فصل اول

«مبانی چاه‌آزمایی»

مقدمه

ارزیابی اقتصادی یک مخزن با داده‌های خواص سنگ و سیال آن به دست می‌آید و برای تعیین این مقادیر نیاز به حفر چاه است. برای یافتن خصوصیات مخزن از یک چاه مغزه‌گیری، چاه‌پیمایی و چاه‌آزمایی انجام می‌گیرد و به دلیل اینکه هر کدام از این داده‌ها مربوط به مقیاس خاصی از مخزن می‌باشد، با کمک تمامی داده‌ها می‌توان به توصیف مخزن و چگونگی جریان سیال در مخزن دست یافت. جدول زیر روش‌های ارزیابی و عمق بررسی هر روش را نشان می‌دهد.

داده‌ها	مغزه‌گیری	چاه‌نگاری	DST	چاه‌آزمایی	داده تولیدی
عمق قابل بررسی	۱۰cm	۱cm – ۵۰cm	۱–۱۰m	۵۰m – ۵۰۰m	کل مخزن

به طور کلی اطلاعاتی که از مخزن حاصل می‌شوند، به دو دسته ایستا (استاتیک) و دینامیک (dynamic) تقسیم می‌شوند.

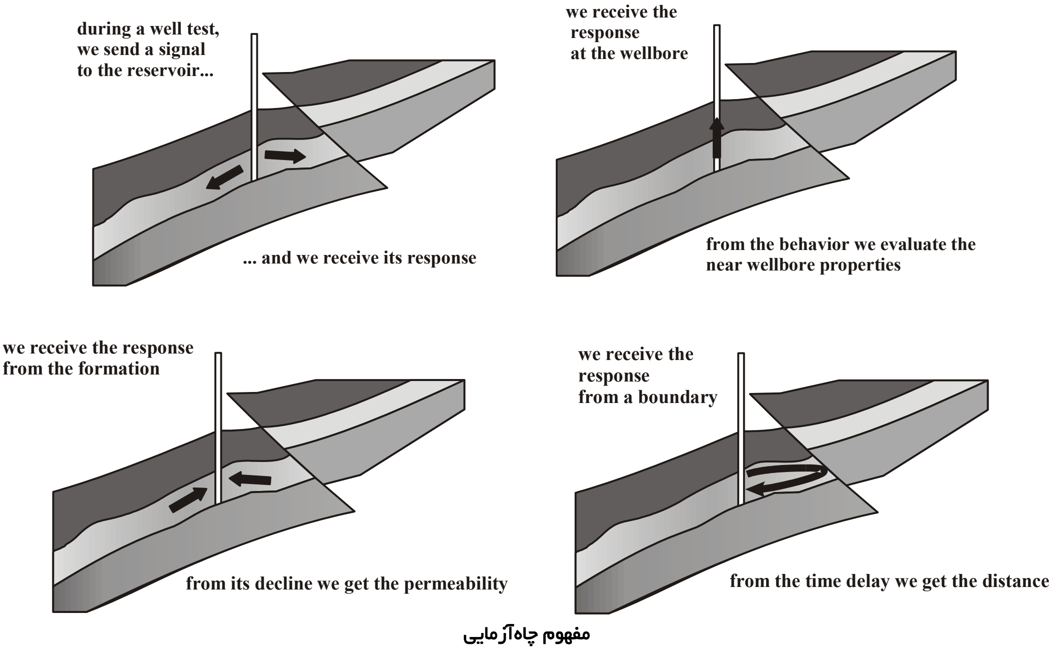
الف) خصوصیات استاتیک: خصوصیاتی از مخزن‌اند که در زمان توقف تولید به‌دست می‌آیند. به عبارت دیگر این ویژگی‌ها را زمانی‌که از مخزن، تولیدی نداریم، بدست می‌آوریم. بعضی از روش‌های به دست آوردن این ویژگی‌ها عبارت‌اند از: زمین‌شناسی، ژئوفیزیک، ژئوشیمی و پتروفیزیک.

ب) خصوصیات دینامیک: خصوصیاتی از مخزن‌اند که در زمان تولید از مخزن بدست می‌آیند. بعضی از روش‌های به‌دست آوردن این ویژگی‌ها عبارت‌اند از: ژئومکانیک، گرفتن نمونه‌های سیالات، داده‌های تولید و نمودارها، چاه‌آزمایی.

ویژگی‌های به‌دست آمده از این دو روش در تهیه مدل‌های استاتیک و عددی (Numerical) مخزن به منظور شبیه‌سازی مخزن و تولید از آن، استفاده می‌شوند.

تعریف چاه‌آزمایی و هدف آن

یک چاه‌آزمایی در تعریف ساده عبارت است از: برهم زدن پایداری مخزن بر اثر تولید از چاه یا تزریق به چاه با نرخ کنترل‌شده، که در نتیجه آن تغییرات ایجادشده در فشارسنج ثبت می‌شود. اندازه‌گیری تغییرات فشار بر حسب زمان و تفسیر این تغییرات، اطلاعاتی راجع به مخزن و چاه به ما می‌دهد.



مفهوم چاه‌آزمایی

تغییرات فشار را می‌توان در دو حالت اندازه‌گیری کرد:

۱) در چاهی که تغییر نرخ تولیدی داشته باشیم.

۲) در یک چاه دیگر، غیر از چاهی که در آن تغییر جریان وجود دارد.

اهداف چاه‌آزمایی را می‌توان به صورت زیر تقسیم کرد:

۱ـ ارزیابی مخزن: نفوذپذیری (k)، ضریب عبوردهی $(\frac{kh}{\mu})$، فشار اولیه (P_i) و فشار میانگین $(\bar{P})$، حدود مخزن و مرزها (وجود و عدم وجود جریان سیال در دیواره) و آسیب‌دیدگی سازند (ضریب پوسته S).

۲ـ مدیریت مخزن: بررسی کارکرد و وضعیت چاه‌ها در مخزن.

۳ـ توصیف مخزن: گسل، تخمین حجم مخزن.

