به نام پروردگار مهربان

حسابان کنکور

دهم | یازدهم | دوازدهم

سید عباس موسوی

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

لقمه طلایی | مهروماه

مقدمه

دوستان عزیز سلام!

بی‌مقدمه میرم سر اصل مطلب! اصل مطلب اینه که چند ماهه دیگه، یه آزمون خیلی خیلی مهم، پیش رو داری که به احتمال بالای ۵۰ درصد، در جهت‌گیری زندگی و شغل آینده‌ات تأثیر میذاره. آزمونی که کمی تا حدودی نامردیه و عادلانه نیست. در «کُنکور» شاید اولین اشتباهت، آخرین اشتباه باشه، برای همین باید تا جایی‌که میشه از اشتباهات کم کنی، مخصوصاً اشتباهات محاسباتی!! (زدم تو خال، درسته؟☺)

کتاب «لقمه حسابان کنکور» میخواد تمام مطالبی رو که به اونا احتیاج داری تا از پس سؤالات بر بیای، به طور خیلی‌خیلی جمع و جور و حساب شده و همراه بهتون هدیه کنه.

من از این‌که به مطلب و نکته جدیدی احتیاج نداری مطمئنم ولی از این‌که به حل تست‌های بیشتری برای تسلط، احتیاج نداشته باشی، نه! چرا که در قالب «وعده» و «چاشنی» مطالب رو به صورت کپسولی و مؤثر، به خوردتون می‌دیم ☺ ولی به علت محدودیت صفحات و حجم بالای مطالب، تست‌های مهم کنکوری (اکثراً از سال‌های اخیر) و تعدادی از تست‌های نکته‌دار رو به‌عنوان مثال حل کردم و در هر صورت امید دارم نمودار مسیر حرکت شما در زندگی، نموداری اکیداً صعودی ـ و نه صعودی ـ باشه.

فهرست

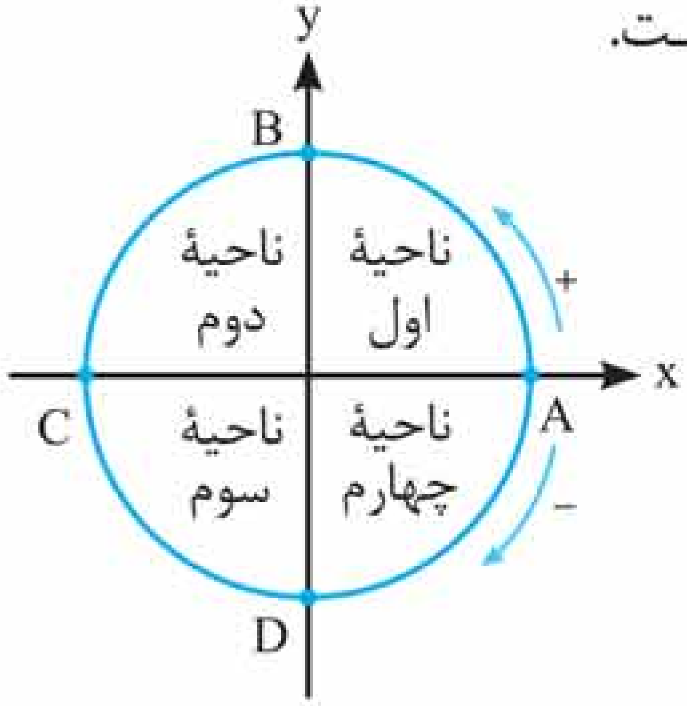
فصل ۱	یادآوری	۷
فصل ۲	الگو و دنباله	۱۴
فصل ۳	معادلات گنگ و گویا	۲۷
فصل ۴	آشنایی با هندسه تحلیلی (خط)	۳۲
فصل ۵	قدر مطلق	۴۱
فصل ۶	معادله و تابع درجه ۲	۵۵
فصل ۷	توابع نمایی و لگاریتمی	۶۹
فصل ۸	مثلثات	۹۱
فصل ۹	تابع	۱۳۱
فصل ۱۰	حد و پیوستگی	۱۷۱
فصل ۱۱	مشتق	۲۱۸
فصل ۱۲	کاربرد مشتق	۲۴۶
	فرمول‌نامه	۲۷۳

فصل ۸
مثلثات

وعدهٔ ۱

دایرهٔ مثلثاتی

دایـره‌ای به‌شـعاع واحـد کـه مرکـز آن مبـدأ مختصـات اسـت، **دایـرهٔ مثلثاتـی** نـام دارد کـه مبـدأ حرکـت آن نقطـهٔ A و جهـت مثبـت آن عکـس حرکـت عقربه‌هـای سـاعت اسـت.



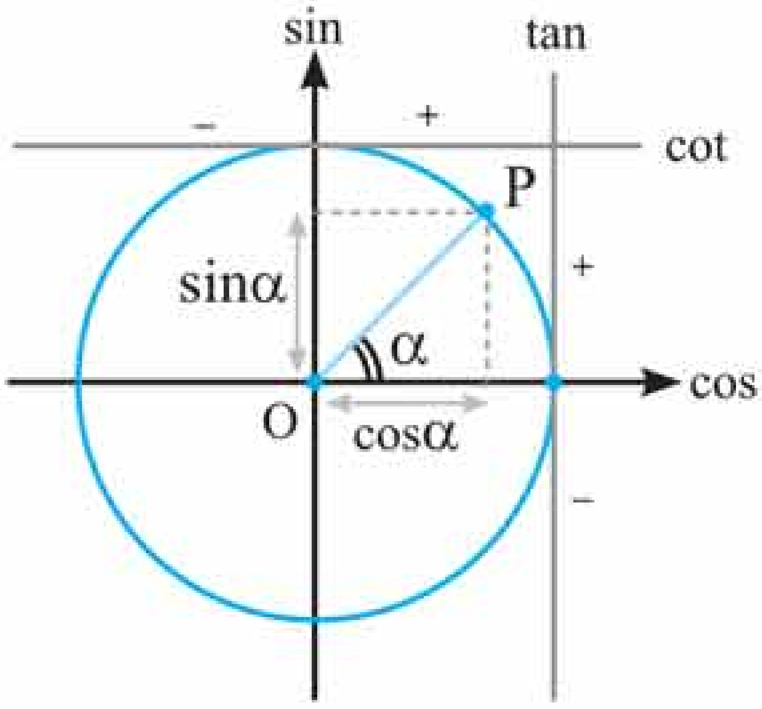
نقاط A, B, C, D نقاط **مرزی** هستند.

