



سرشناسه: یگانه، محمد

عنوان: ریاضیات انسانی

مشخصات نشر: تهران: انتشارات بین‌المللی گاج: ۱۳۹۶.

مشخصات ظاهری: ۲۲۰ ص جدول.

فروست: این کتاب از مجموعه کتاب‌های خط ویژه گاج می‌باشد.

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۳۵۹-۵۱۱-۸

وضعیت فهرست‌نویسی: فیپای مختصر.

شماره‌ی کتابشناسی ملی: ۴۶۸۹۱۹۳

[ناشر: انتشارات بین‌المللی گاج]

[مدیر مسئول: مهندس ابوالفضل جوکار]

[واحد پژوهش و برنامه‌ریزی کتاب‌های: خط ویژه]

[مدیران تألیف: علیرضا مزرعتی - علیرضا شعبانی نصر]

[عنوان کتاب: ریاضیات انسانی]

[مؤلف: محمد یگانه]

[برنامه‌ریزی و امور اجرایی: حکیم رجبی]

[ویراستاران علمی: محمدحسن دیندارلو - حمید پرداززی مقدم]

[سرپرست واحد فنی و گرافیک: صغری قربانی]

[صفحه‌آرایی: مریم ناییبی]

[حروف‌نگاران: لیلا فرجی امین + الناز دارانی]

[طراح شکل: سمیه اعظمی + ملیکا فدایی] + [طراح جلد: کاوه پژوهان]

[آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع: گاج] + [لیتوگرافی: امین]

[چاپ‌خانه و صحافی: صبح فردا] + [ناظر چاپ: علی مزرعتی]

[نوبت چاپ: اول (۱۳۹۶)] + [شمارگان: ۳۰۰۰ نسخه]

[دفتر مرکزی: تهران، خیابان انقلاب، بین چهار راه ولیعصر (عج) و خیابان فلسطین، شماره ۹۱۹]

[تلفن: ۰۲۱ - ۶۴۲۰]

[سرویس پیام کوتاه (SMS): ۱۰۰۰۴۲۵] + [صندوق پستی: ۳۷۷ - ۱۳۱۴۵]

[پایگاه اینترنتی: www.gaj.ir]

[قیمت: ۱۷۰۰۰ تومان]

دوست عزیز جهت آگاهی از آخرین اخبار و اطلاعات کتاب‌های منتشر شده لطفاً پایه و رشته‌ی تحصیلی خود را به شماره‌ی SMS، ۱۰۰۰۴۲۵ نمایید.

توجه: به موجب ماده‌ی ۵ قانون حمایت از حقوق مؤلفان، مصنفان و هنرمندان مصوب ۱۳۴۸/۱۰/۱۱ کلیه‌ی حقوق این کتاب برای انتشارات بین‌المللی گاج محفوظ می‌باشد و هیچ شخص حقیقی یا حقوقی مق استفاده از آن را ندارد و متخلفین به موجب این قانون تمت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

سخن‌انگیز



خوب است بدانیم، برای تولید هر عنوان کتاب ۲۰۰ صفحه‌ای در قطع رحلی (کاغذ A4) با شمارگان ۲۰۰۰ نسخه، حدود یک تن کاغذ مصرف می‌شود و برای تهیه هر تن کاغذ سفید نیز حدود ۱۷ درخت تنومند قطع می‌شود.

هر گامی هر چند کوچک و هر کاری هر چند به ظاهر خُرد، می‌تواند ارمغان یک اتفاق بی‌نظیر و شگفت‌انگیز باشد.

دغدغه و مسئولیت اجتماعی، ما را بر آن داشت با راه‌اندازی وب‌سایت Chibook.com گامی کوچک در جهت حفظ محیط زیست برداریم. با عضویت و فعالیت در این وب‌سایت، به حفظ منابع طبیعی کمک کنید.

Chibook.com وب‌سایتی است که در آن شما می‌توانید کتاب‌هایی که نیاز ندارید را به مبلغ دلخواه خود بفروشید، یا با سایر کتاب‌های مورد نیاز خود مبادله کنید و یا حتی اهدا نمایید. این اقدام شما از تولید مجدد کتاب توسط ما جلوگیری می‌کند و درخت کم‌تری قطع می‌شود.

ارادتمند شما
ابوالفضل جوکار

مقدمه مؤلف

محمد یگانه

به نام یگانه‌ی بی‌همتا

دوست خوب نادیده‌ام،

سلام

■ کتاب پیش‌روی شما حاصل چندین ماه تلاش من و همکارانم در انتشارات گاج می‌باشد که برای داوطلبان گروه انسانی تدوین شده است.

■ در طبیعت هیچ‌چیز برای خودش زندگی نمی‌کند، رودخانه آب خودش را نمی‌نوشد، درخت میوه‌ی خودش را نمی‌خورد، خورشید برای خودش نمی‌درخشد و عطر یک گل برای خودش نیست. زیستن برای یکدیگر قانون طبیعت است و من هم به سهم خود سر فرود آوردم در مقابل این قانون و شد این کتاب.

■ تلاش کردم تا در این کتاب پانزده سال تجربه‌ی تدریس خود را به نگارش در آورم و امیدوارم توانسته باشم در مسیر موفقیت کنکور شما عزیزان، سهمی داشته باشم.

مقبول باشد ان‌شاء...!

زندگی صحنه‌ی یکتای، هنرمندی ماست، هرکسی نغمه خود خواند و از صحنه رود
صحنه پیوسته به جاست، خرم آن نغمه که مردم بسازند به یاد

آرزوهاتون آرزومه

محمد یگانه

سخنی با دانش آموزان

دوستان عزیز: در کنکور رشته انسانی از درس ریاضی ۲۰ سؤال مطرح می‌شود.

- ۵ یا ۶ سؤال از سال اول، ۳ سؤال از آمار و مدل‌سازی، ۴ یا ۵ سؤال از سال سوم و ۷ سؤال از ریاضی سال چهارم. در این کتاب تمام نکات آموزشی به صورت مختصر و مفید (آنچه بیشتر لازم دارید) آمده است که با خواندن درس‌نامه‌ها و بلافاصله حل تست‌های آن‌ها که همگی از تست‌های کنکورهای سراسری و یا تمرین‌های کتاب درسی است، بر روی این خط ویژه آمادگی لازم را برای کنکور پیدا خواهید کرد.
- درس ریاضی در اکثر زیرگروه‌های رشته علوم انسانی دارای بالاترین ضریب است. برخلاف نظر بعضی از دوستان و مشاوران عزیز اهمیت بسیار زیادی در کسب رتبه‌های خوب در کنکور دارد پس این درس را بسیار جدی بگیرید. ضمناً میانگین این درس در کنکور سراسری حدود ۳ درصد است!!!
- پس با کمی دقت و همت و تلاش و یا حتی با انتخاب چند بخش مهم در کنکور سراسری می‌توانید به یک درصد قابل قبول در کنکور دست پیدا کنید.

■ خلاصه اینکه ما راه ویژه را با خط ویژه به شما نشان دادیم، پیمودن آن با شماست!

تقدیر و تشکر ویژه از جناب آقای مهندس ابوالفضل جوکار مدیریت محترم و فرهیخته‌ی انتشارات بین‌المللی گاج، آقایان علیرضا مزرعتی و علیرضا شعبانی نصر مدیران محترم تألیف این اثر که در طول تألیف این کتاب هیچ همکاری را از من دریغ نکردند، آقای حکیم رجبی که زحمت هماهنگی و سرعت بخشیدن به کار برعهده‌ی ایشان بود و در آخر جا دارد از سرکار خانم صغری قربانی سرپرست فنی که در زیباتر شدن این اثر زحمات فراوانی کشیدند کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

فهرست مطالب

سال اول

- فصل اول: مجموعه‌ها ۹
- فصل دوم: توان و ریشه‌گیری (رادیکال‌ها) ۱۷
- فصل سوم: عبارات جبری، اتحاد - تجزیه و عبارات گویا ۲۷
- فصل چهارم: معادلات خط ۴۱
- فصل پنجم: نسبت‌های مثلثاتی ۴۸
- فصل ششم: نامعادلات ۵۲

سال دوم

- فصل اول: اندازه‌گیری و مدل‌سازی ۵۶
- فصل دوم: جامعه و نمونه ۵۸
- فصل سوم: متغیرهای تصادفی ۶۰
- فصل چهارم: دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی ۶۲
- فصل پنجم: نمودارها و تحلیل داده‌ها ۶۹
- فصل ششم: شاخص‌های مرکزی ۷۷
- فصل هفتم: شاخص‌های پراکندگی ۹۱

سال سوم

- فصل اول: تابع ۱۰۵
- فصل دوم: معادلات درجه دوم ۱۱۱
- فصل سوم: معادلات کسری - رادیکالی ۱۱۶
- فصل چهارم: تابع درجه دوم (سه‌می) ۱۲۱
- فصل پنجم: ترکیبیات ۱۳۰

سال چهارم

- فصل اول: استدلال ۱۳۹
- فصل دوم: دنباله‌های اعداد ۱۴۳
- فصل سوم: لگاریتم و کاربردها ۱۵۷
- فصل چهارم: مدل‌سازی ریاضی ۱۶۵
- فصل پنجم: احتمال ۱۷۶

- ۵ دوره آزمون‌های جامع ۱۹۱
- پاسخ‌های تشریحی آزمون‌های جامع ۲۰۲

عربی انسانی



مجموعه‌ها: هر دسته‌ی مشخص از اشیاء متمایز را یک مجموعه و آن اشیاء را اعضای مجموعه می‌نامیم.

مثال: مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی

$$A = \{2, 3, 5, 7\}, 2 \in A, 3 \in A, 5 \in A, 7 \in A$$

علامت \in به معنی عضویت است:

نکته: مجموعه‌ای را که هیچ عضوی ندارد تهی می‌نامیم و آن را با $\{\}$ یا \emptyset نشان می‌دهیم.

دقت کنید که مجموعه $\{\emptyset\}$ تهی نیست، بلکه ۱ عضو به نام تهی دارد، یعنی $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

زیرمجموعه: B را زیرمجموعه‌ی A می‌نامیم هرگاه هر عضوی که در B هست در A نیز باشد و آن را به صورت $B \subset A$ نشان می‌دهیم.

مثلاً اگر مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 4\}$ باشد آن‌گاه می‌گوییم $B \subset A$ است.

نکته: هر مجموعه n عضوی دارای 2^n زیرمجموعه است، مثلاً یک مجموعه‌ی ۵ عضوی $2^5 = 32$ زیرمجموعه دارد.

دو مجموعه مساوی: اگر هر عضو A، عضو مجموعه‌ی B و هر عضو B، عضو مجموعه‌ی A باشند، می‌گوییم دو مجموعه مساویند، به عبارت

دیگر دو مجموعه مساویند هرگاه هر کدام زیرمجموعه‌ی دیگری باشد:

$$\left. \begin{array}{l} A \subset B \\ \text{و} \\ B \subset A \end{array} \right\} \Leftrightarrow A = B$$

مثال: اگر دو مجموعه‌ی $\{2x - 5\}, \{25 - 3x\}$ و $\{a\}$ با هم برابر باشند، a چه قدر است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

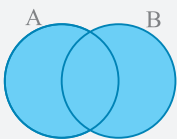
۷ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: چون دو مجموعه برابرند پس اعضایشان هم باید یکی باشد.

$$\begin{cases} 2x - 5 = a \\ 25 - 3x = a \end{cases} \Rightarrow 2x - 5 = 25 - 3x \Rightarrow 2x + 3x = 25 + 5 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = 6 \xrightarrow{x=6} 2(6) - 5 = a \Rightarrow 12 - 5 = a \Rightarrow a = 7$$

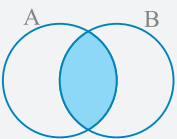
اجتماع و اشتراک دو مجموعه:



اجتماع دو مجموعه‌ی A و B که به صورت $A \cup B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ایست شامل همه‌ی اعضای A و B:

اشتراک دو مجموعه‌ی A و B که به صورت $A \cap B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ایست شامل اعضای که به طور

مشترک در A و B هستند.