ویژگی‌های اولیه مخزن

ویژگی‌های اولیه مخزن که بایستی بررسی شوند، عبارت‌اند از:

۱ـ نوع سیال مخزن شامل سیال تراکم‌ناپذیر، سیال کمی‌تراکم‌پذیر (شبه‌تراکم‌پذیر) و سیال تراکم‌پذیر

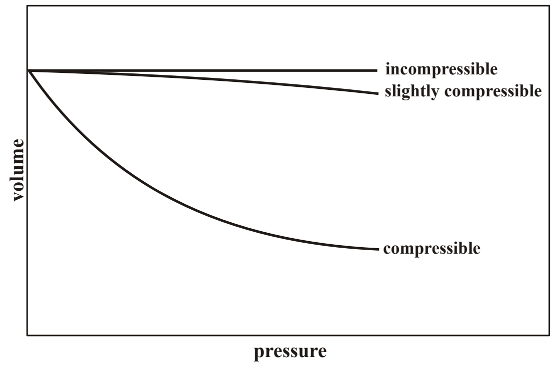
۲ـ رژیم جریان شامل جریان پایدار (پایا)، جریان شبه‌پایدار (شبه‌پایا) و جریان ناپایدار (ناپایا)

۳ـ هندسه‌ی جریان شامل جریان شعاعی، جریان خطی و جریان کروی و نیمه‌کروی

۴ـ تعداد سیالات مخزن شامل جریان تک‌فاز (نفت، آب، گاز)، جریان دو فاز (نفت- آب، نفت- گاز، آب- گاز) و جریان سه‌فاز (نفت- آب- گاز)

نوع سیال مخزن

سیال مخزن می‌تواند تراکم‌ناپذیر، کمی‌تراکم‌پذیر یا تراکم‌پذیر باشد.



انواع سیالات بر حسب تراکم‌پذیری

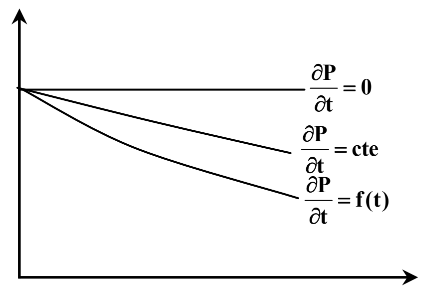
رژیم جریان

همان‌طور که می‌دانیم سه نوع رژیم جریانی با شروع تولید در مخازن وجود دارد:

۱ـ جریان گذرا (Transient): این جریان برای چاهی که شروع به تولید کرده و افت‌فشار به مرزها نرسیده باشد، اتفاق می‌افتد (یا به صورت مشابه برای چاه تزریقی). در این حالت جریان به صورت ناپایدار است (unsteady state) و افت‌فشار تابعی از زمان است. $(\frac{\partial P}{\partial t} = f(t))$.

۲ـ جریان شبه‌پایدار (pseudo steady state): در این رژیم که بعد از شکل‌گیری drainage و پایان دوره گذرا شروع می‌شود، تغییرات فشار نسبت به زمان ثابت است و فشار رابطه خطی با زمان دارد. در این حالت سیالی وارد مخزن نشده و مخزن در حال تخلیه‌شدن است. $(\frac{\partial P}{\partial t} = \text{Cte})$

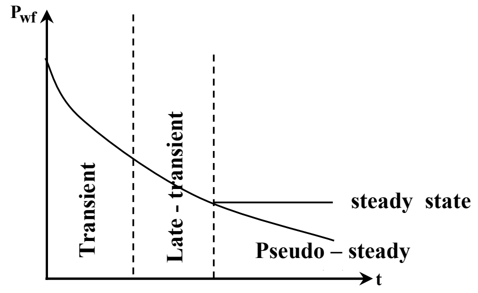
۳ـ جریان پایدار (steady state): بعد از شکل‌گیری drainage در صورت وجود سفره آبی یا کلاهک گازی با تخلیه نفت از مخزن، سیال وارد مخزن شده و از افت‌فشار مخزن جلوگیری می‌کند.



تغییرات فشار جریانی نسبت به زمان برای جریان‌های مختلف

ناحیه تخلیه اطراف چاه

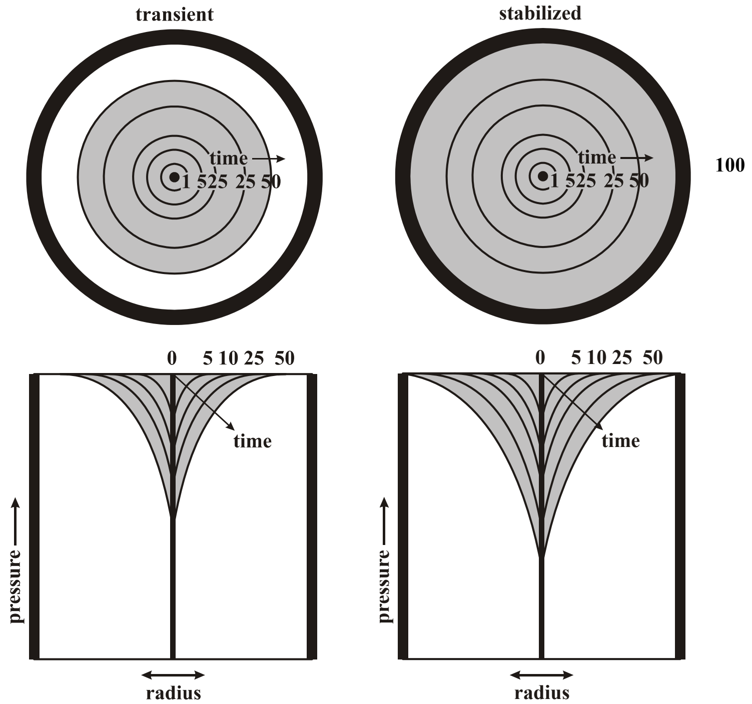
شعاعی که در تولید دخالت دارد یا شعاعی که افت‌فشار تا محدوده‌ی آن رسیده باشد را Drainage Radius گویند. با شروع تولید از یک چاه، افت‌فشار از چاه شروع‌شده و به سمت مرزها حرکت می‌کند. در ابتدا جریان به صورت ناپایدار است و پس از مدتی فشار به مرزها رسیده و drainage شکل می‌گیرد.