محور سینوس‌ها: محور y ها

محور کسینوس‌ها: محور x ها

محـور تانژانت‌هـا: خـط عمـودی و ممـاس بـر دایـره در نقطـهٔ A

محـور کتانژانت‌ها: خـط افقی و مماس بر دایـره در نقطهٔ B



تصویر نقطـهٔ P روی محور x ها برابر بـا $\cos\alpha$ و تصویر نقطهٔ P روی محور y هـا برابـر بـا $\sin\alpha$ می‌باشـد. محـل تقاطـع امتـداد شـعاع OP با محور $\tan$ هـا برابر بـا $\tan\alpha$ و بـا محـور $\cot$ هـا برابـر با $\cot\alpha$ اسـت.

چاشنی: علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی چهارگانه (قاعده هستک)

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha}$$

تانژانت و کتانژانت هم‌علامت‌اند.

تست: اگر $\sin\alpha(\tan\alpha + \cot\alpha) > ۰$ و $\cos\alpha \times \cot\alpha < ۰$ انتهای کمان α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ گزینهٔ «۴»

طبق فرض مسئله، داریم:

$$\sin\alpha(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}) = \cancel{\sin\alpha}\,(\frac{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}{\cancel{\sin\alpha}.\cos\alpha})$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\cos\alpha} > ۰ \Rightarrow \cos\alpha > ۰$$

پس انتهای کمان α در ناحیهٔ اول یا چهارم است.

هم‌چنین: $\cos\alpha \times \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} < ۰ \Rightarrow \frac{\cos^۲\alpha}{\sin\alpha} < ۰ \Rightarrow \sin\alpha < ۰$

انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم یا چهارم است، پس انتهای کمان α باید در ناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد.

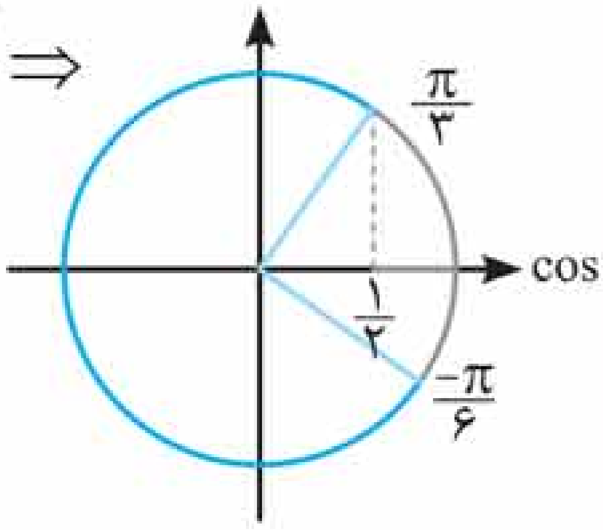
تست: اگر $-\frac{\pi}{۱۲} \le \alpha \le \frac{\pi}{۶}$ و $\cos ۲\alpha = \frac{m-۱}{m}$ باشد، محدودهٔ m کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲}, ۱)$ ۲) $[\frac{۱}{۲}, ۱)$ ۳) $[۲, +\infty)$ ۴) $[\frac{۱}{۲}, +\infty)$

پاسخ گزینهٔ «۳»

ابتدا محدودهٔ ۲α را مشخص می‌کنیم تا مقادیر $\cos ۲\alpha$ مشخص شوند:

$$-\frac{\pi}{۱۲} \le \alpha \le \frac{\pi}{۶} \Rightarrow -\frac{\pi}{۶} \le ۲\alpha \le \frac{\pi}{۳} \Rightarrow$$



از روی دایره مشخص است که: $\cos\frac{\pi}{۳} \le \cos ۲\alpha \le ۱$

پس: $\frac{۱}{۲} \le \frac{m-۱}{m} \le ۱$

حال برای حل این نامعادله به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲} \le \frac{m-۱}{m} \Rightarrow \frac{m-۱}{m} - \frac{۱}{۲} \ge ۰ \Rightarrow \frac{m-۲}{۲m} \ge ۰$$

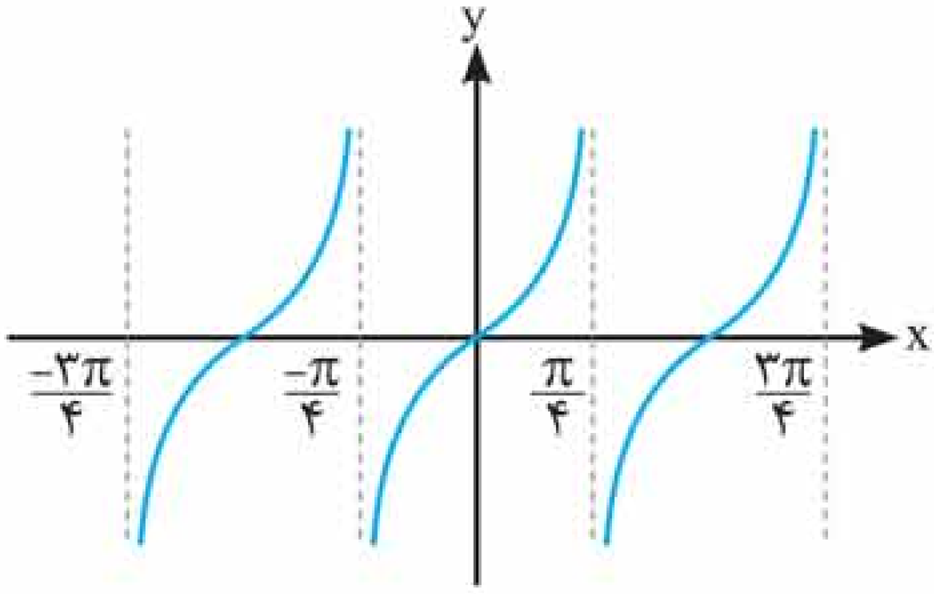
x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$\frac{m-۲}{۲m}$		+	ت.ن	−	۰	+	

$\Rightarrow m < ۰$ یا $m \ge ۲$

$$\frac{m-۱}{m} \le ۱ \Rightarrow \frac{m-۱}{m} - ۱ \le ۰ \Rightarrow \frac{-۱}{m} \le ۰ \Rightarrow m > ۰$$

