٔ C را روی خط $y=۱$ در نظر گرفته و از نقاط A و B خطی به آن وصل می‌کنیم. نقاط A و B را نیز به یکدیگر وصل می‌کنیم، مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ به وجود می‌آید. همان‌طور که می‌دانیم بنابر قاعدهٔ کلی مثلث جمع دو ضلع کوچک‌تر از ضلع بزرگ‌تر بیش‌تر است. اگر AB کوچک‌تر از AC یا CB باشد که به‌طور واضح $AB<AC+CB$ اگر $AB>AC$ و $AB>CB$ باشد باز هم بنابر قاعدهٔ کلی در مثلث داریم $AB<AC+CB$. بنابراین کمترین مقدار $AC+CB$ زمانی است که ABC تشکیل مثلث نداده یعنی C تقاطع خط گذرنده از نقاط A، B و خط $y=۱$ باشد که در این‌صورت $AC+CB=AB$ می‌شود. بنابراین تقاطع دو خط مذکور را پیدا کرده، مختصات نقطهٔ C موردنظر ما همان است.



$$\text{معادلهٔ } AB: y-y_B=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_B)$$
$$\Rightarrow y-۲=\frac{۲-(-۱)}{۲-(-۲)}(x-۲) \Rightarrow y=\frac{۳}{۴}x+\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y=\frac{۳}{۴}x+\frac{۱}{۲} \\ y=۱ \end{cases} \Rightarrow \frac{۳}{۴}x+\frac{۱}{۲}=۱ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین $C(m,۱)$ موردنظر $C(\frac{۲}{۳},۱)$ به دست آمد. پس $m=\frac{۲}{۳}$.

۵. گزینه ۴



نقطهٔ $M(m,0)$ را روی محور xها در نظر می‌گیریم.

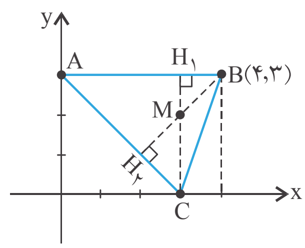
نقاط A و B را به M وصل می‌کنیم. نقاط A و B را به هم‌دیگر نیز وصل می‌کنیم. مثلث $\overset{\Delta}{ABM}$ تشکیل می‌شود. بنا بر قاعده کلی در مثلث طول هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کمتر است. بنابراین $AM < AB + BM$. در نتیجه $AM - BM < AB$. پس تفاضل فواصل M از نقاط A و B اگر A، B و M تشکیل مثلث دهند همواره از AB کوچک‌تر است. اما اگر تشکیل مثلث ندهند، یعنی M تقاطع خط گذرنده از نقاط A و B با محور xها باشد، آن‌گاه $AM - BM = AB$. پس در این حالت ماکزیمم مقدار $AM - BM$ اتفاق می‌افتد. بنابراین مختصات M موردنظر ما تقاطع خط گذرنده از نقاط A و B با محور xهاست.

معادلهٔ AB: $y - y_A = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_A) \Rightarrow y - 5 = \frac{5-2}{1-7}(x-1)$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$, $y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2} = 0 \Rightarrow x = 11$

بنابراین نقطهٔ موردنظر ما نقطه‌ای به طول ۱۱ روی محور xهاست.

۶. گزینه ۳ مثلث را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



همان‌طور که در شکل می‌بینید CH_1 و BH_2 دو ارتفاع مثلث هستند. باید معادلهٔ این دو ارتفاع را بنویسیم و سپس نقطهٔ تلاقی آن‌ها را پیدا کنیم. معادلهٔ ارتفاع CH_1 که همان خط $x = 3$ است، زیرا AB افقی است و موازی محور xها.

$AC: y - y_C = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C}(x - x_C) \Rightarrow y = \frac{3}{-3}(x-3)$

$\Rightarrow y = -x + 3$

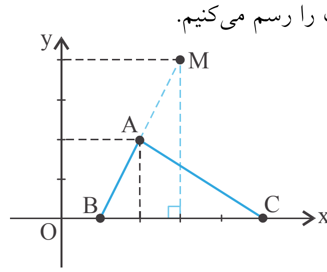
شیب BH_2 عکس و قرینهٔ شیب AC است؛ بنابراین:

$m_{BH_2} = 1 \Rightarrow$ معادلهٔ BH_2: $y - y_B = 1(x - x_B)$

$\Rightarrow y - 3 = x - 4 \Rightarrow y = x - 1$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow M(3,2)$

۷. گزینه ۱ ابتدا شکل تست را رسم می‌کنیم.



