

فصل

۱

قسمت اول

ترسیم‌های هندسی

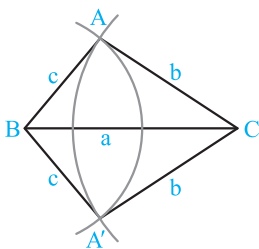
ترسیم‌های هندسی

ترسیم‌های هندسی با دو ابزار خطکش و پرگار انجام می‌شوند:

(آ) خطکش برای رسم خطی که از دو نقطه می‌گذرد، استفاده می‌شود. هم‌چنین از خطکش مدرج برای رسم پاره‌خط با طول معلوم استفاده می‌شود. هر چند با معلوم بودن طول پاره‌خطها می‌توان به کمک خطکش غیر مدرج آن‌ها را روی نیم‌خط مفروض رسم کرد.
(ب) پرگار ابزاری برای رسم دایره‌ای است که مرکز آن نقطه معلوم A است و از نقطه معلوم دیگری مانند B می‌گذرد.

ترسیم‌های مقدماتی

۱- رسم مثلثی که سه ضلع آن معلوم است.



این ترسیم، ترسیم مهمی می‌باشد و بسیاری از ترسیم‌های هندسی به کمک این ترسیم حل می‌شوند.
فرض کنید $AC = b$ و $AB = c$ ، اندازه اضلاع مثلث ABC باشند، ابتدا یکی از ضلع‌ها مثلاً $BC = a$ را رسم می‌کنیم سپس به مرکز C و شعاع b و به مرکز B و شعاع c دو کمان رسم می‌کنیم. محل تلاقی دو کمان یعنی نقاط A و A' رأس سوم مثلث است. مثلث‌های ABC و $A'BC$ جواباند و چون این دو مثلث هم‌نهشت‌اند (ض‌ض‌ض)، پس مسئله دارای یک جواب است.

شرط جواب داشتن مسئله این است که دو کمان یکدیگر را قطع کنند و این هنگامی ممکن است که مجموع هر دو عدد داده شده، از عدد سوم بزرگ‌تر باشد، یعنی:

$$\begin{cases} a < b + c \\ c < a + b \\ b < a + c \end{cases}$$

مثال: آیا می‌توان مثلثی رسم کرد که اندازه اضلاع آن ۴، ۵ و ۶ باشد؟ چرا؟

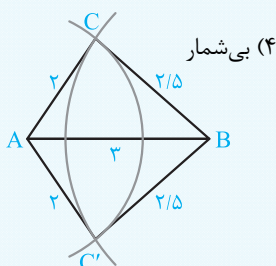
پاسخ: بله، چون مجموع دو عدد کوچک‌تر، بزرگ‌تر از عدد بزرگ‌تر است ($6 > 5 + 4$)، پس همواره می‌توان با اعداد داده شده یک مثلث ساخت.

مثال: اگر ۳، ۴ و x اندازه‌های اضلاع یک مثلث باشند، آنگاه حدود تغییرات x را تعیین کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} x + 4 > 3 \\ x + 3 > 4 \\ 3 + 4 > x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \\ 7 > x \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 < x < 7$$

تست: پاره‌خط AB به طول ۳ سانتی‌متر مفروض است، چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از نقطه A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از نقطه B به فاصله ۲/۵ سانتی‌متر باشد؟



(۴) بی‌شمار

(۳) صفر

(۲) ۲

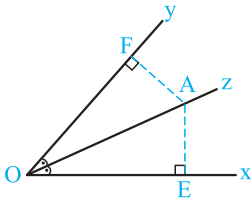
(۱) ۱

پاسخ: پاره‌خط $AB = 3$ را رسم می‌کنیم به مرکز B و شعاع ۲/۵ و به مرکز A و شعاع ۲ دو کمان رسم می‌کنیم، چون $3 < 2 + 2/5$ ، پس دو کمان در دو نقطه C و C' متقاطع‌اند و این نقاط جواب مسئله هستند.

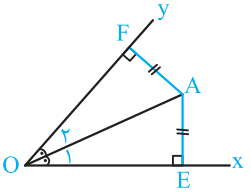
بنابراین گزینه (۲) درست است.

خاصیت مهم نیمساز یک زاویه

(آ) اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، آن‌گاه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. یعنی در شکل مقابل $AE = AF$ است.



(ب) اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد، آن‌گاه آن نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد، یعنی در شکل مقابل $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ است.

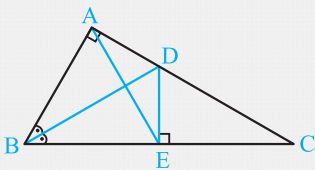


مثال: در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) نیمساز زاویه B ضلع AC را در D قطع می‌کند، اگر DE عمود بر BC باشد، آن‌گاه ثابت کنید

$$\hat{D\hat{A}E} = \hat{A\hat{E}D}$$

پاسخ: چون BD نیمساز زاویه B است، پس نقطه D از دو ضلع زاویه B به یک فاصله است،

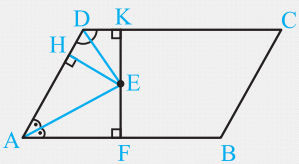
یعنی $AD = DE$ ، پس مثلث ADE متساوی‌الساقین است، در نتیجه $\hat{D\hat{A}E} = \hat{D\hat{E}A}$



مثال: ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع، نقطه‌ای داخل آن وجود دارد که از سه ضلع آن به یک فاصله باشد.

پاسخ: متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است، نقطه تلاقی نیمساز زوایای \hat{A} و \hat{D} را E می‌نامیم،

E از دو ضلع زاویه A و از دو ضلع زاویه D هم به یک فاصله است پس $EF = EH$ و $EH = EK$ ، در نتیجه $EF = EH = EK$ ، یعنی E از سه ضلع AB ، AD و CD به یک فاصله است.



تست: در مثلث ABC ، پاره‌خط AD نیمساز زاویه A است و نقطه E روی ضلع AC وجود دارد که از خط شامل AB و خط شامل AD به

یک فاصله است. اگر $\hat{C} = 25^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازه زاویه B چند درجه است؟

۴۵ (۴)

۴۰ (۳)

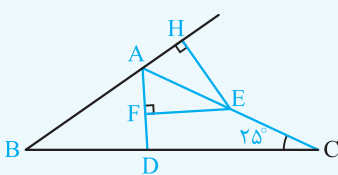
۳۰ (۲)

۳۵ (۱)

پاسخ: بنا به فرض $EH = EF$ ، پس AC نیمساز زاویه $\hat{D\hat{A}H}$ است، لذا $\hat{D\hat{A}C} = \hat{C\hat{A}H}$ ، از طرفی

بنا به فرض AD نیمساز زاویه A است، یعنی $\hat{B\hat{A}D} = \hat{D\hat{A}C} = \hat{C\hat{A}H}$ در نتیجه $\hat{B\hat{A}D} = \hat{D\hat{A}C} = \hat{C\hat{A}H}$ و

می‌توان نوشت:



$$\hat{B\hat{A}D} + \hat{D\hat{A}C} + \hat{C\hat{A}H} = 180^\circ \Rightarrow 3\hat{B\hat{A}D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B\hat{A}D} = 60^\circ \Rightarrow \hat{B\hat{A}C} = 120^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 120^\circ + \hat{B} + 25^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$$

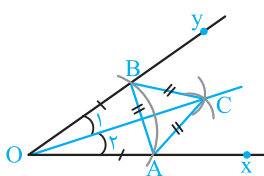
بنابراین گزینه (۱) درست است.

۲- رسم نیمساز یک زاویه

(آ) نقطه A را روی نیم‌خط Ox در نظر می‌گیریم. کماتی به مرکز O و شعاع OA رسم می‌کنیم تا نیم‌خط Oy را در نقطه B قطع کند، داریم $OA = OB$

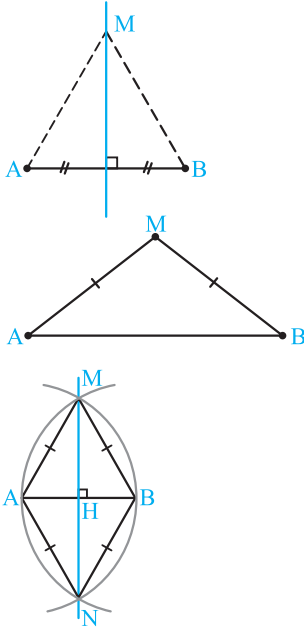
(ب) به مرکز A و شعاع AB و به مرکز B و مجدداً شعاع AB دو کمان رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی این دو کمان را C می‌نامیم.