پس اشتراک جواب‌ها برابر است با: $m \ge ۲$

مثلثات



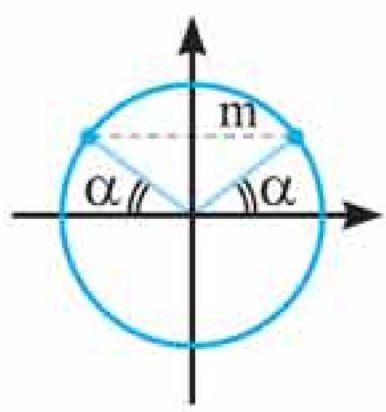
تابع $y = x$ اکیداً صعودی است، پس اگر در بازه‌ای $\tan ۲x$ اکیداً صعودی باشد جمع دو تابع نیز اکیداً صعودی خواهد بود. $\tan ۲x$ در بازه‌های که مجانب قائم نداشته باشد اکیداً صعودی است، که باتوجه به نمودار گزینهٔ «۳» درست است.

وعدهٔ ۱۵

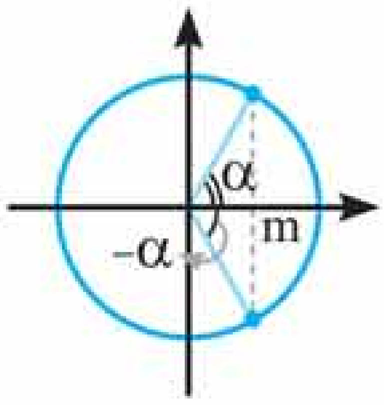
معادلات مثلثاتی

حل معادلات مثلثاتی معمولاً به یکی از حالت‌های زیر منجر می‌شود:

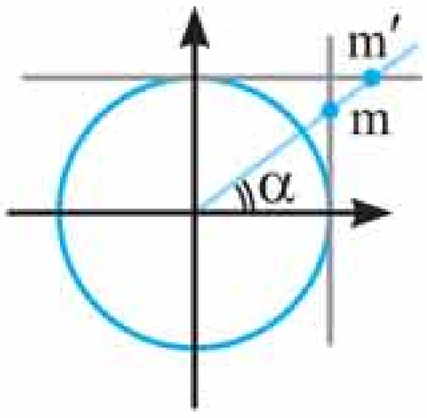
۱
$$\begin{cases} \sin x = m \\ ۱ \leq m \leq ۱ \end{cases} \Rightarrow \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$



۲ $\begin{cases} \cos x = m \\ -۱ \le m \le ۱ \end{cases} \Rightarrow \cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha$

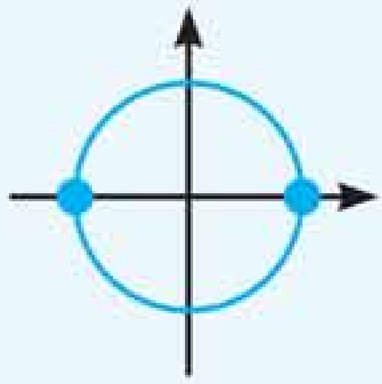


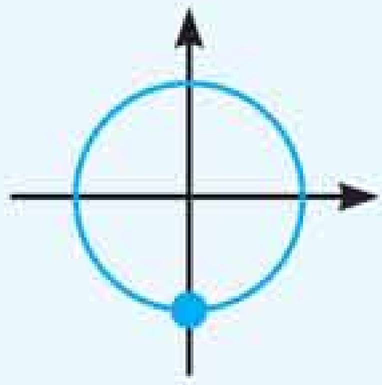
۳ $\begin{cases} \tan x = m \\ \cot x = m' \\ (m, m' \in \mathbb{R}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \tan\alpha \\ \cot x = \cot\alpha \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \alpha$



چاشنی: (معادلات خاص)

۱ $\begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$

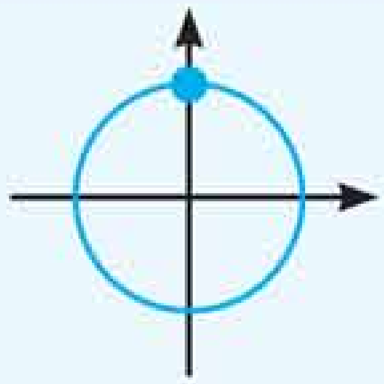




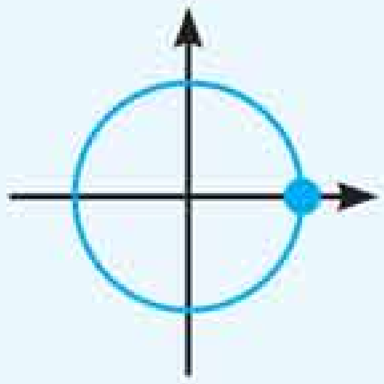
مثلثات

۲

$\sin x=۱ \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ (ریشهٔ مضاعف)

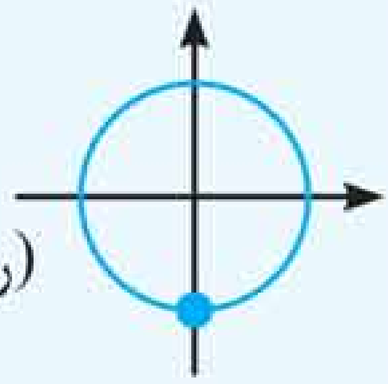


$\cos x=۱ \Rightarrow x=۲k\pi$ (ریشهٔ مضاعف)

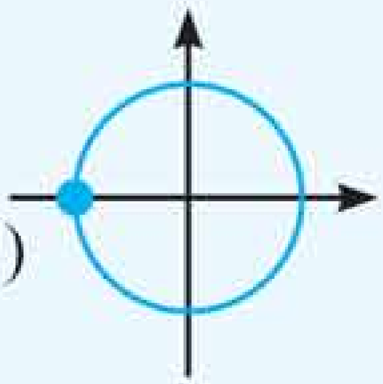


۳

$\sin x=-۱ \Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ (ریشهٔ مضاعف)



$\cos x=-۱ \Rightarrow x=۲k\pi+\pi$ (ریشهٔ مضاعف)



تست: مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۴x=\sin^۴ x-\cos^۴ x$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ برابر کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{۷\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۹\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۴}$

پاسخ گزینهٔ «۳»