تغییرات فشار تهچاهی در دورههای مختلف زمانی

اگر drainage به صورت دایره باشد، افت‌فشار در تمام جهات در یک زمان به مرزها می‌رسد ولی اگر به شکل دایره نباشد، افت‌فشار در هر جهت در زمان‌های مختلفی به مرزها می‌رسد. این دوره زمانی که قسمتی از افت‌فشار به مرز رسیده و در بقیه جهات drainage در حال شکل‌گیری است را late transient می‌نامند. بعد از دوره کوتاه late transient، با توجه به شرایط مخزن، وارد دوره پایدار یا شبه‌پایدار می‌شویم.

شکل مقابل تغییرات فشار در دوره‌های زمانی مختلف مخزن را نشان می‌دهد. هر چه شکل drainage به دایره نزدیکتر باشد، دوره late transient کمتر است.



زمانی‌که افت‌فشار به مرز مخزن نرسیده و زمانی‌که افت‌فشار به مرز مخزن می‌رسد.

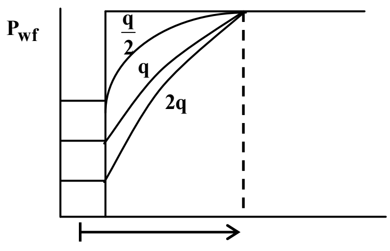
شعاع تخلیه، بستگی به خواص سنگ و سیال مخزن دارد و رابطه شعاع تخلیه در هر زمان در دوره Transient عبارت است از: $r = \left(\frac{kt}{\text{۹۴۸}\phi\mu C_t}\right)^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}$

که در رابطه فوق داریم:

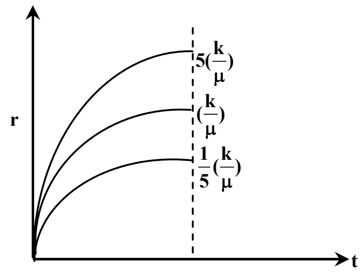
t: زمان، hr ؛ k: نفوذپذیری، md ؛ C_t: تراکم‌پذیری کل، psi^{-1} ؛ μ: ویسکوزیته، cp ؛ ϕ: تخلخل ؛ r: فاصله از چاه، ft

با توجه به اینکه شعاع تخلیه فقط بستگی به خواص سنگ و سیال دارد، هر چه مقدار ضریب تحرک‌پذیری (Mobility ratio) $\frac{k}{\mu}$ بیشتر باشد، مقدار شعاع تخلیه نیز افزایش می‌یابد.

همچنین لازم به ذکر است افزایش یا کاهش نرخ تولید، بر افت‌فشار ته‌چاه اثر می‌گذارد و بر شعاع تخلیه اثری ندارد. اگر سه مخزن با خواص سنگ و سیال یکسانی با سه دبی مختلف در حال تولید باشد، شعاع تخلیه در زمان یکسان، برای هر سه مخزن مساوی است.



اثر دبی بر شعاع تخلیه



اثر تحرک‌پذیری بر شعاع تخلیه

مثال۱: در یک مخزن نفتی اشباع، کدام‌یک از پارامترهای زیر بر روی شعاع تخلیه هیچ‌گونه اثری ندارد؟

۱) μ_o ۲) $C\phi$ ۳) k ۴) ΔP

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» شعاع تخلیه، فقط و فقط تابع خصوصیات سنگ و سیال مخزن است و به هیچ‌وجه تحت تأثیر دبی تولیدی یا افت‌فشار قرار نمی‌گیرد.

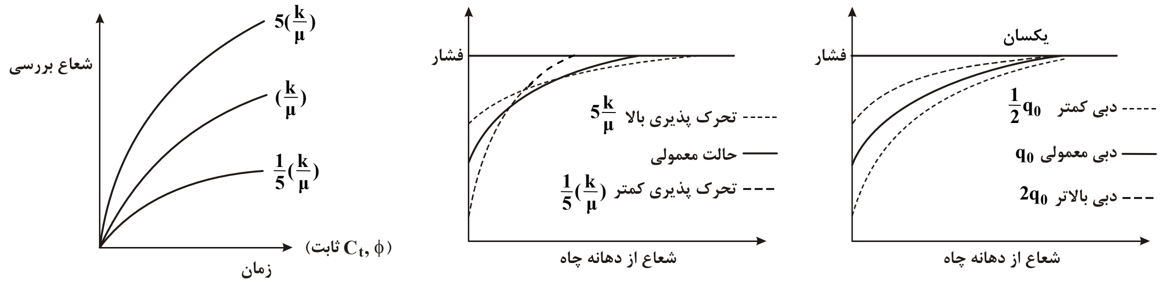
مثال۲: با فرض ثابت‌بودن سایر خواص سنگ، با افزایش تحرک‌پذیری (mobility) نفت و دبی جریان، شعاع بررسی به ترتیب:

۱) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد. ۲) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد. ۳) کاهش می‌یابد، ثابت می‌ماند. ۴) افزایش می‌یابد، ثابت می‌ماند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به رابطه شعاع بررسی داریم:

$$\text{mobility}=\frac{k}{\mu}\quad,\quad r_i=\left(\frac{kt}{۹۴۸\mu C_t\phi}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

همان‌طور که مشخص است، با فرض ثابت بودن ϕ, C_t، هر چقدر $\frac{k}{\mu}$ بیش‌تر باشد، شعاع بررسی نیز افزایش می‌یابد. از طرفی شعاع بررسی مستقل از دبی است. بنابراین هر چقدر دبی تغییر کند، شعاع بررسی ثابت می‌ماند.



مثال۳: با کاهش تحرک‌پذیری، کدام گزینه رخ می‌دهد؟

۱) با افت‌فشار کمتر، شعاع بیشتری بررسی می‌شود.
۲) با افت‌فشار بیشتر، شعاع کمتری بررسی می‌شود.
۳) با افت‌فشار بیشتر، شعاع بررسی تغییر نمی‌کند.
۴) با افت‌فشار کمتر، شعاع بررسی تغییر نمی‌کند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با کاهش تحرک‌پذیری، در صورتی‌که افت‌فشار کمتر باشد، شعاع بیشتری از مخزن بررسی می‌شود.