(پ) OC نیمساز زاویه xOy است، زیرا دو مثلث OBC و OAC به حالت (ضضض) هم‌نهشت‌اند، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$



برخی خواص عمودمنصف یک پاره‌خط و ترسیم آن

اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است. یعنی در شکل مقابل داریم $MA = MB$



ب) اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

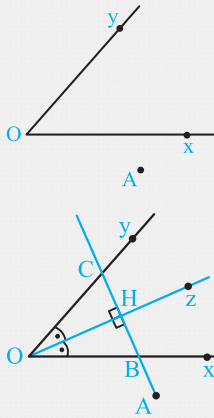
$MA = MB \Rightarrow M$ روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

۳- رسم عمودمنصف یک پاره‌خط

پاره‌خط AB مفروض است. ابتدا کمانی به مرکز A و شعاع AB رسم می‌کنیم، سپس کمانی به مرکز B و شعاع قبلی (AB) رسم می‌کنیم، نقاط تلاقی این دو کمان را M و N می‌نامیم. خط عمودمنصف MN پاره‌خط AB است، زیرا نقاط M و N از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند.

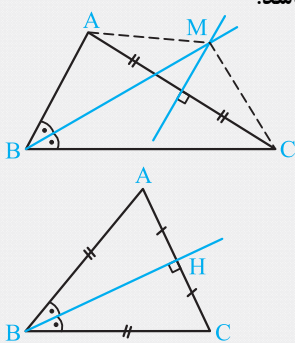
مثال: مطابق شکل نقطه A بیرون زاویه xOy مفروض است. از نقطه A خطی چنان رسم کنید که اضلاع زاویه را در

نقاط B و C قطع کند و داشته باشیم $OB = OC$



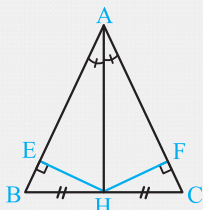
پاسخ: نیمساز زاویه xOy را رسم می‌کنیم و آن را Oz می‌نامیم. از نقطه A خطی عمود بر Oz رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی‌اش با آن را H می‌نامیم. دو مثلث قائم‌الزاویه OHB و OHC به حالت (ض‌ز) هم‌نهشت هستند، پس نتیجه می‌شود $OB = OC$

مثال: مثلث ABC مفروض است. نقطه‌ای چنان بیابید که از دو رأس A و C و دو ضلع زاویه B به یک فاصله باشد.



پاسخ: عمودمنصف ضلع AC و نیمساز زاویه B را رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی آن‌ها را M می‌نامیم. M نقطه‌ای است که از نقاط A و C به یک فاصله می‌باشد و فاصله آن از اضلاع زاویه B به یک اندازه است. در این حالت مسئله یک جواب دارد اما اگر مثلث ABC در رأس B متساوی‌الساقین باشد ($AB = BC$)، در این صورت نیمساز و عمودمنصف ضلع AC بر هم منطبق می‌شوند و مسئله بی‌شمار جواب دارد.

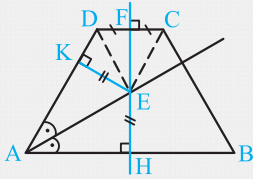
مثال: ثابت کنید اگر در یک مثلث نیمساز یک زاویه، میانه هم باشد، مثلث متساوی‌الساقین است.



پاسخ: بنا به فرض AH نیمساز زاویه A و میانه وارد بر ضلع BC است. می‌خواهیم ثابت کنیم $AB = AC$ یا $\hat{B} = \hat{C}$. به همین منظور از H بر اضلاع AB و AC عمودهای HE و HF را رسم می‌کنیم. بنا به خاصیت نیمساز داریم $HE = HF$ و می‌توان نوشت:

$$HE = HF, BH = CH, \hat{BEH} = \hat{CFH} = 90^\circ \xrightarrow{\text{به حالت وتر و یک ضلع}} \triangle BEH \cong \triangle CFH \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow AB = AC$$

مثال: در صفحه دوزنقه $ABCD$ ، نقطه‌ای تعیین کنید که از دو سر قاعده کوچک CD به یک فاصله و از ساق AD و قاعده بزرگ AB به یک فاصله باشد.



پاسخ: عمودمنصف قاعده کوچک را رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن با نیمساز زاویه A را E می‌نامیم، E نقطه‌ای است که از دو سر قاعده کوچک CD به یک فاصله است و از دو ضلع زاویه A به یک فاصله است.

۴- رسم خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه روی آن

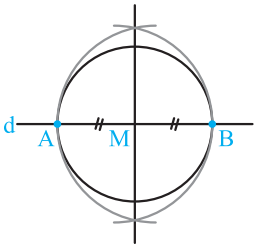
خط d و نقطه M روی آن مفروض است.

(آ) نقطه A را متمایز از M روی خط d در نظر می‌گیریم.

(ب) به مرکز M و شعاع MA دایره‌ای رسم می‌کنیم، محل تلاقی آن با خط d را B می‌نامیم.

(پ) عمودمنصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم.

(ت) این عمودمنصف خطی است که از نقطه M می‌گذرد و بر خط d عمود است.



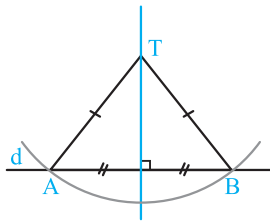
۵- رسم خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه خارج آن

خط d و نقطه T خارج آن مفروض است.

نقطه A را روی خط d در نظر می‌گیریم، اگر خط TA بر خط d عمود باشد، خط TA جواب است، در غیر این صورت به مرکز T و شعاع TA کمانی رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی دیگر آن با خط d را B می‌نامیم.

عمودمنصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم، این عمودمنصف خطی است که از نقطه T می‌گذرد

(زیرا $TA = TB$) و بر خط d عمود است.

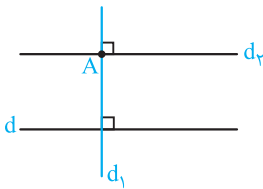


۶- رسم خط موازی با یک خط داده شده از یک نقطه خارج آن

خط d و نقطه A خارج آن مفروض است.

از نقطه A خط d_1 را عمود بر خط d رسم می‌کنیم، در نقطه A خط d_1 را عمود بر خط d_1 رسم می‌کنیم،

دو خط عمود بر یک خط موازی اند. لذا خط d_1 از نقطه A گذشته و موازی خط d است.

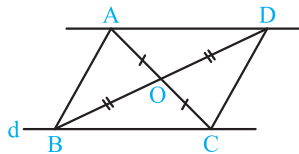


نکته به کمک خواص متوازی‌الاضلاع هم می‌توانیم خط d_1 را رسم کنیم. کافی است نقطه دلخواه C را

روی d در نظر بگیریم، آن را به A وصل کنیم و وسط AC را O بنامیم. سپس نقطه‌ای دیگر مانند B روی

خط d در نظر گرفته، آن را به O وصل کنیم و OB را تا نقطه D به اندازه خودش امتداد دهیم. چهارضلعی

$ABCD$ متوازی‌الاضلاع است زیرا قطرهاش یکدیگر را نصف می‌کنند، در نتیجه AD موازی d است.



چند مثال مهم از رسم

مثال: مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که وتر و یک ضلع آن معلوم باشد.

پاسخ: فرض کنیم در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، طول وتر $BC = a$ و ضلع $AB = c$ معلوم باشند،

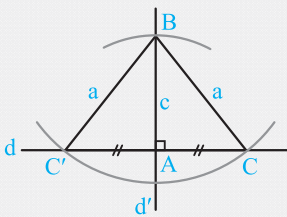
می‌خواهیم مثلث را رسم کنیم.

نقطه A را روی خط d در نظر می‌گیریم و خط d' را در این نقطه بر خط d عمود رسم می‌کنیم. به

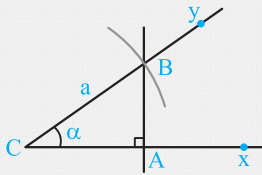
مرکز A و شعاع c کمانی رسم می‌کنیم تا خط d' را در نقطه B قطع کند. به مرکز B و شعاع a کمانی

رسم می‌کنیم و نقطه‌های تلاقی آن با خط d را C و C' می‌نامیم. مثلث‌های قائم‌الزاویه و هم‌نهشت ABC

و ABC' جواب هستند و مسئله همواره با شرط $a > c$ ، یک جواب دارد.

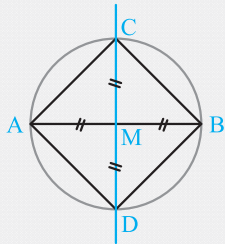


مثال: مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که وتر و یک زاویه حاده آن معلوم باشد.



پاسخ: فرض کنیم که در مثلث قائم‌الزاویه ABC طول وتر $BC = a$ و اندازه زاویه $\hat{C} = \alpha$ معلوم باشند، می‌خواهیم مثلث را رسم کنیم. مطابق شکل زاویه α را برابر α رسم می‌کنیم، سپس به مرکز C شعاع a کمائی رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با نیم خط Cy را B می‌نامیم، داریم $BC = a$. از B خطی عمود بر نیم خط Cx رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با Cx را A می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویه ABC جواب مسئله است.