مثال: اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 3, 5\}$ ، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{2, 3\}$$

دقت کنید که در اجتماع دو مجموعه، عضوهای تکراری را یک بار می‌نویسیم، زیرا تکرار در مجموعه اثر ندارد.

قوانین اجتماع و اشتراک:

(۱) $A \cup B = B \cup A$ ، $A \cap B = B \cap A$

(۲) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ و $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

(۳) $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$ و $(A \cap B) \subset B \subset (A \cup B)$

از قانون شماره‌ی ۳ نتیجه می‌شود:

$A \cup (A \cap B) = A \cup B$ و $A \cap (A \cup B) = A$

$A \cup (A \cap B) = A$ و $A \cap (A \cup B) = A \cap B$

یعنی اگر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی دیگری بود، آن‌گاه اجتماع دو مجموعه برابر مجموعه‌ی بزرگ‌تر و اشتراک آن‌ها برابر مجموعه‌ی کوچک‌تر

است، در دیدگاه کلی:

$$B \subset A \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B = A \\ \text{و} \\ A \cap B = B \end{cases}$$

(۴) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ، $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

توان و ریشه‌گیری (رادیکال‌ها)

این فصل یکی از مهم‌ترین فصل‌های مورد نظر طراحان کنکور است. تقریباً در پند سال اخیر ۲ سؤال کنکور از این فصل مطرح می‌شود. این فصل، قبلی فرمول‌های زیادی ندارد. فقط باید با تسلط بر قوانین توان و ریشه‌گیری (رادیکال‌ها) و تمرین زیاد برای پاسخ به سؤالات این فصل در کنکور، خود را آماده کنید.
توان: مروری بر قوانین توان:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n \quad \begin{cases} a^m \times a^n = a^{m+n} \Rightarrow \text{مثال } x^2 \times x^5 = x^7 \\ a^m \div a^n = a^{m-n} \Rightarrow \text{مثال } x^8 \div x^2 = x^6 \end{cases}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \Rightarrow \text{مثال } (x^2)^3 = x^6 \quad \begin{cases} a^m \times b^m = (a \times b)^m \Rightarrow \text{مثال } 5^3 \times 4^3 = 20^3 \\ a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \Rightarrow \text{مثال } 8^5 \div 2^5 = \left(\frac{8}{2}\right)^5 = 4^5 \end{cases}$$

نکته: هر عدد یا عبارت با توان منفی برابر است با معکوس همان عدد یا عبارت با توان مثبت و برعکس.

مثال ۱ $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

مثال ۲ $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

نکته: در کسرها، عبارات دارای توان منفی را از صورت به مخرج یا از مخرج به صورت انتقال می‌دهیم تا توان آن‌ها مثبت شوند و معمولاً عبارات دارای توان مثبت را منتقل نمی‌کنیم.

مثال ۱ $\frac{x^{-3}}{y^{-2}} = \frac{y^2}{x^3}$

مثال ۲ $\frac{a^{-2}}{b^5} = \frac{1}{a^2 b^5}$

نکته: اگر عبارت منفی به توان عدد زوج برسد مثبت می‌شود و اگر به توان عدد فرد برسد منفی باقی می‌ماند.

مثال ۱ $(-2)^4 = +16$

مثال ۲ $(-2)^3 = -8$

بد نیست در اینجا یادآوری تجزیه را هم انجام بدهیم. می‌دانیم اعداد اول اعدادی هستند که به جز بر یک و خودشان بر عدد دیگری بخش‌پذیر نباشند.
{۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ...}

حالا هر عدد غیر اول را می‌توان به صورت حاصل ضرب اعداد اول نوشت که این کار تجزیه نام دارد.

مثال ۱ $12 = 2^2 \times 3$

مثال ۲ $240 = 2^4 \times 3 \times 5$

معمولاً در سؤالات، باید عبارات (اعداد) داده شده را تجزیه کنیم.

۱ حاصل عدد $\left(\frac{4}{9}\right)^3 \left(\frac{27}{8}\right)^2 \left(\frac{15}{4}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^4$ کدام است؟

۰/۶۳ (۴)

۰/۵۴ (۳)

۰/۴۵ (۲)

۰/۳۶ (۱)

تمام اعداد را به ساده‌ترین صورت ممکن درمی‌آوریم:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{(2^2)^3}{(3^2)^3} = \frac{2^6}{3^6}, \quad \left(\frac{27}{8}\right)^2 = \frac{(3^3)^2}{(2^3)^2} = \frac{3^6}{2^6}$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^2 = \frac{(3 \times 5)^2}{(2^2)^2} = \frac{3^2 \times 5^2}{2^4}, \quad \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4}$$

$$\text{جواب نهایی} = \frac{2^6}{3^6} \times \frac{3^6}{2^6} \times \frac{3^2 \times 5^2}{2^4} \times \frac{2^4}{5^4} = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25} \times 100 = 36 \Rightarrow \frac{9}{25} = 0/36$$

۲ حاصل عبارت $\frac{۳۲}{۶۲۵} \times \left(\frac{۹}{۸}\right)^۳ \times ۱۵^۴ \times \left(\frac{۱}{۲۷}\right)^۳$ کدام است؟

- ۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۹}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

خارج ۸۵ | پاسخ: ۱

$$\frac{۳۲}{۶۲۵} = \frac{۲^۵}{۵^۴} \quad , \quad \left(\frac{۹}{۸}\right)^۳ = \frac{(۳^۲)^۳}{(۲^۳)^۳} = \frac{۳^۶}{۲^۹}$$

$$۱۵^۴ \xrightarrow{\text{تجزیه}} (۳ \times ۵)^۴ = ۳^۴ \times ۵^۴ \quad , \quad \left(\frac{۱}{۲۷}\right)^۳ = \frac{۱}{(۳^۳)^۳} = \frac{۱}{۳^۹}$$

$$\text{جواب نهایی} = \frac{۲^۵}{۵^۴} \times \frac{۳^۶}{۲^۹} \times \frac{۳^۴ \times ۵^۴}{۱} \times \frac{۱}{۳^۹} = \frac{۲^۵ \times ۳^{۱۰} \times ۵^۴}{۵^۴ \times ۲^۹ \times ۳^۹} = \frac{۳}{۲^۴} = \frac{۳}{۱۶}$$

۳ حاصل $\frac{۹}{۱۶} \times ۳^{-۴} \times ۴^۵ \times (۰/۵)^۴$ کدام است؟

- ۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

خارج ۸۷ | پاسخ: ۲

$$\frac{۹}{۱۶} = \frac{۳^۲}{۲^۴} \quad , \quad ۳^{-۴} = \left(\frac{۱}{۳}\right)^۴ = \frac{۱}{۳^۴} \quad , \quad ۴^۵ = (۲^۲)^۵ = ۲^{۱۰} \quad \text{و} \quad (۰/۵)^۴ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۴ = \frac{۱}{۲^۴}$$

$$\text{جواب نهایی} = \frac{۳^۲}{۲^۴} \times \frac{۱}{۳^۴} \times \frac{۲^{۱۰}}{۱} \times \frac{۱}{۲^۴} = \frac{۳^۲ \times ۲^{۱۰}}{۲^۸ \times ۳^۴} = \frac{۲^۲}{۳^۲} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ = \frac{۴}{۹}$$

۴ حاصل $\left(\frac{۴۹}{۲۵}\right)^۳ (۰/۴)^{-۶} \left(\frac{۲}{۷}\right)^۶$ کدام است؟

- ۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) ۱ ۴) ۲

داخل ۸۷ | پاسخ: ۳

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{۴۹}{۲۵}\right)^۳ &= \frac{(۷^۲)^۳}{(۵^۲)^۳} = \frac{۷^۶}{۵^۶} \\ (۰/۴)^{-۶} &= \left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{-۶} = \left(\frac{۲}{۵}\right)^{-۶} = \left(\frac{۵}{۲}\right)^۶ = \frac{۵^۶}{۲^۶} \\ \left(\frac{۲}{۷}\right)^۶ &= \frac{۲^۶}{۷^۶} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{جواب نهایی} = \frac{۷^۶}{۵^۶} \times \frac{۵^۶}{۲^۶} \times \frac{۲^۶}{۷^۶} = ۱$$

۵ حاصل $\left(\frac{۸}{۲۵}\right)^{-۳} \times (۰/۸)^۴ \times (۰/۲)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) ۵

داخل ۹۰ | پاسخ: ۳

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{۸}{۲۵}\right)^{-۳} &= \left(\frac{۲۵}{۸}\right)^۳ = \frac{(۵^۲)^۳}{(۲^۳)^۳} = \frac{۵^۶}{۲^۹} \\ \left(\frac{۸}{۱۰}\right)^۴ &= \left(\frac{۴}{۵}\right)^۴ = \frac{(۲^۲)^۴}{۵^۴} = \frac{۲^۸}{۵^۴} \\ \frac{۲}{۱۰} &= \frac{۱}{۵} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{جواب نهایی} = \frac{۵^۶}{۲^۹} \times \frac{۲^۸}{۵^۴} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۵^۶}{۲ \times ۵^۵} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

۶ حاصل $\frac{۲۵}{۹۰} \times \left(\frac{۳}{۲}\right)^۵ \times (۰/۷۵)^{-۳}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱۰}{۳}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{۷}{۱۵}$

خارج ۹۵ | پاسخ: ۳

$$\left. \begin{aligned} \frac{۲۵}{۹۰} \xrightarrow{\text{ساده می کنیم بر ۵}} \frac{۵}{۱۸} = \frac{۵}{۲ \times ۳^۲} \quad , \quad \left(\frac{۳}{۲}\right)^۵ = \frac{۳^۵}{۲^۵} \\ (۰/۷۵)^{-۳} = \left(\frac{۳}{۴}\right)^{-۳} = \left(\frac{۴}{۳}\right)^۳ = \frac{(۲^۲)^۳}{۳^۳} = \frac{۲^۶}{۳^۳} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{جواب نهایی} = \frac{۵}{۲ \times ۳^۲} \times \frac{۳^۵}{۲^۵} \times \frac{۲^۶}{۳^۳} = \frac{۵ \times ۳^۵ \times ۲^۶}{۲^۶ \times ۳^۵} = ۵$$

فصل سوم: عبارات جبری، اتحاد - تجزیه و عبارات گویا

۱ عبارات جبری

رابطه بین اعداد و حروف (متغیرها) به وسیله اعمال ریاضی مانند جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، توان، ریشه گیری و ... را عبارت جبری می نامیم.

مثال $2x^3$, $\sqrt{3}ab^2$, $5x - 10, \dots$

توان متغیرها (حروف) را درجه می نامیم.

بر روی عبارات جبری می توان عملیات های ریاضی (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و...) انجام داد.

۱ از مستطیلی به ابعاد $(x+3)$ و $(x+5)$ یک مستطیل دیگر به ابعاد $(x-1)$ و $(x+4)$ را حذف کرده ایم. مساحت باقی مانده کدام است؟

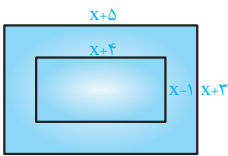
$5x + 19$ (۴)

$4x + 19$ (۳)

$5x + 17$ (۲)

$4x + 17$ (۱)

از مساحت مستطیل بزرگ تر مساحت مستطیل کوچک تر را کم می کنیم. می دانیم مساحت مستطیل حاصل ضرب طول در عرض آن است.



$$S_{\text{بزرگ تر}} = (x+5)(x+3) = x^2 + 3x + 5x + 15 = x^2 + 8x + 15$$

$$S_{\text{کوچک تر}} = (x+4)(x-1) = x^2 - x + 4x - 4 = x^2 + 3x - 4$$

$$\text{مساحت قسمت باقی مانده} = (x^2 + 8x + 15) - (x^2 + 3x - 4) = x^2 + 8x + 15 - x^2 - 3x + 4 = 5x + 19$$

۲ در عبارت $\frac{1}{2}x^2 - 3x$ ضریب x^2 کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{3}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

$$\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right) + x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - 3x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x^4 - \frac{11}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

ضریب x^2 عدد $-\frac{1}{2}$ است.