مثال۴: در تست چاه‌آزمایی، شعاع تخلیه (r_i) مستقل از کدام پارامتر است؟

۱) ϕ ۲) q ۳) k ۴) V

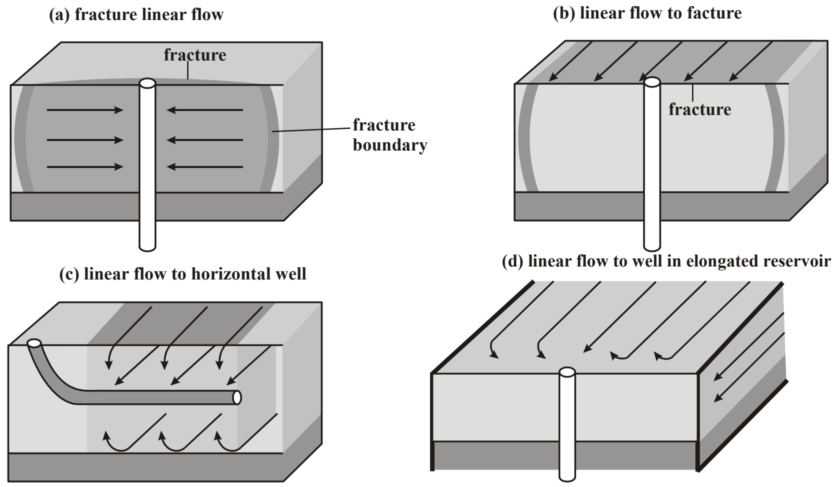
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» r_i تابع خصوصیات ذاتی سنگ و سیال است.

$$r_i=\frac{۶/۳۲۸k}{\mu C_t\phi}$$

هندسه جریانی

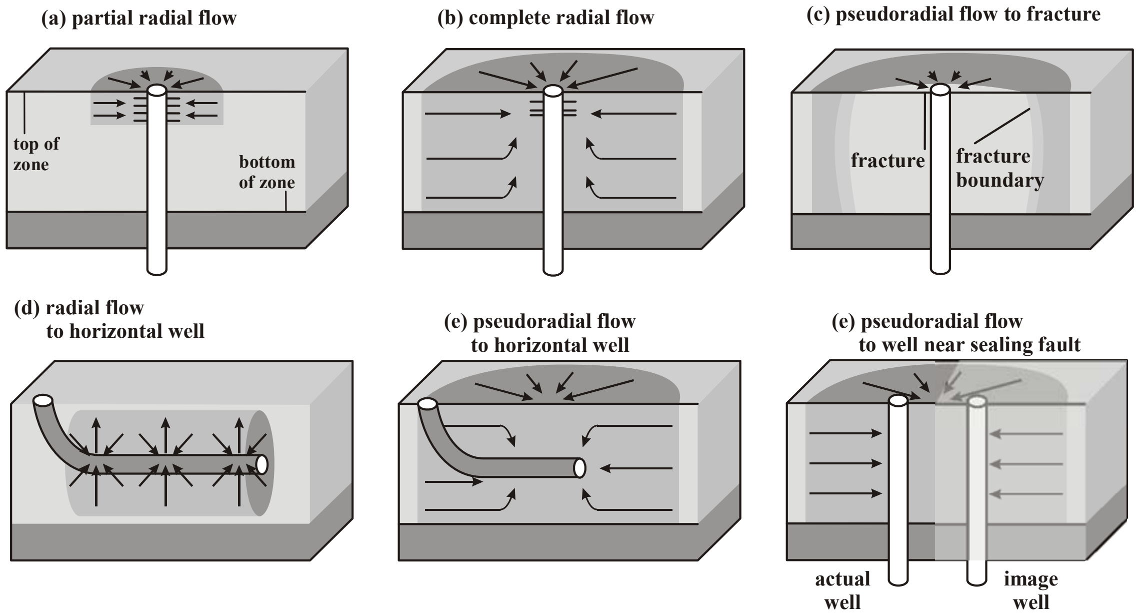
نوع جریان از لحاظ هندسه به سه دسته تقسیم می‌شود: ۱) خطی ۲) شعاعی ۳) کروی

جریان خطی: جریان در مخازن گسترده (elongated reservoir)، ورود به چاه افقی، شکاف اطراف چاه و همچنین در شکاف به صورت خطی است.



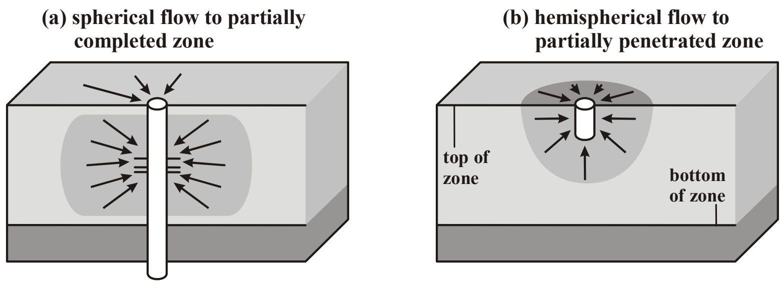
هندسه جریانی جریان خطی

جریان شعاعی: جریان سیال در اطراف چاه به صورت شعاعی است.



هندسه‌ی جریانی جریان شعاعی

جریان کروی: جریان در اطراف قسمت مشبک‌کاری شده، محدود یا چاهی که در مخزن به صورت ناکامل حفاری‌شده، به صورت کروی است.



هندسه جریانی جریان کروی (چپ) و نیمه‌کروی (راست)

مراحل چاه‌آزمایی

یک چاه‌آزمایی شامل سه مرحله است:

۱ـ اندازه‌گیری (well test measurement): انجام آزمایشات از قبیل Draw down وBuild up.

۲ـ تفسیر (Well test Interpretation): تشخیص نوع مخزن، چاه و چگونگی عملکرد آن‌ها.

۳ـ آنالیز (Well test Analysis): انجام عملیات ریاضی جهت به دست آوردن پارامترهای مورد نیاز.