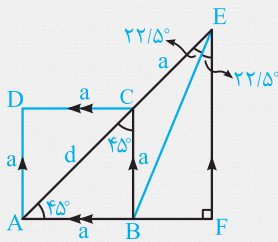
مثال: مربعی رسم کنید که قطر آن داده شده است.



پاسخ: فرض کنید پاره خط AB با طول معلوم قطر مربع باشد، می‌خواهیم مربع را رسم کنیم. به همین جهت عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی آن با AB را نقطه M می‌نامیم. به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمودمنصف AB را در نقطه‌های C و D قطع کند. چهارضلعی ACBD مربع است، زیرا قطرهای آن عمودمنصف یکدیگرند و طولشان برابر است.

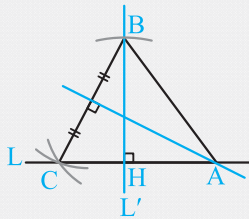
نکته رسم فوق جهت رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقینی که وتر آن معلوم است نیز به کار می‌رود. (مثلث‌های ACB و ADB)

مثال: مربعی رسم کنید که مجموع ضلع و قطر آن معلوم است.



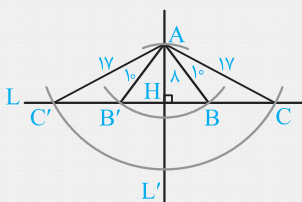
پاسخ: در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین AEF طول وتر $AE = a + d$ معلوم است پس مثلث AEF را رسم می‌کنیم، سپس نیمساز زاویه E را رسم کرده و نقطه تلاقی آن با ضلع AF را نقطه B می‌نامیم. از B خطی موازی EF رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن با AE، نقطه C می‌نامیم. از C خطی موازی AF و از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن‌ها را D می‌نامیم، ABCD مربع مطلوب است.

مثال: مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که ارتفاع وارد بر ساق آن ۱۲ و طول قاعده‌اش ۱۳ باشد.



پاسخ: نقطه H را روی خط L در نظر می‌گیریم. خط L' را در این نقطه عمود بر L رسم می‌کنیم، سپس به مرکز H و شعاع ۱۲ کمائی رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با خط L' را B می‌نامیم و به مرکز B و شعاع ۱۳ کمائی رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن با خط L را نقطه C می‌نامیم، عمودمنصف پاره خط BC را رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی آن با خط L را A می‌نامیم، مثلث ABC جواب است.

مثال: مثلثی رسم کنید که دو ضلع آن ۱۰ و ۱۷ سانتی‌متر و ارتفاع وارد بر ضلع سوم آن ۸ سانتی‌متر باشد.



پاسخ: خط L و نقطه دلخواه H را روی آن در نظر می‌گیریم. خط L' را در نقطه H عمود بر L رسم می‌کنیم. به مرکز H و شعاع ۸ کمائی رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با خط L' را A می‌نامیم. به مرکز A و شعاع ۱۰ و به مرکز B و شعاع ۱۷، دو کمان رسم می‌کنیم، مطابق شکل، محل تلاقی آن‌ها با خط L را به ترتیب B، B'، C و C' می‌نامیم، مثلث‌های ABC، ABC'، AB'C و AB'C' جواب‌های متمایز، دو مثلث ABC و AB'C می‌باشند.

فصل ۱

ترسیم‌های هندسی و استدلال

قسمت اول: ترسیم‌های هندسی

نیمساز زاویه و عمودمنصف پاره‌خط

۱. مرکز همه دایره‌هایی که از دو نقطه ثابت A و B می‌گذرند، چگونه‌اند؟
 - (۱) روی دایره به قطر AB قرار دارند.
 - (۲) روی دو خط متقاطع واقع‌اند.
 - (۳) روی خطی عمود بر AB قرار دارند.
 - (۴) روی خطی موازی AB هستند.
۲. دو خط متقاطع مفروضند، چند نقطه وجود دارد که از این دو خط به یک فاصله‌اند و از نقطه تقاطع دو خط به فاصله ۲ سانتی‌متر قرار دارند؟

۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)
-------	-------	-------	-------
۳. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) اندازه زاویه C برابر 26° است. اگر نیمساز زاویه B، ضلع AC را در نقطه D قطع کند و DE عمود بر BC باشد، اندازه زاویه DAE چند درجه است؟

۱۸ (۱)	۳۰ (۲)	۳۶ (۳)	۲۷ (۴)
--------	--------	--------	--------
۴. در مثلث ABC، نیمساز زاویه B و عمودمنصف ضلع BC روی ضلع AC متقاطع‌اند. اگر $\hat{A} = 54^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه B چند درجه است؟

۷۸ (۱)	۸۲ (۲)	۸۴ (۳)	۸۶ (۴)
--------	--------	--------	--------
۵. در متوازی‌الاضلاع ABCD داریم $AB = 14$ و $AD = 8$. از نقطه تلاقی قطرهای، عمودی بر قطر AC رسم می‌کنیم تا ضلع CD را در نقطه E قطع کند. محیط مثلث ADE کدام است؟

۲۲ (۱)	۱۱ (۲)	۱۶ (۳)	۲۸ (۴)
--------	--------	--------	--------
۶. در مثلث ABC، $\hat{A} = 126^\circ$ است. اگر عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC، ضلع BC را به ترتیب در نقاط E و F قطع کنند، آنگاه اندازه زاویه EAF چند درجه است؟

۷۰ (۱)	۷۲ (۲)	۷۴ (۳)	۶۸ (۴)
--------	--------	--------	--------
۷. در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = 80^\circ$ ، عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعده BC را در نقاط M و N قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN چند درجه است؟

(سراسری تجربی - ۹۲)

۱۵ (۱)	۲۰ (۲)	۲۵ (۳)	۳۰ (۴)
--------	--------	--------	--------
۸. در مثلث ABC عمودمنصف ضلع BC، ضلع AC را در E قطع می‌کند، به طوری که $CE = AB$. اگر $\hat{B} = 75^\circ$ باشد، آنگاه اندازه زاویه C کدام است؟

۳۵ (۱)	۳۰ (۲)	۴۰ (۳)	۴۵ (۴)
--------	--------	--------	--------
۹. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{C} = 90^\circ$ ، $\hat{B} = 18^\circ$)، نیمساز زاویه A را AD می‌نامیم. حاصل $\frac{AB - AD}{AC}$ کدام است؟

۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۵ (۴)
-------	-------	-------	-------
۱۰. اندازه اضلاع یک متوازی‌الاضلاع ۶ و ۴ است. چند نقطه داخل آن وجود دارد که از هر سه ضلع متوازی‌الاضلاع به یک فاصله باشد؟

۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)
-------	-------	-------	-------
۱۱. روی امتداد یک ضلع مثلث چند نقطه یافت می‌شود که از خط‌های شامل دو ضلع دیگر به یک فاصله باشد؟

۱) صفر	۲) حداکثر یکی	۳) ۲	۴) دقیقاً یکی
--------	---------------	------	---------------
۱۲. چند نقطه در صفحه یک مثلث قائم‌الزاویه وجود دارد که از دو سر وتر به یک فاصله باشد و از وتر و خط شامل دیگر به یک فاصله باشد؟

۲ (۱)	۳ (۲)	۴ (۳)	صفر (۴)
-------	-------	-------	---------

۱۳. دو نقطه A و B مفروض اند، همه خط‌هایی را که از B می‌گذرند، در نظر می‌گیریم و A را نسبت به این خطوط قرینه می‌کنیم، وضع همه این نقاط چگونه است؟

(۱) روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع AB قرار دارند. (۲) روی خطی عمود بر AB قرار دارند.

(۳) روی خطی موازی AB قرار دارند. (۴) روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع AB واقع‌اند.