۲ تقسیم چندجمله ای ها

هر تقسیم چهار جزء دارد. مقسوم، مقسوم علیه، خارج قسمت و باقی مانده. برای تقسیم چندجمله ای بر چندجمله ای باید مراحل زیر را انجام دهیم:

- ۱ عبارات مقسوم و مقسوم علیه را از توان بزرگ به کوچک مرتب کنیم. (از سمت چپ به راست)
- ۲ اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم کرد و حاصل را در خارج قسمت می نویسیم.
- ۳ عبارت نوشته شده در خارج قسمت را در تک تک عبارات مقسوم علیه ضرب کرده و حاصل را زیر عبارت مقسوم نوشته و علامت تک تک عبارات را قرینه می کنیم و با جملات مقسوم جمع جبری می کنیم.
- ۴ آنچه تا اینجا می ماند یک مقسوم جدید است و مراحل ۲ و ۳ را مجدداً تکرار می کنیم تا جایی که توان (درجه) عبارت باقی مانده از عبارت مقسوم علیه کمتر شود.

نکته ۱: در هر تقسیم رابطه زیر برقرار است:

$$\text{باقی مانده} + (\text{خارج قسمت}) \times (\text{مقسوم علیه}) = \text{مقسوم}$$

نکته ۲: اگر در تقسیمی باقی مانده صفر باشد می گوئیم مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر (قابل قسمت) است.

مثال: تقسیم $5x^2 - 4x + 3$ بر $x + 1$ را انجام دهید:

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 4x + 3 \quad | \quad x + 1 \\ \underline{\ominus 5x^2 \oplus 5x} \quad \quad 5x - 9 \\ \quad \quad \quad \underline{\oplus 9x \oplus 9} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 12 \end{array}$$

$$\frac{5x^2}{x} = 5x \Rightarrow 5x(x+1) = 5x^2 + 5x$$

$$\frac{-9x}{x} = -9 \Rightarrow -9(x+1) = -9x - 9$$

توجه ۱: علامت \ominus یا \oplus به معنی قرینه کردن عبارت است.

توجه ۲: عبارات داخل کادر به ترتیب، همان جملات خارج قسمت هستند.

چون درجه باقی مانده (توان متغیر) صفر است، یعنی از درجه مقسوم علیه کمتر است، تقسیم تمام می شود. در نتیجه خارج قسمت $5x - 9$ و باقی مانده ۱۲ است.

۳ در تقسیم عبارت $x^3 - 14x + 15$ بر دو جمله‌ای $x - 3$ ، مقدار چندجمله‌ای خارج قسمت به ازای $x = 3$ کدام است؟

۱۳ (۴) ۱۲ (۳) ۱۱ (۲) ۹ (۱)

$$\begin{array}{r} x^3 - 14x + 15 \\ \underline{-x^3 + 3x - 5} \\ 3x^3 - 14x + 15 \\ \underline{-3x^3 + 9x} \\ -5x + 15 \\ \underline{+5x - 15} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{x^3}{x} = x^2 \Rightarrow x^2(x-3) = x^3 - 3x^2 \\ \frac{3x^3}{x} = 3x^2 \Rightarrow 3x(x-3) = 3x^2 - 9x \\ \frac{-5x}{x} = -5 \Rightarrow -5(x-3) = -5x + 15 \end{array}$$

خارج قسمت، عبارت $x^2 + 3x - 5$ و مقدار آن به ازای $x = 3$ برابر است با:

$$(3)^2 + 3(3) - 5 = 9 + 9 - 5 = 13$$

۴ در تقسیم عبارت $(8x^3 - 2x^2 + x)$ بر دو جمله‌ای $2x - 3$ ، مجموع ضرایب چندجمله‌ای خارج قسمت، کدام است؟

۱۷ (۴) ۱۵ (۳) ۱۳ (۲) ۱۱ (۱)

$$\begin{array}{r} 8x^3 - 2x^2 + x \\ \underline{-4x^3 + 6x - 8} \\ 10x^3 + x \\ \underline{-10x^3 + 15x - 30} \\ 16x - 24 \\ \underline{-16x + 24} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{8x^3}{2x} = 4x^2 \Rightarrow 4x^2(2x-3) = 8x^3 - 12x^2 \\ \frac{10x^3}{2x} = 5x^2 \Rightarrow 5x(2x-3) = 10x^2 - 15x \\ \frac{16x}{2x} = 8 \Rightarrow 8(2x-3) = 16x - 24 \end{array}$$

خارج قسمت $4x^2 + 5x + 8$ و مجموع ضرایب آن برابر است با: $4 + 5 + 8 = 17$.

۵ در تقسیم عبارت $2x^3 + 3x^2 + x$ بر دو جمله‌ای $x + 2$ ، مقدار چندجمله‌ای خارج قسمت به ازای $x = -2$ کدام است؟

۱۴ (۴) ۱۳ (۳) ۱۱ (۲) ۱۰ (۱)

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 + x \\ \underline{-2x^3 + 4x^2 - 2x} \\ -x^2 + x \\ \underline{+x^2 + 2x} \\ 3x \\ \underline{-3x - 6} \\ -6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{2x^3}{x} = 2x^2 \Rightarrow 2x^2(x+2) = 2x^3 + 4x^2 \\ \frac{-x^2}{x} = -x \Rightarrow -x(x+2) = -x^2 - 2x \\ \frac{3x}{x} = 3 \Rightarrow 3(x+2) = 3x + 6 \end{array}$$

خارج قسمت، عبارت $2x^2 - x + 3$ است و مقدار آن به ازای $x = -2$ برابر است با:

$$2(-2)^2 - (-2) + 3 = 2(4) + 2 + 3 = 8 + 5 = 13$$

۶ در تقسیم عبارت $x(2x^2 - 5x + 1)$ بر دو جمله‌ای $2x + 1$ ، مجموع ضرایب عددی در خارج قسمت کدام است؟

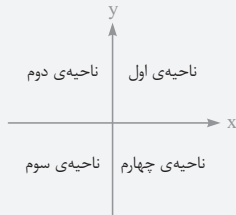
۲ (۴) ۱ (۳) صفر (۲) -۱ (۱)

$$x(2x^2 - 5x + 1) = 2x^3 - 5x^2 + x$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 + x \\ \underline{-2x^3 + 2x^2 + x} \\ -6x^2 + x \\ \underline{+6x^2 + 3x} \\ 4x \\ \underline{-4x - 2} \\ -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{2x^3}{2x} = x^2 \Rightarrow x^2(2x+1) = 2x^3 + x^2 \\ \frac{-6x^2}{2x} = -3x \Rightarrow -3x(2x+1) = -6x^2 - 3x \\ \frac{4x}{2x} = 2 \Rightarrow 2(2x+1) = 4x + 2 \end{array}$$

خارج قسمت $x^2 - 3x + 2$ است و مجموع ضرایب آن برابر است با: $1 - 3 + 2 = 0$.

دستگاه محورهای مختصات شامل دو محور افقی (محور X ها یا طولها) و عمودی (محور Y ها یا عرضها) است که صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می کند.



هر نقطه در هر ناحیه‌ای دارای یک طول و یک عرض است (X طول و Y عرض نقطه هستند) که آن را به صورت (x, y) یا $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نشان می دهیم.

در ناحیه اول $\begin{bmatrix} x > 0 \\ y > 0 \end{bmatrix}$ ، در ناحیه دوم $\begin{bmatrix} x < 0 \\ y > 0 \end{bmatrix}$ ، در ناحیه سوم $\begin{bmatrix} x < 0 \\ y < 0 \end{bmatrix}$ و در ناحیه چهارم $\begin{bmatrix} x > 0 \\ y < 0 \end{bmatrix}$ است.

فاصله دو نقطه از هم (طول پاره خط):

فاصله دو نقطه A و B از رابطه $|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ و فاصله نقطه A تا مبدأ مختصات $O \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ از رابطه $|AO| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$ به دست می آید.

مثال: فاصله دو نقطه $A \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $B \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$ کدام است؟

پاسخ: $|AB| = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-3 - (-5))^2} = \sqrt{(4)^2 + (+2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$

شیب خط (ضریب زاویه خط): شیب یا ضریب زاویه خطی که از دو نقطه A و B می گذرد برابر است با: $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$. در این فرمول به تفاضل عرضها (خیز) و به تفاضل طولها (رفت) می گویند؛ یعنی شیب خط، نسبت خیز به رفت است.

مثال: شیب خطی که از دو نقطه $(2, 3)$ و $(4, -1)$ می گذرد، کدام است؟

پاسخ:

$$m = \frac{3 - (-1)}{2 - 4} = \frac{3 + 1}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

نکته: شرط آن که سه نقطه A و B و C در یک راستا (بر یک استقامت یا بر روی یک خط راست) واقع باشند آن است که:

$$m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$$

مثال: اگر سه نقطه $A(2, 5)$ ، $B(4, -1)$ و $C(a, 2)$ روی یک خط واقع باشند، a کدام است؟

پاسخ:

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{5 - (-1)}{2 - 4} = \frac{6}{-2} = -3 \\ m_{AC} &= \frac{5 - 2}{2 - a} = \frac{3}{2 - a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2 - a} = -3 \Rightarrow -6 + 3a = 3 \Rightarrow 3a = 3 + 6 \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{3} = 3$$

معادله خط: فرم کلی به صورت $y = mx + n$ می باشد. در این رابطه، m معرف شیب خط و n عرض از مبدأ (محل تلاقی خط با محور Y ها) خط است. برای نوشتن معادله خط کافی است شیب و مختصات یک نقطه از آن خط را داشته باشیم.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(4, 1)$ با شیب $m = \frac{1}{2}$ بگذرد.

پاسخ:

$$y = mx + n \xrightarrow[m = \frac{1}{2}]{x = 4, y = 1} 1 = \frac{1}{2}(4) + n \Rightarrow 1 = 2 + n \Rightarrow 1 - 2 = n \Rightarrow n = -1$$

$$y = mx + n \xrightarrow[n = -1]{m = \frac{1}{2}} y = \frac{1}{2}x - 1$$

نکته: برای آنکه تعیین کنیم یک خط محور X ها را با کدام طول قطع می کند، کافی است به جای y صفر قرار دهیم و برای آنکه تعیین کنیم یک خط محور y ها را با کدام عرض قطع می کند کافی است به جای x صفر قرار دهیم.

مثال: خط به معادله $y = 2x - 8$:

الف) محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟

پاسخ:

$$y = 0 \Rightarrow 2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{2} = 4 \text{ (همان طول از مبدأ است).}$$

ب) محور y ها را با کدام عرض قطع می کند؟

پاسخ:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2(0) - 8 = -8 \text{ (همان عرض از مبدأ است).}$$

نکته: شرط آنکه نقطه‌ای روی خطی واقع باشد (یا خط از نقطه‌ای عبور کند) آن است که مختصات آن نقطه در معادله‌ی خط صدق کند. یعنی وقتی مختصات نقطه را در معادله‌ی خط قرار دهیم، به یک تساوی صحیح برسیم.

مثال: کدام نقطه‌ی زیر روی خط $2x - y = 3$ قرار دارد؟

الف) $(4, -5)$ ب) $(-2, -7)$

پاسخ: الف) به جای x عدد ۴ و به جای y عدد -۵ را در معادله‌ی خط قرار می دهیم:

$$2(4) - (-5) = 3 \Rightarrow 8 + 5 = 3 \Rightarrow 13 = 3$$

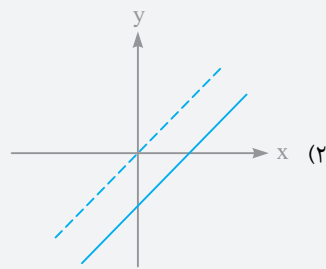
این تساوی نادرست است، یعنی این نقطه روی خط قرار ندارد.