طبق فرض داریم:

$$\sin ۴x=۲\sin ۲x\cos ۲x=\underbrace{(\sin^۲ x-\cos^۲ x)}_{-\cos ۲x}\underbrace{(\sin^۲ x+\cos^۲ x)}_{۱}$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x+\cos 2x=0 \Rightarrow \cos 2x(1+2\sin 2x)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \\ \xrightarrow{0\le x\le \pi} \begin{cases} x=\frac{\pi}{4} \\ x=\frac{3\pi}{4} \end{cases} \\ \sin 2x=-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi-\frac{\pi}{6} \\ 2x=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6} \end{cases} \quad (1) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} x=k\pi-\frac{\pi}{12} \xrightarrow{0\le x\le \pi} x=\frac{11\pi}{12} \\ x=k\pi+\frac{7\pi}{12} \xrightarrow{0\le x\le \pi} x=\frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

جمع ریشه‌ها: $\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+\frac{11\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}=\frac{5\pi}{2}$

تست: جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin x\sin 3x=\cos 2x$ کدام است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$

۲) $\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$

۳) $k\pi+\frac{\pi}{2}$

۴) $\frac{k\pi}{3}$

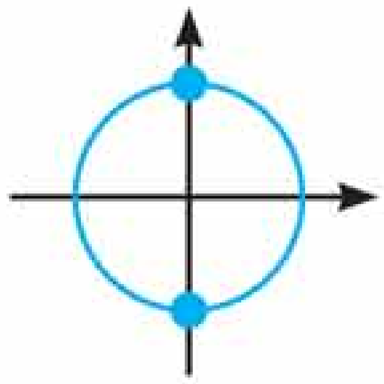
پاسخ گزینهٔ «۲»

تمام عبارت‌ها را برحسب $\sin x$ می‌نویسیم:

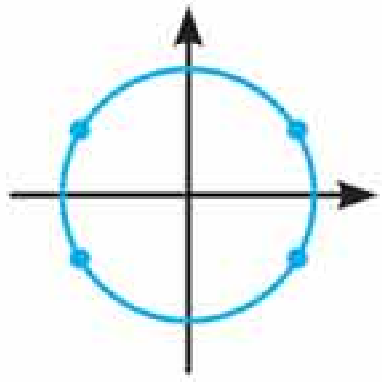
$$\sin x(3\sin x-4\sin^3 x)=1-2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow 4\sin^4 x-5\sin^2 x+1=0$$

با توجه به این‌که جمع ضرایب معادله صفر است، داریم:



$$\begin{cases}\sin^2 x=1\Rightarrow \sin x=\pm 1\\ \sin^2 x=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin x=\pm\frac{1}{2}\end{cases}$$



جواب‌های فوق توسط رابطهٔ $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$ تولید می‌شوند.

تست: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 3x-\sin x+4\sin^2 x=2$ با شرط $x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{4}$

۲) $(2k+1)\frac{\pi}{4}$

۳) $k\pi+\frac{\pi}{4}$

۴) $k\pi-\frac{\pi}{4}$

پاسخ گزینهٔ «۲»

با توجه به رابطهٔ $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ معادله را بازنویسی می‌کنیم:

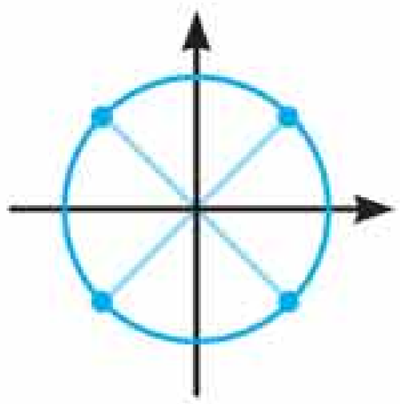
$$۳\sin x - ۴\sin^۳ x - \sin x + ۴\sin^۲ x - ۲ = ۰$$

$$-۴\sin^۳ x + ۴\sin^۲ x + ۲\sin x - ۲ = ۰$$

پس از تجزیه عبارت فوق داریم:

$$(۱-\sin x)(۴\sin^۲ x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۱ & \text{غیرقابل قبول} \\ \sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

زوایای مربوط به جواب‌ها را روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش می‌دهیم:



فرم کلی جواب‌ها به‌صورت $x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۴}$ می‌باشد.

تذکر: ۱ در حـل معادله‌هـای کسـری مثلثاتـی (یـا معادله‌های شـامل $\tan x$ و $\cot x$) ریشـه‌های مخـرج بایـد از مجموعه جواب نهایی معادله حذف شوند.

۲ گاهی در حل معادلات ریشه‌های اضافی تولید می‌شوند. این جواب‌ها باید از مجموعه جواب نهایی معادله حذف شوند. مخصوصاً اگر طرفین معادله‌ای را به توانِ زوج برسانید امکان تولید ریشه اضافی وجود دارد.

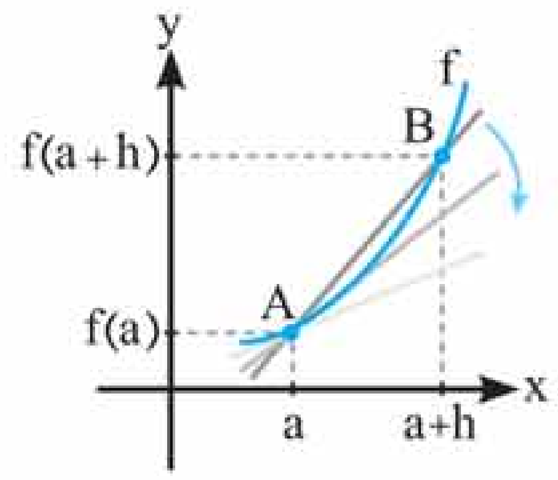
مثلثات

فصل ۱۱
مشتق

وعدهٔ ۱

تعریف مشتق در نقطه

در شکل زیر نقطهٔ ثابت A به طول a و نقطهٔ متحرک B به طول $(a+h)$ را روی تابع $y=f(x)$ در نظر می‌گیریم. به خط گذرنده از نقاط A و B یک خط **قاطع** می‌گوییم.