۱۴. حداکثر چند نقطه روی ارتفاع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه یافت می‌شود که از وتر و یک ضلع دیگر به یک فاصله باشند؟

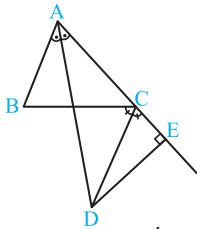
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۵. در مثلث ABC داریم $\hat{B} = 50^\circ$ ، $\hat{C} = 60^\circ$. نیمساز داخلی زاویه A و عمودمنصف ضلع BC در نقطه M متقاطع‌اند، زاویه MBC چند درجه است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴) ۴۰

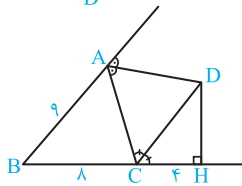
۱۶. در مثلث ABC بر روی ضلع BC پاره‌خط‌های $BM = BA$ و $CN = CA$ را جدا می‌کنیم. اگر زاویه $\hat{A} = 72^\circ$ باشد، زاویه MAN چند درجه است؟

- (۱) ۵۴ (۲) ۵۲ (۳) ۴۸ (۴) ۴۲



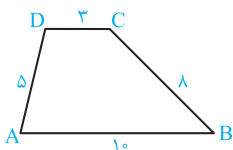
۱۷. در شکل مقابل نیمسازهای زوایای A و BCE در نقطه D متقاطع‌اند. اگر $AE = 24$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۳۶ (۴) ۳۰



۱۸. در شکل مقابل نیمسازهای زوایای خارجی A و C در مثلث ABC یکدیگر را در نقطه D قطع کرده‌اند، با توجه به اندازه‌های داده شده روی شکل، اندازه ضلع AC کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸



۱۹. در دوزنقه روبه‌رو عمودمنصف ساق BC، قاعده AB را در E قطع می‌کند. نسبت محیط دوزنقه ABCD به محیط چهارضلعی ADCE کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{14}{9}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{13}{9}$

۲۰. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، عمودمنصف وتر BC، ضلع AC را در D و امتداد ضلع AB را در E قطع می‌کند، به طوری که $DE = BC$ است. اندازه زاویه C چند درجه است؟

- (۱) ۱۸ (۲) $22/5$ (۳) ۱۵ (۴) ۳۰

ترسیم

۲۱. متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن طول ضلع‌های آن ۳ و ۵ و طول قطر x قابل رسم است. اگر x عددی صحیح باشد، چند متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۲۲. اندازه اضلاع مثلثی ۳ و ۴ و زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر داده شده 30° است. چند مثلث با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۲۳. چند مثلث با اطلاعات $h_a = 2$ ، $b = 3$ و $c = 1$ می‌توان رسم کرد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

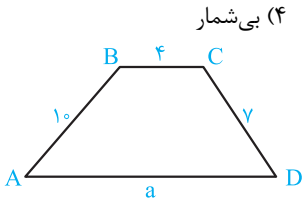
۲۴. چند مثلث وجود دارد که طول دو ضلع آن ۳ و ۵ و یکی از ارتفاع‌ها برابر ۴ باشد؟

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۶

۲۵. در یک مثلث قائم‌الزاویه طول وتر مشخص است. با معلوم بودن اندازه کدام جزء دیگر رسم این مثلث جواب یکتا ندارد؟

- (۱) ارتفاع وارد بر وتر (۲) ارتفاع وارد بر ضلع قائم (۳) میانه وارد بر وتر (۴) یک زاویه حاده

۲۶. در رسم مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع $b = 7$ ، $c = 5$ و میانه $m_a = 4$ با خطکش و پرگار کدام نتیجه درست است؟
 (۱) جواب منحصر به فرد (۲) دو جواب متمایز (۳) فاقد جواب (۴) بی‌شمار جواب



۲۷. چند متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن دو قطر و زاویه بین آن‌ها می‌توان رسم کرد؟

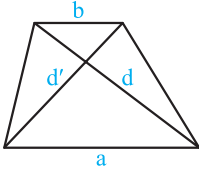
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۲۸. اگر دوزنقه مقابل قابل رسم باشد، آن‌گاه محدوده a کدام است؟

(۱) $4 < a < 17$ (۲) $3 < a < 17$
 (۳) $7 < a < 21$ (۴) $6 < a < 20$

۲۹. اگر دوزنقه روبه‌رو با معلوم بودن قطرهای $d = 7$ و $d' = 5$ و قاعده کوچک $b = 2$ و قاعده بزرگ a قابل رسم باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر صحیح برای a کدام است؟

(۱) ۴۲ (۲) ۴۵
 (۳) ۴۶ (۴) ۴۳



۳۰. خط d و دو نقطه A و B در یک صفحه داده شده‌اند. اگر خط شامل AB بر خط d عمود باشد، چند نقطه روی d وجود دارد که از A و B به یک فاصله است؟

(۱) یک یا بی‌شمار (۲) صفر یا بی‌شمار (۳) یک یا صفر (۴) یک یا صفر یا بی‌شمار

۳۱. با سه پاره‌خط به طول‌های $4x - 4$ ، $x + 7$ و $6x$ یک مثلث می‌توان ساخت، مقادیر x به کدام صورت است؟

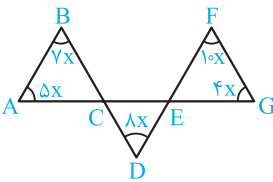
(۱) $\frac{11}{9} < x < 3$ (۲) $\frac{5}{3} < x < 3$ (۳) $2 < x < 3$ (۴) $\frac{11}{9} < x < 4$

قسمت دوم: استدلال

مجموع زوایا در مثلث و چندضلعی‌ها

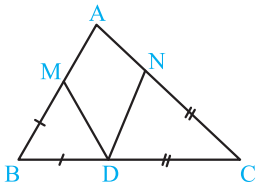
۳۲. با توجه به شکل، اندازه زاویه A چند درجه است؟

(۱) ۵۰ (۲) ۴۰
 (۳) ۶۰ (۴) ۳۰



۳۳. در شکل مقابل $\hat{A} = 58^\circ$ ، $BM = BD$ و $CN = CD$. زاویه MDN چند درجه است؟ (سراسری ریاضی - ۹۱)

(۱) ۵۸ (۲) ۵۹
 (۳) ۶۱ (۴) ۶۲



۳۴. در مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ ، اندازه زاویه بین دو نیمساز زوایای A و B برابر 110° است. اندازه زاویه A چند درجه است؟

(۱) ۱۲۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۳۵ (۴) ۱۴۰

۳۵. در مثلث ABC ، زاویه $\hat{A} = 108^\circ$ است. ضلع BC را از هر دو طرف به اندازه $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم، کوچک‌ترین زاویه خارجی مثلث ADE چند درجه است؟ (سراسری تجربی - ۹۳)

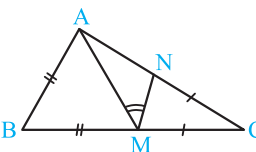
(۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۳۶ (۴) ۵۴

۳۶. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، قاعده BC را از هر دو طرف به اندازه ساق‌ها تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث ADE کوچک‌ترین زاویه خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویه داخلی آن است؟ (سراسری تجربی فارغ از کشور - ۹۳)

(۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۷. در شکل مقابل دو مثلث کناری متساوی‌الساقین اند و $\hat{M} = 43^\circ$. اندازه زاویه BAC چند درجه است؟

(۱) ۹۳ (۲) ۹۴ (۳) ۹۶ (۴) ۹۷



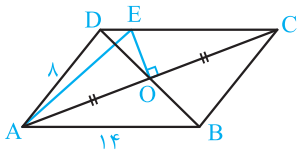


ترسیم‌های هندسی و استدلال

پاسخ فصل ۱

۵ ۱ ۲ ۳ ۴

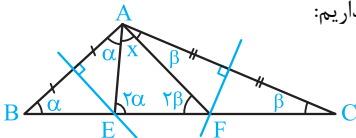
می‌دانیم در یک متوازی‌الاضلاع قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند یعنی $OA = OC$ ، پس OE عمود بر AC ، عمودمنصف قطر AC می‌باشد لذا $AE = CE$ داریم:



$$(ADE \text{ مثلث}) = AD + DE + AE = AD + \frac{DE + CE}{CD=AB} = AD + AB = 8 + 14 = 22$$

۶ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به این‌که \hat{A} منفرجه است، محل تلاقی عمودمنصف‌ها بیرون مثلث است. از طرفی نقطه E روی عمودمنصف پاره‌خط AB است پس $AE = BE$ و با استدلال مشابه $AF = CF$ ، پس مثلث‌های AEB و AFC متساوی‌الساقین هستند و بنا به زاویه خارجی، زوایای مثلث AEF ، مطابق شکل می‌شود، داریم:



$$\begin{cases} x + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \\ A = 126^\circ \\ A = \alpha + \beta + x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2(\alpha + \beta) = 180^\circ \\ \alpha + \beta = 126^\circ - x \end{cases}$$

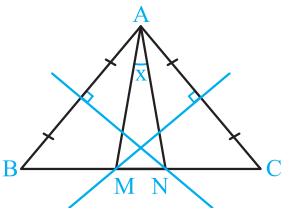
$$\Rightarrow x + 2(126^\circ - x) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x + 252^\circ - 2x = 180^\circ \Rightarrow x = 252^\circ - 180^\circ = 72^\circ$$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴

مطابق شکل عمودمنصف ساق AB ، قاعده BC را در N قطع کرده است پس $AN = BN$ و در نتیجه $\hat{BAN} = \hat{ABN}$ ، اما در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، اندازه زاویه رأس 80° است، پس داریم:

$$\hat{B} + \hat{C} + \hat{A} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{B} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$



$$\Rightarrow \hat{B} = 50^\circ \Rightarrow \hat{BAN} = \hat{B} = 50^\circ$$

با استدلال مشابه نتیجه می‌شود $\hat{CAM} = 50^\circ$ و نهایتاً:

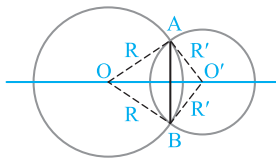
$$\hat{CAN} = \hat{BAM} = \hat{BAC} - \hat{BAN} = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$$

$$\hat{BAC} = 80^\circ \Rightarrow x + 30^\circ + 30^\circ = 80^\circ \Rightarrow x = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$$

۹۶

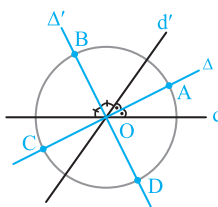
۱ ۱ ۲ ۳ ۴

مطابق شکل دو دایره از دو نقطه A و B گذشته‌اند، پس $OA = OB$ و $O'A = O'B$ ، یعنی خط شامل OO' عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس مرکز همه دایره‌هایی که از دو نقطه A و B می‌گذرند، روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.