ب) به جای x عدد -۲ و به جای y عدد -۷ را جایگزین می کنیم:

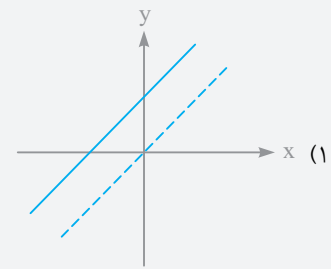
$$2(-2) - (-7) = 3 \Rightarrow -4 + 7 = 3 \Rightarrow 3 = 3$$

این تساوی درست است، یعنی این نقطه روی خط قرار دارد.

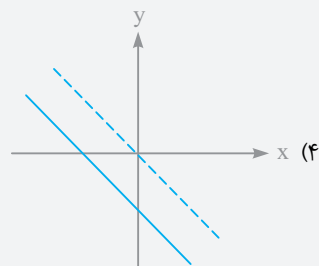
نکته: برای خط $y = mx + n$ چهار حالت زیر وجود دارد: (اگر عرض از مبدأ صفر باشد، از مبدأ عبور می کند که با نقطه‌چین نمایش داده شده است)



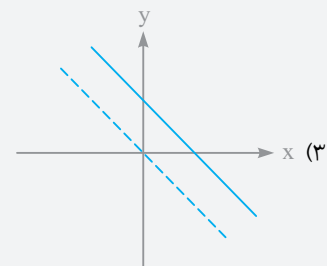
شیب (مثبت)
عرض از مبدأ (منفی) یا صفر



شیب (مثبت)
عرض از مبدأ (مثبت) یا صفر

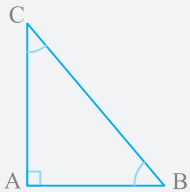


شیب (منفی)
عرض از مبدأ (منفی) یا صفر



شیب (منفی)
عرض از مبدأ (مثبت) یا صفر

نکته: معادله‌ی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم خط $y = x$ و معادله‌ی نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم خط $y = -x$ است.



نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه:

مثلث مقابل در رأس A قائمه است. ($\hat{A} = 90^\circ$) ضلع BC را وتر و AB و AC را اضلاع قائمه می‌نامیم. دو زاویه B و C حاده‌اند. زیرا هر کدام از 90° درجه کوچک‌تر هستند. برای هر کدام از این زوایا نسبت‌های مثلثاتی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\sin \hat{B} = \frac{\text{اندازه ضلع روبه‌رو}}{\text{اندازه وتر}} = \frac{AC}{BC} \quad (\text{سینوس}) \quad \cos \hat{B} = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور}}{\text{اندازه وتر}} = \frac{AB}{BC} \quad (\text{کسینوس})$$

$$\tan \hat{B} = \frac{\text{اندازه ضلع روبه‌رو}}{\text{اندازه ضلع مجاور}} = \frac{AC}{AB} \quad (\text{تانژانت})$$

$$(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2$$

$$\tan \hat{B} = \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}}$$

طبق رابطه‌ی فیثاغورس:

نکته: از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت:

مقدار نسبت‌های مثلثاتی موردنیاز:

زاویه	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$

سایر نسبت‌های مثلثاتی:

زاویه	0°	90°
sin	۰	۱
cos	۱	۰
tan	۰	تعریف نشده

نکته: با افزایش زاویه‌ی حاده، sin افزایش، cos کاهش و tan نیز افزایش می‌یابد. به عنوان مثال در مقایسه‌ی نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه‌ی 40° و 50° داریم:

$$\sin 50^\circ > \sin 40^\circ, \quad \cos 50^\circ < \cos 40^\circ, \quad \tan 50^\circ > \tan 40^\circ$$

$$0 < \sin \theta < 1, \quad 0 < \cos \theta < 1$$

نکته: اگر θ (تتا) زاویه‌ی حاده باشد آن‌گاه همواره:

حاصل کدام عبارت زیر با $\sin 30^\circ$ برابر نیست؟

(۴) $\tan^2 45^\circ - \sin 30^\circ$

(۳) $\sin^2 30^\circ - \cos^2 30^\circ$

(۲) $2 \cos^2 30^\circ - 1$

(۱) $1 - 2 \sin^2 30^\circ$

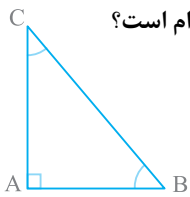
می‌دانیم $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ است حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): $1 - 2 \sin^2 30^\circ = 1 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - 2 \left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

گزینه‌ی (۲): $2 \cos^2 30^\circ - 1 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = 2 \left(\frac{3}{4}\right) - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

گزینه‌ی (۳): $\sin^2 30^\circ - \cos^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

گزینه‌ی (۴): $\tan^2 45^\circ - \sin 30^\circ = (1)^2 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$



در مثلث قائم‌الزاویه ABC که در رأس A قائمه است، اگر $\tan \hat{B} = 2\sqrt{2}$ و $AB = 8$ باشد اندازه‌ی وتر BC کدام است؟

- ۱) ۲۷ ۲) ۲۴ ۳) ۲۱ ۴) ۱۸

$$\tan B = \frac{\text{اندازه‌ی ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی B}}{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور به زاویه‌ی B}} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow 2\sqrt{2} = \frac{AC}{8} \Rightarrow AC = 16\sqrt{2}$$

طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 \Rightarrow (BC)^2 = (16\sqrt{2})^2 + (8)^2 = (256 \times 2) + 64 = 512 + 64 = 576 \Rightarrow (BC)^2 = 576 \Rightarrow BC = \sqrt{576} = 24$$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با یکدیگر در ارتباط هستند، تعدادی از این روابط که دانستن آن‌ها برای شما ضروری می‌باشد در ادامه آمده است:

$$1) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \\ \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \end{cases}$$

$$2) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$3) 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta) \quad , \quad \cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$$

$$\sin 37^\circ = \cos(90^\circ - 37^\circ) = \cos 53^\circ = 0.6$$

اگر θ زاویه‌ی حاده باشد (یعنی کمتر از 90° درجه باشد) آن‌گاه همواره داریم:

به عنوان مثال اگر $\sin 37^\circ = 0.6$ باشد آن‌گاه خواهیم داشت:

حاصل عبارت $\cos \theta (\cos \theta + \sin \theta \cdot \tan \theta)$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲
۳) $\sin^2 \theta$ ۴) $\cos^2 \theta$

$$\cos \theta (\cos \theta + \sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta}) = \cos \theta (\cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

ساده شده‌ی عبارت $\sin^2 \theta \cdot \tan^2 \theta - \tan^2 \theta + \sin^2 \theta$ کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) صفر ۳) $\sin^2 \theta$ ۴) ۱

$$\sin^2 \theta \cdot \tan^2 \theta - \tan^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow (\sin^2 \theta \times \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}) - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \sin^2 \theta = \frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \sin^2 \theta$$

$$= \frac{\sin^4 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \sin^2 \theta \quad \text{فاکتور از } \sin^2 \theta \text{ در صورت کسر اولی}$$

عبارت $\sin^2 \theta - 1$ برابر قرینه‌ی $1 - \sin^2 \theta$ است، یعنی برابر $-\cos^2 \theta$

$$\frac{\sin^2 \theta (-\cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} + \sin^2 \theta = -\sin^2 \theta + \sin^2 \theta = 0$$

پس:

$(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \tan \theta \cdot \cos^2 \theta$ برابر کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) $\tan \theta$ ۳) $1 + \tan \theta$ ۴) صفر

$$\text{عبارت اول} = (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_1 + 2 \sin \theta \cdot \cos \theta = 1 + 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\text{عبارت دوم} = -2 \tan \theta \cdot \cos^2 \theta = -2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \cos^2 \theta = -2 \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\text{جواب نهایی} = 1 + 2 \sin \theta \cdot \cos \theta - 2 \sin \theta \cdot \cos \theta = 1$$

نامعادلات ۱

نامعادلات: این بخش به طور مستقیم، خیلی مد نظر طراحان کنکور نیست. اما خوب شما که شانس ندارید! (اینو فودتون میگیرا) یهو دیدید از این بخش امسال برای شما هم سؤال اوامد.

برخی از خواص نامساوی ها:

۱ اگر طرفین یک نامساوی را بر عددی منفی تقسیم یا در عدد منفی ضرب کنیم جهت نامساوی عوض می شود.

$$a > b \xrightarrow{c < 0} ac < bc \quad \text{یا} \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

۲ اگر طرفین یک نامساوی که هم علامت هستند را معکوس کنیم، جهت نامساوی عوض می شود.

$$a > b \xrightarrow{a > b \text{ یا } a < b} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad \text{مثال} \quad 3 > 2 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad -2 > -3 \Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$$

۳ اگر طرفین یک نامساوی که هر دو منفی باشند را به توان ۲ برسانیم جهت نامساوی عوض می شود.

$$a > b \xrightarrow{a < 0 \text{ یا } b < 0} a^2 < b^2 \quad \text{مثال} \quad -5 > -6 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25 < 36$$

نکته: اعداد بین صفر و یک ($0 < a < 1$) دارای خواص برعکس اعداد بزرگتر از ($a > 1$) هستند. به طوری که:

(۱) اگر آن ها را به توان بزرگتر برسانیم کوچک تر می شوند.

(۲) اگر از آن ها ریشه (رادیکال) بگیریم بزرگ تر می شوند.

$$0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a \quad \text{مثال} \quad a = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \sqrt{a} > a \quad \text{مثال} \quad a = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4}} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

۱ اگر $a > b > 0$ ، آن گاه کدام نامساوی صحیح است؟

$$\begin{array}{ll} -\frac{1}{a} > -\frac{1}{b} \quad (۴) & \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \quad (۳) \\ -a > -b \quad (۱) & b - a > 0 \quad (۲) \end{array}$$

در گزینه (۱) طرفین نامساوی در عدد (-۱) ضرب شده اند، پس جهت باید عوض شود.

$$a > b \xrightarrow{\times (-1)} -a < -b$$

در گزینه (۲) چون a و b هر دو مثبت هستند و b کوچک تر از a هست بنابراین $b - a$ عددی منفی خواهد بود.

$$a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

در گزینه (۳) طرفین نامساوی معکوس شده اند و جهت باید عوض شود:

در گزینه (۴) دو اتفاق افتاده است. هم طرفین معکوس شده است و هم طرفین نامساوی در عددی منفی ضرب شده اند یعنی دو بار جهت عوض می شود:

$$a > b \xrightarrow{\text{طرفین معکوس}} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \xrightarrow{\times (-1)} -\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}$$


حل نامعادلات ۲

حل نامعادلات: هدف از حل نامعادله به دست آوردن مجموعه جواب آن نامعادله است. یعنی مقادیری از متغیر که به ازای آن (ها) نامساوی برقرار باشد. برای حل نامعادله درجه اول مشابه معادله درجه اول عمل می کنیم: یعنی جملات را معلوم، مجهول می کنیم (تمام جملات مجهول را در یک طرف و اعداد (جملات ثابت) را در طرف دیگر قرار می دهیم. پس از عملیات ساده کردن، طرفین نامعادله را بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم. (حواستون باشه اگر ضریب مجهول منفی باشد، جهت نامعادله عوض می شود):

مثال ۱ $4x - 3 > 6x + 5$

$$4x - 6x > 5 + 3 \Rightarrow -2x > 8 \xrightarrow{\div (-2)} x < \frac{8}{-2} \Rightarrow x < -4$$

جهت عوض می شود.

اگر بخواهیم مجموعه جواب را روی محور نشان دهیم به صورت  است.