شیب خط قاطع AB برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

اکنون اگر نقطهٔ B را به A نزدیک و نزدیک‌تر نماییم پارامتر h کم و کمتر می‌شود اگر h به قدر کافی نزدیک به صفر اختیار شود و در پی آن حاصل $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ به عدد معینی نزدیک شود به این عدد، **شیب خط مماس** بر تابع f در نقطهٔ $(a,f(a))$ می‌گوییم، یعنی به شرط وجود حدِ زیر داریم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی } f \text{ در نقطهٔ } A=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط این‌که این حد موجود باشد به آن مشتق تابع f در نقطهٔ a می‌گوییم و با $f'(a)$ نمایش می‌دهیم:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشتق راست f در a (شیب نیم‌مماس راست):

$$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشتق چپ f در a (شیب نیم‌مماس چپ):

$$f'_{-}(a) = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

چاشنی: شرط مشتق‌پذیری $f'_{-}(a) = f'_{+}(a)$ است، یعنی اگر تابعی مشتق‌پذیر باشد شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست با هم برابر بوده و این دو نیم‌مماس در یک راستا واقع خواهند شد و تابع در a دارای یک خط مماس واحد است، در غیر این‌صورت می‌گوییم تابع مشتق‌ناپذیر است.

تذکر: برای این‌که $f'(a)$ موجود باشد تابع f باید در همسایگی نقطهٔ a پیوسته باشد. یعنی اگر تابعی در نقطهٔ a ناپیوسته باشد آن‌گاه مشتق‌پذیر نخواهد بود یعنی پیوستگی شرط لازم برای مشتق‌پذیری است، هرچند کافی نیست. اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه پیوسته خواهد بود.

$$\Rightarrow -۲ \simeq \frac{f(۲/۸)-(-۱)}{-۰/۲} \Rightarrow f(۲/۸) \simeq -۰/۶$$

$$h = ۰/۳ \Rightarrow f'(۳) \simeq \frac{f(۳+۰/۳)-f(۳)}{۰/۳}$$

$$\Rightarrow -۲ \simeq \frac{f(۳/۳)-(-۱)}{۰/۳} \Rightarrow f(۳/۳) \simeq -۱/۶$$

$$y_A - y_B \simeq -۱/۶-(-۰/۶) \simeq -۱$$

تست: در شکل مربوط به تست قبل حاصل $y_{A'} - y_{B'}$ کدام است؟

۱) $۰/۵$ ۲) -۱ ۳) $۱/۴$ ۴) $-۱/۴$

پاسخ گزینه «۲»

نقاط A' و B' روی خط مماس بر تابع f در نقطهٔ به طول ۳ واقع هستند. معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$y-(-۱) = -۲(x-۳) \Rightarrow y = -۲x+۵$$

$$\begin{cases} x = ۳/۳ \Rightarrow y_{A'} = -۲\times ۳/۳+۵ = -۱/۶ \\ x = ۲/۸ \Rightarrow y_{B'} = -۲\times -۲/۸+۵ = -۰/۶ \end{cases}$$

$$y_{A'} - y_{B'} = -۱/۶+۰/۶ = -۱$$

وعدهٔ ۲

نقاط مشتق‌ناپذیری تابع

تابع در یکی از حالت‌های ۶ گانهٔ زیر مشتق‌پذیر نیست.

۱ تابع f در a پیوسته نباشد، مانند تابع $y=[x]$ در نقاط به‌طول صحیح.

چاشنی: تابع $y=[f(x)]$ در نقاطی که پیوسته نباشد مشتق‌پذیر نمی‌باشد، ولی در نقاطی که پیوسته است، مشتق‌پذیر و مشتق آن صفر است.

تست: تابع با ضابطهٔ $f(x)=[\frac{۱}{x}]$ در کدام بازه مشتق‌پذیر است؟ ([ ] نماد جزء صحیح می‌باشد). (ریاضی ۹۱)

۱) $[۰,۱]$ ۲) $(-۱,۰)$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۱)$

پاسخ گزینهٔ «۴»

گزینهٔ ۱: شامل عدد صفر است که عضو دامنه تابع نمی‌باشد.

گزینهٔ ۲: شامل اعدادی است که به‌ازای آنها $\frac{۱}{x}$ عددی صحیح خواهد شد:

$-۱<x<۰ \Rightarrow \frac{۱}{x}<-۱ \Rightarrow$ شامل بی‌شمار عدد صحیح است.

گزینهٔ ۳: تابع در $x=۱$ باید پیوستگی راست داشته باشد که ندارد. زیرا:

$f(۱)=۱\,,\,f(۱^+)=[\frac{۱}{۱^+}]=[۱^-]=۰$.

گزینهٔ ۴: درست است، زیرا:

$$-\infty<x<-۱ \Rightarrow -۱<\frac{۱}{x}<۰$$

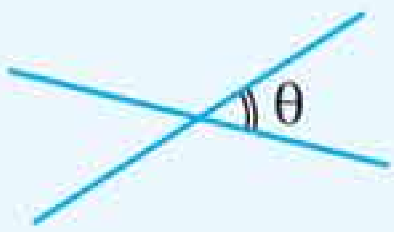
$$\Rightarrow f(x)=[\frac{۱}{x}]=-۱ \Rightarrow f'(x)=۰$$

تذکر: از رسم نمودار تابع $y=[\frac{۱}{x}]$ هم می‌توان برای حل تست کمک گرفت.

۲ تابع f در نقطهٔ a پیوسته باشد ولی مشتق‌های چپ و راست در a اعداد حقیقیِ نابرابر باشند (نقطه گوشه یا زاویه‌دار)، به شکل‌های زیر دقت کنید:

چاشنی: در تابع $y=|f(x)|$ به ازای ریشه‌های ساده (مرتبه اول) $f(x)$ مشتق‌پذیر نیست و این نقاط طول نقاط گوشه‌اند ولی تابع در ریشه‌های مرتبه‌های بالاتر مشتق‌پذیر است و مشتق آن صفر است، ضمناً اگر ریشهٔ داخل قدرمطلق از بیرون هم در قدرمطلق ضرب شود تابع در آن نقاط نیز مشتق‌پذیر و مشتق آن صفر است.
برای نمونه تابع $y=(x-1)|(x-1)(x+1)x^2|$ فقط در $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست.

نکته: اگر زاویهٔ حاده بین دو خط با شیب‌های m و m' برابر با θ باشد، آن‌گاه داریم:



$$\tan\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$$

از رابطهٔ بالا می‌توان برای یافتن زاویهٔ بین نیم‌مماس‌های چپ و راست در نقاط گوشه استفاده کرد.