همان‌طور که از شکل پیداست خط $x = 3$ عمودمنصف بزرگ‌ترین ضلع مثلث است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث می‌توان طول AC و AB را محاسبه کرد که به ترتیب برابر $\sqrt{13}$ و $\sqrt{5}$ هستند. بنابراین ضلع BC با طول ۴ بزرگ‌ترین و AB با طول $\sqrt{5}$ کوچک‌ترین اضلاع مثلث هستند. نقطهٔ M محل تقاطع خط گذرنده از نقاط A و B و خط $x = 3$ است.

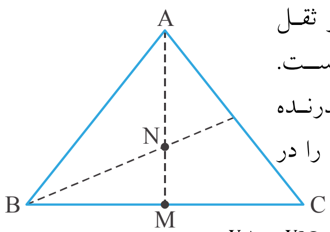
معادلهٔ AB: $y - y_B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_B)$

$\Rightarrow y = \frac{0-2}{1-2}(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 4 \Rightarrow M(3,4)$

$\Rightarrow OM = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow OM = 5$

۸. گزینه ۱ می‌دانیم مرکز ثقل مثلث تقاطع میانه‌های آن است. بنابراین مطابق شکل زیر خط گذرنده از نقاط A و N پاره‌خط BC را در نقطهٔ وسط آن قطع می‌کند.



معادلهٔ AN: $y - y_A = \frac{y_A - y_N}{x_A - x_N}(x - x_A)$

$\Rightarrow y - 3 = \frac{3 - \frac{2}{3}}{2 - \frac{5}{3}}(x-2) \Rightarrow y - 3 = 7(x-2) \Rightarrow y = 7x - 11$

معادلهٔ BC: $y - y_B = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}(x - x_B)$

$\Rightarrow y = \frac{0-(-1)}{a-2-a-3}(x-a+2) \Rightarrow y = -\frac{1}{5}(x-a+2)$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{a-2}{5}$

تقاطع خط گذرنده از نقاط A و N و خط گذرنده از نقاط B و C، نقطهٔ M یعنی وسط پاره‌خط BC است.

$\begin{cases} y = 7x - 11 \\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{a-2}{5} \end{cases} \Rightarrow 7x - 11 = -\frac{1}{5}x + \frac{a-2}{5}$

$\Rightarrow 35x - 55 = -x + a - 2 \Rightarrow 36x = a + 53$

$\Rightarrow x = \frac{a+53}{36} \Rightarrow x_M = \frac{a+53}{36}$

$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow \frac{a+53}{36} = \frac{a-2+a+3}{2}$

$\Rightarrow a + 53 = 36a + 18 \Rightarrow 35a = 35 \Rightarrow a = 1$

۹. گزینه ۲ نقطهٔ $A(6,1)$ در معادلهٔ دو ضلع $2y - 3x = 12$ و $3y + x = 7$ صدق نمی‌کند. بنابراین نقطهٔ برخورد این دو ضلع رأس مقابل نقطهٔ A است. این نقطه را B می‌نامیم. نقطهٔ وسط نقاط A و B محل تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع است. بنابراین کافی است مختصات نقطهٔ B یعنی تقاطع دو ضلعی که معادله‌شان را داریم پیدا کنیم و سپس

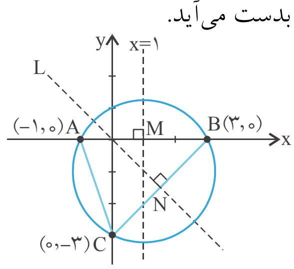
مختصات نقطهٔ M که نقطهٔ وسط A و B است را به دست آوریم.

$$\times 3\begin{cases}2y-3x=12\\3y+x=7\end{cases}\Rightarrow 2y+9y=33\Rightarrow y=3$$
$$\Rightarrow 6-3x=12\Rightarrow x=-2$$

بنابراین مختصات $B(-2,3)$ است.

$$\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}\Rightarrow x_M=\dfrac{6-2}{2}=2\\[2mm] y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}\Rightarrow y_M=\dfrac{1+3}{2}=2\end{cases}\Rightarrow M(2,2)$$

۱۰. گزینهٔ ۲ همان‌طور که در شکل می‌بینید دایره‌ای که از نقاط A، B و C می‌گذرد در واقع مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را در خود محاط دارد و همان‌طور که می‌دانید مرکز این دایره محل تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ است. بنابراین با پیدا کردن تقاطع دو تا از این عمودمنصف‌ها مختصات مرکز دایره بدست می‌آید.