۲ ۱ ۲ ۳ ۴

دو خط متقاطع d و d' مفروض‌اند. همه نقطه‌هایی که از این دو خط به یک فاصله‌اند روی نیمسازهای زوایای بین این دو خط یعنی خطوط Δ و Δ' قرار دارند.

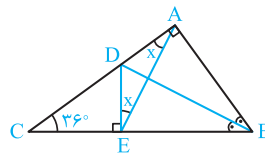


از طرفی همه نقاطی که از نقطه تلاقی دو خط d و d' به فاصله ۲ سانتی‌متر قرار دارند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ سانتی‌متر است. نقطه‌های تلاقی Δ و Δ' با دایره مذکور، یعنی نقطه‌های A, B, C, D و جواب مسئله هستند.

۳ ۱ ۲ ۳ ۴

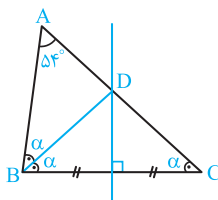
چون نقطه D روی نیمساز زاویه B قرار دارد و DA و DE فاصله نقطه D از اضلاع این زاویه است، پس $DA = DE$ ، یعنی مثلث ADE متساوی‌الساقین است، لذا $\hat{DAE} = \hat{DEA} = x$ ، بنا به زاویه خارجی در مثلث ADE داریم:

$$\hat{CDE} = x + x \Rightarrow 90^\circ - 36^\circ = 2x \Rightarrow 2x = 54^\circ \Rightarrow x = 27^\circ$$



۴ ۱ ۲ ۳ ۴

مطابق شکل عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویه B ، در نقطه D روی ضلع AC متقاطع‌اند، نقطه D از دو سر پاره‌خط BC به یک فاصله است، پس مثلث BDC متساوی‌الساقین است، با فرض $\hat{C} = \alpha$ اندازه زوایا مطابق شکل می‌شود، داریم:

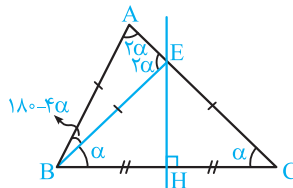


$$2\alpha + \alpha + 54^\circ = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{126^\circ}{3} = 42^\circ$$

$$\hat{B} = 2\alpha = 2 \times 42^\circ = 84^\circ$$

۸ ۱ ۲ ۳ ۴

B را به E وصل می‌کنیم، چون EH عمودمنصف BC است پس $BE = CE$ ، بنا به فرض $AB = CE$ ، لذا $AB = BE$ و مثلث ABE متساوی‌الساقین است.



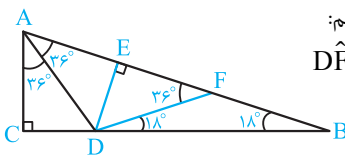
اگر فرض کنیم $\hat{C} = \alpha$ داریم $\hat{EBC} = \alpha$ و بنا به زاویه خارجی $\hat{BEA} = 2\alpha$ اما مثلث ABE متساوی‌الساقین است، پس $\hat{A} = 2\alpha$ و $\hat{ABE} = 180^\circ - 4\alpha$ و نهایتاً:

$$\hat{B} = 180^\circ - 4\alpha + \alpha \Rightarrow 75^\circ = 180^\circ - 3\alpha \Rightarrow 3\alpha = 105^\circ \Rightarrow \alpha = 35^\circ$$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴

زاویه BDF را برابر 18° جدا می‌کنیم. مثلث BDF متساوی‌الساقین می‌شود و بنا به زاویه خارجی داریم:

$$\hat{DFA} = 2 \times 18^\circ = 36^\circ$$

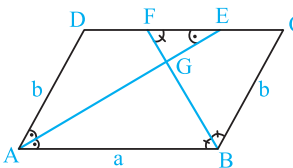


هم‌چنین $\hat{DAF} = 36^\circ$ ، پس مثلث ADF هم متساوی‌الساقین است در نتیجه $AD = DF = BF$ را رسم می‌کنیم. سه مثلث قائم‌الزاویه ACD، AED، FDE به حالت وتر و یک زاویه حاده هم‌نهشت هستند پس $AC = AE = EF$ و نهایتاً داریم:

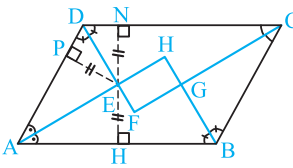
$$\frac{AB - AD}{AC} = \frac{AF + BF - AD}{AC} = \frac{AE + EF + AD - AD}{AC} = \frac{AC + AC}{AC} = 2$$

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر در متوازی‌الاضلاع ABCD مطابق شکل $a < 2b$ باشد، در این صورت نیمسازهای زوایای A و B ضلع CD را در E و F قطع می‌کنند به طوری که $CF = DE = b$ ، پس AE و BF یکدیگر را داخل متوازی‌الاضلاع قطع می‌کنند (نقطه G).



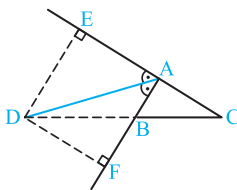
مطابق شکل، نیمساز زوایای A و D و هم‌چنین نیمساز زوایای B و C همواره داخل متوازی‌الاضلاع (در نقاط E و G) متقاطع‌اند و این نقاط از سه ضلع متوازی‌الاضلاع به یک فاصله‌اند.



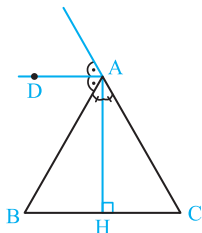
اما چون ضلع بزرگ متوازی‌الاضلاع $AB = 6$ ، از دو برابر ضلع کوچک یعنی $2AD = 2 \times 4 = 8$ کوچک‌تر است، نقطه تلاقی نیمسازهای زوایای A و B و هم‌چنین نقطه تلاقی نیمسازهای زوایای C و D داخل متوازی‌الاضلاع قرار می‌گیرند، پس چهار نقطه E، F، G و H جواب‌اند.

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر مثلث ABC متساوی‌الساقین نباشد ($AB \neq AC$)، آن‌گاه روی امتداد ضلع BC دقیقاً یک نقطه یافت می‌شود که از خط‌های شامل دو ضلع دیگر به یک فاصله است. این نقطه محل برخورد نیمساز زاویه خارجی A با امتداد ضلع BC است که مطابق شکل نقطه D می‌باشد.

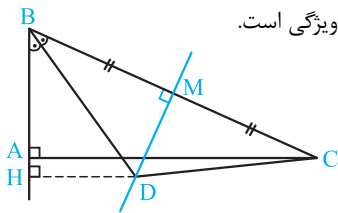


اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد ($AB = AC$)، در این صورت نیمساز خارجی زاویه A موازی قاعده BC می‌شود، پس روی امتداد BC نقطه‌ای یافت نمی‌شود که از خط‌های شامل دو ضلع دیگر به یک فاصله باشد.



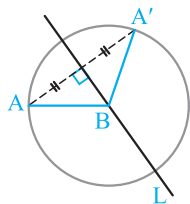
۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴

نقطه تلاقی عمودمنصف وتر BC و نیمساز زاویه B، نقطه‌ای است که از دو سر وتر به یک فاصله ($BD = CD$) و از وتر و امتداد ضلع AB به یک فاصله است ($MD = MH$). هم‌چنین نقطه تلاقی نیمساز زاویه C و عمودمنصف BC نیز دارای این ویژگی است.



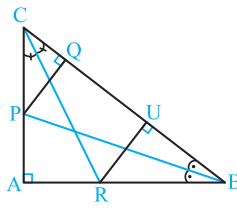
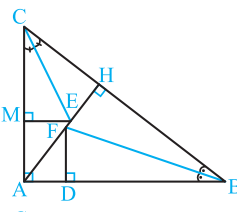
۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴

فرض کنیم L یک خط دلخواه گذرنده از B باشد، قرینه نقطه A نسبت به L نقطه A' است یعنی خط L عمودمنصف پاره‌خط AA' است، پس $AB = BA'$ ، در نتیجه A' روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع AB قرار دارد.