تست: اگر مماس چپ و راست تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x|(x+a)$ در نقطهٔ زاویه‌دار آن، عمود بر هم باشند مجموعه مقادیر a کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) $\{-1\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{-1,1\}$ ۴) $\varnothing$

پاسخ گزینهٔ «۳»

نقطهٔ زاویه‌دار تابع، همان ریشهٔ سادهٔ داخل قدرمطلق، یعنی $x=0$ است. اکنون با تعریف مشتق شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|(x+a)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}(x+a)}{\cancel{x}}=a$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|(x+a)-0}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-\cancel{x})(x+a)}{\cancel{x}}=-a$$

چون دو نیم‌مماس بر هم عمودند، پس:

$$f'_+(0)\times f'_-(0)=-1\Rightarrow a(-a)=-1\Rightarrow a=\pm 1$$

۳ مشتق‌های چپ و راست یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد:

تست: نیم‌مماس‌های چپ و راست در مبدأ مختصات برای تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; \quad x\ge 0\\ -x & ; \quad x<0\end{cases}$ چه زاویه‌ای با هم می‌سازند؟

۱) $\frac{\pi}{6}$

۲) $\frac{\pi}{3}$

۳) $\frac{\pi}{4}$

۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ گزینهٔ «۳»

مشتق

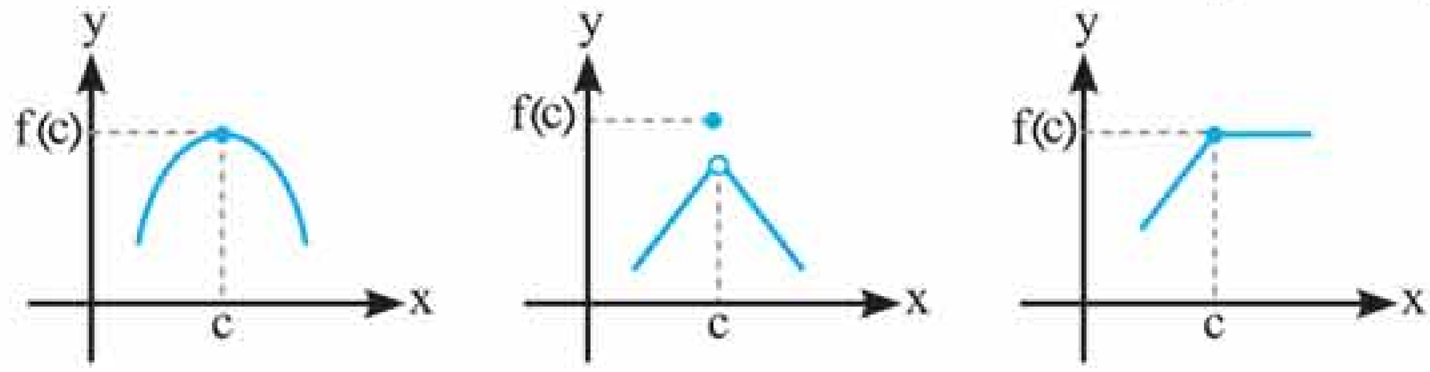
فصل ۱۲
کاربرد مشتق

وعدهٔ ۱

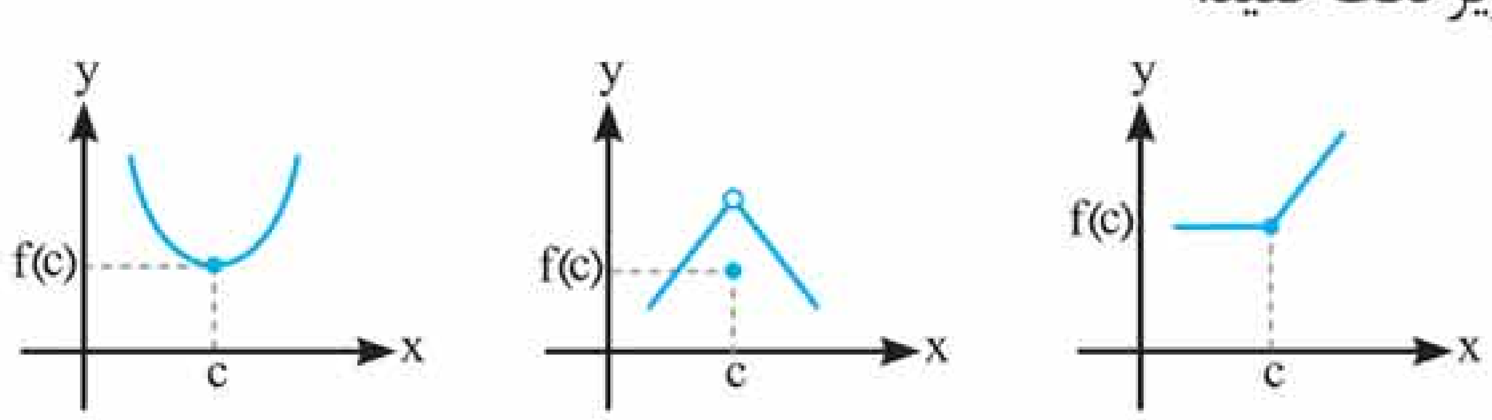
اکسترمم‌های نسبی و مطلق

اگـر f یـک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسـایگی از نقطهٔ c (بازهٔ باز شـامل نقطهٔ c) باشد که:

الف بـه ازای هر x متعلق به I داشـته باشـیم $f(x) \le f(c)$، در این صـورت $f(c)$ را یـک **ماکزیمم نسـبی** تابـع f می‌نامیم، بـه نمودارهای زیر دقت کنید:

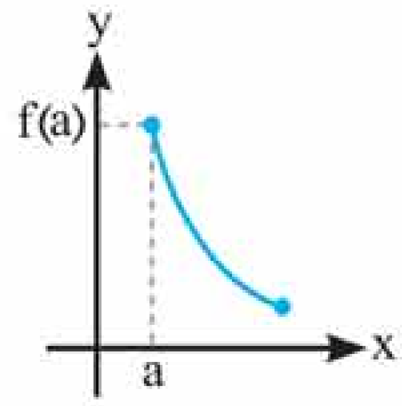


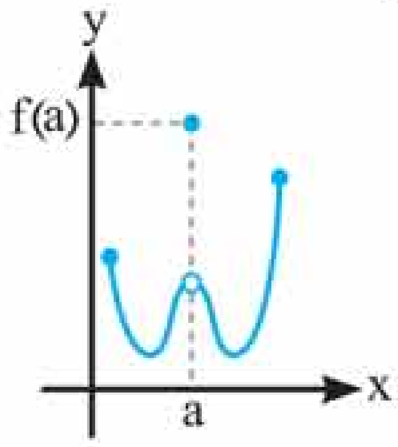
ب بـه ازای هـر x متعلق به I داشـته باشـیم $f(x) \ge f(c)$، در این صـورت $f(c)$ را یـک مینیمم نسـبی تابـع f می‌نامیم. بـه نمودارهای زیر دقت کنید:



بـه بزرگ‌تریـن مقـدار تابع f در بـازه I «**ماکزیمـم مطلق**» تابـع در این بـازه می‌گوییـم، یعنـی: $\forall x \in I ; f(x) \le f(a)$ بـه $f(a)$ ماکزیمـم مطلـق و بـه نقطـهٔ $(a , f(a))$ نقطـهٔ ماکزیمـم مطلـق تابـع در بازهٔ I

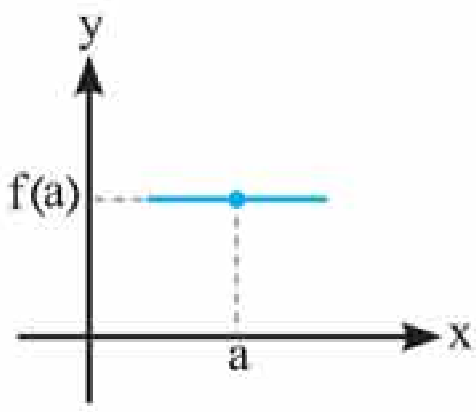
می‌گوییم، به نمودارهای زیر دقت کنید:

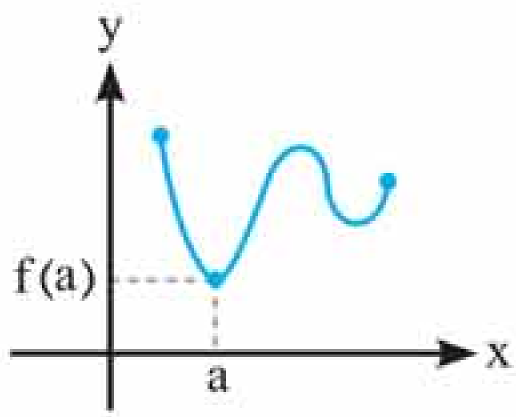




نکته: ۱ ماکزیمم مطلق تابع بالاترین نقطهٔ تابع در بازه I است.
۲ ماکزیمم مطلق تابع منحصر به فرد است هرچند ممکن است در چندین نقطه رخ دهد.

به کوچک‌ترین مقدار تابع f در بازهٔ I «**مینیمم مطلق**» تابع در این بازه می‌گوییم، یعنی: $\forall x \in I ; f(a) \le f(x)$ ، به $f(a)$ مقدار مینیمم مطلق و به نقطه $(a , f(a))$ نقطه مینیمم مطلق تابع در بازه I می‌گوییم. به نمودارهای زیر دقت کنید:





نکته: ۱ «مینیمم مطلق» تابع «پایین‌ترین نقطه» تابع در بازه I است.
۲ مینیمم مطلق تابع منحصر به فرد است هرچند ممکن است در چندین نقطه رخ دهد.

به نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی نقطه **اکسترمم نسبی** می‌گوییم به نقطه ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق نقطه **اکسترمم مطلق** می‌گوییم.

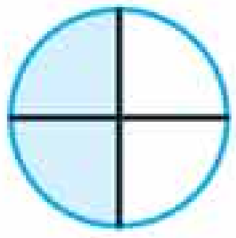
تست: نمـودار تابـع، ضابطه $y=\sin^{2}x-2\sin x\,;\,x\in[0\,,2\pi]$ در کدام بازهٔ صعودی نیست؟ (ریاضی خارج ۹۶ با تغییر)

۱) $(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2})$
۲) $(\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6})$
۳) $(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})$
۴) $(\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6})$

پاسخ گزینهٔ «۲»

تابـع پیوسـته در بـازه‌ای صعـودی اسـت کـه $y'\geq 0$، پـس y' را محاسـبه می‌کنیـم.

$$y'=2\sin x\cos x-2\cos x=2\cos x(\underbrace{\sin x-1}_{\leq 0})\geq 0$$

$$\Rightarrow \cos x\leq 0\Rightarrow$$ 

در تمام گزینه‌ها به جز گزینهٔ «۲» زوایا در ناحیهٔ رنگی قرار دارند.

وعدهٔ ۶

تشخیص اکسترمم‌های نسبی

آزمون مشتق اول

فـرض کنیـد تابـع f بـر بـازه‌ای مانند I ($I\subseteq D_f$) پیوسـته باشـد و $c\in I$ (در صـورت وجـود) نقـاط بحرانـی تابع f باشـند. فـرض کنید f بـر ایـن بـازه به جز احتمالاً در c، مشـتق‌پذیر باشـد درایـن صورت:

الف اگـر بـه‌ازای تمـام مقادیـر x در بـازهٔ $(a\,,c)$، $f'(x)>0$ (f صعـودی) و بـه‌ازای تمـام مقادیـر x در بـازهٔ $(c\,,b)$، $f'(x)<0$ (f نزولی) در این‌صورت $f(c)$ یک مقدار ماکزیمم نسبی f است.

ب اگر به‌ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a', c)، $f'(x) < 0$ و به‌ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c, b')، $f'(x) > 0$ آن‌گاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی f است.

پ اگر $f'(c)$ در نقطهٔ c تغییر علامت ندهد آن‌گاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.

چاشنی: برای تشخیص اکسترمم‌های نسبی در تابع پیوسته f کافی است f' را تعیین علامت کرده و از روی آن جدول اکسترمم‌ها را تشخیص دهیم، (ریشه‌های مضاعفِ $y' = 0$، طول اکسترمم نسبی نمی‌باشند.)