یکی از این عمودمنصف‌ها خط $x=1$ است که هم وسط $A(-1,0)$ و $B(3,0)$ قرار دارد هم بر AB (محور xها) عمود است. پس کافی است عمودمنصف BC را پیدا کنیم. نقطهٔ N را وسط BC در نظر گرفته و معادلهٔ خط عمود بر BC که از N می‌گذرد را پیدا می‌کنیم: (این خط را L می‌نامیم).

$$x_N=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{3}{2}\quad,\quad y_N=\frac{y_B+y_C}{2}=-\frac{3}{2}\Rightarrow N(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$$

$$m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{3}{3}=1\Rightarrow m_L=-1$$

معادلهٔ L: $y-y_N=-1(x-x_N)\Rightarrow y+\frac{3}{2}=-(x-\frac{3}{2})\Rightarrow y=-x$

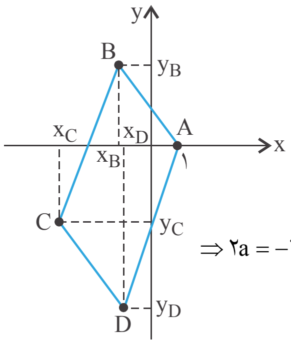
حال تقاطع $x=1$ و $y=-x$ را که همان مرکز دایره است پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases}y=-x\\x=1\end{cases}\Rightarrow y=-1\Rightarrow \text{مرکز دایره}\ (1,-1)$$

r شعاع دایره برابر است با فاصلهٔ مرکز دایره با A یا B یا C: (A را در نظر می‌گیریم.)

$$r=\sqrt{(-1-1)^2+(0-(-1))^2}\Rightarrow r=\sqrt{4+1}\Rightarrow r=\sqrt{5}$$

۱۱. گزینهٔ ۱ برای این‌که چهارضلعی در دستگاه مختصات متوازی‌الاضلاع باشد باید مجموع طول‌های رئوس مقابل و مجموع عرض‌های آن‌ها با هم برابر باشد. مثلاً در اینجا نقاط A و C دو رأس مقابل و نقاط B و D دو رأس مقابل دیگر هستند. بنابراین داریم:



$$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ \Rightarrow 1+4a=3a+2+b-5\\ \Rightarrow a-b=-4\\ y_A+y_C=y_B+y_D\\ \Rightarrow 0-4=2b-4+2a-4\\ \Rightarrow a+b=2\end{cases}$$
$$\Rightarrow 2a=-2\Rightarrow a=-1\Rightarrow -1+b=2\Rightarrow b=3$$

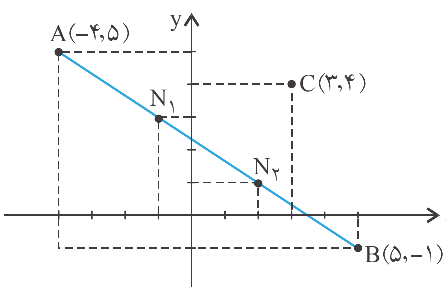
تقاطع قطرهای متوازی‌الاضلاع نقطهٔ وسط هر قطر آن است. بنابراین مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AC یا پاره‌خط BD را به دست می‌آوریم:

$$a=-1\Rightarrow C(-4,-4)$$
$$\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A+x_C}{2}\Rightarrow x_M=\dfrac{1-4}{2}=-\dfrac{3}{2}\\[2mm] y_M=\dfrac{y_A+y_C}{2}\Rightarrow y_M=\dfrac{0-4}{2}=-2\end{cases}\Rightarrow M(-\frac{3}{2},-2)$$

نقطهٔ وسط یک قطر یا همان تلاقی قطرهاست.

۱۲. گزینهٔ ۲ به همان صورت که در کتاب درسی مختصات نقطهٔ وسط یک پاره‌خط را به دست می‌آوریم؛ می‌توان اثبات کرد که اگر نقطه N پاره‌خط AB را به طوری تقسیم کند که $AN=\frac{1}{3}AB$ باشد آن‌گاه $x_N=\frac{2x_A+x_B}{3}$ و $y_N=\frac{2y_A+y_B}{3}$ و اگر $BN=\frac{1}{3}AB$ باشد، آن‌گاه $x_N=\frac{2x_B+x_A}{3}$ و $y_N=\frac{2y_B+y_A}{3}$.

بنابراین در این‌جا با توجه به شکل مختصات N_1 و N_2 را به دست می‌آوریم:



$$x_{N_1}=\frac{2x_A+x_B}{3}\Rightarrow x_{N_1}=\frac{-8+5}{3}=-1$$
$$y_{N_1}=\frac{2y_A+y_B}{3}=\frac{10-1}{3}=3$$
$$x_{N_2}=\frac{2x_B+x_A}{3}=\frac{10-4}{3}=2$$
$$y_{N_2}=\frac{2y_B+y_A}{3}=\frac{-2+5}{3}=1$$

معادلهٔ خطوطی را که از نقطهٔ C و N_1 و C و N_2 می‌گذرند، به دست می‌آوریم:

$$CN_1: y-4=\frac{4-3}{3-(-1)}(x-3)\Rightarrow x-4y+13=0$$
$$CN_2: y-4=\frac{4-1}{3-2}(x-3)\Rightarrow 3x-y-5=0$$