داده‌هایی که برای چاه‌آزمایی نیاز است از بخش‌های مختلف مخزن و چاه حاصل می‌شوند و عبارت‌اند از:

الف) داده‌های تست شامل ۱) دبی و فشار ته‌چاهی بر حسب زمان ۲) توالی تست

ب) داده‌های چاه شامل ۱) شعاع دهانه‌های چاه، r_w ۲) هندسه چاه (قائم، مایل یا افقی) ۳) عمق

ج) پارامترهای مخزن و سیال شامل ۱) ضخامت مخزن، h ۲) تخلخل، ϕ ۳) تراکم‌پذیری نفت، C_o، آب C_w و سازند C_f ۴) اشباع آب، S_w ۵) گرانروی نفت، μ_o ۶) ضریب انبساط حجمی سازند، B

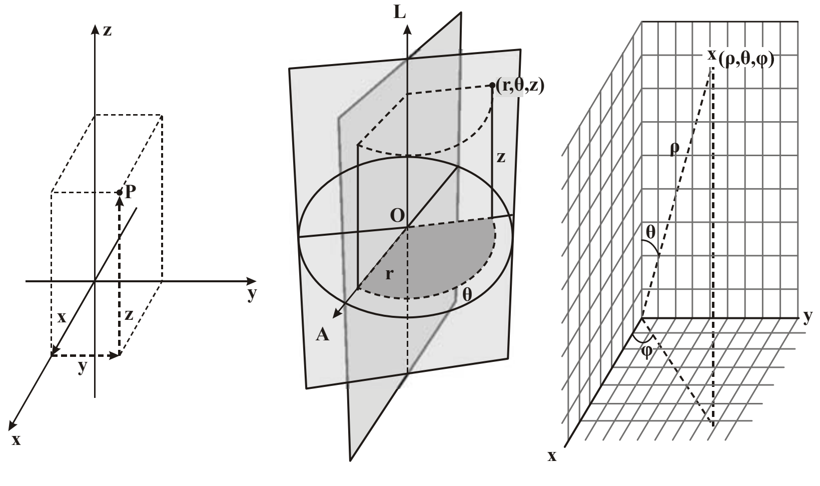
معادله‌ی انتشار

قبل از بیان معادله‌ی انتشار بیان مفاهیمی نیاز است.

انواع مختصات: به طور کلی سه دسته مختصات وجود دارند که عبارت‌اند از:

۱- مختصات کارتزین (x,y,z,t) ۲- مختصات استوانه‌ای (r,θ,z,t) ۳- مختصات کروی (ρ,θ,ϕ,t)

در شکل زیر این مختصات‌ها نشان داده شده‌اند.



cartezian cylindrical spherical

مختصات متفاوت

مخزن همگون (Isotropic): به مخزنی که ویژگی‌های تمام نقاط آن مشابه یکدیگر باشد، **مخزن همگونی (homogeneous)** می‌گویند. مخزنی که همگون نباشد را، ناهمگون (heterogeneous) می‌گویند.

مخزن همسانگرد (Isotropic): مخزنی را که تغییرات ویژگی‌ها در تمام راستاها مشابه یکدیگر باشد، Isotropic (همسانگرد) می‌گویند. مخزنی را که Isotropic نباشد، Anisotropic (ناهمسانگرد) می‌گویند.

اگر تانسور تراوایی در نظر گرفته شود، می‌توان نوشت:

$$k = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{z} \end{bmatrix}$$

با فرض جریان داشتن در سه راستای اصلی:

$$k = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{bmatrix}$$

برای تراوایی:

۱- مخزن همگون و Isotropic است اگر و تنها اگر: $(k_{xx} = k_{yy} = k_{zz})_1 = (k_{xx} = k_{yy} = k_{zz})_2$

۲- مخزن ناهمگون و Isotropic است اگر و تنها اگر: $(k_{xx} = k_{yy} = k_{zz})_1 \neq (k_{xx} = k_{yy} = k_{zz})_2$

۳- مخزن همگون و Anisotropic است اگر و تنها اگر: $(k_{xx} \neq k_{yy} \neq k_{zz})_1 = (k_{xx} \neq k_{yy} \neq k_{zz})_2$

۴- مخزن ناهمگون و Anisotropic است اگر و تنها اگر: $(k_{xx} \neq k_{yy} \neq k_{zz})_1 \neq (k_{xx} \neq k_{yy} \neq k_{zz})_2$

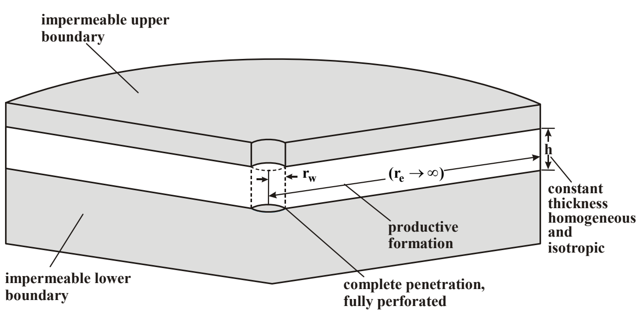
مثال۵: کدام گزینه در مورد مخزن ناهمگون و آیزوتروپیک صحیح است؟

۱) $(k_{xx} = k_{yy} = k_{zz})_1 = (k_{xx} = k_{yy} = k_{zz})_2$
۲) $(k_{xx} = k_{yy} = k_{zz})_1 \neq (k_{xx} = k_{yy} = k_{zz})_2$
۳) $(k_{xx} \neq k_{yy} \neq k_{zz})_1 = (k_{xx} \neq k_{yy} \neq k_{zz})_2$
۴) $(k_{xx} \neq k_{yy} \neq k_{zz})_1 \neq (k_{xx} \neq k_{yy} \neq k_{zz})_2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در مخزن ناهمگون و آیزوتروپیک داریم: $(k_{xx} = k_{yy} = k_{zz})_1 \neq (k_{xx} = k_{yy} = k_{zz})_2$

برای به‌دست آوردن معادله جریان سیال در محیط متخلخل یک سری فرضیاتی در مورد مخزن ایده‌آل در نظر گرفته می‌شوند که عبارت‌اند از:

۱ـ همگون
۲ـ ایزوتروپیک (Isotropic)
۳ـ از شتاب جاذبه صرف‌نظر می‌شود.
۴ـ دما ثابت است.
۵ـ قانون دارسی صادق است.
۶ـ جریان تک فازی است.
۷ـ چاه قائم کاملاً مشبک‌کاری شده است. (تمام ضخامت مخزن مشبک‌کاری شده است)
۸ـ ضخامت ناحیه تولیدی ثابت است (اشباع ثابت است).
۹ـ $(\frac{\partial P}{\partial r})$ گرادیان فشار در مخزن، ناچیز است.
۱۰ـ انبارگی چاه ثابت است.