اگر بیشتر از یک نامعادله به ما داده شود و بخواهیم مجموعه جواب نهایی آن‌ها را به دست آوریم باید ابتدا هر نامعادله را جداگانه حل کرده و در نهایت بین جواب‌ها اشتراک بگیریم:

مثال: مجموعه جواب مشترک نامعادلات $2x - 2 \geq 8$ ، $x + 1 < 2x - 2$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$2x - 2 \geq 8 \Rightarrow 2x \geq 8 + 2 \Rightarrow 2x \geq 10 \xrightarrow{\div 2} x \geq 5$$

$$-2x + 2 < x + 1 \Rightarrow -2x - x < 1 - 2 \Rightarrow -3x < -1 \xrightarrow{\div (-3)} x > \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ \frac{1}{3} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \end{array}$$

اعداد بزرگ‌تر از ۵ در محدوده‌ی اشتراکی بین دو نامعادله قرار می‌گیرند و مجموعه جواب نهایی $x \geq 5$ است.

۲ | **جواب نامعادله $\frac{2x+3}{2} - \frac{3}{4} > \frac{4x+1}{3}$ ، کدام است؟**

$$x < \frac{5}{4} \quad (۴)$$

$$x > \frac{7}{6} \quad (۳)$$

$$x > \frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$x < \frac{2}{3} \quad (۱)$$

طرفین نامساوی را در مخرج مشترک بین مخرج‌ها (عدد ۱۲) ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها حذف شوند:

$$12\left(\frac{2x+3}{2} - \frac{3}{4} > \frac{4x+1}{3}\right) \Rightarrow 6(2x+3) - 3(3) > 4(4x+1)$$

$$\Rightarrow 12x + 18 - 9 > 16x + 4 \Rightarrow 12x - 16x > 4 - 18 + 9$$

$$\Rightarrow -4x > -5 \xrightarrow{\div (-4)} x < \frac{-5}{-4} \Rightarrow x < \frac{5}{4}$$

۳ | **جواب مشترک دو نامعادله‌ی $2x - 2 > \frac{4x-1}{3}$ و $\frac{3x+5}{2} - \frac{2x-4}{3} > \frac{1}{2}$ به کدام صورت است؟**

$$-4 < x < 2 \quad (۴)$$

$$-2 < x < 1 \quad (۳)$$

$$-4 < x < 1 \quad (۲)$$

$$-2 < x < 2 \quad (۱)$$

هر نامعادله را جداگانه حل می‌کنیم:

$$\frac{4x-1}{3} > 2x-2 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۳}} 4x-1 > 3(2x-2) \Rightarrow 4x-1 > 6x-6$$

$$\Rightarrow 4x-1 > 6x-6 \Rightarrow 4x-6x > -6+1 \Rightarrow -2x > -5 \xrightarrow{\div (-2)} x < \frac{-5}{-2} \Rightarrow x < \frac{5}{2}$$

$$\frac{3x+5}{2} - \frac{2x-4}{3} > \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۶}} 6\left(\frac{3x+5}{2} - \frac{2x-4}{3} > \frac{1}{2}\right)$$

$$3(3x+5) - 2(2x-4) > 3(1) \Rightarrow 9x+15-4x+8 > 3$$

$$5x > 3-15-8 \Rightarrow 5x > -20 \xrightarrow{\div (5)} x > \frac{-20}{5} \Rightarrow x > -4$$

بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x > -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ -4 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

محدوده‌ی اشتراک بین ۱ و -۴ است یعنی $-4 < x < 1$.

۴ | **جواب مشترک دو نامعادله‌ی $\frac{3}{2}x + 2 > 2x - 3$ و $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} > 1$ به کدام صورت است؟**

$$4 < x < 10 \quad (۴)$$

$$4 < x < 7 \quad (۳)$$

$$2 < x < 10 \quad (۲)$$

$$2 < x < 5 \quad (۱)$$

$$\frac{3}{2}x + 2 > 2x - 3 \xrightarrow{\times (2)} 2\left(\frac{3}{2}x + 2 > 2x - 3\right)$$

$$3x + 4 > 4x - 6 \Rightarrow 3x - 4x > -6 - 4 \Rightarrow -x > -10 \xrightarrow{\div (-1)} x < 10$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} > 1 \xrightarrow{\times (6)} 6\left(\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} > 1\right)$$

$$3(x) - 2(x-1) > 6(1) \Rightarrow 3x - 2x + 2 > 6 \Rightarrow x > 6 - 2 \Rightarrow x > 4$$

$$\begin{cases} x < 10 \\ x > 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ 0 \quad 4 \quad \dots \quad 10 \end{array}$$

محدوده اشتراک بین ۴ و ۱۰ است یعنی $4 < x < 10$.



ریاضیات انسانی

سال دوم

- ◀ فصل اول: اندازه‌گیری و مدل‌سازی
- ◀ فصل دوم: جامعه و نمونه
- ◀ فصل سوم: متغیرهای تصادفی
- ◀ فصل چهارم: دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی
- ◀ فصل پنجم: نمودارها و تحلیل داده‌ها
- ◀ فصل ششم: شاخص‌های مرکزی
- ◀ فصل هفتم: شاخص‌های پراکندگی

خط ویژه: دوستان عزیز، بخش آمار، جزو بخش‌هایی است که در کنکورهای رشته ریاضی و تجربی از آن سؤال مطرح می‌شود. به همین دلیل در این بخش از سوالات آمار این آزمون‌ها هم استفاده شده است.

اندازه‌گیری و مدل‌سازی

۱

- ۱ **مدل‌سازی:** بیان مسأله به زبان ریاضی یعنی به زبان اعداد و ارقام را مدل‌سازی ریاضی گویند. هرچه زبان ریاضی به کار گرفته شده ساده‌تر، ابتدایی‌تر و نتیجه‌ی کار به پدیده‌ی موردنظر نزدیک‌تر باشد، مدل‌سازی با ارزش‌تر است.
- ۲ **اندازه‌گیری:** تخصیص معیار عددی به یک صفت را اندازه‌گیری می‌گویند که اولین قدم برای رسیدن به اطلاعات عددی مورد نیاز در مدل‌سازی ریاضی است.
- ۳ **خطای اندازه‌گیری (E):** در اندازه‌گیری همواره خطایی وجود دارد که همان تفاضل مقدار واقعی و مقدار اندازه‌گیری شده می‌باشد و مقدارش همیشه کم‌تر از واحد اندازه‌گیری است.
- تذکر:** در جاهایی که درجه‌ی خطا حداقل ۲ است، می‌توان از آن به دلیل کوچکی زیاد، صرف‌نظر کرد. مثلاً می‌توان از خطاهایی نظیر E^2 ، E^3 و E_1E_2 و ... صرف‌نظر کرد.

۱ مدل‌سازی ریاضی چیست؟

- (۱) بیان مسأله به زبان ریاضی
(۲) تقسیم‌بندی متغیرها
(۳) روش محاسبه
(۴) نمونه‌ای از سرشماری
- با توجه به مطالب ارائه شده در درسنامه، گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۲ کدام نوع مدل‌سازی ریاضی با ارزش‌تر است؟

- (۱) خطای اندازه‌گیری برابر صفر
(۲) نتیجه‌ی حاصل همان پدیده‌ی موردنظر
(۳) فقط مفاهیم ریاضی ساده‌تر
(۴) مفاهیم ریاضی ساده‌تر - نتیجه به پدیده‌ی موردنظر نزدیک‌تر
- هر چه مفاهیم ریاضی به کار برده شده ساده‌تر و هم‌چنین نتیجه به پدیده‌ی مورد نظر نزدیک‌تر باشد، مدل‌سازی ریاضی با ارزش‌تر است.

۳ در مدل‌سازی ریاضی، خطای اندازه‌گیری چگونه است؟

- (۱) کم‌تر از واحد اندازه‌گیری
(۲) نزدیک به واحد اندازه‌گیری
(۳) کم‌تر از یک درصد مقدار اندازه‌گیری
(۴) صفر
- خطای اندازه‌گیری همواره از واحد اندازه‌گیری کم‌تر است. در ضمن، هیچ‌گاه خطای اندازه‌گیری صفر نمی‌شود.

۴ طول ضلع مربعی را برحسب سانتی‌متر اندازه‌گیری کرده‌ایم، مدل آن به صورت $L = 6 + E$ است. اگر این طول را برحسب میلی‌متر بیان کنیم، مدل آن چگونه است؟

- (۱) $L = 60 + \frac{1}{10}E$
(۲) $L = 60 + 10E$
(۳) $L = 60 + E$
(۴) اندازه‌گیری مجدد انجام شود.

خطای E مربوط به زمانی است که اندازه‌گیری برحسب سانتی‌متر انجام شده بود. حالا که می‌خواهیم طول ضلع مربع را برحسب میلی‌متر بیان کنیم، حتماً خطای اندازه‌گیری، E' خواهد بود و هیچ ارتباطی بین E' و E وجود ندارد، یعنی نمی‌توان E' را برحسب E بیان کرد، پس باید اندازه‌گیری مجدد و این بار برحسب میلی‌متر انجام شود تا خطای اندازه‌گیری نیز برحسب میلی‌متر باشد.

فصل پنجم: نمودارها و تحلیل داده‌ها

خط ویژه از قریم گفته‌اند که یک تصویر فوب ارزش هزاران کلمه را دارد. هدف فصل پنجم با عنوان نمودارها و تحلیل داده‌ها هم همین است. در بین نمودارهایی که در این فصل آشنا می‌شوید نمودار دایره‌ای بیش‌ترین تکرار را در کنگور داشته است ...

نمودار دایره‌ای ۱

برای رسم نمودار دایره‌ای، سطح دایره را به چند قسمت تقسیم می‌کنیم که سطح هر قسمت متناسب با فراوانی متغیر موردنظر است. برای تعیین سطح متناسب، کافی است زاویه‌ی هر قطاع را متناسب با فراوانی آن متغیر در نظر بگیریم، یعنی کافی است به کمک تناسب زیر عمل کنیم:

$$\frac{f_i}{n} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

تذکر ۱: نمودار دایره‌ای برحسب فراوانی نسبی یعنی $\frac{f_i}{n}$ رسم می‌شود.

تذکر ۲: این نسبت ممکن است به صورت درصد سؤال شود: $\frac{f_i}{n} = \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{100}$

تذکر ۳: مجموع زوایای مرکزی در نمودار دایره‌ای 360° است.

تذکر ۴: نمودار دایره‌ای برای نمایش متغیرهای کیفی بسیار مناسب است.

۱ نمودار دایره‌ای برای کدام متغیر مناسب است و اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی هر قسمت متناسب با کدام است؟

(۱) کیفی - فراوانی نسبی

(۲) کیفی - فراوانی تجمعی

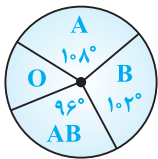
(۳) گسسته - فراوانی مطلق

(۴) گسسته - فراوانی تجمعی

نمودار دایره‌ای برای متغیرهای کیفی مناسب است و اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی هر قسمت متناسب با فراوانی نسبی یعنی $\frac{f_i}{n}$ می‌باشد.