به جدول روبه‌رو توجه کنید:

x		c_2		c_1		c_3	
f'	$-$		$+$		$-$		$-$
f	↘	min	↗	max	↘		↘

تست: طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $y = (x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ گزینهٔ «۱»

تابع پیوسته است، پس y' را تعیین علامت می‌کنیم:

$$y' = 2(x-1)\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{6(x-1)(x) + 2(x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \quad \text{ریشهٔ مخرج} \\ ۲(x-۱)(۳x+x-۱) = ۰ \Rightarrow x = ۱\,,\ x = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

در تعیین علامت y' هم به ریشه‌های صورت و هم به ریشه‌های مخرج y' توجه کنید:

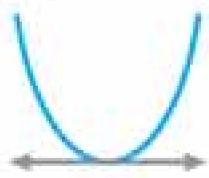
x		۰		$\frac{۱}{۴}$		۱	
y'	$-$	ت/ن	$+$	○	$-$	○	$+$
y	↘	min	↗	max	↘	min	↗

آزمون مشتق دوم

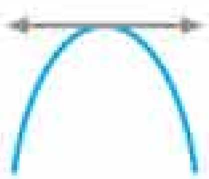
فرض کنید تابع f در نقطهٔ c و در همسایگی آن مشتق‌پذیر و $f'(c) = ۰$ باشد، در این‌صورت:

الف اگر $f''(c) > ۰$ آن‌گاه $x = c$ طول مینیمم نسبی است.

$f'' > ۰$



ب اگر $f''(c) < ۰$ آن‌گاه $x = c$ طول ماکزیمم نسبی است.



$f'' < ۰$

تست: تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{a}{x} + bx^۲$ در نقطهٔ $(۱\,, -۲)$ دارای اکسترمم نسبی است، عدد a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۹)

۱) $-\frac{۴}{۳}$ و مینیمم

۲) $-\frac{۴}{۳}$ و ماکزیمم

۳) $\frac{۴}{۳}$ و مینیمم

۴) $\frac{۴}{۳}$ و ماکزیمم

پاسخ گزینهٔ «۲»

۱ مختصات اکسترمم نسبی در تابع صدق می‌کند:

$$f(1) = -2 \Rightarrow a + b = -2$$

۲ در اکسترمم‌های نسبی و توابع مشتق‌پذیر، مشتق برابر صفر است:

$$f'(x) = \frac{-a}{x^2} + 2bx \xrightarrow{f'(1)=0} 2b - a = 0$$

با حل دستگاه داریم:

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ -a + 2b = 0 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}, \ b = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{2a}{x^3} + 2b \Rightarrow f''(1) = 2a + 2b = -4 < 0$$

طبق آزمون مشتق دوم $x = 1$ طول ماکزیمم نسبی تابع است.

آزمون مقایسه

در این حالت لازم نیست تابع پیوسته و مشتق‌پذیر باشد. با محاسبه $f(c)$ و $f(c^+)$ و $f(c^-)$ وضعیت f را در نقطهٔ c در همسایگی آن مشخص می‌کنیم اگر $f(c)$ از حد چپ و راست تابع در c بزرگ‌تر باشد $x = c$ طول ماکزیمم نسبی و اگر کوچک‌تر باشد طول مینیمم نسبی f خواهد بود.

برای نمونه، $x = 0$ برای تابع $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}$ طول ماکزیمم نسبی است، زیرا:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0^+) = \frac{0^+}{1} = 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0^-) = \frac{(0^-)^2}{1} = \frac{0^+}{1} = 0^+$$

مقدار تابع در $x=0$ کمتر از مقدار تابع در همسایگی صفر است، پس مبدأ مینیمم نسبی تابع است.

چاشنی: تابع $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ را درنظر بگیرید اگر توابع f و g در $x=a$ (طول اکسترمم نسبی y) مشتق‌پذیر باشند و $g'(a)\neq 0$، آن‌گاه مختصات اکسترمم نسبی تابع y علاوه بر خود تابع، در **هوپیتال تابع** یعنی $y_H=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ نیز صدق می‌کند. ($y_H\neq 1$)

تست: اگر $x=2$ طول اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\dfrac{3x^2+2x+b}{2x-3}$ باشد، b کدام است؟

۱) -7 ۲) 7 ۳) 9 ۴) -9

پاسخ گزینهٔ «۴»

می‌توان از رابطهٔ $f'(2)=0$ استفاده کرد و b را محاسبه نمود، ولی بهتر است از چاشنی گفته‌شده استفاده کنیم. نقطهٔ $(2,y_H)$ در y_H صدق می‌کند:

$$y_H=\frac{6x+2}{2}\Rightarrow y_H=\frac{6\times 2+2}{2}=7$$

پس نقطه اکسترمم نسبی، $(2,7)$ است که باید در خود تابع نیز صدق کند:

$$7=\frac{3\times 2^2+2\times 2+b}{2\times 2-3}\Rightarrow b=-9$$

پیوست
فرمـــول‌نامه

فصل ۱

۱ اتحادها

الف) مربع دوجمله‌ای $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

ب) مزدوج $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

پ) جمله مشترک $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

ت) مکعب دوجمله‌ای $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

ث) چاق و لاغر $(a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

۲ قوانین رادیکال‌ها $(n > 1 , m , n \in \mathbb{N})$

الف) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \ (a > 0)$

ب) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

پ) $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \ (b \neq 0)$

ت) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

ث) $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$

۳ قوانین توان

الف) $a^0 = 1$

ب) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

پ) $a^m \div a^n = a^{m-n} \ (a \neq 0)$

ت) $a^m \times b^m = (ab)^m$

ث) $a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m \ (b \neq 0)$

فصل ۲

۱ مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲\underbrace{a_۱}_{\text{جمله اول}} + (n-۱)d) = \frac{n}{۲}(a_۱ + \underbrace{a_n}_{\text{جمله آخر}})$$

۲ مجموع n جمله اول دنبالهٔ هندسی

$$S_n = a_۱ \frac{۱-q^n}{۱-q} (q \neq ۱)$$

۳ قانون اندیس‌ها

دنباله حسابی: $m + n = p + q \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$

دنباله هندسی: $m + n = h + k \Rightarrow a_m \cdot a_n = a_h \cdot a_k$

فصل ۳

۱ حل معادلات گویا

الف دو طرف معادله را در مخرج‌مشترک مخرج‌ها ضرب می‌کنیم.

ب عبارت به‌دست آمده را حل می‌کنیم. جواب‌ها باید مخرج هیچ‌کسری را صفر نکنند و با عالم واقعیت مطابقت داشته باشد.

۲ حل معادلات گنگ

الف دو طرف معادله را به توان فرجهٔ مشترک رادیکال‌ها می‌رسانیم.

ب با حل عبارت به‌دست آمده، جواب‌ها را در معادلهٔ اصلی امتحان می‌کنیم، زیرا ممکن است که ریشهٔ اضافی تولید شود.