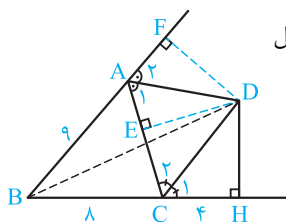


۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

مطابق شکل، نیمسازهای زوایای B و C، ارتفاع AH را در نقاط F و E قطع کرده‌اند، لذا $FD = FH$ و $EH = EM$ ارتفاع دیگر مثلث قائم‌الزاویه است که نیمساز زاویه B آن را در نقطه P قطع می‌کند، پس $PA = PQ$ هم‌چنین AB ارتفاع سوم مثلث قائم‌الزاویه ABC است، نیمساز زاویه C آن را در R قطع می‌کند پس $RA = RU$ بنابراین ۴ نقطه $(R \cdot P \cdot F \cdot E)$ روی ارتفاع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه یافت می‌شود که از وتر و یک ضلع دیگر به یک فاصله‌اند.



۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴



عمودهای DE و DF را مطابق شکل رسم می‌کنیم. داریم:

$$\hat{C}_1 = \hat{C}_2, CD = CD, \hat{H} = \hat{E} = 90^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle DCH \cong \triangle DCE \Rightarrow CE = CH, DE = DH$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2, AD = AD, \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle ADE \cong \triangle ADF \Rightarrow AF = AE, DE = DF$$

$$DF = DE = DH, BD = BD, \hat{F} = \hat{H} = 90^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle BDH \cong \triangle BDF$$

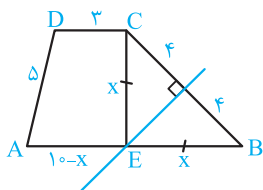
$$\Rightarrow BH = BF \Rightarrow BC + CH = AB + AF$$

$$\Rightarrow 8 + 4 = 9 + AF \Rightarrow AF = 12 - 9 = 3$$

$$AC = AE + CE = AF + CH = 3 + 4 = 7$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴

نقطه E روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد، پس $CE = BE$ داریم:
 $ADCE$ محیط = $AD + CD + CE + AE = AD + CD + BE + AE$



$$(ADCE \text{ محیط}) = AD + CD + AB = 5 + 3 + 10 = 18$$

$$\frac{ABCD \text{ محیط}}{ADCE \text{ محیط}} = \frac{5 + 3 + 8 + 10}{18} = \frac{26}{18} = \frac{13}{9}$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴

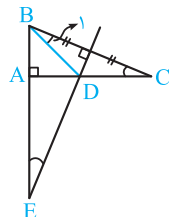
مطابق شکل عمودمنصف وتر BC ضلع AC را در D و امتداد ضلع AB را در E قطع کرده به طوری که $DE = BC$ است.

$$\hat{C} = \hat{E} = 90^\circ - \hat{B}, DE = BC, \hat{EAD} = \hat{BAC} = 90^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle ABC \cong \triangle ADE \Rightarrow AD = AB$$

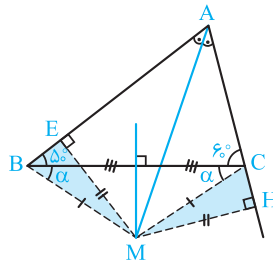
حال B را به D وصل می‌کنیم با توجه به تساوی فوق مثلث ABD قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین می‌شود پس $\hat{BDA} = 45^\circ$. از طرفی D روی عمودمنصف BC قرار دارد پس $BD = CD$ و در نتیجه $\hat{B}_1 = \hat{C}$ و نهایتاً به کمک زاویه خارجی داریم:

$$\hat{BDA} = 45^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C} = 45^\circ \Rightarrow 2\hat{C} = 45^\circ \Rightarrow \hat{C} = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$$



۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴

بنا به فرض $\hat{B} = 5^\circ$ و $\hat{C} = 6^\circ$. نقطه تلاقی نیمساز زاویه A و عمودمنصف BC نیز M می‌باشد، این نقطه هرگز داخل و روی مثلث ABC قرار نمی‌گیرد (زیرا در غیر این صورت از هم‌نهستی مثلث‌های MBE و MCH نتیجه می‌شود، دو زاویه B و C برابرند که تناقض می‌باشد). چون M روی عمودمنصف BC است، پس $MB = MC$ و چون M روی نیمساز زاویه A است، پس $MH = ME$ ، لذا دو مثلث قائم‌الزاویه MHC و MEB به حالت برابری وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند در نتیجه:



$$\hat{MCH} = \hat{MBE} \Rightarrow 180^\circ - \alpha - 6^\circ = \alpha + 5^\circ$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 180^\circ - 6^\circ - 5^\circ = 70^\circ \Rightarrow \alpha = 35^\circ$$

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

زوایای رأس A را مطابق شکل α, x, β فرض می‌کنیم داریم:

$$BA = BM \Rightarrow \hat{BMA} = \hat{BAM} = \alpha + x$$

$$CN = CA \Rightarrow \hat{CNA} = \hat{CAN} = \beta + x$$

$$\hat{A} = 72^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + x = 72^\circ \quad (1)$$

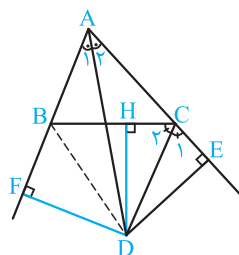
$$\triangle AMN: x + (\alpha + x) + (\beta + x) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2x + (\alpha + \beta + x) = 180^\circ \xrightarrow{(1)} 2x + 72^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ$$

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴

از نقطه D بر ضلع BC و ضلع AB عمود می‌کشیم. داریم:



$$\left. \begin{aligned} \hat{C}_1 &= \hat{C}_2 \\ CD &= CD \\ \hat{E} &= \hat{F} = 90^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle CDE \cong \triangle CDH \Rightarrow \begin{cases} CH = CE \\ DE = DH \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 &= \hat{A}_2 \\ AD &= AD \\ \hat{F} &= \hat{E} = 90^\circ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle ADE \cong \triangle ADF \Rightarrow \begin{cases} AF = AE \\ DE = DF \end{cases}$$

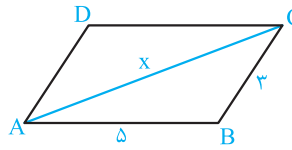
بنابراین $DH = DF$ و ضلع BD در دو مثلث قائم‌الزاویه BDH و BDF مشترک‌اند، پس این دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند، پس $BF = BH$ و نهایتاً داریم:

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ محیط} &= AB + BC + AC = AB + BH + CH + AC \\ &= AB + BF + CE + AC = AF + AE = 2AE \end{aligned}$$

بنا به فرض $AE = 24$ است پس محیط مثلث ABC برابر 48 است.

۲۱ (۴) (۳) (۲) (۱)

مثلث ABC با معلوم بودن سه ضلع آن قابل رسم است. از نقاط A و C دو خط موازی اضلاع AB و BC رسم می‌کنیم، نقطه D محل تلاقی آن‌ها، رأس چهارم متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است. مسئله وقتی جواب دارد که مثلث ABC ساخته شود، یعنی:

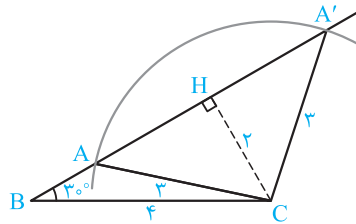


$$\begin{cases} x + 3 > 5 \\ x + 5 > 3 \\ 5 + 3 > x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > -3 \\ 8 > x \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2 < x < 8$$

مقادیر صحیح ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ در نامساوی اخیر صدق می‌کنند.

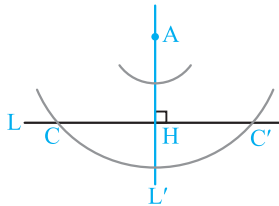
۲۲ (۴) (۳) (۲) (۱)

ابتدا پاره‌خط $BC = 4$ را رسم می‌کنیم، سپس زاویه 30° را روی این پاره‌خط می‌سازیم. به مرکز C و شعاع ۳ کمانی رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی این کمان با ضلع زاویه، رأس سوم مثلث است، چون فاصله C از ضلع زاویه ۲ است، پس کمان فوق، ضلع زاویه را در دو نقطه قطع می‌کند (A و A') و مسئله دو جواب متمایز دارد، مثلث‌های ABC و $A'BC$



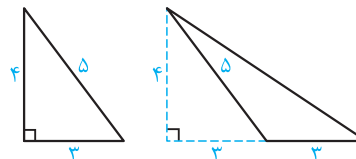
۲۳ (۴) (۳) (۲) (۱)

دو خط عمود بر هم L و L' را رسم می‌کنیم، AH را برابر ۲ جدا کرده به مرکز A و شعاع ۳ کمانی رسم می‌کنیم که خط L را در نقاط C و C' قطع می‌کند. کمانی به مرکز A و شعاع ۱ رسم می‌کنیم که خط L را قطع نمی‌کند، پس چنین مثلی وجود ندارد.