مخزن ایده‌آل

۱۱ـ در لحظه اولیه $(t=0)$، فشار در سرتاسر مخزن ثابت است.

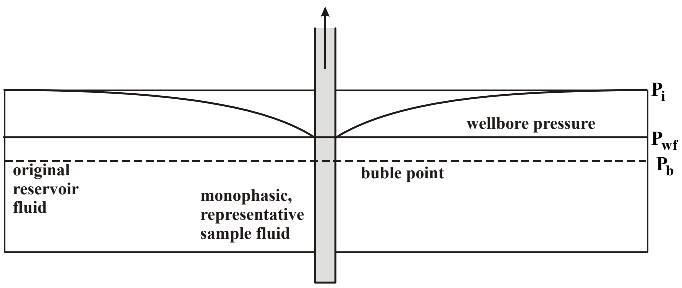
۱۲ـ دبی تولید ثابت است.

۱۳ـ مخزن دارای مرز بی‌نهایت دایره‌ای است. (دارای مرز دایره‌ای می‌باشد ولی بسیار دور است به گونه‌ای که رفتار ناپایدار دارد)

۱۴ـ ویژگی‌های سیال عبارت‌اند از:

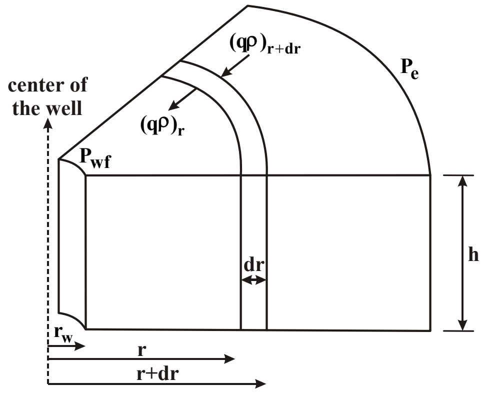
الف) تراکم‌پذیری کم و ثابت است. ب) گرانروی ثابت است.

منظور از جریان تک‌فاز این است که $P_{wf} > P_b$.



جریان تک‌فاز

برای شکل زیر با استفاده از: ۱) قانون پایستگی انرژی ۲) قانون دارسی ۳) معادلات حالت، معادله جریان به دست می‌آید.



شکل شماتیک که جریان شعاعی برای آن نوشته می‌شود.

۱) قانون پایستگی انرژی: آهنگ تجمع جرم در بازه زمانی (Δt) از رابطه زیر به دست می‌آید:

آهنگ تجمع جرم در بازه زمانی Δt = جرم خروجی از المان حجمی در زمان Δt - جرم ورودی به المان حجمی در زمان Δt

جرم ورودی $= \Delta t[Av\rho]_{r+dr}$

که در رابطه فوق داریم:

v: سرعت سیال در حال جریان، $\frac{ft}{day}$ ρ: چگالی سیال در $(r+dr)$، $\frac{lb}{ft^3}$

A: مساحت در $(r+dr)$ Δt: بازه زمانی، days

مساحت المان در ضلع ورودی عبارت است از: $A_{r+dr} = 2\pi(r+dr)h$

با ترکیب معادلات $\Delta t[Av\rho]_{r+dr}$ و $A_{r+dr} = 2\pi(r+dr)h$ داریم: جرم ورودی $= 2\pi\Delta t(r+dr)h(v\rho)_{r+dr}$

به صورت مشابه برای جرم خروجی داریم: جرم خروجی $= 2\pi\Delta t\, rh(v\rho)_r$

میزان تجمع جرم در بازه زمانی Δt عبارت است از: تجمع جرم $= (2\pi rh)dr[(\phi\rho)_{t+\Delta t} - (\phi\rho)_t]$

بنابراین داریم:

$$2\pi h(r+dr)\Delta t(v\rho)_{r+dr} - 2\pi hr\Delta t(v\rho)_r = (2\pi rh)dr[(\phi\rho)_{t+\Delta t} - (\phi\rho)_t]$$

با تقسیم طرفین تساوی فوق بر $(2\pi rh)dr\,\Delta t$ داریم:

$$\frac{1}{r}\frac{1}{dr}[(r+dr)(v\rho)_{r+dr} - r(v\rho)_r] = \frac{1}{\Delta t}[(\phi\rho)_{t+\Delta t} - (\phi\rho)_t]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r(v\rho)] = \frac{\partial}{\partial t}[\phi\rho] \quad (*)$$

که در رابطه فوق داریم:

ϕ: تخلخل ρ: چگالی، $\frac{lb}{ft^3}$ v: سرعت سیال، $\frac{ft}{day}$

۲) قانون دارسی:

$$v = (0/001127)\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial r}$$

که در رابطه فوق داریم:

k: تراوایی، md μ: گرانروی سیال، cp v: سرعت سیال، $\frac{bbl}{ft^2.day}$ $\frac{\partial P}{\partial r}$: گرادیان فشار در راستای جریان $(\frac{psi}{ft})$

می‌خواهیم واحد سرعت سیال را از $\frac{bbl}{ft^2.day}$ به $\frac{ft}{day}$ تبدیل کنیم.

$$1bbl = 5/615 ft^3$$

بنابراین داریم:
$$v=(۵/۶۱۵)(۰/۰۰۱۱۲۷)\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial r}=(۰/۰۰۶۳۲۸)(\frac{k}{\mu})\frac{\partial P}{\partial r} \qquad (**)$$

که در رابطه فوق: v؛ سرعت سیال $\frac{ft}{day}$

با استفاده از معادلات (*)، (**) داریم :
$$\frac{۰/۰۰۶۳۲۸}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{k}{\mu}(\rho r)\frac{\partial P}{\partial r})=\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho)$$

از طرفی برای طرف راست معادله فوق داریم:
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)=\phi\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

همچنین طبق تعریف تراکم‌پذیری سازند داریم:
$$C_f=\frac{۱}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial P}$$

از طرفی طبق قانون مشتق زنجیره‌ای داریم:
$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t}$$

بنابراین:
$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=C_f\,\phi\frac{\partial P}{\partial t}$$