۲ نمودار دایره‌ای مربوط به اهدای خون افراد مراجعه‌کننده به یک ایستگاه انتقال خون، به شکل زیر است. چند درصد این افراد در گروه

خونی O قرار دارند؟



(۱) ۱۵

(۲) ۱۶

(۳) ۱۸

(۴) ۲۰

مجموع زوایای نمودار دایره‌ای 360° است، پس:

$$108^\circ + 102^\circ + 96^\circ + \hat{O} = 360^\circ \Rightarrow 306^\circ + \hat{O} = 360^\circ \Rightarrow \hat{O} = 54^\circ$$

حال با یک تناسب معلوم می‌کنیم که چند درصد افراد در گروه خونی O قرار دارند:

$$\frac{54^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{54^\circ \times 100}{360^\circ} = 15$$

۳ افراد یک جامعه، به ۵ گروه سنی تقسیم شده‌اند که نمودار دایره‌ای آن‌ها با زاویه‌ی مرکزی برحسب درجه رسم

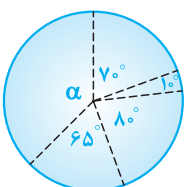
شده است. گروه سنی با زاویه‌ی مرکزی α ، شامل چند درصد این جامعه است؟

(۱) ۲۳

(۲) ۳۲/۵

(۳) ۳۶

(۴) ۳۷/۵

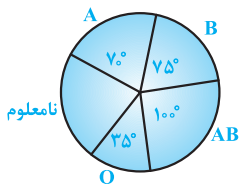


مجموع زوایای مرکزی در نمودار دایره‌ای برابر 360° است، بنابراین:

$$\alpha + 7^\circ + 1^\circ + 8^\circ + 65^\circ = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 360^\circ - 225^\circ \Rightarrow \alpha = 135^\circ$$

حال با یک تناسب ساده درصد گروه سنی با زاویه‌ی مرکزی α را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{135^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{135^\circ \times 100}{360^\circ} = 37.5$$



۴ نمودار دایره‌ای روبه‌رو، متناسب با تعداد کارکنان سازمانی با گروه خونی متمایز است. گروه خونی ۳۲

نفر از آنان تعیین نشده است. چند نفر از آن‌ها، دارای نوع خون B هستند؟

- ۲۵ (۱) ۳۰ (۲) ۳۶ (۳) ۴۰ (۴)

مجموع زوایا در نمودار دایره‌ای ۳۶۰° است، پس:

$$70^\circ + 75^\circ + 100^\circ + 35^\circ + \text{نامعلوم} = 360^\circ \Rightarrow \text{نامعلوم} = 80^\circ$$

حال با یک تناسب ساده تعداد کل افراد را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{80^\circ}{360^\circ} = \frac{32}{n} \Rightarrow n = \frac{32 \times 360^\circ}{80^\circ} = 144$$

روش اول: از این‌جا به بعد به یکی از دو روش زیر تعداد افراد دارای گروه خونی B معلوم می‌شوند:

با یک نسبت تناسب دیگر تعداد (فراوانی) افراد با گروه خونی B را معلوم می‌کنیم:

$$\frac{75^\circ}{360^\circ} = \frac{f}{144} \Rightarrow f = \frac{75^\circ \times 144}{360^\circ} = 30$$

روش دوم: بعد از پیدا کردن زاویه دسته «نامعلوم» با یک نسبت تناسب با زاویه گروه B به جواب برسیم:

نفر درجه

$$\frac{80^\circ}{75^\circ} = \frac{32}{x} \Rightarrow x = \frac{32 \times 75^\circ}{80^\circ} = 30$$

۵ در یک شرکت دارویی جدول توزیع کارکنان را با نمودار دایره‌ای نشان می‌دهیم. زاویه‌ی مربوط به کارکنان ارشد، چند

درجه است؟

نوع مدرک	دیپلم	کاردانی	کارشناسی	ارشد	دکترا
تعداد	۳۰	۹۰	۱۸۰	۱۲۰	۳۰

- ۸۴° (۱) ۹۲° (۲) ۹۶° (۳) ۱۰۵° (۴)

ابتدا تعداد کل کارکنان را به دست می‌آوریم:

$$120 + 180 + 90 + 30 = 420$$

حالا با یک تناسب ساده، زاویه‌ی مربوط به کارکنان ارشد معلوم می‌شود:

$$\frac{120}{420} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \alpha = \frac{120 \times 360^\circ}{420} = 103^\circ$$

۶ شرکتی ۱۶۰ کارمند دارد که مدارک تحصیلی آنان با ۶ کد متمایز مشخص شده‌اند. در نمودار دایره‌ای، زاویه‌ی مرکزی هر گروه با واحد

درجه مطابق جدول زیر است. تعداد کارکنان با کد ۴ کدام است؟

کد	۱	۲	۳	۴	۵	۶
زاویه‌ی مرکزی	۲۷	۴۵	۹۹	α	۵۴	۱۸

- ۵۲ (۱) ۵۴ (۲) ۵۶ (۳) ۵۸ (۴)

در نمودار دایره‌ای، مجموع همه‌ی زوایای مرکزی برابر ۳۶۰° است، پس:

$$27^\circ + 45^\circ + 99^\circ + \alpha + 54^\circ + 18^\circ = 360^\circ \Rightarrow 243^\circ + \alpha = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 117^\circ$$

با یک تناسب ساده، فراوانی مطلق گروه چهارم را به دست می‌آوریم:

$$\frac{117^\circ}{360^\circ} = \frac{f}{160} \Rightarrow f = \frac{117 \times 160}{360} = 52$$

۷ جدول زیر درصد فراوانی نسبی گروه خونی افراد یک جامعه است. در نمودار دایره‌ای، زاویه سطح مربوط به گروه خونی O چند درجه است؟

گروه خونی	A	B	AB	O
درصد فراوانی نسبی	۲۴	۲۲/۵	۳۶	α

- ۴۵ (۱) ۵۴ (۲) ۶۳ (۳) ۷۲ (۴)

می‌دانیم مجموع درصد فراوانی نسبی برابر ۱۰۰ است، پس:

$$24 + 22/5 + 36 + \alpha = 100 \Rightarrow 82/5 + \alpha = 100 \Rightarrow \alpha = 17/5$$

حال به کمک تناسب، زاویه‌ی مربوطه را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{17/5}{100} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \alpha = \frac{17/5 \times 360^\circ}{100} = 63$$

خط ویژه: فصل ششم کتاب با عنوان شاخص‌های مرکزی، معیارهایی را معرفی می‌کند که مدل تمرکز داده‌ها را مشخص می‌کنند. شاخص‌های مرکزی عبارتند از: میانگین، میانه و مُد. جالب این‌جاست که حرف اول همه‌ی شاخص‌های مرکزی، «م» می‌باشد. در بین شاخص‌های مرکزی، میانگین بیش‌ترین تکرار را در کنگور داشته است ...

۱ میانگین

میانگین هر تعداد داده برابر است با مجموع داده‌ها تقسیم بر تعداد آن‌ها یعنی:

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

مثال: میانگین داده‌های ۲، ۳، ۷ و ۸ کدام است؟

$$\bar{x} = \frac{2+3+7+8}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

بچه‌ها! اگر میانگین تعدادی داده را داشته باشیم می‌توانیم مجموع داده‌ها را محاسبه کنیم!

تعداد داده‌ها × میانگین = مجموع داده‌ها

مثال: میانگین پنج داده‌ی آماری ۸ است. اگر داده‌ای با مقدار ۲ را به آن‌ها اضافه کنیم میانگین داده‌های جدید کدام است؟

مقدار داده‌ی اضافه شده = $5 \times 8 = 40$ = مجموع داده‌های قبلی

تعداد داده‌ی اضافه شده = $\frac{40 + 2}{5 + 1} = \frac{42}{6} = 7$ = میانگین داده‌های جدید

۱ میانگین ۱۰ داده آماری $32/5$ است. اگر دو داده ۳۵ و ۴۰ را از آن داده‌ها کنار بگذاریم، میانگین ۸ داده حاصل کدام است؟

- ۳۱/۲۵ (۱) ۳۱/۵ (۲) ۳۱/۷۵ (۳) ۳۲ (۴)

مجموع داده‌ها = $10 \times 32/5 = 325$

میانگین جدید = $\frac{325 - (35 + 40)}{10 - 2} = \frac{325 - 75}{8} = \frac{250}{8} = 31/25$

۲ در ۴۵ داده‌ی آماری مقدار میانگین ۱۱۲۴ محاسبه شده است. در بررسی مجدد داده‌ها متوجه شدیم که به جای داده‌ی ۱۰۲۴ عدد

۱۲۰۴ محاسبه شده است. با رفع اشتباه، میانگین واقعی کدام است؟

- ۱۱۱۹ (۱) ۱۱۲۰ (۲) ۱۱۲۱ (۳) ۱۱۲۲ (۴)

روش اول:

مجموع داده‌های اشتباهی = $45 \times 1124 = 50580$

چون به جای عدد ۱۰۲۴ عدد ۱۲۰۴ محاسبه شده است، یعنی مجموع داده‌ها به اندازه‌ی $1204 - 1024 = 180$ واحد بیشتر (اضافه‌تر) محاسبه شده است، که باید آن را کم کنیم:

مجموع واقعی داده‌ها = $50580 - 180 = 50400 \Rightarrow \bar{x} = \frac{50400}{45} = 1120$

روش دوم: به مجموع داده‌های اولیه $1204 - 1024 = 180$ واحد، اضافی، اضافه شده است!!

این ۱۸۰ واحد باعث شده که $\frac{180}{45} = 4$ واحد اضافی به میانگین اضافه شده باشد!! در نتیجه $1124 - 4 = 1120$ میانگین واقعی می‌باشد.

۲ بررسی تغییرات میانگین

هرگونه تغییری (در چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم) بر روی داده‌ها باعث می‌شود تا میانگین نیز به همان صورت تغییر کند. یعنی هر بلایی سر داده‌ها بیاید همان بلا سر میانگین هم می‌آید! مثلاً اگر میانگین نمرات درس ریاضی کلاسی ۱۶ باشد و استاد بخواهد به همه ۱ نمره اضافه کند آن‌گاه میانگین جدید نیز برابر $16 + 1 = 17$ خواهد بود.

مثال: اگر میانگین داده‌های a, b, c برابر ۴ باشد، میانگین $2a + 5$ ، $2b + 5$ و $2c + 5$ کدام است؟

هر داده در ۲ ضرب سپس با ۵ جمع شده است، پس میانگین هم در ۲ ضرب و با ۵ جمع می‌شود:

$$\bar{X}_{\text{جدید}} = 2(4) + 5 = 8 + 5 = 13$$

۳ میانگین چند داده برابر ۵۷ است. ابتدا از هر داده ۱۲ واحد کم و سپس داده‌های حاصل را سه برابر کرده‌ایم. میانگین داده‌های نهایی

کدام است؟

۴۵ (۱) ۷۰ (۲) ۱۳۵ (۳) ۱۵۹ (۴)

همان بلایی که سر داده‌ها آمده است را سر میانگین بیاورید:

$$\bar{X} = (57 - 12) \times 3 = 45 \times 3 = 135$$

۳ میانگین در جدول فراوانی

برای محاسبه میانگین در جدول فراوانی، فراوانی هر داده را در خود داده ضرب کرده و سپس مقادیر به دست آمده را با هم جمع می‌کنیم و بر تعداد داده‌ها (یا مجموع فراوانی‌ها) تقسیم می‌کنیم:

داده‌ها	X_1	X_2	...	X_n
فراوانی	f_1	f_2	...	f_n

$$\bar{X} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots + f_n X_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

توجه کنید که f (فراوانی مطلق یا نسبی) و X ها، داده‌ها یا مراکز دسته‌ها در جداول فراوانی هستند.

X_i	۳	۶	۹
f_i	۴	۵	۱

مثال: میانگین داده‌های آماری با جدول مقابل کدام است؟

$$\bar{X} = \frac{(4 \times 3) + (5 \times 6) + (1 \times 9)}{4 + 5 + 1} = \frac{12 + 30 + 9}{10} = \frac{51}{10} = 5.1$$

میانگین به روش سریع:

ما می‌توانیم برای سرعت بخشیدن به محاسبات، قبل از انجام محاسبه میانگین ابتدا از تمام داده‌ها مقدار مشخصی را کم کنیم یا تمام داده‌ها را بر مقدار مشخصی تقسیم کنیم و بعد از محاسبه میانگین داده‌های جدید و همان مقدار را به میانگین اضافه یا در آن ضرب کنیم، مثلاً به جای محاسبه میانگین داده‌های ۲۲، ۲۱، ۱۸، ۲۰، ۱۹، ۲۵، می‌توانیم از هر داده ۲۰ واحد کم کنیم و میانگین داده‌های ۲، ۱، ۰، ۰، ۰، ۵ را حساب کرده، سپس ۲۰ واحد به میانگین جدید اضافه کنیم. به عنوان مثالی دیگر، به جای محاسبه میانگین داده‌های ۲، ۲، ۳، ۳، ۳، ۴ می‌توانیم هر داده را بر ۵ تقسیم کنیم و میانگین داده‌های ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ را حساب کرده و در آخر میانگین به دست آمده را در ۵ ضرب کنیم تا میانگین داده‌های اولیه به دست آید.