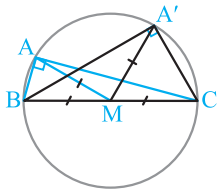
۲۴ (۴) (۳) (۲) (۱)

در هر مثلث، ارتفاع نظیر یک ضلع، همواره از دو ضلع دیگر کوچک‌تر یا مساوی است. بنابراین ارتفاع نظیر ضلع سوم در مثلث به اضلاع ۳ و ۵ نمی‌تواند ۴ باشد. به همین دلیل ارتفاع نظیر ضلع ۵ هم نمی‌تواند ۴ باشد زیرا از ضلع به طول ۳ بزرگ‌تر می‌شود اما ارتفاع نظیر ضلع ۳ می‌تواند به طول ۴ باشد. پس دو مثلث زیر جواب هستند.

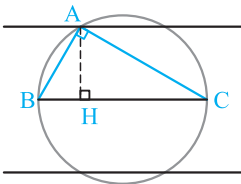


۲۵ (۴) (۳) (۲) (۱)

اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای وتر معلوم باشد ($BC = a$)، مطابق شکل بی‌شمار مثلث قائم‌الزاویه می‌توان رسم کرد که میانه همه آن‌ها $AM = \frac{a}{2}$ است.

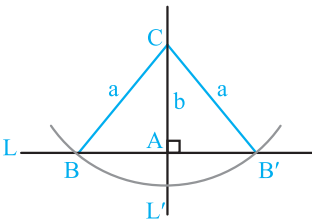


رسم سایر گزینه‌ها:

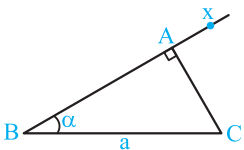


گزینه (۱): دایره‌ای به قطر BC رسم می‌کنیم، سپس دو خط موازی BC و به فاصله ارتفاع وارد بر وتر، از BC رسم می‌کنیم، محل تلاقی این خط‌ها با دایره، جای رأس A است. چهار مثلث قائم‌الزاویه ایجاد شده هم‌نهشت هستند پس مسئله یک جواب دارد.

گزینه (۲): اگر ارتفاع وارد بر ضلع قائم معلوم باشد، یعنی یک ضلع و وتر مثلث قائم‌الزاویه معلوم است. دو خط عمود بر هم را رسم می‌کنیم، AC را برابر b جدا کرده، به مرکز C و شعاع a کمانی رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی آن با خط L جواب است. دو مثلث ایجاد شده هم‌نهشت هستند پس مسئله یک جواب دارد.

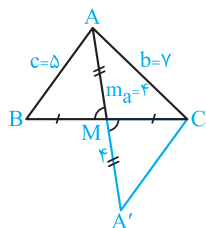


گزینه (۴): پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم، نیم‌خط Bx را چنان رسم می‌کنیم که زاویه B برابر α شود، از رأس C خطی عمود بر Bx رسم می‌کنیم، مثلث ABC مثلث مطلوب است.



۲۶ (۴) (۳) (۲) (۱)

فرض کنیم مثلث ABC جواب باشد. میانه AM را به اندازه خودش امتداد می‌دهیم. دو مثلث AMB و $A'MC$ به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت هستند پس $A'C = AB = 5$. مثلث $AA'C$ با معلوم بودن اضلاع آن $AA' = 2m_a = 8$ ، $A'C = AB = 5$ ، $AC = 7$ پس مثلث $AA'C$ را با معلوم بودن سه ضلع رسم می‌کنیم، میانه CM را رسم می‌کنیم آن را به اندازه خودش از سمت M امتداد می‌دهیم تا نقطه B به دست آید، B را به A وصل می‌کنیم، مثلث ABC جواب است و مسئله همواره یک جواب دارد.



فصل ۱ ترسیم‌های هندسی و استدلال

قسمت اول: ترسیم‌های هندسی

۱. پاره‌خط AB به طول ۱۰ سانتی‌متر مفروض است، نقطه یا نقاطی را تعیین کنید که از A به فاصله ۸ سانتی‌متر و از B به فاصله ۴ سانتی‌متر باشند.
۲. ثابت کنید اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، آن‌گاه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.
۳. ثابت کنید اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد، آن‌گاه آن نقطه، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.
۴. ثابت کنید اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، آن‌گاه از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.
۵. ثابت کنید اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد آن‌گاه روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.
۶. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که اندازه قطرهای آن ۱۲ و ۱۶ سانتی‌متر باشد و اندازه زاویه بین قطرهای آن 45° باشد.
۷. مستطیلی رسم کنید که اندازه قطرهایش ۶ سانتی‌متر باشد و زاویه بین دو قطر آن 45° باشد.
۸. متوازی‌الاضلاعی را رسم کنید که اندازه‌های دو ضلع و یک قطر آن معلوم باشد.
۹. متوازی‌الاضلاعی که اندازه دو قطر و یک ضلع آن معلوم است را رسم کنید.
۱۰. روی خط مفروض d نقطه‌ای به فاصله‌های مساوی از دو نقطه معلوم A و B پیدا کنید.
۱۱. وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
۱۲. شکل مقابل کمانی از دایره است، مرکز دایره را تعیین کنید.



۱۳. ثابت کنید اگر در نیم‌دایره به قطر AB ، C نقطه‌ای از نیم‌دایره به غیر از A و B باشد، آن‌گاه اندازه زاویه ACB برابر 90° است.
۱۴. مثلثی رسم کنید که اندازه دو ضلع آن ۱۲ و ۱۶ و میانه نظیر ضلع سوم آن برابر ۱۰ باشد.
۱۵. مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که یک ضلع زاویه قائمه و زاویه روبه‌رو به آن معلوم باشد.
۱۶. نقطه M داخل \widehat{XOy} مفروض است. خطی چنان رسم کنید که اضلاع زاویه را قطع کند و از نقطه M بگذرد و M وسط پاره‌خط حاصل باشد.
۱۷. مثلثی رسم کنید که طول ضلع $BC = a$ ، طول میانه $AM = m_a$ و زاویه α بین میانه AM و ارتفاع AH در آن معلوم باشند.
۱۸. در مثلث ABC طول نیمساز زاویه B ، اندازه زاویه B و اندازه زاویه C معلوم هستند. مثلث ABC را رسم کنید.
۱۹. زاویه \widehat{XOy} به اندازه 45° مفروض است. نقطه معلوم A روی Oy قرار دارد. نقطه M را روی Ox چنان تعیین کنید که فاصله آن تا Ox برابر MA باشد.
۲۰. در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC و $(A = 90^\circ)$ ، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. نقطه M را روی AH چنان بیابید که مجموع فواصل آن از AB و AC برابر فاصله‌اش از BC باشد.

قسمت دوم: استدلال

۲۱. ثابت کنید مجموع اندازه‌های زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است.
۲۲. ثابت کنید اندازه هر زاویه خارجی مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های زوایای داخلی غیرمجاور آن.
۲۳. ثابت کنید مجموع اندازه‌های زوایای خارجی هر مثلث برابر 360° است.

پاسخ فصل ۱

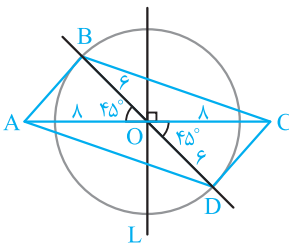
ترسیم‌های هندسی واستدلال

داریم:

$$\left. \begin{array}{l} MA = MB \\ MH = MH \\ AH = BH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \triangle MAH \cong \triangle MBH \Rightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$$

اما دو زاویه \widehat{H}_1 و \widehat{H}_2 مکمل‌اند، پس اندازه هر کدام 90° است و این یعنی MH عمودمنصف AB است.

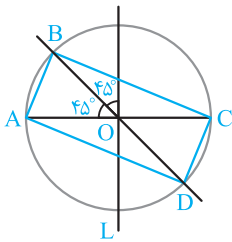
۶



ابتدا پاره‌خط AC به طول ۱۶ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم، سپس عمودمنصف AC (خط L) را رسم کرده و محل تلاقی آن با AC را O می‌نامیم. به مرکز O و شعاع ۶ سانتی‌متر دایره‌ای رسم می‌کنیم.

نیمسازهای دو زاویه قائمه را مطابق شکل رسم می‌کنیم و محل برخورد آن‌ها با دایره را B و D می‌نامیم. چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است زیرا قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند و زاویه بین قطرهایش 45° است.

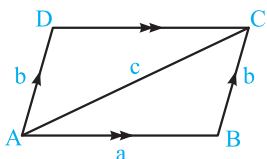
۷



پاره‌خط AC را به طول ۶ سانتی‌متر رسم می‌کنیم، خط L عمودمنصف AC را رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن با AC را O می‌نامیم، به مرکز O و شعاع ۳ سانتی‌متر دایره‌ای رسم می‌کنیم.