در نتیجه:
$$\frac{۰/۰۰۶۳۲۸}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{k}{\mu}(\rho r)\frac{\partial P}{\partial r})=\rho\phi C_f\frac{\partial P}{\partial t}+\phi\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

با بسط طرفین تساوی فوق داریم:
$$۰/۰۰۶۳۲۸(\frac{k}{\mu})[\frac{\rho}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\rho\frac{\partial^۲ p}{\partial r^۲}+(\frac{\partial P}{\partial r})^۲\frac{\partial\rho}{\partial P}]=\rho\phi C_f\frac{\partial P}{\partial t}+\phi(\frac{\partial\rho}{\partial P})(\frac{\partial P}{\partial t})$$

و با تقسیم طرفین تساوی فوق بر چگالی (ρ) داریم:
$$۰/۰۰۶۳۲۸(\frac{k}{\mu})[\frac{۱}{r}\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\partial^۲ P}{\partial r^۲}+(\frac{\partial P}{\partial r})^۲(\frac{۱}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P})]=\phi C_f(\frac{\partial P}{\partial t})+\phi(\frac{\partial P}{\partial t})(\frac{۱}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P})$$

از طرفی طبق تعریف تراکم‌پذیری سیال موجود در سازند داریم:
$$C=\frac{۱}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P}$$

با جایگذاری عبارت فوق داریم:
$$۰/۰۰۶۳۲۸(\frac{k}{\mu})[\frac{\partial^۲ P}{\partial r^۲}+\frac{۱}{r}\frac{\partial P}{\partial r}+C(\frac{\partial P}{\partial r})^۲]=\phi C_f(\frac{\partial P}{\partial t})+\phi C(\frac{\partial P}{\partial t})$$

جمله‌ی $C(\frac{\partial P}{\partial r})^۲$ بسیار ناچیز می‌باشد. بنابراین می‌توان از آن صرف‌نظر نمود. از طرفی C_f+C را می‌توان تراکم‌پذیری کل دانست $(C_t=C+C_f)$، بنابراین داریم:

$$\boxed{\frac{\partial^۲ P}{\partial r^۲}+\frac{۱}{r}\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{\mu C_t\phi}{۰/۰۰۶۳۲۸k}\frac{\partial P}{\partial t}}$$

که در آن $k\,(md)$ ، $t\,(days)$ می‌باشد.

نکته۱: به معادله‌ی حاصل، معادله‌ی انتشار (diffusivity equation) می‌گویند و عبارت $\frac{۰/۰۰۶۳۲۸k}{\mu C_t\phi}$ را ثابت انتشار می‌گویند.

این معادله از مهمترین معادلات چاه آزمایی می‌باشد. با توجه به اینکه در چاه‌آزمایی، زمان معمولاً بر حسب ساعت گزارش می‌شود، داریم:

$$\frac{\partial^۲ P}{\partial r^۲}+\frac{۱}{r}\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{\mu C_t\phi}{۰/۰۰۰۲۶۳۷k}\frac{\partial P}{\partial t}$$ (معمولاً به جای ۰/۰۰۰۲۶۳۷، از ۰/۰۰۰۲۶۴ استفاده می‌شود)

که در رابطه فوق داریم:

k : تراوایی، md ؛ r: شعاع، ft ؛ P: فشار، psia ؛ C_t: تراکم‌پذیری کل، $psi^{-۱}$ ؛ ϕ: تخلخل، fraction ؛ μ: گرانروی، cp

زمانی‌که بیش از یک فاز در محیط، جریان داشته باشد، برای محاسبه‌ی تراکم‌پذیری کل (تراکم‌پذیری معادل equivalent compressibility)، می‌توان از روش مقابل استفاده نمود:
$$C_t=C_oS_o+C_wS_w+C_gS_g+C_f$$

که در آن S_i: اشباع سیال i (i : نفت، آب یا گاز است) و C_i تراکم‌پذیری سیال iام (i: o, w یا g که به ترتیب نفت، آب یا گاز است).

$$C_o=-\frac{۱}{B_o}\frac{dB_o}{dP}+\frac{B_g}{B_o}\frac{dR_s}{dP} \quad , \quad C_w=-\frac{۱}{B_w}\frac{dB_w}{dP}+\frac{B_g}{B_w}\frac{dR_{sw}}{dP}$$

برای محاسبه‌ی تحرک‌پذیری کل برای سیستم چند فازی به شکل مقابل عمل می‌شود:
$$(\frac{k}{\mu})_t=(\frac{k_o}{\mu_o}+\frac{k_w}{\mu_w}+\frac{k_g}{\mu_g})$$

روش دوم اینکه به‌جای $C_t\phi$ از مقدار مؤثر $C\phi$ (effective compressibility) که با $(C\phi)_{eff}$ یا $(C\phi)_{ave}$ نشان داده می‌شود استفاده کرد که در آن:

$$C_{eff,i}=\frac{C_oS_o+C_wS_w+C_gS_g+C_f}{S_i}\ ,\ C_o=-\frac{1}{B_o}\frac{dB_o}{dP}+\frac{B_g}{B_o}\frac{dR_s}{dP}\quad,\quad C_w=-\frac{1}{B_w}\frac{dB_w}{dP}+\frac{B_g}{B_w}\frac{dR_{sw}}{dP}$$

$$\phi_{eff,i}=\phi_i\quad,\quad \phi_t=\frac{\phi_i}{S_i}$$

که برای i می‌توان w,g,o که به ترتیب مخفف نفت، گاز و آب می‌باشند، استفاده نمود. برای مثال برای نفت می‌توان نوشت:

$$(C\phi)_{eff,o}=\left(\frac{C_oS_o+C_wS_w+C_gS_g+C_f}{S_o}\right)\phi_o$$

نتیجه‌گیری که در این قسمت انجام می‌شود این است که:

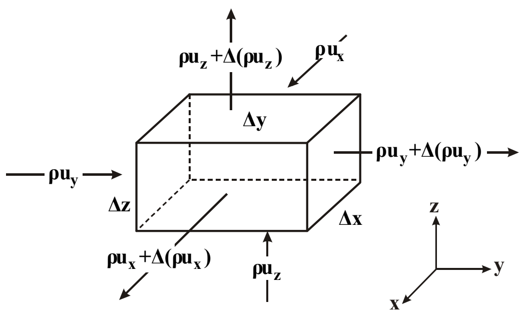
$$C\phi=C_t\phi=C_{eo}\phi_o=C_{ew}\phi_w=C_{eg}\phi_g$$

معادله انتشار به فرم دیفرانسیلی را به این صورت داریم:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right)\right]=\frac{1}{\eta}\frac{\partial P}{\partial t}\ ,\ \eta=\frac{0/0002637k}{\mu C_t\phi}$$

که در رابطه فوق، η: ثابت انتشار می‌باشد.