۴ میانگین داده‌های آماری جدول زیر کدام است؟

حدود دسته	۴-۸	۸-۱۲	۱۲-۱۶	۱۶-۲۰	۲۰-۲۴
فراوانی	۳	۴	۵	۲	۱

۱۲/۸ (۴) ۱۲/۶ (۳) ۱۲/۴ (۲) ۱۲/۲ (۱)

ابتدا به جای حدود دسته‌ها، مرکز آن‌ها را قرار می‌دهیم، کافی است مرکز دسته‌ی اول را پیدا کنیم و سپس به اندازه‌ی طول دسته یعنی ۴، بالا برویم:

مرکز دسته	$\frac{4+8}{2} = 6$	۱۰	۱۴	۱۸	۲۲
فراوانی	۳	۴	۵	۲	۱

حال به راحتی میانگین پیدا می‌شود:

$$\bar{X} = \frac{(3 \times 6) + (4 \times 10) + (5 \times 14) + (2 \times 18) + (1 \times 22)}{3 + 4 + 5 + 2 + 1} = \frac{18 + 40 + 70 + 36 + 22}{15} = \frac{186}{15} = 12.4$$

خط ویژه: در فصل هفتم کتاب با عنوان شاخص‌های پراکندگی، می‌فواهیم بررسی کنیم که تمع داده‌ها حول میانگین چگونه است؟

شاخص‌های پراکندگی عبارتند از:

- ۱- دامنه‌ی تغییرات ۲- واریانس ۳- انحراف معیار ۴- ضریب تغییرات

۱ دامنه‌ی تغییرات و واریانس

دامنه‌ی تغییرات: همان‌طور که قبلاً هم گفته بودیم، اختلاف بین بزرگ‌ترین داده و کوچک‌ترین داده را دامنه‌ی تغییرات می‌گویند و با R نشان

می‌دهند:

$$R = \text{Max} - \text{Min}$$

تذکر: دامنه‌ی تغییرات فقط به ضرب و تقسیم کردن داده‌ها حساس است. یعنی اگر داده‌های آماری را در عدد ثابتی مانند k ضرب یا بر آن تقسیم کنیم، دامنه‌ی تغییرات نیز در k ضرب یا بر k تقسیم می‌شود و جمع و تفریق روی آن بی‌اثر است.

واریانس: که آن را با σ^2 (بخوانید سیگما ۲) نشان می‌دهیم، با طی مراحل زیر به دست می‌آید.

۱ ابتدا میانگین داده‌ها را محاسبه می‌کنیم.

۲ تفاضل میانگین از هر داده را به دست می‌آوریم. (هر داده را منهای میانگین می‌کنیم) که به آن انحراف از میانگین گفته می‌شود.

۳ مقادیر مرحله ۲ (انحراف از میانگین‌ها) را به توان ۲ می‌رسانیم. (اسمش می‌شه مربع یا مجذور انحرافات داده‌ها از میانگین)

۴ مقادیر مرحله ۳ را با هم جمع می‌کنیم. (مجموع مجذورات انحرافات داده‌ها از میانگین)

۵ عدد به دست آمده در مرحله ۴ را بر تعداد داده‌ها تقسیم می‌کنیم تا واریانس به دست آید.

اووووووو.....!!!!!! کی می‌فوار این مراحلو طی کنه؟؟!!

نه بابا قبلی هم زیار نیست. ببین!

مثال: واریانس داده‌های ۷، ۲، ۰ کدام است؟

$$\bar{x} = \frac{0+2+7}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{(0-3)^2 + (2-3)^2 + (7-3)^2}{3} = \frac{9+1+16}{3} = \frac{26}{3}$$

دری؟!

تذکر: اگر داده‌ها را با عدد ثابتی جمع یا تفریق کنیم، تأثیری روی واریانس ندارد.

مثال: واریانس داده‌های ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸ کدام است؟

برای راحتی محاسبات از همه‌ی داده‌ها ۱۰۰ واحد کم می‌کنیم (تأثیری روی واریانس ندارد): پس داده‌ها به صورت ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ خواهند بود:

$$\bar{x} = \frac{4+5+6+7+8}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{(4-6)^2 + (5-6)^2 + (6-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

تذکر: اگر داده‌ها دارای فراوانی باشند، در مرحله‌ای که می‌خواهید هر داده را منهای میانگین کنید، فراوانی را پشت پرانتز قرار دهید.

مثال: واریانس داده‌های ۸، ۸، ۸، ۴ کدام است؟

$$\bar{x} = \frac{8+8+8+4}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

$$\sigma^2 = \frac{(4-7)^2 + 3(8-7)^2}{4} = \frac{9+3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

۱ واریانس داده‌های آماری $۱۲, ۷, ۱۰, ۱۱, ۹, ۱۰, ۱۲, ۹$ کدام است؟

ابتدا میانگین داده‌ها را به دست می‌آوریم:
 حال مقدار واریانس را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{(۲ \times ۱۲) + (۲ \times ۹) + (۲ \times ۱۰) + ۱۱ + ۷}{۸} = \frac{۲۴ + ۱۸ + ۲۰ + ۱۸}{۸} = \frac{۸۰}{۸} = ۱۰$$

$$\sigma^2 = \frac{۲(۱۲-۱۰)^2 + ۲(۹-۱۰)^2 + ۲(۱۰-۱۰)^2 + (۱۱-۱۰)^2 + (۷-۱۰)^2}{۸} = \frac{۸ + ۲ + ۰ + ۱ + ۹}{۸} = \frac{۲۰}{۸} = ۲.۵$$

۲ در داده‌های آماری $۱۱, ۶, ۵, ۱۳, ۸, ۷, ۱۰, ۷, ۱۳$ داده‌های کم‌تر از میانه را حذف می‌کنیم، واریانس باقی‌مانده کدام است؟

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرده تا میانه را پیدا کنیم:
 داده‌های کم‌تر از میانه را حذف می‌کنیم. داده‌های باقی‌مانده $۱۳, ۱۰, ۱۱, ۱۳, ۱۳, ۱۳$ هستند. برای به‌دست آوردن واریانس این داده‌ها ابتدا میانگین آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:
 حالا واریانس داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{۱۳ + ۱۰ + ۱۱ + (۲ \times ۱۳)}{۵} = \frac{۲۹ + ۲۶}{۵} = \frac{۵۵}{۵} = ۱۱$$

$$\sigma^2 = \frac{(۱۳-۱۱)^2 + (۱۰-۱۱)^2 + (۱۱-۱۱)^2 + ۲(۱۳-۱۱)^2}{۵} = \frac{۹ + ۱ + ۰ + ۸}{۵} = \frac{۱۸}{۵} = ۳.۶$$

۳ داده‌های آماری $۱۸, ۷, ۲۰, ۱۶, ۱۷, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۷, ۲۱, ۱۲, ۱۳$ را با نمودار جعبه‌ای نشان می‌دهیم. واریانس داده‌های داخل جعبه تقریباً کدام است؟

داده‌های داخل جعبه در نمودار جعبه‌ای، داده‌های بین چارک اول و سوم است. پس داده‌ها را مرتب می‌کنیم تا چارک اول و سوم معلوم شوند.
 بنابراین داده‌های داخل جعبه در نمودار جعبه‌ای عبارتند از:

$$Q_1 = \frac{۱۰+۱۱}{۲} = ۱۰.۵ \quad Q_3 = \frac{۱۷+۱۸}{۲} = ۱۷.۵$$

$۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳, ۱۶, ۱۷, ۱۷, ۲۰, ۲۱$

برای راحتی محاسبات می‌توان یک عدد ثابت (مثلاً ۱۰) را از همه داده‌ها کم کرد. پس داده‌ها به صورت $۱, ۲, ۲, ۳, ۶, ۷, ۷$ درمی‌آیند:

$$\bar{x} = \frac{۱ + ۲(۲) + ۳ + ۶ + ۲(۷)}{۷} = \frac{۱ + ۴ + ۳ + ۶ + ۱۴}{۷} = \frac{۲۸}{۷} = ۴$$

$$\sigma^2 = \frac{(۱-۴)^2 + ۲(۲-۴)^2 + (۳-۴)^2 + (۶-۴)^2 + ۲(۷-۴)^2}{۷} = \frac{۹ + ۸ + ۱ + ۴ + ۱۸}{۷} = \frac{۴۰}{۷} = ۵.۷۱$$

۴ در نمودار ساقه و برگ داده‌های آماری روبه‌رو، واریانس داده‌های بین چارک اول و چارک سوم، کدام است؟

ساقه	برگ				
۳	۲	۳	۴	۴	۶ ۹
۴	۰	۱	۳	۵	۵ ۷
۵	۱	۲	۴	۷	۸

چارک اول = ۳.۵
 چارک سوم = ۵.۵
 میانه $Q_2 = ۴.۳$

ساقه	برگ				
۳	۲	۳	۴	۴	۶ ۹
۴	۰	۱	۳	۵	۵ ۷
۵	۱	۲	۴	۷	۸

ابتدا چارک‌های اول و سوم را پیدا می‌کنیم تا داده‌های بین آن‌ها معلوم شود.
 می‌توانیم برای راحتی محاسبه عدد ۴۰ را از همه‌ی داده‌ها کم کنیم، پس داده‌ها به صورت $۵, ۷, ۱۱, ۳, ۵, ۳, ۱, ۰, -۴$ خواهند بود:

$$\bar{x} = \frac{-۴ - ۱ + ۰ + ۱ + ۳ + (۲ \times ۵) + ۷ + ۱۱}{۹} = \frac{۲۷}{۹} = ۳$$

$$\sigma^2 = \frac{(-۴-۳)^2 + (-۱-۳)^2 + (۰-۳)^2 + (۱-۳)^2 + (۳-۳)^2 + ۲(۵-۳)^2 + (۷-۳)^2 + (۱۱-۳)^2}{۹} = \frac{۴۹ + ۱۶ + ۹ + ۴ + ۰ + ۸ + ۱۶ + ۶۴}{۹} = \frac{۱۶۶}{۹} = ۱۸.۴۴$$



رياضيات انسانی

سال سوم

- ◀ فصل اول: تابع
- ◀ فصل دوم: معادلات درجه دوم
- ◀ فصل سوم: معادلات كسری و رادیکالی
- ◀ فصل چهارم: تابع درجه دوم (سهمی)
- ◀ فصل پنجم: ترکیبیات

اکثر سوالات این بخش در مورد محاسبه مقدار تابع مطرح می‌شود که کفایت مقدار تابع را به ازاء عدد (یا عبارت) داده شده محاسبه کرد:

(راغل ۸۷)

مثال ۱: اگر $f(x) = |x^2 - 5|$ و $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ، مقدار $\frac{1+f(-2)}{g(2)}$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)

پاسخ: هر مقدار را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f(x) = |x^2 - 5| &\xrightarrow{x=-2} f(-2) = |(-2)^2 - 5| = |4 - 5| = |-1| = 1 \\ g(x) = \frac{x}{1+x^2} &\xrightarrow{x=2} g(2) = \frac{2}{1+(2)^2} = \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{جواب نهایی} = \frac{1+1}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{\frac{2}{5}} = \frac{5 \times 2}{2} = 5$$

(فراج ۹۵)

مثال ۲: اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 7}$ باشد، $f(4) - f(2\sqrt{2})$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 7} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} f(4) &= \sqrt{(4)^2 - 7} = \sqrt{16 - 7} = \sqrt{9} = 3 \\ f(2\sqrt{2}) &= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 7} = \sqrt{8 - 7} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned} \right. \Rightarrow \text{جواب نهایی} = 3 - 1 = 2$$

(راغل ۸۸)