نیمسازهای زاویه‌های قائمه بین L و AC را رسم می‌کنیم، نقاط تلاقی آن‌ها با دایره را B و D می‌نامیم، چهارضلعی $ABCD$ مستطیل خواسته شده است.

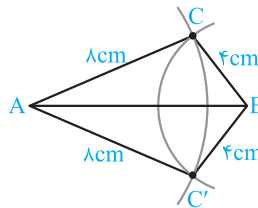
۸



فرض کنیم در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مطابق شکل $AB = a$ ، $AD = b$ و قطر $AC = c$ معلوم باشند، جهت رسم متوازی‌الاضلاع به شرح زیر عمل می‌کنیم.

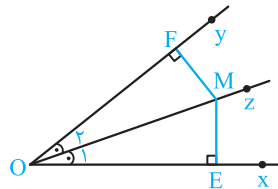
ابتدا پاره‌خط AB به طول a را رسم می‌کنیم. به مرکز B و شعاع b و به مرکز A و شعاع c دو کمان رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن‌ها را C می‌نامیم. از نقطه‌های A و C دو خط به ترتیب به موازات AB و BC رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن‌ها را D می‌نامیم، متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مورد نظر است.

۱



پاره‌خط AB را به طول ۱۰ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. به مرکز B و شعاع ۴ سانتی‌متر و به مرکز A و شعاع ۸ سانتی‌متر دو کمان رسم می‌کنیم. چون $10 > 4 + 8$ ، پس این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه C و C' قطع می‌کنند، پس مسئله دارای دو جواب است.

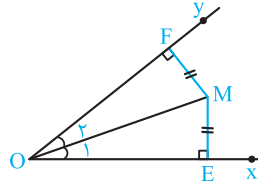
۲



نقطه M روی نیمساز زاویه xOy است و ME و MF فواصل آن از دو ضلع زاویه است، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} OM = OM \\ \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \\ \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle OEM \cong \triangle OFM \Rightarrow ME = MF$$

۳

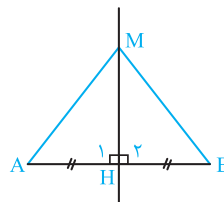


فرض کنیم نقطه M از دو ضلع زاویه xOy به یک فاصله باشد ($ME = MF$)
 M را به O وصل می‌کنیم، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} ME = MF \\ OM = OM \\ \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OME \cong \triangle OMF \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$$

یعنی OM نیمساز زاویه xOy است، پس روی این نیمساز قرار دارد.

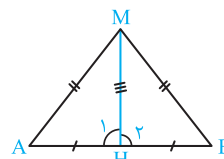
۴



مطابق شکل نقطه M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد، فاصله‌های M از دو سر پاره‌خط، MA و MB است، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} MH = MH \\ \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \triangle MAH \cong \triangle MBH \Rightarrow MA = MB$$

۵

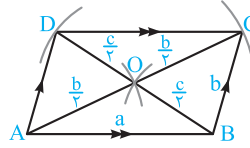


فرض کنیم نقطه M از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد ($MA = MB$)، می‌خواهیم ثابت کنیم M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد، به همین جهت M را به H (وسط پاره‌خط AB) وصل می‌کنیم،

۹

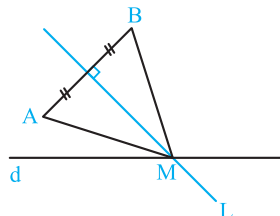
فرض کنید در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، $AB = a$ و $AC = b$ و $BD = c$ معلوم باشد. می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را

$$\text{نصف می‌کنند. پس } OA = \frac{AC}{2} = \frac{b}{2} \text{ و } OB = \frac{BD}{2} = \frac{c}{2}$$



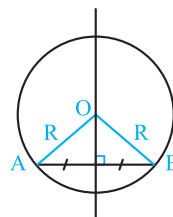
پاره‌خط $AB = a$ را رسم می‌کنیم، به مرکز A و شعاع $\frac{b}{2}$ و به مرکز B و شعاع $\frac{c}{2}$ دو کمان رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن‌ها را O می‌نامیم، به مرکز O و شعاع $\frac{b}{2}$ کمانی رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن با امتداد OA را C و به مرکز O و شعاع $\frac{c}{2}$ کمانی رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با امتداد OB را D می‌نامیم. چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.

۱۰



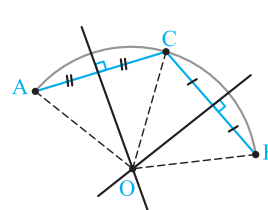
خط L عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن با خط d را M می‌نامیم، نقطه‌ای است که از A و B به یک فاصله است و روی خط L قرار دارد.

۱۱



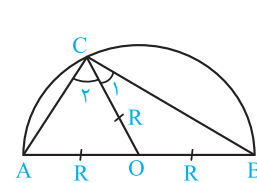
عمودمنصف وتر AB از مرکز دایره می‌گذرد، زیرا مرکز دایره از دو سر وتر AB به یک فاصله است ($OA = OB = R$).

۱۲



نقطه تلاقی آن‌ها را O می‌نامیم. دایره $OA = OC = OB$ ، یعنی نقطه O مرکز دایره‌ای است که کمان داده شده بخشی از آن است.

۱۳

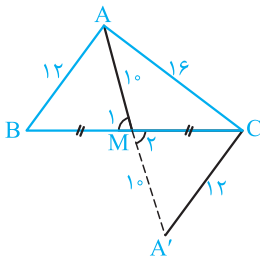


مرکز نیم‌دایره را به نقطه C وصل می‌کنیم. مثلث‌های OAC و OBC متساوی‌الساقین هستند زیرا $OA = OC = OB = R$ ، در نتیجه $\hat{C}_1 = \hat{A}$ و $\hat{C}_2 = \hat{B}$ داریم:

$$\hat{A} + \hat{C}_2 + \hat{C}_1 + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C}_2 + \hat{C}_2 + \hat{C}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ \Rightarrow 2(\hat{C}_1 + \hat{C}_2) = 180^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow \hat{ACB} = 90^\circ$$

۱۴

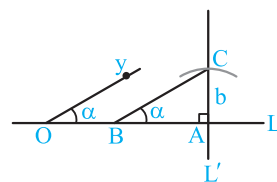
فرض کنیم مثلث ABC مثلثی است که دو ضلع آن $AB = 12$ و $AC = 16$ و میانه نظیر ضلع سوم $AM = 10$ باشد، اگر AM را به اندازه خودش تا نقطه A' امتداد دهیم، دو مثلث AMB و $A'MC$ به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، پس $A'C = AB = 12$.



بنابراین اضلاع مثلث $AA'C$ معلوم هستند ($AA' = 20$ و $A'C = 12$ ، $AC = 16$)

طریقه ترسیم: ابتدا مثلث ACA' را با معلوم بودن سه ضلع آن می‌سازیم، سپس میانه نظیر ضلع $AA' = 20$ را رسم می‌کنیم (CM) و آن را از نقطه M به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه B به دست آید، مثلث ABC جواب است.

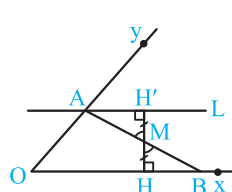
۱۵



در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ضلع $AC = b$ و زاویه $\hat{B} = \alpha$ معلوم هستند. می‌خواهیم مثلث ABC را رسم کنیم. دو خط عمود بر

هم L و L' متقاطع در نقطه A را رسم می‌کنیم. نقطه دلخواه O را روی L در نظر می‌گیریم و نیم‌خط Oy را چنان رسم می‌کنیم که زاویه به اندازه α ایجاد شود. به مرکز A و شعاع b کمانی رسم می‌کنیم تا خط L' را در نقطه C قطع کند و از نقطه C خطی موازی نیم‌خط Oy رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با خط L را B می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویه ABC جواب است.

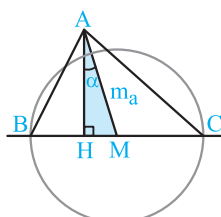
۱۶



مطابق شکل زاویه xOy و نقطه M داخل آن مفروض است. عمود MH را بر نیم‌خط Ox وارد می‌کنیم و آن را از سمت M به اندازه خودش تا نقطه H' امتداد می‌دهیم.

سپس خط L را در نقطه H' عمود بر HH' رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با نیم‌خط Oy را A می‌نامیم، A را به M وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا نیم‌خط Ox را در نقطه B قطع کند. دو مثلث قائم‌الزاویه BMH و AMH' به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت هستند پس $MA = MB$

۱۷



مثلث قائم‌الزاویه AMH را با معلوم بودن وتر $AM = m_a$ و زاویه $\hat{HAM} = \alpha$ رسم می‌کنیم. به مرکز M و شعاع $\frac{a}{2}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن با امتداد MH را B و C می‌نامیم. A را به B و C وصل می‌کنیم، مثلث ABC جواب است.