برای جریان سه‌بُعدی داریم:



شکل شماتیک که جریان سه‌بُعدی برای آن نوشته می‌شود.

مشابه آنچه برای جریان شعاعی بیان شد را می‌توان برای جریان سه‌بُعدی در مختصات کارتزین نیز نوشت:

$$u_x=-0/001127\frac{k_x}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\ ;\ u_y=-0/001127\frac{k_y}{\mu}\frac{\partial P}{\partial y}\ ;\ u_z=-0/001127\frac{k_z}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial z}+0/00694\rho\right)$$

که ترم $0/00694\rho$ مربوط به نیروی جاذبه در راستای قائم می‌باشد.

از طرفی برای پایستگی جرم داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_x\rho}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k_y\rho}{\mu}\frac{\partial P}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k_z\rho}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial z}+0/00694\rho\right)\right)=\frac{1}{0/000264}\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho)$$

با فرض کمی‌تراکم‌پذیر بودن سیال داریم:

$$C=\frac{-1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P}\Rightarrow\rho=\rho_\circ e^{C(P-P_\circ)}$$

با فرض‌های اولیه:

۱) Isotropic $k_x=k_y=k_z=k$ ۲) صرف‌نظر از نیروی جاذبه (ترم دوم سرعت در راستای قائم $\simeq 0$) ۳) ϕ ثابت ۴) μ ثابت می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{C(P-P_\circ)}\frac{\partial P}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{C(P-P_\circ)}\frac{\partial P}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[e^{C(P-P_\circ)}\frac{\partial P}{\partial z}\right]=\frac{\mu\phi}{0/000264k}\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{C(P-P_\circ)}\right]$$

بنابراین:

$$\frac{\partial^2P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2P}{\partial z^2}+C\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2\right]=\frac{\mu C\phi}{0/000264k}\frac{\partial P}{\partial t}$$

به‌دلیل اینکه $C\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2\right]$ ناچیز است، از آن صرف‌نظر می‌گردد. بنابراین:

$$\boxed{\frac{\partial^2P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2P}{\partial z^2}=\frac{\mu C\phi}{0/000264}\frac{\partial P}{\partial t}}$$

با فرض تراکم‌پذیر بودن سیال (سیال گاز باشد) داریم:

$$\rho=\frac{M}{RT}\frac{P}{Z_g}$$

و مجدداً با فرض‌های قبل داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{\mu Z_g}\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{\mu Z_g}\frac{\partial P}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{\mu Z_g}\frac{\partial P}{\partial z}\right)=\frac{\phi}{0/000264k}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{Z_g}\right)$$

تابع شبه‌پتانسیل فشار به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$\boxed{\psi(P)=2\int_{P_{\text{مبنا}}}^{P}\frac{P}{\mu Z_g}dP}$$

که معمولاً $P_{\text{مبنا}}=0$. بنابراین:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{Z_g}\right)&=\frac{d\left(\frac{P}{Z_g}\right)}{dP}\frac{\partial P}{\partial t}\\ C_g&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P}=\frac{Z_g}{P}\frac{d\left(\frac{P}{Z_g}\right)}{dP}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{Z_g}\right)=\frac{C_gP}{Z_g}\frac{\partial P}{\partial t}$$

از طرفی داریم:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{2P}{\mu Z_g}\frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{2P}{\mu Z_g}\frac{\partial P}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{2P}{\mu Z_g}\frac{\partial P}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial\psi}{\partial Z}=\frac{2P}{\mu Z_g}\frac{\partial P}{\partial Z}$$

با جایگذاری این عبارات در رابطه نهایی خواهیم داشت:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=\frac{\mu C_g\phi}{0/000264k}\frac{\partial\psi}{\partial t}}$$

اگر r یک بردار مکان باشد:

$$\vec{r}=r_x\,\hat{i}+r_y\,\hat{j}+r_z\hat{k}$$

مفهوم گرادیان:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\ ,\ \nabla=\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\ \text{(مختصات قطبی)}$$

مفهوم گرادیان بردار مکان:

$$\nabla r=\frac{\partial r_x}{\partial x}i+\frac{\partial r_y}{\partial y}j+\frac{\partial r_z}{\partial z}k\ ,\ \nabla f=\frac{\partial f}{r\partial\theta}u_\theta+\frac{\partial f}{\partial r}u_r\ \text{(مختصات قطبی)}$$

ضرب نقطه‌ای گرادیان در بردار مکان:

$$\nabla.r=\frac{\partial r_x}{\partial x}+\frac{\partial r_y}{\partial y}+\frac{\partial r_z}{\partial z}$$

لاپلاس بردار مکان:

$$\nabla^2r=\frac{\partial^2r_x}{\partial x}+\frac{\partial^2r_y}{\partial y}+\frac{\partial^2r_z}{\partial z}$$

به صورت خلاصه می‌توان نوشت:

۱) برای سیالات تراکم‌ناپذیر

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}=0$$

الف) مختصات کارتزین

$$\nabla^2P=0\quad\text{یا}\quad\frac{\partial^2P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2P}{\partial z^2}=0$$

ب) مختصات شعاعی

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right)=0$$

۲) برای سیالات کمی‌تراکم‌پذیر (شبه‌تراکم‌پذیر)

$$C=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

الف) مختصات کارتزین

$$\nabla^2P=\frac{\mu C_t\phi}{0/000264k}\frac{\partial P}{\partial t}\quad\text{یا}\quad\frac{\partial^2P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2P}{\partial z^2}=\frac{\mu C_t\phi}{0/000264k}\frac{\partial P}{\partial t}$$

ب) مختصات شعاعی

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right)=\frac{\mu C_t\phi}{0/00264k}\frac{\partial P}{\partial t}$$