مثال ۳: اگر $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$ ، آن‌گاه $f(2 + \sqrt{7}) - f(2)$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ: برای محاسبه، ابتدا رادیکال را نادیده می‌گیریم و در پایان جواب را زیر رادیکال می‌بریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{-x^2 + 4x + 12} \\ f(2 + \sqrt{7}) &= - \underbrace{(2 + \sqrt{7})^2}_{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} + 4(2 + \sqrt{7}) + 12 \\ &= -(4 + 4\sqrt{7} + 7) + 8 + 4\sqrt{7} + 12 = -4 - 4\sqrt{7} - 7 + 8 + 4\sqrt{7} + 12 = 9 \Rightarrow \sqrt{9} = 3 \\ f(2) &= -(2)^2 + 4(2) + 12 = -4 + 8 + 12 = 16 \Rightarrow \sqrt{16} = 4 \end{aligned} \left. \right\} \Rightarrow \text{جواب نهایی} = 3 - 4 = -1$$

۱ اگر $f(x) = |3x - 5|$ و $g(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x + 2}$ ، مقدار $f(\frac{1}{4}) + g(\frac{1}{4})$ چه قدر است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

$$f(x) = |3x - 5| \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = \left|3\left(\frac{1}{4}\right) - 5\right| = \left|\frac{3}{4} - 5\right| = \left|\frac{3-20}{4}\right| = \left|\frac{-17}{4}\right| = \frac{17}{4}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x + 2} \Rightarrow g\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) + 2} = \sqrt{\frac{1}{16} + 2} = \sqrt{\frac{1+32}{16}} = \sqrt{\frac{33}{16}} = \frac{\sqrt{33}}{4}$$

$$\text{جواب نهایی} = \frac{17}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4} = \frac{17 + \sqrt{33}}{4} = 5$$

۲ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2x + 3$ حاصل $f(1 + \sqrt{2}) - f(2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$f(1 + \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})^2 - 2(1 + \sqrt{2}) + 3 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 2 - 2\sqrt{2} + 3 = 4$$

$$f(2) = (2)^2 - 2(2) + 3 = 4 - 4 + 3 = 3$$

$$\text{جواب نهایی} = 4 - 3 = 1$$

۳ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 8x + 7}$ مقدار $f(2 - \sqrt{3})$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

$$f(x) = \sqrt{-2x^2 + 8x + 7}$$

$$-2(2 - \sqrt{3})^2 + 8(2 - \sqrt{3}) + 7 = -2(4 - 4\sqrt{3} + 3) + 16 - 8\sqrt{3} + 7$$

$$= -8 + 8\sqrt{3} - 6 + 23 - 8\sqrt{3} = 9$$

فعالاً رادیکال را نادیده می‌گیریم:

حالا ۹ را به زیر رادیکال می‌بریم:

$$\text{جواب نهایی} = \sqrt{9} = 3$$

۴ اگر $f(x) = \frac{-2x^2 + 5x}{x - 2}$ باشد، $f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $1 + \sqrt{2}$ (۴)

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 5x}{x - 2} \Rightarrow f(1 - \sqrt{2}) = \frac{-2(1 - \sqrt{2})^2 + 5(1 - \sqrt{2})}{1 - \sqrt{2} - 2}$$

$$= \frac{-2(1 - 2\sqrt{2} + 2) + 5 - 5\sqrt{2}}{-\sqrt{2} - 1} = \frac{-2 + 4\sqrt{2} - 4 + 5 - 5\sqrt{2}}{-\sqrt{2} - 1} = \frac{-\sqrt{2} - 1}{-\sqrt{2} - 1} = 1$$

۵ اگر $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + |x|$ باشد، $f(2 - \sqrt{5})$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۰/۲۵ (۲) ۰/۷۵ (۳) ۱/۲۵ (۴)

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + |x|$$

حاصل هر عبارت را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{5})^2 = \frac{1}{4}(4 - 4\sqrt{5} + 5) = 1 - \sqrt{5} + \frac{5}{4} = \frac{9}{4} - \sqrt{5}$$

$$|x| = |2 - \sqrt{5}| = \frac{\sqrt{5} = 2/2}{(-)} - (2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$$

$$\text{جواب نهایی} = \frac{9}{4} - \sqrt{5} - 2 + \sqrt{5} = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} = 0/25$$

۶ اگر $f(x) = (2 - x)|x| + x + \sqrt{2}$ مقدار $f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) $1 + \sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

$$f(x) = (2 - x)|x| + x + \sqrt{2}$$

$$f(1 - \sqrt{2}) = (2 - (1 - \sqrt{2}))|1 - \sqrt{2}| + 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$= (2 - 1 + \sqrt{2})(-1 + \sqrt{2}) + 1$$

$$= (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) + 1$$

اتحاد مزدوج

$$= (\sqrt{2})^2 - (1)^2 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$$



ریاضیات انسانی

آزمون‌های جامع

◀ دوره آزمون‌های جامع
به همراه پاسخ‌های کاملاً تشریحی



زمان پیشنهادی: ۳۰ دقیقه

جامع ریاضیات انسانی

آزمون ۱

۱- اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی و B مجموعه‌ی اعداد طبیعی اول باشد، کدام مجموعه‌ی زیر با پایان است؟

- (۱) $A - B$ (۲) $B - A$ (۳) $A \cup B$ (۴) $A \cap B$

۲- حاصل $\frac{4}{1+\sqrt{5}}(\sqrt{12}-\sqrt{4})+(2\sqrt{9}+\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) $9+\sqrt{5}$ (۲) $9-\sqrt{5}$ (۳) $11+\sqrt{5}$ (۴) $11-\sqrt{5}$

۳- اگر $x+y=2$ و $x^2+y^2=\frac{5}{4}$ باشد، چه قدر است xy؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۴- خط گذرا بر دو نقطه‌ی (۲، ۶) و (۳، ۴)، نیم‌ساز ناحیه‌ی دوم و چهارم را در نقطه‌ی A قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $5\sqrt{2}$ (۲) $8\sqrt{2}$ (۳) $10\sqrt{2}$ (۴) $20\sqrt{2}$

۵- اگر $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ باشد، حاصل $\cos^2\theta - (\tan^2\theta + 1)(1 - \sin^2\theta)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۶- داده‌های آماری با ماکزیمم $73/5$ و می‌نیمم ۳۸ را در ۹ طبقه دسته‌بندی کرده‌ایم. فراوانی تجمعی دسته‌ی نهم 150° و درصد فراوانی نسبی دسته‌ای با مرکز ۵۶ برابر ۲۴ است، فراوانی مطلق دسته‌ی وسط کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۲ (۳) ۳۴ (۴) ۳۶

۷- اگر به داده‌های جدول زیر ۱۲ داده اضافه کنیم، در نمودار دایره‌ای، زاویه‌ی متناظر با دسته‌ای به مرکز ۱۵ به اندازه‌ی 40° درجه افزایش می‌یابد. چند داده به دسته‌ی سوم افزوده شده است؟

حدود دسته	۵-۹	۹-۱۳	۱۳-۱۷	۱۷-۲۱
فراوانی	۶	۸	۶	۴

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۸- در داده‌های آماری با نمودار ساقه و برگ زیر، واریانس داده‌های کم‌تر از مد و بیش‌تر از میانه کدام است؟

ساقه	برگ				
	۰	۲	۳	۵	۶
۳					
۴	۲	۴	۶	۷	۹
۵	۴	۵	۵	۶	

- (۱) ۹ (۲) $9/5$ (۳) ۱۰ (۴) $10/5$

۹- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x+2}{x+1} + \sqrt{1-2x}$ کدام است؟

- (۱) $x \leq \frac{1}{2}$ (۲) $\mathbb{R} - \{-1\}$ (۳) $x \leq \frac{1}{2}, x \neq -1$ (۴) $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}, -1\}$

۱۰- به ازای کدام مقدار a معادله‌ی $3x(3x-4) = a$ دارای ریشه‌ی مضاعف است؟

- (۱) -۱۶ (۲) -۴ (۳) ۸ (۴) ۴

۱۱- کدام گزینه در مورد معادله‌ی $\frac{2x+2}{x^2+x} + \frac{3x-2}{x} = 1$ صحیح است؟

- (۱) دو جواب مثبت دارد. (۲) جواب‌های آن صفر و -۱ هستند. (۳) یک جواب قابل قبول دارد. (۴) فاقد جواب است.

۱۲- اگر خط $x = -1$ محور تقارن سهمی به معادله‌ی $y = x^2 + ax + 2b$ باشد و نمودار سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با عرض ۵ قطع کند، مقدار می‌نیمم تابع کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۳- تعداد جایگشت‌های سه حرفی از حروف واژه‌ی « PASDARAN » که شامل حرف P باشد، کدام است؟

- ۶۱ (۱) ۶۲ (۲) ۶۳ (۳) ۶۴ (۴)

۱۴- اگر \overline{ab} عدد دو رقمی باشد، با استفاده از کدام استدلال می‌توان نشان داد که حاصل $\overline{ab} - \overline{ba}$ همواره بر ۹ بخش پذیر است؟

- (۱) استدلال استقرایی (۲) استدلال استنتاجی (۳) استدلال تمثیلی (۴) اصل استقرای ریاضی

۱۵- در دنباله‌ی حسابی $\dots, \frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3}$ جمله‌ی اول را با ۳، جمله‌ی دوم را با ۴، جمله‌ی سوم را با ۵ و ... جمع می‌کنیم تا دنباله‌ی حسابی جدیدی ساخته شود. مجموع ۱۲ جمله‌ی نخست دنباله‌ی جدید کدام است؟

- ۱۲۲ (۱) ۱۲۴ (۲) ۱۳۲ (۳) ۱۳۴ (۴)

۱۶- براساس آرایه‌ی شکل زیر، در جمله‌ی دوازدهم چند عضو توپر وجود دارد؟



- ۴۵ (۱) ۵۵ (۲)

- ۶۶ (۳) ۷۸ (۴)

۱۷- اگر $\log 2 = 0.301$ و $\log 3 = 0.477$ باشند، مقدار $\log \sqrt[5]{75}$ کدام است؟

- ۰/۱۵ (۱) ۰/۲۵ (۲) -۰/۰۲۵ (۳) -۰/۱۲۵ (۴)

۱۸- برای بیهوش نگه داشتن یک فرد برای یک عمل جراحی ۰/۵ میلی‌گرم دارو به ازای هر کیلوگرم وزن بدن لازم است. نیمه‌عمر زوال دارو

۱۵ دقیقه و مدت زمان عمل جراحی نیم ساعت است. تقریباً چند میلی‌گرم دارو برای بیهوش نگه داشتن یک فرد ۶۰ کیلوگرمی لازم

است؟ ($\log 2 = 0.301$ و $\log 1/15 = 0.06$)

- ۳۴/۵ (۱) ۳۵/۵ (۲) ۳۶/۵ (۳) ۳۷/۵ (۴)

۱۹- در یک خانواده‌ی سه فرزندی، می‌دانیم فرزند اول دختر است. با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان این خانواده پسر می‌باشد؟

- $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴)

۲۰- اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A و $P(A')$ احتمال وقوع مکمل پیشامد A باشد و $P(A) = \frac{2}{3}P(A')$ آن‌گاه $P(A)$ کدام است؟

- ۰/۱ (۱) ۰/۲ (۲) ۰/۳ (۳) ۰/۴ (۴)

۴ ۳ ۲ ۱ ۱۶	۴ ۳ ۲ ۱ ۱۱	۴ ۳ ۲ ۱ ۶	۴ ۳ ۲ ۱ ۱
۴ ۳ ۲ ۱ ۱۷	۴ ۳ ۲ ۱ ۱۲	۴ ۳ ۲ ۱ ۷	۴ ۳ ۲ ۱ ۲
۴ ۳ ۲ ۱ ۱۸	۴ ۳ ۲ ۱ ۱۳	۴ ۳ ۲ ۱ ۸	۴ ۳ ۲ ۱ ۳
۴ ۳ ۲ ۱ ۱۹	۴ ۳ ۲ ۱ ۱۴	۴ ۳ ۲ ۱ ۹	۴ ۳ ۲ ۱ ۴
۴ ۳ ۲ ۱ ۲۰	۴ ۳ ۲ ۱ ۱۵	۴ ۳ ۲ ۱ ۱۰	۴ ۳ ۲ ۱ ۵